



FS

Slovníky L- a Z-transformace s řešenými příklady

Miluše Vítečková

Lektor: Doc. Ing. Milan Heger, CSc.

Copyright ©: Prof. Ing. Miluše Vitečková, CSc.

SLOVNÍKY L- A Z-TRANSFORMACE S ŘEŠENÝMI PŘÍKLADY

ISBN 978-80-248-0851-2

OBSAH

Obsah.....	1
Seznam použitého označení	2
1 Úvod.....	4
2 L-transformace	5
2.1 Základní vlastnosti.....	5
2.2 Určování originálů z obrazů	13
2.3 Další řešené příklady	20
3 Z-transformace	24
3.1 Základní vlastnosti.....	24
3.2 Určování originálů z obrazů	35
3.3 Další řešené příklady	40
4 Závěr	45
5 Literatura	46
Tabulky L- a Z-transformace	49

SEZNAM POUŽITÉHO OZNAČENÍ

a_i	koeficienty mnohočlenu ve jmenovateli obrazu, konstanty
a	konstanta
b_i	koeficienty mnohočlenu v čitateli obrazu
b	konstanta
c	konstanta
d	dopravní zpoždění u diskrétních systémů (členů), operátor zpoždění, konstanta
e	základ přirozených logaritmů
f	konstanta, funkce
$j = \sqrt{-1}$	imaginární jednotka
k	relativní diskrétní čas [-]
kT	diskrétní čas [čas]
L	operátor přímé L-transformace (Laplaceovy transformace)
L^{-1}	operátor zpětné (inverzní) L-transformace (Laplaceovy transformace)
m	stupeň mnohočlenu v čitateli obrazu
M	mnohočlen v čitateli obrazu (kořeny = nuly)
n	stupeň mnohočlenu ve jmenovateli obrazu, stupeň derivace (diference)
N	mnohočlen ve jmenovateli obrazu (kořeny = póly)
$s = \alpha + j\omega$	komplexní proměnná, nezávisle proměnná u obrazu v L-transformaci (Laplaceově transformaci) [čas ⁻¹]
s_i	kořeny mnohočlenu s komplexní proměnnou s [čas ⁻¹]
t	(spojitý) čas [čas]
T	vzorkovací perioda [čas]
x	reálná funkce, originál
x_p	originál periodické funkce
X	komplexní funkce, obraz
X_p	obraz periodické funkce
$z = e^{Ts}$	nezávisle proměnná u obrazu v Z-transformaci [-]
z_i	kořeny mnohočlenu s komplexní proměnnou z [-]

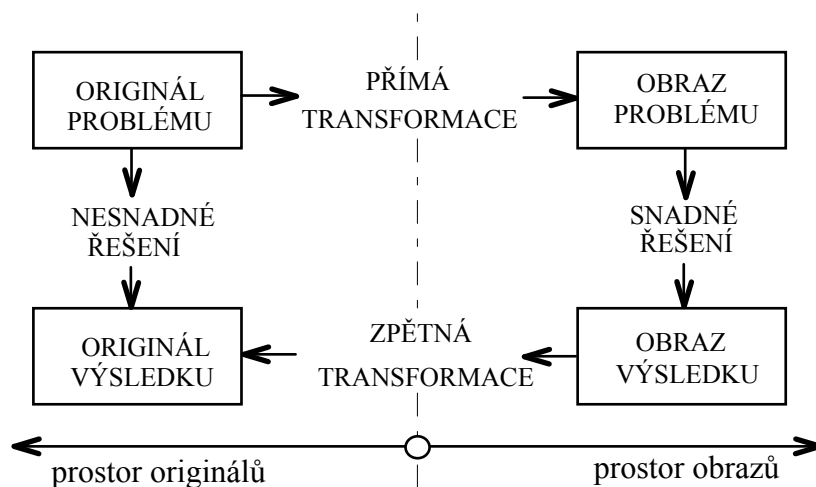
Z	operátor přímé Z-transformace
Z^{-1}	operátor zpětné (inverzní) Z-transformace
$\alpha = \operatorname{Re} s$	reálná část komplexní proměnné s [čas ⁻¹]
$\alpha_i = \frac{1}{T_i}$	konstanta, $i = 1, 2$ (reálné $s_i = -\alpha_i$) [čas ⁻¹]
$\delta(t)$	(spojitý) Diracův jednotkový impuls
$\delta(kT)$	diskrétní Diracův jednotkový impuls
Δ	přírůstek, operátor dopředné difference
∇	operátor nabra, operátor zpětné difference
$\eta(t)$	(spojitý) Heavisideův jednotkový skok
$\eta(kT)$	diskrétní Heavisideův jednotkový skok
$\omega = 2\pi f$	úhlový kmitočet (úhlová frekvence) [čas ⁻¹]
$\omega = \operatorname{Im} s$	imaginární část komplexní proměnné s [čas ⁻¹]
ρ	modul komplexní proměnné z
Θ	argument komplexní proměnné z

Pro označení operátoru L – transformace, resp. Z – Transformace, se často používá symbolu $\mathcal{L}$ resp. $\mathcal{Z}$

1 ÚVOD

L-transformace (Laplaceova transformace) a Z-transformace představují velmi účinný nástroj při popisu, analýze a syntéze spojitých a diskrétních lineárních systémů řízení.

Účelem obou transformací je převést složitý problém z prostoru originálů do prostoru obrazů, kde se tento transformovaný problém vyřeší velmi snadno a pak se převede zpět do prostoru originálů v souladu s obr. 1.1.



Obr. 1. 1. Obecné schéma řešení problémů pomocí transformace

Prostor originálů v našem případě bude časová oblast a prostor obrazů bude oblast komplexní proměnné. Za složité problémy v časové oblasti budeme považovat matematické operace, jako jsou např. derivování, resp. diferencování a integrování, resp. sumování. Těmto operacím v oblasti komplexní proměnné odpovídají jednoduché algebraické operace násobení a dělení komplexními proměnnými. Stejně tak řešení lineárních diferenciálních, resp. diferenčních rovnic v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné řešení algebraických rovnic.

Cílem učebního textu je poskytnout posluchačům technických fakult přehledný souhrn základních pojmů, vlastností a korespondencí z obou transformací. Teoretické základy a další podrobnosti lze najít v literatuře uvedené v kapitole 5.

2 L-TRANSFORMACE

2.1 Základní vlastnosti

L-transformace (Laplaceova transformace) je definována vztahy

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (2.2)$$

kde $s = \alpha + j\omega$ je komplexní proměnná ($\alpha = \operatorname{Re} s$, $\omega = \operatorname{Im} s$),

t – reálná proměnná (v našem případě **čas**),

$x(t)$ – **originál** (L-originál) – reálná funkce definovaná v oblasti pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$,

$X(s)$ – **obraz** (L-obraz) – komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné,

$j = \sqrt{-1}$ – imaginární jednotka,

L – **operátor přímé L-transformace**,

L^{-1} – **operátor zpětné** (inverzní) **L-transformace**,

c – reálná konstanta zvolená tak, aby v polorovině $\operatorname{Re} s > c$ funkce $X(s)$ neměla žádné singulární body.

Ze vztahu (2.1) vyplývá, že L-transformace zobrazuje funkci reálné proměnné $x(t)$ na komplexní funkci komplexní proměnné $X(s)$. Hodnota originálu $x(t)$ pro $t \geq 0$ představuje ve fyzikálních interpretacích zpravidla velikost určité fyzikální veličiny v časovém okamžiku t . Z tohoto důvodu v těchto případech fyzikální rozměr komplexní proměnné s je čas^{-1} . Imaginární část komplexní proměnné, tj. $\omega = \operatorname{Im} s$ má fyzikální interpretaci úhlového kmitočtu s rozměrem čas^{-1} . Protože čas t se mění spojitě, hovoříme o **spojité transformaci** a je zřejmé, že L-transformace bude vhodná především pro spojité systémy, jejichž vlastnosti se dají vyjádřit pomocí lineárních diferenciálních, integrálních a integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Aby časová funkce $x(t)$ byla originálem (předmětem), musí být:

a) nulová pro záporný čas, tj.:

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0; \end{cases} \quad (2.3)$$

b) exponenciálního řádu, tj. musí vyhovovat nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} |x(t)| &\leq M e^{\alpha_0 t}, \\ M > 0, \alpha_0 &\in (-\infty, \infty), t \in (0, \infty); \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

c) po částech spojitá.

Poslední dvě podmínky většina časových funkcí používaných v technice splňuje. Druhé podmínce nevyhovuje např. funkce $x(t) = e^{t^2}$.

První podmínku lze splnit vždy vynásobením dané časové funkce **Heavisideovým jednotkovým skokem**, definovaným vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Protože v podstatě každá spojitá funkce $x(t)$ před použitím L-transformace musí být vynásobena Heavisideovým jednotkovým skokem, proto zápis $x(t)\eta(t)$ se většinou zjednodušuje a symbol $\eta(t)$ se vynechává.

Originál značíme malým písmenem a jeho obraz stejným velkým písmenem. Vztah mezi originálem a jeho obrazem se nazývá **korespondence** a zapisuje se ve tvaru

$$x(t) \triangleq X(s) \quad (2.6)$$

Korespondence mezi originálem a obrazem v L-transformaci je jednoznačná, považujeme-li za ekvivalentní takové časové funkce, jejichž funkční hodnoty se liší o konečnou hodnotu pouze v konečném počtu izolovaných bodů.

Při L-transformaci počáteční hodnotu $x(0)$ v případě, že funkce $x(t)$ není v bodě $t = 0$ spojitá, je třeba chápat jako pravostrannou limitu

$$x(0) = x(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} x(t). \quad (2.7)$$

Totéž se týká i derivací funkce $x(t)$, a proto je třeba hodnoty $x(0)$, $\frac{dx(0)}{dt}$, ... považovat za limity zprava.

Příklad 2.1

Pomocí definičního vzorce přímé L-transformace (2.1) určíme obrazy časových funkcí (originálů):

a) $\eta(t - T_d)$, b) t , c) e^{-at} , d) $\sin \omega t$, e) $\delta(t)$ (a, ω, T_d jsou konstanty).

Řešení:

$$\text{a) } L\{\eta(t - T_d)\} = \int_0^{\infty} \eta(t - T_d) e^{-st} dt = \int_{T_d}^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{T_d}^{\infty} = \frac{1}{s} e^{-T_d s}.$$

$$\boxed{\eta(t - T_d) \triangleq \frac{1}{s} e^{-T_d s}} \quad (2.8)$$

Vidíme, že zpoždění originálu o dobu T_d odpovídá násobení obrazu exponenciální funkcí $e^{-T_d s}$.

$$\text{b) } L\{t\} = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt = \left[-\frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

$$\boxed{t \triangleq \frac{1}{s^2}} \quad (2.9)$$

Při integrování byla použita metoda integrace per partes.

$$\int_a^b u \dot{v} dt = [uv]_a^b - \int_a^b \dot{u} v dt, \quad (2.10)$$

kde $u = t$, $\dot{v} = e^{-st}$.

$$\text{c) } L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}.$$

$$\boxed{e^{-at} \triangleq \frac{1}{s+a}} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } L\{\sin \omega t\} &= \int_0^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \left[-\frac{1}{s-j\omega} e^{-(s-j\omega)t} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{s+j\omega} e^{-(s+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \right\} = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin \omega t \triangleq \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}} \quad (2.12)$$

Byl použit Eulerův vztah

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}). \quad (2.13)$$

e) Symbol $\delta(t)$ označuje tzv. **Diracův jednotkový impuls**, který může být definován např. vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt &= x(0) \\ \delta(t) &= 0 \text{ pro } t \neq 0 \end{aligned}} \quad (2.14)$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^0 = 1.$$

$$\boxed{\delta(t) \triangleq 1} \quad (2.15)$$

Příklad 2.2

Pomocí definičního vzorce přímé L-transformace určíme obrazy matematických operací: a) $a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)$, kde a_1, a_2 jsou libovolné konstanty, mohou být i komplexní, b) $\frac{dx(t)}{dt}$, c) $\int_0^t x(\tau)d\tau$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } L\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} &= \int_0^{\infty} [a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)]e^{-st}dt = \\ &= a_1 \int_0^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt \pm a_2 \int_0^{\infty} x_2(t)e^{-st}dt = a_1X_1(s) \pm a_2X_2(s). \end{aligned}$$

$$\boxed{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t) \triangleq a_1X_1(s) \pm a_2X_2(s)} \quad (2.16)$$

Odvozená korespondence (2.16) vyjadřuje **linearitu** L-transformace.

$$\begin{aligned} \text{b) } L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}dt = \left[x(t)e^{-st}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} sx(t)e^{-st}dt = \\ &= sX(s) - x(0). \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \triangleq sX(s) - x(0)} \quad (2.17)$$

Při integrování byla použita metoda integrace per partes (2.10), kde $u = e^{-st}$, $\dot{v} = \frac{dx(t)}{dt}$.

Podobně by bylo možné určit i obraz derivace n -tého řádu

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \triangleq s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2} \frac{dx(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}}} \quad (2.18)$$

Budou-li počáteční podmínky nulové, pak platí velmi jednoduchá, ale důležitá korespondence

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \triangleq s^n X(s)} \quad (2.19)$$

Vidíme, že derivaci n -tého řádu originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné násobení obrazu n -tou mocninou komplexní proměnné s .

$$\begin{aligned} \text{c) } L\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} &= \int_0^\infty \left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt = \\ &= \left[\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty x(t) \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt = \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} X(s). \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^t x(\tau) d\tau \triangleq \frac{1}{s} X(s)} \quad (2.20)$$

Byla použita metoda integrace per partes (2.10), kde $u = \int_0^t x(\tau) d\tau$, $\dot{v} = e^{-st}$.

Vidíme, že integraci originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné dělení obrazu komplexní proměnnou s .

V příkladech 2.1 a 2.2 byly odvozeny pomocí definičního vzorce přímé L-transformace (2.1) obrazy některých jednoduchých časových funkcí a matematických operací. Používání definičního vzorce zpětné L-transformace (2.2) je většinou velmi zdoluhavé a pracné, vyžaduje dobrou znalost teorie funkcí komplexní proměnné. Při praktickém používání L-transformace se s definičními vzorci (2.1) a (2.2) většinou nepracuje.

S výhodou se využívá **slovník L-transformace**, ve kterém jsou uvedeny základní korespondence, viz tab. 2 a 3.

Příklad 2.3

Na základě korespondence [viz (2.11)]

$$e^{-at} \triangleq \frac{1}{s+a} \quad (2.21)$$

a vlastností L-transformace z tab. 1 odvodíme některé další korespondence.

Řešení:

a) Pro $a = 0$ (vlastnost 14 v tab. 1) z korespondence (2.21) dostaneme

$$e^0 = 1 \triangleq \frac{1}{s}.$$

$$\boxed{\eta(t) \triangleq \frac{1}{s}} \quad (2.22)$$

b) Na základě linearit (vlastnost 3 v tab. 1) a korespondencí (2.21) a (2.22) můžeme psát

$$\eta(t) - e^{-at} \triangleq \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}.$$

$$\boxed{1 - e^{-at} \triangleq \frac{a}{s(s+a)}} \quad (2.23)$$

c) Derivací korespondence (2.21) podle parametru a (vlastnost 15 v tab. 1) dostaneme

$$\frac{d}{da}(e^{-at}) = -t e^{-at} \triangleq \frac{d}{da}\left(\frac{1}{s+a}\right) = -\frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\boxed{t e^{-at} \triangleq \frac{1}{(s+a)^2}} \quad (2.24)$$

d) Z korespondence (2.24) pro $a = 0$ (vlastnost 14 v tab. 1) obdržíme [viz (2.9)]

$$\boxed{t \triangleq \frac{1}{s^2}} \quad (2.25)$$

e) Na základě integrace v časové oblasti (vlastnost 11 v tab. 1) můžeme z korespondence (2.25) získat novou korespondenci

$$\int_0^t \tau \, d\tau \triangleq \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s^2} \right).$$

$$\boxed{\frac{t^2}{2} \triangleq \frac{1}{s^3}} \quad (2.26)$$

f) Z korespondence (2.26) pomocí vlastnosti 5 v tab. 1 obdržíme

$$\boxed{\frac{t^2}{2} e^{-at} \triangleq \frac{1}{(s+a)^3}} \quad (2.27)$$

g) Z korespondence (2.21) pro $a = \pm j\omega$ dostaneme

$$e^{\pm j\omega t} \triangleq \frac{1}{s \mp j\omega}.$$

Z Eulerových vztahů [viz také (2.13)]

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}),$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

získáme další dvě důležité korespondence [srovnej s (2.12)]:

$$\sin \omega t \triangleq \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

$$\boxed{\sin \omega t \triangleq \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}} \quad (2.28)$$

$$\cos \omega t \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

$$\boxed{\cos \omega t \triangleq \frac{s}{s^2 + \omega^2}} \quad (2.29)$$

h) Z obou posledních korespondencí (2.28) a (2.29) na základě vlastnosti 5 v tab. 1 dostaneme přímo další dvě důležité korespondence

$$\boxed{e^{-at} \sin \omega t \triangleq \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}} \quad (2.30)$$

$$\boxed{e^{-at} \cos \omega t \triangleq \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}} \quad (2.31)$$

Příklad 2.4

Určíme obraz periodické funkce

$$x_p(t) = x(t) + x(t-a) + x(t-2a) + \dots, \quad (2.32)$$

kde a je perioda a časová funkce $x(t)$ je definována vztahem

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & t \in \langle 0, a \rangle, \\ 0 & t \geq a. \end{cases} \quad (2.33)$$

Řešení:

Obraz $X_p(s)$ periodické funkce (2.32) má tvar (vlastnosti 3, 7 v tab. 1)

$$\begin{aligned} X_p(s) &= X(s) + X(s)e^{-as} + X(s)e^{-2as} + \dots = \\ &= X(s)(1 + e^{-as} + e^{-2as} + \dots) = X(s) \frac{1}{1 - e^{-as}}, \end{aligned}$$

kde $X(s) = L\{x(t)\}$.

$$\boxed{x(t) + x(t-a) + x(t-2a) + \dots \triangleq X(s) \frac{1}{1 - e^{-as}}} \quad (2.34)$$

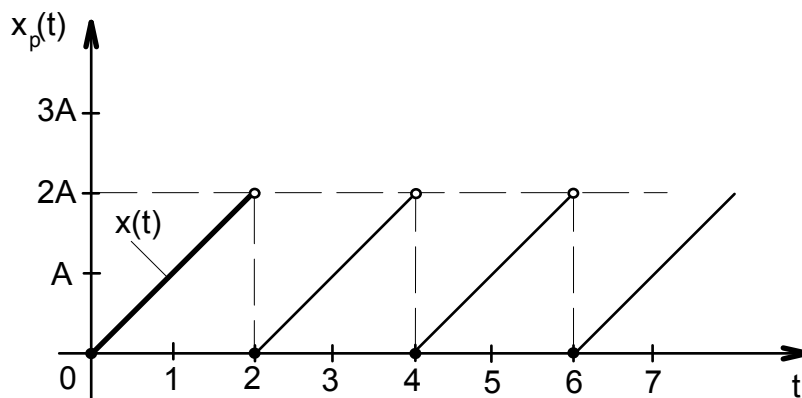
Byl použit vztah pro součet nekonečné geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1, \quad (2.35)$$

kde $q = e^{-at}$.

Příklad 2.5

Na základě výsledku z příkladu 2.4 určíme obraz $X_p(s)$ periodické funkce $x_p(t)$ na obr. 2.1.



Obr. 2.1. Periodická funkce z příkladu 2.5

Řešení:

V souladu s obr. 2.1 můžeme psát

$$x(t) = At[1 - \eta(t-2)] = A[t - (t-2)\eta(t-2) - 2\eta(t-2)].$$

Na základě vlastností 3, 7 v tab. 1 a korespondencí 5, 6 v tab. 2 můžeme snadno určit obraz funkce $x(t)$

$$\begin{aligned} X(s) &= L\{x(t)\} = A\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{2}{s}e^{-2s}\right] = \\ &= \frac{A}{s^2}[1 - (1+2s)e^{-2s}]. \end{aligned}$$

Z dříve odvozeného vztahu (2.34) obdržíme hledaný obraz periodické funkce

$$X_p(s) = \frac{A[1 - (1+2s)e^{-2s}]}{s^2(1 - e^{-2s})}.$$

Snadno můžeme srovnáním s tab. 1 a 2 zjistit, že všechny odvozené korespondence jsou správné. Podobným způsobem lze získat i další korespondence. Vidíme, že při praktickém používání L-transformace většinou vystačíme se znalostí jejích základních vlastností a několika důležitých korespondencí.

2.2 Určování originálů z obrazů

Slovníku L-transformace můžeme použít přímo, pokud v něm najdeme originály nebo obrazy v odpovídajícím tvaru. Většinou vystačíme s jednoduchými úpravami. Potíže vznikají při zpětné transformaci, protože obrazy jsou složité a je nutné je rozložit na jednodušší výrazy, které již ve slovníku L-transformace najdeme. Nejčastěji používáme rozklad na parciální zlomky a metodu reziduí.

V praktických případech má obraz nejčastěji tvar **ryzí racionální lomené funkce**

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + \dots + a_1s + a_0}, \quad n > m. \quad (2.36)$$

Pokud stupeň jmenovatele n není větší než stupeň čitatele m , je třeba provést úpravu obrazu vydělením čitatele jmenovatelem.

Obraz ve tvaru racionální lomené funkce (2.36) můžeme zjednodušit rozložením na **parciální** (částečné) **zlomky**, pro které již ze slovníku L-transformace snadno najdeme odpovídající korespondence.

Pro mnohočlen ve jmenovateli platí

$$N(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \quad (2.37)$$

kde $s_1, s_2, \dots, s_n$ jsou **kořeny** mnohočlenu $N(s)$ a současně **póly** (singulární body) obrazu $X(s)$.

Póly s_i mohou být jednoduché nebo násobné. Uvažujme nejdříve jednoduché póly, které mohou být reálné nebo komplexní. Pokud jsou komplexní, pak musí vystupovat vždy v komplexně sdružených dvojicích, např.

$$s_i = \alpha + j\beta, \quad s_{i+1} = \alpha - j\beta. \quad (2.38)$$

Pro komplexně sdruženou dvojici (2.38) platí

$$(s - s_i)(s - s_{i+1}) = s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = s^2 + cs + d. \quad (2.39)$$

Dvojice ryze imaginárních pólů

$$s_i = j\beta, \quad s_{i+1} = -j\beta \quad (2.40)$$

je speciálním případem (2.38), resp. (2.39) pro $\alpha = c = 0$.

Nyní uvažujme násobné póly. Pro r -násobný reálný pól s_i lze psát

$$(s - s_i)^r. \quad (2.41)$$

Podobně můžeme i pro r -násobnou komplexně sdruženou dvojici pólů s_i a s_{i+1} v souladu s (2.39) psát

$$(s - s_i)^r (s - s_{i+1})^r = (s^2 + cs + d)^r. \quad (2.42)$$

Obraz $X(s)$ ryzí racionální lomené funkce (2.36) pro uvedené typy pólů můžeme tedy zapsat ve tvaru (za předpokladu, že $a_n = 1$)

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{(s - a)(s - b)^r (s^2 + cs + d)(s^2 + es + f)^q}, \quad (2.43)$$

kde $(s - a)$ odpovídá jednoduchému reálnému pólu a ,
 $(s - b)^r$ odpovídá r -násobnému reálnému pólu b ,
 $(s^2 + cs + d)$ odpovídá jednoduché komplexně sdružené dvojici pólů

$$\frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4d}), \quad (2.44)$$

$(s^2 + es + f)^q$ odpovídá q -násobné komplexně sdružené dvojici pólů

$$\frac{1}{2}(-e \pm \sqrt{e^2 - 4f}). \quad (2.45)$$

Obraz $X(s)$ vyjádřený vztahem (2.43) může být zapsán v rozloženém tvaru

$$X(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B_1}{s-b} + \frac{B_2}{(s-b)^2} + \dots + \frac{B_r}{(s-b)^r} +$$

$$+ \frac{Cs+D}{s^2+cs+d} + \frac{E_1s+F_1}{s^2+es+f} + \frac{E_2s+F_2}{(s^2+es+f)^2} + \dots + \frac{E_qs+F_q}{(s^2+es+f)^q}, \quad (2.46)$$

kde konstanty $A, B_1, B_2, \dots, B_r, C, D, E_1, E_2, \dots, E_q, F_1, F_2, \dots, F_q$ se určí např. dosazovací metodou, metodou neurčitých koeficientů nebo se originál určí pomocí reziduí. Někdy je vhodné tyto metody kombinovat.

Uvedený postup se nazývá **rozklad na parciální zlomky**.

Příklad 2.6

Určíme originál $x(t)$ k obrazu

$$X(s) = \frac{s^3 + s^2 + 9s - 2}{s^3 + s^2 - 2s}. \quad (2.47)$$

Řešení:

Obraz (2.47) není ryzí racionální lomenou funkcí, a proto ho musíme upravit vydělením čitatele jmenovatelem:

$$(s^3 + s^2 + 9s - 2) : (s^3 + s^2 - 2s) = 1 + \frac{11s - 2}{s^3 + s^2 - 2s}.$$

$$\frac{-s^3 - s^2 + 2s}{11s - 2}$$

Obraz (2.47) nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) = 1 + \frac{11s - 2}{s^3 + s^2 - 2s}, \quad (2.48)$$

kde

$$X_2(s) = \frac{11s - 2}{s^3 + s^2 - 2s} = \frac{11s - 2}{s(s-1)(s+2)} \quad (2.49)$$

je již ryzí racionální lomenou funkcí, a proto v souladu s (2.46) platí

$$\frac{11s - 2}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s+2}. \quad (2.50)$$

a) Dosazovací metoda

Rovnici (2.50) vynásobíme jmenovatelem levé strany a dostaneme

$$11s - 2 = A_1(s-1)(s+2) + A_2s(s+2) + A_3s(s-1). \quad (2.51)$$

Tato rovnice musí platit pro libovolnou hodnotu komplexní proměnné s . Zvolíme tedy 3 různé hodnoty komplexní proměnné s a dostaneme 3 rovnice pro 3 neznámé konstanty A_1 , A_2 a A_3 . Je zřejmé, že je vhodné volit póly obrazu $X_2(s)$, tj.:

$$\left. \begin{aligned} s = s_1 = 0 &\Rightarrow -2 = A_1(-1)(2) \Rightarrow A_1 = 1, \\ s = s_2 = 1 &\Rightarrow 9 = A_2(1)(3) \Rightarrow A_2 = 3, \\ s = s_3 = -2 &\Rightarrow -24 = A_3(-2)(-3) \Rightarrow A_3 = -4. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Rozklad obrazu (2.47) má v souladu s (2.48) a (2.50) tvar

$$X(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{3}{s-1} - \frac{4}{s+2}. \quad (2.53)$$

Z tab. 2 již snadno určíme originál

$$\begin{aligned} x(t) &= \delta(t) + \eta(t) + 3e^t - 4e^{-2t} = \\ &= \delta(t) + 1 + 3e^t - 4e^{-2t}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nesmíme zapomínat, že se jedná o originál, a tedy platí pouze pro $t \geq 0$.

b) Metoda neurčitých koeficientů

Vztah (2.51) upravíme podle mocnin komplexní proměnné s , tj.

$$11s - 2 = (A_1 + A_2 + A_3)s^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)s - 2A_1.$$

Protože koeficienty u stejných mocnin komplexní proměnné s musí být stejné, lze proto psát:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 + A_3, \\ 11 &= A_1 + 2A_2 - A_3, \\ -2 &= -2A_1. \end{aligned}$$

Z této soustavy 3 lineárních algebraických rovnic snadno získáme 3 neznámé konstanty: $A_1 = 1$, $A_2 = 3$ a $A_3 = -4$. Další postup je shodný s případem a.

c) Metoda reziduí

Použijeme vztah pro L-transformaci v řádku 22 v tab. 1 pro ryzí racionální lomenou funkci (2.49)

$$x_2(t) = \sum_i \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}} [(s - s_i)^{r_i} X_2(s) e^{st}].$$

kde $i = 1, 2, 3$; $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ a $s_3 = -2$, všechny póly jsou jednonásobné, tj. $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ($n = r_1 + r_2 + r_3 = 3$), potom

$$x_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[(s-0) \frac{11s-2}{s(s-1)(s+2)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow 1} \left[(s-1) \frac{11s-2}{s(s-1)(s+2)} e^{st} \right] + \\ + \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{11s-2}{s(s-1)(s+2)} e^{st} \right] = 1 + 3e^{-t} - 4e^{-2t}.$$

Na základě (2.48) dostaneme výsledný originál.

$$x(t) = L^{-1}\{X_1(s)\} + L^{-1}\{X_2(s)\} = \delta(t) + 1 + 3e^{-t} - 4e^{-2t}.$$

Příklad 2. 7

Najdeme originál $x(t)$ k obrazu

$$X(s) = \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^2(s+1)^2}. \quad (2.55)$$

Řešení:

Obraz (2.55) je ryze racionální lomenou funkcí, a proto v souladu s (2.46) můžeme psát

$$\frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^2(s+1)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{(s+1)^2} \quad (2.56)$$

a) Dosazovací metoda

Rovnici (2.56) vynásobíme jmenovatelem levé strany a dostaneme

$$2s^3 + 7s^2 + 4s + 1 = A_1s(s+1)^2 + A_2(s+1)^2 + B_1s^2(s+1) + B_2s^2. \quad (2.57)$$

Rovnice (2.57) platí pro libovolné s , a proto musí platit i pro póly obrazu $X(s)$, tj.:

$$s = s_1 = 0 \Rightarrow 1 = A_2,$$

$$s = s_2 = -1 \Rightarrow 2 = B_2.$$

Jako další hodnoty komplexní proměnné s zvolíme

$$s = 1 \Rightarrow 14 = 4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2$$

a po uvažování již určených hodnot konstant A_2 , B_2 a po úpravě dostaneme

$$2A_1 + B_1 = 4.$$

Dále zvolíme

$$s = -2 \Rightarrow 5 = -2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2$$

a podobně jako v předchozím případě budeme uvažovat již určené konstanty A_2 a B_2 , po úpravě obdržíme

$$A_1 + 2B_1 = 2.$$

Řešením jednoduché soustavy rovnic

$$2A_1 + B_1 = 4,$$

$$A_1 + 2B_1 = 2$$

dostaneme $A_1 = 2$ a $B_1 = 0$.

Rozklad obrazu (2.55) na parciální zlomky bude mít tedy tvar

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Pomocí slovníku L-transformace tab. 2 již snadno získáme hledaný originál

$$x(t) = 2\eta(t) + t + 2te^{-t} = 2 + t + 2te^{-t}, \quad t \geq 0. \quad (2.58)$$

b) Metoda neurčitých koeficientů

Vztah (2.57) upravíme podle mocnin komplexní proměnné s a dostaneme

$$2s^3 + 7s^2 + 4s + 1 = (A_1 + B_1)s^3 + (2A_1 + A_2 + B_1 + B_2)s^2 + (A_1 + 2A_2)s + A_2.$$

Koeficienty u stejných mocnin komplexní proměnné s musí být stejné, a proto platí

$$2 = A_1 + B_1,$$

$$7 = 2A_1 + A_2 + B_1 + B_2,$$

$$4 = A_1 + 2A_2,$$

$$1 = A_2.$$

Z této soustavy rovnic snadno již určíme hledané hodnoty koeficientů: $A_2 = 1$, $A_1 = 2$, $B_1 = 0$ a $B_2 = 2$ (pořadí koeficientů je uvedeno tak, jak byly počítány). Další postup je shodný s případem a.

c) Metoda reziduí

Z tab. 1 použijeme vztah z řádku 22

$$x(t) = \sum_i \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}} [(s - s_i)^{r_i} X(s) e^{st}],$$

kde $i = 1, 2$; $s_1 = 0$, $r_1 = 2$; $s_2 = -1$, $r_2 = 2$ ($n = r_1 + r_2 = 4$).

Po dosazení (2.55) postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{(s+1)^2} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[\frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^2} e^{st} \right] = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{6s^2 + 14s + 4}{(s+1)^2} e^{st} - 2 \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{(s+1)^3} e^{st} + \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{(s+1)^2} t e^{st} \right] + \\
&+ \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{6s^2 + 14s + 4}{s^2} e^{st} - 2 \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^3} e^{st} + \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^2} t e^{st} \right] = \\
&= (4 - 2 + t) + (-4e^{-t} + 4e^{-t} + 2te^{-t}) = \\
&= 2 + t + 2te^{-t}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že i v tomto případě jsme obdrželi shodný výsledek s (2.58).

Příklad 2.8

Určíme originál $x(t)$ obrazu

$$X(s) = \frac{3s^2 + 22s + 13}{s(s^2 + 6s + 13)}. \quad (2.59)$$

Řešení:

Snadno zjistíme, že dvojčlen ve jmenovateli obrazu (2.59) má komplexně sdružené kořeny, a proto jeho rozklad na částečné zlomky bude mít tvar

$$\frac{3s^2 + 22s + 13}{s(s^2 + 6s + 13)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 6s + 13}. \quad (2.60)$$

a) Dosazovací metoda

Rovnici (2.60) vynásobíme jmenovatelem levé strany a obdržíme

$$3s^2 + 22s + 13 = A(s^2 + 6s + 13) + (Bs + C)s. \quad (2.61)$$

Protože tato rovnice platí pro libovolné s , zvolíme 3 různé hodnoty a dostaneme:

$$\begin{aligned}
s = s_1 = 0 &\Rightarrow 13 = 13A \Rightarrow A = 1, \\
s = 1 &\Rightarrow 38 = 20A + B + C \Rightarrow B + C = 18, \\
s = -1 &\Rightarrow -6 = 8A + B - C \Rightarrow B - C = -14.
\end{aligned}$$

Obdrželi jsme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
B + C &= 18, \\
B - C &= -14,
\end{aligned}$$

jejíž řešení je $B = 2$ a $C = 16$.

V souladu s (2.59) a (2.60) můžeme tedy psát

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{2s + 16}{s^2 + 6s + 13}.$$

Abychom mohli použít slovník L-transformace, musíme poslední výraz upravit na tvary v řádcích 34 a 35 v tab. 2, tj.

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{2(s+3) + 2 \cdot 5}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{1}{s} + \frac{2(s+3)}{(s+3)^2 + 2^2} + \frac{2 \cdot 5}{(s+3)^2 + 2^2}.$$

Nyní již snadno určíme originál

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta(t) + 2e^{-3t} \cos 2t + 5e^{-3t} \sin 2t = \\ &= 1 + 2e^{-3t} \cos 2t + 5e^{-3t} \sin 2t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

b) Metoda neurčitých koeficientů

Vztah (2.61) upravíme podle mocnin komplexní proměnné s a dostaneme

$$3s^2 + 22s + 13 = (A + B)s^2 + (6A + C)s + 13A.$$

Koeficienty u stejných mocnin musí být stejné, a proto lze psát

$$\begin{aligned} 3 &= A + B, \\ 22 &= 6A + C, \\ 13 &= 13A. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic snadno obdržíme $A = 1$, $B = 2$ a $C = 16$.

Další postup je stejný jako v případě a.

Použití metody reziduí při komplexních kořenech je značně pracnější, a proto ji nebudeme uvádět.

2.3 Další řešené příklady

V rámci následujících příkladů jsou odvozeny další vztahy a důležité korespondence.

Příklad 2.9

Odvodíme vztahy pro počáteční a koncovou hodnotu originálu na základě jeho obrazu (vlastnost 20 a 21 v tab. 1).

Řešení:

a) Počáteční hodnota

Originál $x(t)$ rozvineme v MacLaurinovou řadu

$$x(t) = x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{1!}t + \frac{\ddot{x}(0)}{2!}t^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{3!}t^3 + \dots$$

a použijeme L-transformaci

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2} + \frac{\ddot{x}(0)}{s^3} + \frac{\dddot{x}(0)}{s^4} + \dots$$

Po vynásobení levé i pravé strany komplexní proměnnou s je zřejmé, že platí (pokud tato limita existuje)

$$\boxed{x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)} \quad (2.63)$$

b) Koncová hodnota

Pro obraz derivace $\dot{x}(t)$ platí [viz (2.17)]:

$$L\{\dot{x}(t)\} = \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)],$$

$$\int_0^{\infty} \dot{x}(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0),$$

$$x(\infty) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0).$$

Dostaneme tedy (pokud tato limita existuje)

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)} \quad (2.64)$$

Příklad 2.10

Odvodíme obrazy originálu násobeného exponenciální funkcí a zpožděného originálu (vlastnost 5 a 7 v tab. 1).

Řešení:

a) Násobení exponenciální funkcí

$$L\{e^{\mp at} x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(s \pm a)t} dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-ut} dt = X(u) = X(s \pm a).$$

$$\boxed{e^{\mp at} x(t) \triangleq X(s \pm a)} \quad (2.65)$$

Byla použita substituce $u = s \pm a$.

b) Zpoždění originálu $x(t-a)$, $a \geq 0$

$$x(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a, \\ x(t-a) & t \geq a, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L\{x(t-a)\} &= \int_0^{\infty} x(t-a) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(u) e^{-s(u+a)} du = \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} x(u) e^{-su} du = e^{-as} X(s). \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t-a) \triangleq e^{-as} X(s)} \quad (2.66)$$

Byla použita substituce $u = t - a$.

Příklad 2.11

Odvodíme obraz Diracova jednotkového impulsu $\delta(t)$ na základě vztahů (porovnej s příkladem 2. 1e)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t, \varepsilon),$$

$$\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} [\eta(t) - \eta(t - \varepsilon)].$$

Řešení:

$$L\{\delta(t, \varepsilon)\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} [\eta(t) - \eta(t - \varepsilon)] e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s}),$$

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L\{\delta(t, \varepsilon)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\varepsilon s} = 1.$$

$$\boxed{\delta(t) \triangleq 1} \quad (2.67)$$

Bylo použito L'Hospitalovo pravidlo o limitě výrazu $\frac{0}{0}$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2.68)$$

Příklad 2.12

Určíme obraz **konvoluce** (konvolutorního součinu, konvolutorního integrálu)

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau.$$

Řešení:

Pro konvoluci lze psát:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\} =$$

(Horní mez mohla být zastoupena ∞ , protože $x_1(t-\tau) = 0$ pro $\tau > t$.)

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau \right] e^{-st} dt = \int_0^\infty x_2(\tau)d\tau \underbrace{\int_0^\infty x_1(t-\tau)e^{-st} dt}_{X_1(s)e^{-s\tau}} =$$

$$= X_1(s) \underbrace{\int_0^\infty x_2(\tau)e^{-s\tau} d\tau}_{X_2(s)} = X_1(s)X_2(s) = X_2(s)X_1(s).$$

$$\boxed{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau = \int_0^t x_2(t-\tau)x_1(\tau)d\tau \triangleq X_1(s)X_2(s) = X_2(s)X_1(s)} \quad (2.69)$$

Současně jsme ukázali, že konvoluce je komutativní, tj. platí

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau = \int_0^t x_2(t-\tau)x_1(\tau)d\tau = x_2(t) * x_1(t). \quad (2.70)$$

3 Z-TRANSFORMACE

3.1 Základní vlastnosti

Z-transformace je definována vztahy

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (3.1)$$

$$x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z)z^{k-1} dz \quad (3.2)$$

- kde z je komplexní proměnná,
 kT – diskretní reálná proměnná (v našem případě **diskretní čas**),
 $x(kT)$ – **diskretní originál** (Z-originál) – reálná funkce definovaná v časové oblasti pro $k = 0, 1, 2, \dots$,
 $X(z)$ – **diskretní obraz** (Z-obraz) – komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné,
 Z – **operátor přímé Z-transformace**,
 Z^{-1} – **operátor zpětné** (inverzní) **Z-transformace**,
 T – **vzorkovací perioda**,
 r – poloměr kružnice, uvnitř které leží všechny singulární body funkce $X(z)$.

Upřesňující slovo **diskretní** můžeme, pokud nedojde k omylu, vynechávat.

Diskretní časovou funkci $x(kT)$ získáme ze spojitě časové funkce $x(t)$ zastoupením spojitého času t diskretním časem kT (obr. 3.1), tj.

$$t = t_k = kT; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

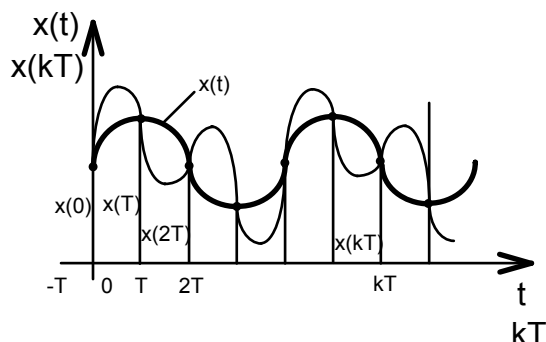
Tato diskretizace v čase se nazývá **vzorkování** na rozdíl od diskretizace v úrovni, která se nazývá **kvantování**.

Často se používá **relativní diskretní čas**

$$k = \frac{t_k}{T}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

V tomto případě se pro diskretní časovou funkci používá ekvivalentní zápis x_k , resp. $x(k)$. Je zřejmé, že relativní diskretní čas (3.4) dostaneme z diskretního času (3.3) pro $T = 1$.

Protože ze zápisu $x(k)$ není zřejmé, že jde o relativní diskrétní čas k , používá se rovněž upřesňující zápis $x[k]$.



Obr. 3.1. Vztah mezi spojitou a diskrétní časovou funkcí

Z obr. 3.1 vyplývá, že jedné diskrétní časové funkci může odpovídat nekonečně mnoho různých spojitých časových funkcí. Tuto skutečnost je třeba mít na zřeteli při interpretaci diskrétní časové funkce.

Ze vztahu (3.1) je zřejmé, že Z-transformace zobrazuje funkci reálné proměnné $x(kT)$ na funkci komplexní proměnné $X(z)$. Hodnota originálu $x(kT)$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$ představuje ve fyzikálních interpretacích zpravidla velikost určité fyzikální veličiny v diskrétním časovém okamžiku kT . Protože čas kT je diskrétní, hovoříme o **diskrétní transformaci** a je tedy evidentní, že Z-transformace bude vhodná především pro diskrétní systémy, jejichž vlastnosti se dají vyjádřit pomocí lineárních diferenčních, sumačních a sumačnědiferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Aby diskrétní časová funkce $x(kT)$ byla originálem (předmětem), musí být:

a) nulová pro záporné k , tj.

$$x(kT) = \begin{cases} x(kT) & k \geq 0, \\ 0 & k < 0; \end{cases} \quad (3.5)$$

b) exponenciálního řádu, tj. musí vyhovovat nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} |x(kT)| &\leq M e^{\alpha_0 kT}, \\ M > 0, \quad \alpha_0 &\in (-\infty, \infty); \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Podobně jako při L-transformaci první podmínku můžeme splnit vždy vynásobením dané diskrétní časové funkce **diskrétním Heavisideovým jednotkovým skokem**, definovaným vztahem

$$\eta(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Rovněž i u Z-transformace zápis $x(kT)\eta(kT)$ budeme zjednodušovat vynecháním symbolu $\eta(kT)$.

Je-li funkce $x(t)$ nespojitá pro určitou hodnotu kT , pak za $x(kT)$ je třeba uvažovat její pravostrannou limitu

$$x(kT) = x(kT_+) = \lim_{t \rightarrow kT_+} x(t). \quad (3.8)$$

Podobně jako u L-transformace budeme u Z-transformace korespondenci mezi (diskrétním) originálem a (diskrétním) obrazem zapisovat ve tvaru

$$x(kT) \triangleq X(z). \quad (3.9)$$

Dále budeme předpokládat, že všechny diskrétní časové funkce jsou originály.

Ukážeme si souvislost mezi L- a Z-transformací. Uvažujme definiční vztah (2.1), ve kterém spojitý čas t zastoupíme diskrétním časem kT a spojitý integrál diskrétní sumou, dostaneme

$$X(s) \approx T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT}. \quad (3.10)$$

Srovnáme-li tento vztah s definičním vzorcem (3.1), vidíme, že pro

$$\boxed{z = e^{sT}} \quad (3.11)$$

bude platit

$$X(s) = \lim_{T \rightarrow 0} [TX(z)|_{z=e^{sT}}]. \quad (3.12)$$

Jak již bylo dříve řečeno, fyzikální rozměr komplexní proměnné s je čas^{-1} , a proto na základě vztahu (3.11) lze usuzovat, že komplexní proměnná z je bezrozměrná.

Ze vztahu (3.11) dostaneme

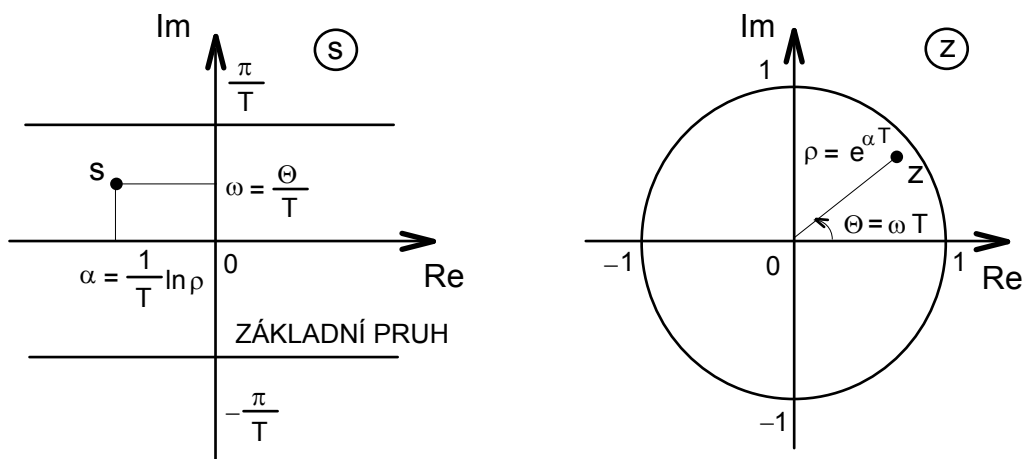
$$\boxed{s = \frac{1}{T} \ln z} \quad (3.13)$$

Vztahy (3.11) a (3.13) vyjadřují souvislost mezi komplexními rovinami ⑤ a ⑥, viz obr. 3.2. Komplexní proměnnou z [vztah (3.11)] pro $s = \alpha + j\omega$ vyjádříme v polárních souřadnicích pomocí modulu ρ a argumentu Θ , tj.

$$z = e^{(\alpha + j\omega)T} = \rho e^{j\Theta}, \quad (3.14a)$$

$$\rho = e^{\alpha T}, \quad (3.14b)$$

$$\Theta = \omega T. \quad (3.14c)$$



Obr. 3.2. Souvislost mezi komplexními rovinami (S) a (Z)

Ze vztahu (3.14b) je zřejmé, že přímka rovnoběžná s imaginární osou v komplexní rovině (S) se zobrazí na kružnici v komplexní rovině (Z). Dále vidíme, že imaginární ose v (S) odpovídá jednotková kružnice v (Z), levé poloroviny v (S) odpovídá jednotkový kruh v (Z) atd. Zobrazení $s \rightarrow z$ [vztah (3.11)] je jednoznačné, naproti tomu zobrazení $z \rightarrow s$ [vztah (3.13)] je nejednoznačné, a proto většinou uvažujeme pouze **hlavní hodnotu** argumentu Θ komplexní proměnné z , tj.

$$-\pi < \Theta \leq \pi, \quad (3.15)$$

čemu odpovídá tzv. **základní pruh** v komplexní rovině (S) (obr. 3.2)

$$-\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T}. \quad (3.16)$$

Příklad 3.1

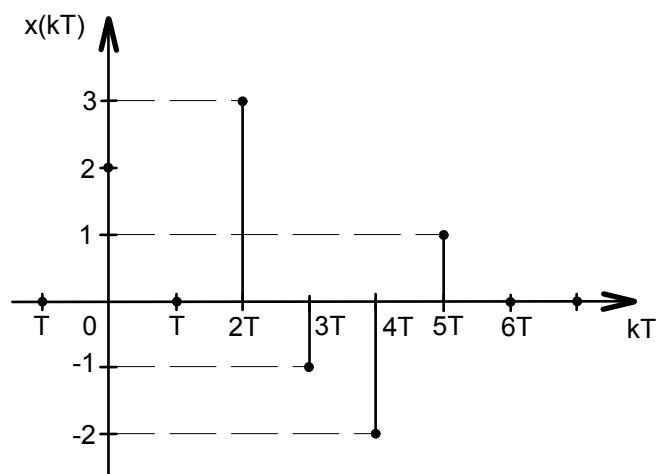
Na základě definičního vzorce (3.1) určíme obraz diskretní časové funkce na obr. 3.3.

Řešení:

Z obr. 3.3 vyplývá, že diskretní časová funkce $x(kT)$ je originál, a proto na základě definičního vzorce (3.1) můžeme psát (viz obr. 3.3)

$$\begin{aligned} X(z) &= x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots = \\ &= 2z^0 + 0z^{-1} + 3z^{-2} - 1z^{-3} - 2z^{-4} + 1z^{-5} = \\ &= 2 + 3z^{-2} - z^{-3} - 2z^{-4} + z^{-5}. \end{aligned}$$

Vidíme, že obraz diskretní časové funkce zadané na konečném intervalu můžeme určit přímo, protože je dán součtem konečného počtu pořadnic $x(kT)$ násobených odpovídajícími mocninami z^{-k} .



Obr. 3.3. Diskrétní časová funkce z příkladu 3.1

Zapíšeme-li získaný obraz $X(z)$ v kladných mocninách komplexní proměnné z , dostaneme (čitatele i jmenovatele vynásobíme z^5)

$$X(z) = \frac{2z^5 + 3z^3 - z^2 - 2z + 1}{z^5}.$$

Ze srovnání průběhu $x(kT)$ na obr. 3.3 a obrazu $X(z)$ v kladných mocninách komplexní proměnné z vyplývá, že diskrétnímu časovému průběhu $x(kT)$ trvajícimu r kroků (v našem případě $r = 5$) odpovídá obraz $X(z)$, který má r -násobný pól, tj. $z_1 = z_2 = \dots = z_r = 0$.

Příklad 3.2

Pomocí definičního vzorce přímé Z-transformace (3.1) určíme obrazy diskrétních časových funkcí (originálů):

a) $\delta(kT)$, b) $\eta(kT)$, c) $\eta[(k-d)T]$, d) kT , e) e^{-akT} , f) $\sin \omega kT$.

Řešení:

a) **Diskrétní Diracův impuls** (Kroneckerovo delta) $\delta(kT)$ je definován vztahy

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 0 & k \neq 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$Z\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1.$$

$$\boxed{\delta(kT) \triangleq 1} \quad (3.18)$$

b) V souladu se vztahem (3.7) můžeme psát

$$Z\{\eta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (3.19)$$

Vynásobíme levou i pravou stranu z^{-1}

$$z^{-1} Z\{\eta(kT)\} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

a odečteme od (3.19), dostaneme

$$Z\{\eta(kT)\} - z^{-1} Z\{\eta(kT)\} = 1,$$

$$Z\{\eta(kT)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

$$\boxed{\eta(kT) \triangleq \frac{z}{z - 1}} \quad (3.20)$$

Mohli jsme na (3.19) rovněž použít vztah (2.35) pro součet nekonečné geometrické řady, kde $q = z^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } Z\{\eta[(k-d)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta[(k-d)T] z^{-k} = \sum_{k=d}^{\infty} z^{-k} = z^{-d} + z^{-(d+1)} + \dots = \\ &= z^{-d} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = z^{-d} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} z^{-d}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta[(k-d)T] \triangleq \frac{z}{z - 1} z^{-d}} \quad (3.21)$$

Vidíme, že zpoždění originálu o d kroků odpovídá násobení obrazu d -tou zápornou mocninou komplexní proměnné z .

$$\text{d) } Z\{kT\} = \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \quad (3.22)$$

Vynásobíme levou i pravou stranu z^{-1}

$$z^{-1} Z\{kT\} = T(z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + \dots)$$

a odečteme od (3.22), obdržíme (viz případ b)

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1}) Z\{kT\} &= T(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = Tz^{-1} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = \\ &= Tz^{-1} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \end{aligned}$$

$$Z\{kT\} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}.$$

$$\boxed{kT \triangleq \frac{Tz}{(z - 1)^2}} \quad (3.23)$$

$$\text{e)} \quad Z\{e^{-akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots \quad (3.24)$$

Vynásobíme levou i pravou stranu $e^{-aT} z^{-1}$

$$e^{-aT} z^{-1} Z\{e^{-akT}\} = e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots$$

a odečteme od (3.24), dostaneme

$$(1 - e^{-aT} z^{-1}) Z\{e^{-akT}\} = 1,$$

$$Z\{e^{-akT}\} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

$$\boxed{e^{-akT} \triangleq \frac{z}{z - e^{-aT}}} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad Z\{\sin \omega kT\} &= Z\left\{\frac{1}{2j} (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT})\right\} = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega kT} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega kT} z^{-k} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) = \frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{2j[z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1]} = \\ &= \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin \omega kT \triangleq \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}} \quad (3.26)$$

Bylo využito Eulerových vztahů

$$\sin \omega kT = \frac{1}{2j} (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}), \quad (3.27a)$$

$$\cos \omega kT = \frac{1}{2} (e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}) \quad (3.27b)$$

a odvozené korespondence (3.25) pro $-a = \pm j\omega$.

Příklad 3.3

Pomocí definičního vzorce (3.1) určíme obrazy následujících matematických operací:

$$\text{a)} \quad a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT), \quad \text{b)} \quad \Delta x(kT), \quad \text{c)} \quad \sum_{i=0}^{k-1} x(iT), \quad \text{d)} \quad \nabla x(kT), \quad \text{e)} \quad \sum_{i=0}^k x(iT).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad Z\{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)] z^{-k} = \\
 &= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kT) z^{-k} \pm a_2 \sum_{k=0}^{\infty} x_2(kT) z^{-k} = a_1 X_1(z) \pm a_2 X_2(z). \\
 \boxed{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT) \triangleq a_1 X_1(z) \pm a_2 X_2(z)} & \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Odvozená korespondence vyjadřuje **linearitu** Z-transformace.

b) Výraz

$$\Delta x(kT) = x[(k+1)T] - x(kT) \quad (3.29)$$

se nazývá dopředná **diference 1. řádu**. Je to diskrétní analogie derivace 1. řádu.

$$\begin{aligned}
 Z\{\Delta x(kT)\} &= Z\{x[(k+1)T]\} - Z\{x(kT)\} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+1)T] z^{-k} - X(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x(iT) z^{-(i-1)} - X(z) = \\
 &= zx(0) + z \sum_{i=1}^{\infty} x(iT) z^{-i} - X(z) - zx(0) = (z-1)X(z) - zx(0). \\
 \boxed{\Delta x(kT) \triangleq (z-1)X(z) - zx(0)} & \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Byla použita substituce $i = k + 1$.

Podobně definujeme (dopřednou) **diferenci n -tého řádu**

$$\Delta^n x(kT) = \Delta^{n-1} x[(k+1)T] - \Delta^{n-1} x(kT); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.31)$$

pro kterou platí korespondence

$$\boxed{\Delta^n x(kT) \triangleq (z-1)^n X(z) - z \sum_{i=0}^{n-1} (z-1)^{n-i-1} \Delta^i x(0)} \quad (3.32)$$

Počáteční podmínky je třeba uvažovat jako pravostranné limity. Pro nulové počáteční podmínky platí velmi důležitá korespondence

$$\boxed{\Delta^n x(kT) \triangleq (z-1)^n X(z)} \quad (3.33)$$

Vidíme, že diferenci n -tého řádu originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné násobení obrazu n -tou mocninou dvojčlenu $z - 1$.

c) **Suma** (dopředná obdélníková metoda)

$$f(kT) = \sum_{i=0}^{k-1} x(iT), \quad f(0) = 0 \quad (3.34a)$$

je diskrétní analogií integrálu. Podobně lze definovat i vícenásobnou sumu.

Suma (3.34a) odpovídá dopředné diferenci.

Je zřejmé, že platí (viz případ b tohoto příkladu)

$$\Delta f(kT) = x(kT), \quad (3.34b)$$

a proto lze psát

$$Z\{\Delta f(kT)\} = (z-1)F(z) - zf(0).$$

V souladu s (3.34a) a (3.34b) dostaneme

$$X(z) = (z-1)F(z),$$

$$F(z) = \frac{1}{z-1} X(z).$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k-1} x(iT) \triangleq \frac{1}{z-1} X(z)} \quad (3.35)$$

d) **Vztahem**

$$\nabla x(kT) = x(kT) - x[(k-1)T] \quad (3.36)$$

je definována **zpětná difference 1. řádu**. Je to jiná možná diskrétní analogie derivace 1. řádu.

$$\begin{aligned} Z\{\nabla x(kT)\} &= Z\{x(kT)\} - Z\{x[(k-1)T]\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x[(k-1)T]z^{-k} = X(z) - \sum_{i=-1}^{\infty} x(iT)z^{-(i+1)} = \\ &= X(z) - z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)z^{-i} = X(z) - z^{-1} X(z) = (1 - z^{-1})X(z) = \\ &= \frac{z-1}{z} X(z). \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla x(kT) \triangleq \frac{z-1}{z} X(z)} \quad (3.37)$$

Bylo použito vlastnosti originálu $x(-T) = 0$ a substituce $i = k-1$.

Podobně definujeme **zpětnou diferenci n -tého řádu**

$$\nabla^n x(kT) = \nabla^{n-1} x(kT) - \nabla^{n-1} x[(k-1)T]; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.38)$$

pro kterou platí korespondence

$$\boxed{\nabla^n x(kT) \triangleq \left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z)} \quad (3.39)$$

Pro převody mezi zpětnou a dopřednou diferencí lze použít vztahů

$$\Delta^n x(kT) = \nabla^n x[(k+n)T], \quad (3.40)$$

$$\nabla^n x(kT) = \Delta^n x[(k-n)T]. \quad (3.41)$$

Zpětná difference na rozdíl od dopředné difference je fyzikálně realizovatelná.

e) **Suma** (zpětná obdélníková metoda)

$$f(kT) = \sum_{i=0}^k x(iT), \quad f(0) = 0 \quad (3.42)$$

je jinou možnou diskretní analogií integrálu. Odpovídá zpětné diferencii, a proto lze psát [viz (3.37)]

$$\nabla f(kT) = x(kT),$$

$$Z\{\nabla f(kT)\} = \frac{z-1}{z} F(z) = X(z),$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} X(z).$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^k x(iT) \triangleq \frac{z}{z-1} X(z)} \quad (3.43)$$

Z tohoto příkladu vidíme, že matematické operace jako je derivace a integrál, mohou být v diskretní verzi realizovány různým způsobem. Vyplývá to z různých numerických metod výpočtu derivace a integrálu. Další vlastnosti Z-transformace jsou přehledně uvedeny v tab. 1.

Příklad 3.4

Určíme obraz diskretní periodické funkce

$$x_p(kT) = x(kT) + x[(k-m)T] + x[(k-2m)T] + \dots, \quad (3.44)$$

kde mT je perioda a diskretní časová funkce $x(kT)$ je definována vztahem

$$x(kT) = \begin{cases} x(kT) & 0 \leq k < m, \\ 0 & k \geq m. \end{cases} \quad (3.45)$$

Řešení:

Obráz $X_p(z)$ diskrétní periodické funkce (3.44) má tvar (vlastnosti 3, 7 v tab. 1)

$$\begin{aligned} X_p(z) &= X(z) + X(z)z^{-m} + X(z)z^{-2m} + \dots = \\ &= X(z)(1 + z^{-m} + z^{-2m} + \dots) = X(z) \frac{1}{1 - z^{-m}}, \end{aligned}$$

kde $X(z) = Z\{x(kT)\}$.

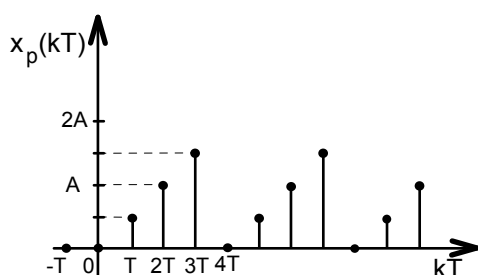
$$x(kT) + x[(k-m)T] + x[(k-2m)T] + \dots \triangleq X(z) \frac{1}{1 - z^{-m}} \quad (3.46)$$

Byl použit vztah pro součet nekonečné geometrické řady (2.35) pro $q = z^{-m}$.

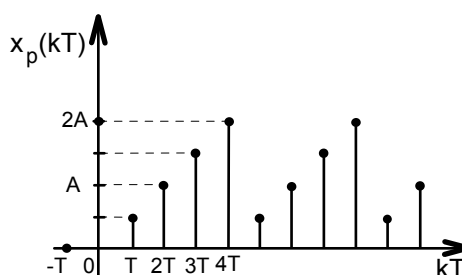
Příklad 3.5

Na základě předchozího příkladu 3.4 určíme obraz $X_p(z)$ diskrétní periodické funkce $x_p(kT)$, která vznikne ze spojitě periodické funkce $x_p(t)$ na obr. 2.1 vzorkováním s periodou $T = 0,5$.

a)



b)



Obr. 3.4. Diskrétní periodické funkce z příkladu 3.5

Řešení:

Je zřejmé, že vzorkováním s periodou $T = 0,5$ spojitě periodické funkce $x_p(t)$ z obr. 2.1 dostaneme diskrétní periodickou funkci $x_p(kT)$ na obr. 3.4a s periodou $mT = 2 \Rightarrow m = 4$. V souladu s obr. 3.4a a předchozím příkladem 3.4 můžeme psát

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} Az^{-1} + Az^{-2} + \frac{3}{2} Az^{-3} = \frac{A(z^2 + 2z + 3)}{2z^3}, \\ X_p(z) &= X(z) \frac{1}{1 - z^{-4}} = \frac{Az(z^2 + 2z + 3)}{2(z^4 - 1)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Je velmi důležité, že v čase $t = 4T$ jsme za hodnotu $x(4T)$ vzali pravostrannou limitu, viz (3.8). Kdybychom vzali levostrannou limitu, pak v souladu s obr. 3.4b platí

$$X(z) = 2A + \frac{1}{2}Az^{-1} + Az^{-2} + \frac{3}{2}Az^{-3} = \frac{A(4z^3 + z^2 + 2z + 3)}{2z^3},$$

$$X_p(z) = X(z) \frac{1}{1 - z^{-4}} = \frac{Az(4z^3 + z^2 + 2z + 3)}{2(z^4 - 1)}. \quad (3.48)$$

Vidíme, že jsme obdrželi odlišný výsledek.

Na základě tab. 1 a 2 se snadno můžeme přesvědčit, že odvozené korespondence jsou správné. Podobně jako u L-transformace při praktickém používání Z-transformace s výhodou využíváme slovníků (tabulek) Z-transformace.

3.2 Určování originálů z obrazů

Při zpětné Z-transformaci používáme odpovídajícího slovníku (tab. 1 a 2). Někdy však musíme originál z daného obrazu určit sami. Uvedeme pouze nejpoužívanější metody:

- rozvoj v mocninnou řadu,
- rozklad na parciální zlomky,
- metoda reziduí.

Rozvoj obrazu v mocninnou řadu

Z definičního vzorce přímé Z-transformace (3.1) vyplývá, že hodnoty diskrétní časové funkce (originálu) $x(kT)$ jsou určeny koeficienty u z^{-k} při mocninném rozvoji obrazu $X(z)$ podle záporných mocnin z (viz příklad 3.1).

Platí tedy

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots \quad (3.49)$$

Má-li obraz $X(z)$ tvar racionální lomené funkce v kladných nebo záporných mocninách komplexní proměnné z , pak diskrétní pořadnice $x(kT)$ získáme snadno dělením čitatele jmenovatelem. Dělíme přitom nejvyšší mocninu nejvyšší mocninou.

Určování originálu rozvojem obrazu v mocninnou řadu je velmi výhodné při použití malé výpočetní techniky a když nás zajímá pouze několik počátečních hodnot. Jedinou nevýhodou uvedeného postupu je, že výsledek nemá uzavřený tvar.

Příklad 3.6

Rozkladem v mocninnou řadu ověříme výsledky z příkladu 3.5.

Řešení:

a) U obrazu (3.47) nebudeme uvažovat konstantní koeficient $\frac{A}{2}$ a čítec

upravíme vynásobením, lze pak psát:

$$\begin{array}{r} (z^3 + 2z^2 + 3z) : (z^4 - 1) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-5} + \dots \\ - z^3 + z^{-1} \\ \hline 2z^2 + 3z + z^{-1} \\ - 2z^2 + 2z^{-2} \\ \hline 3z + z^{-1} + 2z^{-2} \\ - 3z + 3z^{-3} \\ \hline z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} X_p(z) &= \frac{A}{2} (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-5} + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} Az^{-1} + Az^{-2} + \frac{3}{2} Az^{-3} + \frac{1}{2} Az^{-5} + \dots \end{aligned}$$

$$x_p(0) = 0$$

$$x_p(T) = \frac{1}{2} A$$

$$x_p(2T) = A$$

$$x_p(3T) = \frac{3}{2} A$$

$$x_p(4T) = 0$$

$$x_p(5T) = \frac{1}{2} A$$

$$\vdots$$

Vidíme, že obdrženy výsledný obraz diskretní periodické funkce (3.47) je správný a že odpovídá průběhu originálu na obr. 3.4a.

b) Podobně jako v předchozím případě nebudeme u obrazu (3.48) uvažovat konstantní koeficient. Dostaneme

$$\begin{array}{r} (4z^4 + z^3 + 2z^2 + 3z) : (z^4 - 1) = 4 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots \\ - 4z^4 + 4 \\ \hline z^3 + 2z^2 + 3z + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{-z^3 + z^{-1}}{2z^2 + 3z + 4 + z^{-1}} \\
\frac{-2z^2 + 2z^{-2}}{3z + 4 + z^{-1} + 2z^{-2}} \\
\frac{-3z + 3z^{-3}}{4 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}} \\
\vdots \\
X_p(z) = \frac{A}{2} (4 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots) = \\
= 2A + \frac{1}{2}Az^{-1} + Az^{-2} + \frac{3}{2}Az^{-3} + 2Az^{-4} + \dots \\
x_p(0) = 2A \\
x_p(T) = \frac{1}{2}A \\
x_p(2T) = A \\
x_p(3T) = \frac{3}{2}A \\
x_p(4T) = 2A \\
\vdots
\end{array}$$

Obdržený výsledek odpovídá obr. 3. 4b.

Rozklad na parciální zlomky

Má-li obraz $X(z)$ tvar racionální lomené funkce, pak postupem uvedeným v podkapitole 2.2 ho rozložíme na parciální zlomky, jejichž originály najdeme ve slovníku Z-transformace. Získaný originál má **uzavřený tvar**.

Často je vhodný následující postup. Před rozkladem obraz vynásobíme výrazem $\frac{1}{z}$ a po provedení rozkladu obraz (tj. součet parciálních zlomků) zpětně vynásobíme z . Originál pak dostaneme ve tvaru součtu diskretních časových exponenciálních funkcí. Tento postup vyplývá z rozkladu obrazu při L-transformaci, kde jednoduché parciální zlomky mají tvar

$$\frac{A_i}{s - s_i} \quad (3.50a)$$

a odpovídají jim spojité originály (korespondence 18 v tab. 2)

$$A_i e^{s_i t}. \quad (3.50b)$$

Z-transformace diskretní časové exponenciální funkce

$$A_i e^{s_i kT} = A_i a_i^k, \quad a_i = e^{s_i T} \quad (3.51a)$$

má tvar (viz korespondence 18 tab. 2)

$$A_i \frac{z}{z - a_i}. \quad (3.51b)$$

Protože rozklad racionální lomené funkce $X(z)$ dává parciální zlomky tvaru

$$A_i \frac{1}{z - a_i},$$

proto rozklad provádíme pro $\frac{X(z)}{z}$ a po rozkladu výsledek vynásobíme komplexní proměnnou z a obdržíme parciální zlomky v požadovaném tvaru (3.51b).

Podobně jako u L-transformace metodu reziduí si ukážeme přímo na příkladě.

Příklad 3. 7

Určíme originál $x(kT)$ k obrazu

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}. \quad (3.52)$$

Řešení:

a) Rozvoj v mocninnou řadu

Dělení čitatele jmenovatelem (racionální lomená funkce v kladných mocninách):

$$\begin{array}{r} z: (z^2 - 3z + 2) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots \\ -z + 3 - 2z^{-1} \\ \hline 3 - 2z^{-1} \\ -3 + 9z^{-1} - 6z^{-2} \\ \hline 7z^{-1} - 6z^{-2} \\ -7z^{-1} + 21z^{-2} - 14z^{-3} \\ \hline 15z^{-2} - 14z^{-3} \\ \vdots \end{array}$$

$$X(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots$$

$$x(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 x(T) &= 1 \\
 x(2T) &= 3 \\
 x(3T) &= 7 \\
 x(4T) &= 15 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Dělení čitatele jmenovatelem (racionální lomená funkce v záporných mocninách):

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}, \\
 z^{-1} : (1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}) &= z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots \\
 &\quad \underline{-z^{-1} + 3z^{-2} - 2z^{-3}} \\
 &\quad \quad 3z^{-2} - 2z^{-3} \\
 &\quad \quad \underline{-3z^{-2} + 9z^{-3} - 6z^{-4}} \\
 &\quad \quad \quad 7z^{-3} - 6z^{-4} \\
 &\quad \quad \quad \underline{-7z^{-3} + 21z^{-4} - 14z^{-5}} \\
 &\quad \quad \quad \quad 15z^{-4} - 14z^{-5} \\
 &\quad \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Vidíme, že jsme dostali stejný výsledek. Při dělení čitatele jmenovatelem je vhodné, aby koeficient při nejvyšší mocnině ve jmenovateli byl roven 1.

b) Rozklad na parciální zlomky

Nejdříve použijeme obyčejný rozklad na parciální zlomky (postup viz podkapitola 2.2):

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}, \\
 x(kT) &= Z^{-1} \left\{ \frac{2}{z-2} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{1}{z-1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Pro určení originálu použijeme slovníku Z-transformace (korespondence 9 v tab. 2):

$$\begin{aligned}
 Z^{-1} \left\{ \frac{2}{z-2} \right\} &= 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k, \\
 Z^{-1} \left\{ \frac{1}{z-1} \right\} &= 1, \\
 x(kT) &= 2^k - 1.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Výsledek má uzavřený tvar. Pro $k = 0, 1, 2, \dots$ dostaneme $x(0) = 0$, $x(T) = 1$, $x(2T) = 3$, $x(3T) = 7$, $x(4T) = 15, \dots$. Obdrželi jsme stejný výsledek jako v případě a, ale ve výhodném uzavřeném tvaru (3.53).

Nyní použijeme druhý postup. Obraz $X(z)$ vynásobíme $\frac{1}{z}$ a pak teprve provedeme rozklad na parciální zlomky, tj.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Všechno vynásobíme z a dostaneme.

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}.$$

Ze slovníku Z-transformace (např. korespondence 14 v tab. 2) obdržíme stejný výsledek (3.53) jako v předchozím případě.

c) Metoda reziduí

Použijeme vztah pro Z-transformaci v řádku 22 v tab. 1 pro ryze racionální lomenou funkci (3.52)

$$x(kT) = \sum_i \left\{ \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}} \left[(z - z_i)^{r_i} X(z) z^{k-1} \right] \right\},$$

kde $i = 1, 2$; $z_1 = 1$ ($r_1 = 1$), $z_2 = 2$ ($r_2 = 1$):

$$\begin{aligned} x(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{k-1} \right] + \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{k-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k}{z-2} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^k}{z-1} = -1 + 2^k. \end{aligned}$$

Vidíme, že jsme dostali výsledek v uzavřeném tvaru a je stejný jako (3.53).

3.3 Další řešené příklady

Podobně jako u L-transformace v rámci následujících příkladů jsou odvozeny další vztahy a důležité korespondence u Z-transformace.

Příklad 3.8

Odvodíme vztahy pro počáteční a koncovou hodnotu originálu na základě jeho obrazu (vlastnost 20 a 21 v tab. 1)

Řešení:

a) počáteční hodnota

Z definičního vzorce (3.1)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + \dots$$

dostaneme přímo vztah pro počáteční hodnotu

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)} \quad (3.54)$$

b) koncová hodnota

Z definičního vzorce (3.1), viz předchozí případ, přímo dostaneme (viz řádek 18 v tab. 1)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)} \quad (3.55)$$

a proto na základě již dříve odvozené korespondence (3.30) můžeme psát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z) - zx(0)].$$

Protože platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta x(kT) = x(\infty) - x(0),$$

po úpravě dostaneme hledaný vztah pro koncovou hodnotu (pokud existuje)

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]} \quad (3.56)$$

Příklad 3.9

Odvodíme obraz originálu násobeného exponenciální funkcí (vlastnost 5 v tab. 1).

Řešení:

V souladu s definičním vztahem (3.1) lze psát

$$\begin{aligned} Z\{e^{\mp akT} x(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mp akT} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{\pm aT})^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)u^{-k} = X(u) = X(ze^{\pm aT}) \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{\mp akT} x(kT) \triangleq X(ze^{\pm aT})} \quad (3.57)$$

Bylo použito substituce $u = z e^{\pm aT}$.

Speciálně pro $c = e^{aT}$ z (3.57) dostaneme vztah pro podobnost obrazů (vlastnost 4 v tab. 1)

$$\boxed{c^k x(kT) \triangleq X\left(\frac{z}{c}\right)} \quad (3.58)$$

Příklad 3.10

Odvodíme obecné korespondence pro řešení diferenčních rovnic s posunutím argumentu vpravo, resp. se zpětnými diferencemi.

Řešení:

a) Posunutí argumentu vpravo

Pro posunutí argumentu vpravo (zpoždění) lze psát

$$\begin{aligned} Z\{x[(k-m)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x[(k-m)T] z^{-k} = x(-mT)z^0 + x[-(m-1)T]z^{-1} + \dots \\ &+ x(0)z^{-m} + x(T)z^{-(m+1)} + \dots = z^{-m} \{x(-mT)z^m + x[-(m-1)T]z^{m-1} + \dots \\ &+ x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + \dots\} = z^{-m} \left[X(z) + \sum_{i=1}^m x(-iT)z^i \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{x[(k-m)T] \triangleq z^{-m} \left[X(z) + \sum_{i=1}^m x(-iT)z^i \right]} \quad (3.59)$$

Pokud budeme uvažovat pouze originály, tj. $x(kT) = 0$ pro $k < 0$, dostaneme (viz vlastnost 7 v tab. 1)

$$\boxed{x[(k-m)T] \triangleq z^{-m} X(z)} \quad (3.60)$$

b) Zpětné difference

Využijeme definičního vzorce pro zpětné difference (3.38) a vztahu (3.59):

$$\nabla x(kT) = x(kT) - x[(k-1)T],$$

$$Z\{\nabla x(kT)\} = X(z) - z^{-1}[X(z) + x(-T)z] = \frac{z-1}{z} X(z) - x(-T);$$

$$\nabla^2 x(kT) = \nabla x(kT) - \nabla x[(k-1)T] = x(kT) - 2x[(k-1)T] + x[(k-2)T],$$

$$\begin{aligned}
Z\{\nabla^2 x(kT)\} &= X(z) - 2z^{-1}[X(z) + x(-T)z] + z^{-2}[X(z) + x(-T)z + x(-2T)z^2] = \\
&= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 X(z) - \nabla x(-T) - \frac{z-1}{z} x(-T); \\
\nabla^3 x(kT) &= \nabla^2 x(kT) - \nabla^2 x[(k-1)T] = \\
&= x(kT) - 3x[(k-1)T] + 3x[(k-2)T] - x[(k-3)T], \\
Z\{\nabla^3 x(kT)\} &= X(z) - 3z^{-1}[X(z) + x(-T)z] + 3z^{-2}[X(z) + x(-T)z + x(-2T)z^2] + \\
&\quad - z^{-3}[X(z) + x(-T)z + x(-2T)z^2 + x(-3T)z^3] = \\
&= \left(\frac{z-1}{z}\right)^3 X(z) - \nabla^2 x(-T) - \frac{z-1}{z} \nabla x(-T) - \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 x(-T).
\end{aligned}$$

V těchto vztazích je vidět už určitou zákonitost, a protože platí $\nabla^0 x(-T) = x(-T)$, můžeme psát

$$\nabla^n x(kT) \triangleq \left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{n-i-1} \nabla^i x(-T) \quad (3.61)$$

Pokud budeme uvažovat pouze originály, tj. $x(kT) = 0$ pro $k < 0 \Rightarrow \nabla x(kT) = 0$ pro $k < 0$, dostaneme (viz vlastnost 10 pro zpětné difference v tab. 1)

$$\nabla^n x(kT) \triangleq \left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z) \quad (3.62)$$

Příklad 3.11

Určíme obraz konvoluce (konvolutorního součinu, konvolutorní sumy)

$$x_1(kT) * x_2(kT) = \sum_{i=0}^k x_1[(k-i)T] x_2(iT).$$

Řešení:

Pro konvoluci lze psát

$$Z\left\{\sum_{i=0}^k x_1[(k-i)T] x_2(iT)\right\} = Z\left\{\sum_{i=0}^{\infty} x_1[(k-i)T] x_2(iT)\right\} =$$

(Horní mez mohla být zastoupena ∞ , protože $x_1[(k-i)T] = 0$ pro $i > k$.)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} x_1[(k-i)T] x_2(iT) \right\} z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} x_2(iT) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x_1[(k-i)T] z^{-k}}_{X_1(z) z^{-i}} =$$

$$= X_1(z) \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x_2(iT) z^{-i}}_{X_2(z)} = X_1(z) X_2(z) = X_2(z) X_1(z).$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^k x_1[(k-i)T] x_2(iT) = \sum_{i=0}^k x_2[(k-i)T] x_1(iT) \triangleq X_1(z) X_2(z) = X_2(z) X_1(z)} \quad (3.63)$$

Ukázali jsme si rovněž, že konvoluce je komutativní

$$\begin{aligned} x_1(kT) * x_2(kT) &= \sum_{i=0}^k x_1[(k-i)T] x_2(iT) = \\ &= \sum_{i=0}^k x_2[(k-i)T] x_1(iT) = x_2(kT) * x_1(kT). \end{aligned} \quad (3.64)$$

4 ZÁVĚR

V učebním textu jsou uvedeny a vysvětleny důležité pojmy, vlastnosti a korespondence L- a Z-transformace včetně přehledných slovníků. Základní vlastnosti a korespondence jsou odvozeny formou řešených příkladů, které rovněž vhodně ilustrují použití obou transformací.

Učební text L- a Z-transformace je určen pro posluchače technických vysokých škol inženýrského i bakalářského studia, kteří při řešení nejrůznějších problémů využívají L- nebo Z-transformaci.

Pro důkladnější studium je možno použít uvedenou literaturu.

5 LITERATURA

- [1] ALEXÍK, M., JURÍČEK, J. & MIČEK, J. 1988. *Základy automatického řízení*. Žilina: skripta VŠDS v Žilině, 1988.
- [2] BALÁTĚ, J. 1991. *Vybrané statě z automatického řízení*. Brno: skripta FS VUT Brno, 1991.
- [3] BALÁTĚ, J. 2003. *Automatické řízení*. Praha: Technická literatura BEN, 2003 (2. vydání 2004).
- [4] BALDA, M. & HANUŠ, B. aj. 1986. *Základy technické kybernetiky*. Praha: SNTL/ALFA, 1986.
- [5] ČASTOVÁ, N. 1981. *Matematika – základy funkce komplexní proměnné*. Ostrava : VŠB–TU Ostrava, 1981.
- [6] FIRTH, J. M. 1992. *Discrete Transforms*. London: Chapman & Hall, 1992.
- [7] HLÁVKA, J., KLÁTIL, J. & KUBÍK, S. 1990. *Komplexní proměnná v elektrotechnice*. Praha: SNTL, 1990.
- [8] HUBA, M., HUBINSKÝ, P. & ŽÁKOVÁ, K. 2002. *Teória systémov*. Bratislava: STU v Bratislavě, 2002.
- [9] JARACZ, K. 1981. *Rachunek operatorowy Laplace'a i jego zastosowania*. Kraków: WSP, 1981.
- [10] JURY, E. I. 1964. *Theory and Application of the Z-Transform Method*. New York: John Wiley and Sons, 1964.
- [11] KUZIN, L. T. 1962. *Rasčet i projektirovanije diskretnych sistem upravlenija*. Moskva: Mašgiz, 1962.
- [12] NEVŘIVA, P. 2000. *Analýza signálů a soustav*. 1. vyd. Praha: Technická literatura BEN, 2000.
- [13] OPPENHEIM, A. V. & SCHAFER, R. W. 1989. *Discrete - Time Signal Processing*. Englewood Cliffs: Prentice - Hall, 1989.
- [14] PÍRKO, Z. & VEIT, J. 1972. *Laplaceova transformace*. Praha: SNTL/Alfa, 1972.
- [15] SZKLARSKI, L. & JARACZ, K. 1984. *Zastosowanie rachunku operatorowego Laplace'a do zagadnień napędu elektrycznego*. Warszawa: PWN, 1984.
- [16] ŠVARC, I. 2002. *Automatizace. Automatické řízení*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002.

-
- [17] TAKAHASHI, Y., RABINS, M. J. & AUSLANDER, D. M. 1972. *Control and Dynamic Subsystems*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [18] TOMIS, L., HEGER, M. a kol. 1991. *ASŘ TP v hutích – výpočetní a laboratorní cvičení*. Ostrava: skripta VŠB–TU Ostrava, 1991.
- [19] VÍCH, Z. 1979. *Transformace Z a některá její použití*. Praha: SNTL, 1979.
- [20] VÍTEČEK, A.: *Matematické metody automatického řízení. Transformace L a Z*. Ostrava, skripta FSE VŠB v Ostravě, 1988
- [21] VÍTEČEK, A., WAWRZICZKOVÁ, M. & POLOKOVÁ, J. 1988. *Matematická teorie automatického řízení. Základní slovníky transformace L a Z*. Ostrava: doplňková skripta FSE VŠB v Ostravě, 1988.
- [22] VÍTEČEK, A. & WAWRZICZKOVÁ, M. 1988. *Matematické metody v řízení. Transformace L a Z*. Ostrava: skripta PGS FSE VŠB v Ostravě, 1988.
- [23] VÍTEČKOVÁ M. 1995. *L- a Z-transformace*. Ostrava: skripta FS VŠB - TU Ostrava, 1995.
- [24] VÍTEČKOVÁ M. 1998. *Matematické metody v řízení. L- a Z-transformace*. Dotisk 2000 a 2002. Ostrava: skripta FS VŠB - TU Ostrava, 1998.
- [25] ZÍTEK, P. 1990. *Matematické metody automatického řízení*. Praha: skripta FS ČVUT v Praze, 1990.
- [26] ZÍTEK, P. 2001. *Matematické a simulační modely 1. Modely v komplexním oboru*. Praha: skripta FS ČVUT v Praze, vydavatelství ČVUT, 2001.

TABULKY L- A Z-TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAHY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
	Definiční vzorce	
1	$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$	$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$
2	$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds =$ $= \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(s) e^{st} ds$	$x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z) z^{k-1} dz$
	r – poloměr kružnice, uvnitř které leží všechny singulární body obrazu	
	Linearita	
3	$L\{a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(s) \pm a_2 X_2(s)$	$Z\{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)\} = a_1 X_1(z) \pm a_2 X_2(z)$
	Podobnost obrazů	
4	$L\{ax(at)\} = X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$	$Z\{a^k x(kT)\} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad a \neq 0$

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
	Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti	
5	$L\{x(t)e^{\mp at}\} = X(s \pm a)$	$Z\{x(kT)e^{\mp akT}\} = X(ze^{\pm aT})$
	Konvoluce v časové oblasti	
6	$L\left\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\} =$ $= L\left\{\int_0^t x_2(t-\tau)x_1(\tau)d\tau\right\} =$ $= X_1(s)X_2(s) = X_2(s)X_1(s)$	$Z\left\{\sum_{i=0}^k x_1[(k-i)T]x_2(iT)\right\} =$ $= Z\left\{\sum_{i=0}^k x_2[(k-i)T]x_1(iT)\right\} =$ $= X_1(z)X_2(z) = X_2(z)X_1(z)$
	Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)	
7	$L\{x(t-a)\} = e^{-as} X(s), \quad a \geq 0$ Speciálně pro $a = mT, \quad m \geq 0$ $L\{x(t-mT)\} = e^{-mTs} X(s)$	$Z\{x[(k-m)T]\} = z^{-m} X(z), \quad m \geq 0$

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
8	Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)	
	$L\{x(t+a)\} = e^{as} \left[X(s) - \int_0^a x(t) e^{-st} dt \right], a \geq 0$ Speciálně pro $a = mT, \quad m \geq 0$ $L\{x(t+mT)\} = e^{mTs} \left[X(s) - \int_0^{mT} x(t) e^{-st} dt \right]$	$Z\{x[(k+m)T]\} = z^m \left[X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(iT) z^{-i} \right]$ $m \geq 0$
9	Derivace – difference v časové oblasti	
	Derivace 1. řádu $L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$	Dopředná difference 1. řádu $Z\{\Delta x(kT)\} = (z-1)X(z) - zx(0)$ Zpětná difference 1. řádu $Z\{\nabla x(kT)\} = \frac{z-1}{z} X(z)$

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
10	Derivace n-tého řádu $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} x(0)}{dt^{i-1}}$	Dopředná difference n-tého řádu $\mathcal{Z}\{\Delta^n x(kT)\} = (z-1)^n X(z) - z \sum_{i=0}^{n-1} (z-1)^{n-i-1} \Delta^i x(0)$ Zpětná difference n-tého řádu $\mathcal{Z}\{\nabla^n x(kT)\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z)$
11	Integrál – suma v časové oblasti $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s)$	Suma (dopředná obdélníková metoda) – odpovídá dopředné diferenci $\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{k-1} x(iT)\right\} = \frac{1}{z-1} X(z)$ Suma (zpětná obdélníková metoda) – odpovídá zpětné diferenci $\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^k x(iT)\right\} = \frac{z}{z-1} X(z)$

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
	Derivace v oblasti komplexní proměnné	
12	$\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$	$\mathcal{Z}\{kTx(kT)\} = -Tz\frac{dX(z)}{dz}$
	Operace podle nezávislého parametru	
13	$\mathcal{L}\{x(t,a)\} = X(s,a)$	$\mathcal{Z}\{x(kT,a)\} = X(z,a)$
14	$\mathcal{L}\{\lim_{a \rightarrow a_0} x(t,a)\} = \lim_{a \rightarrow a_0} X(s,a)$	$\mathcal{Z}\{\lim_{a \rightarrow a_0} x(kT,a)\} = \lim_{a \rightarrow a_0} X(z,a)$
15	$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial x(t,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial X(s,a)}{\partial a}$	$\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial x(kT,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial X(z,a)}{\partial a}$
16	$\mathcal{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(t,a)da\right\} = \int_{a_1}^{a_2} X(s,a)da$	$\mathcal{Z}\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(kT,a)da\right\} = \int_{a_1}^{a_2} X(z,a)da$

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
	Obraz periodické funkce	
17	$L\{x(t) + x(t-a) + x(t-2a) + \dots\} = X(s) \frac{1}{1 - e^{-as}}$ a – perioda, $a > 0$ Speciálně pro $a = mT$, $m > 0$ $L\{x(t) + x(t-mT) + x(t-2mT) + \dots\} =$ $= X(s) \frac{1}{1 - e^{-mTs}}$	$Z\{x(kT) + x[(k-m)T] + x[(k-2m)T] + \dots\} =$ $= X(z) \frac{1}{1 - z^{-m}}$ mT - perioda, $m > 0$
	Hodnota integrálu – sumy v časové oblasti (pokud existuje)	
18	$\int_0^{\infty} x(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} X(s)$	$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)$
19	$\int_0^{\infty} tx(t) dt = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dX(s)}{ds}$	$\sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT) = -T \lim_{z \rightarrow 1} z \frac{dX(z)}{dz}$

Tab. 1

	L-transformace	Z-transformace
20	Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje)	
	$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	$x(0) = \lim_{k \rightarrow 0} x(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
21	Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)	
	$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) =$ $= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$
22	Zpětná transformace pomocí reziduí	
	$x(t) = \sum_i \operatorname{res}[X(s)e^{st}] =$ $= \sum_i \left\{ \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}} [(s - s_i)^{r_i} X(s) e^{st}] \right\}$	$x(kT) = \sum_i \operatorname{res}[X(z)z^{k-1}] =$ $= \sum_i \left\{ \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}} [(z - z_i)^{r_i} X(z) z^{k-1}] \right\}$
	r_i – násobnost i -tého pólu obrazu $n = \sum_i r_i$ – stupeň mnohočlenu ve jmenovateli obrazu	

ZÁKLADNÍ SLOVNÍK

Tab. 2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
1	$\dot{\delta}(t)$	s		
2	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	1
3	$\delta(t - mT)$	e^{-mTs}	$\delta[(k - m)T]$	$\frac{1}{z^m}$
4	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z - 1}$
5	$\eta(t - mT)$	$\frac{1}{s} e^{-mTs}$	$\eta[(k - m)T]$	$\frac{1}{(z - 1)z^{m-1}}$
6	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$
7	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$

Tab. 2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
8	$\frac{1}{6}t^3$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{6}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6} \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$
9			$(\mp a)^{k-1}, \quad a \neq 0, \quad k \geq 1$ 0 pro $k < 1$	$\frac{1}{z \pm a}$
10			$(k-1)(\mp a)^{k-2}; \quad k \geq 2,$ 0 pro $k < 2, \quad a \neq 0$	$\frac{1}{(z \pm a)^2}$
11			$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)(\mp a)^{k-3}; \quad k \geq 3,$ 0 pro $k < 3, \quad a \neq 0$	$\frac{1}{(z \pm a)^3}$
12			$\binom{k-1}{n-1}(\mp a)^{k-n}; \quad k \geq n,$ 0 pro $k < n, \quad a \neq 0$	$\frac{1}{(z \pm a)^n}$
13	$b^{\mp at}, \quad b > 0$	$\frac{1}{s \pm a \ln b}$	$b^{\mp akT}, \quad b > 0$	$\frac{z}{z - b^{\mp aT}}$

Tab.2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
14			$(\mp a)^k, \quad a \neq 0$	$\frac{z}{z \pm a}$
15			$k(\mp a)^{k-1}, \quad a \neq 0, \quad k \geq 1$ $0 \quad \text{pro} \quad k < 1$	$\frac{z}{(z \pm a)^2}$
16			$\frac{1}{2}k(k-1)(\mp a)^{k-2}; \quad k \geq 2,$ $0 \quad \text{pro} \quad k < 2, \quad a \neq 0$	$\frac{z}{(z \pm a)^3}$
17			$\binom{k}{n-1}(\mp a)^{k-n+1}; \quad k \geq n-1$ $0 \quad \text{pro} \quad k < n-1, \quad a \neq 0$	$\frac{z}{(z \pm a)^n}$
18	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\mp akT}$	$\frac{z}{z - c}, \quad c = e^{\mp aT}$
19	$t e^{\mp at}$	$\frac{1}{(s \pm a)^2}$	$kT e^{-akT}$	$\frac{cTz}{(z - c)^2}, \quad c = e^{-aT}$

Tab.2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
20	$\frac{1}{2}t^2 e^{\mp at}$	$\frac{1}{(s \pm a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2} \frac{cz(z+c)}{(z-c)^3}, \quad c = e^{-aT}$
21	$\frac{1}{6}t^3 e^{\mp at}$	$\frac{1}{(s \pm a)^4}$	$\frac{1}{6}(kT)^3 e^{-akT}$	$\frac{T^3}{6} \frac{cz(z^2 + 4cz + c^2)}{(z-c)^4}$ $c = e^{-aT}$
22	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} e^{\mp at}$	$\frac{1}{(s \pm a)^n}$		
23	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1-c)z}{(z-1)(z-c)}, \quad c = e^{-aT}$
24	$\frac{1}{a}[at - (1 - e^{-at})]$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}[akT - (1 - e^{-akT})]$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-c)z}{a(z-1)(z-c)}$ $c = e^{-aT}$

Tab. 2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
25	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s + a)^2}$	$(1 - akT)e^{-akT}$	$\frac{z^2 - c(1 + aT)z}{(z - c)^2}$ $c = e^{-aT}$
26	$1 - (1 + at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s + a)^2}$	$1 - (1 + akT)e^{-akT}$	$\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - c} - \frac{caTz}{(z - c)^2}$ $c = e^{-aT}$
27	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b - a}{(s + a)(s + b)}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(c - d)z}{(z - c)(z - d)}$ $c = e^{-aT}, d = e^{-bT}$
28	$-ae^{-at} + be^{-bt}$	$\frac{(b - a)s}{(s + a)(s + b)}$	$-ae^{-akT} + be^{-bkT}$	$\frac{(b - a)z^2 - (bc - ad)z}{(z - c)(z - d)}$ $c = e^{-aT}, d = e^{-bT}$

Tab. 2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
29	$1 + \frac{b e^{-at} - a e^{-bt}}{a - b}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{b e^{-akT} - a e^{-bkT}}{a - b}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z-c)} - \frac{az}{(a-b)(z-d)}$ $c = e^{-aT}, \quad d = e^{-bT}$
30	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
31	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
32	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh \omega kT$	$\frac{z \sinh \omega T}{z^2 - 2z \cosh \omega T + 1}$
33	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cosh \omega T}{z^2 - 2z \cosh \omega T + 1}$

Tab. 2

	L-transformace		Z-transformace	
	Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$	Originál $x(kT)$	Obraz $X(z)$
34	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{cz \sin \omega T}{z^2 - 2cz \cos \omega T + c^2}$ $c = e^{-aT}$
35	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{z^2 - cz \cos \omega T}{z^2 - 2cz \cos \omega T + c^2}$ $c = e^{-aT}$
36	$1 - e^{-at} \left(\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right)$	$\frac{a^2 + \omega^2}{s[(s+a)^2 + \omega^2]}$	$1 - e^{-akT} \left(\cos \omega kT + \frac{a}{\omega} \sin \omega kT \right)$	$\frac{z(Az + B)}{(z-1)(z^2 - 2cz \cos \omega T + c^2)}$ $A = 1 - c \cos \omega T - \frac{a}{\omega} c \sin \omega T$ $B = c^2 + \frac{a}{\omega} c \sin \omega T - c \cos \omega T$ $c = e^{-aT}$

SLOVNÍK L-TRANSFORMACE VHODNÝ PRO TEORII AUTOMATICKÉHO ŘÍZENÍ

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
1	s	$\dot{\delta}(t)$
2	1	$\delta(t)$
3	$\frac{1}{s}$	$\eta(t)$
4	$\frac{1}{s^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
5	$\frac{s}{T_1 s + 1}$	$\alpha_1 [\delta(t) - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}], \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
6	$\frac{1}{T_1 s + 1}$	$\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
7	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)}$	$1 - e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
8	$\frac{1}{s^2(T_1s + 1)}$	$\frac{1}{\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t} - 1) + t, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
9	$\frac{b_1s + 1}{s(T_1s + 1)}$	$1 + (\alpha_1 b_1 - 1)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
10	$\frac{b_1s + 1}{s^2(T_1s + 1)}$	$C_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + t, \quad C_1 = b_1 - \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
11	$\frac{s}{(T_1s + 1)^2}$	$\alpha_1^2(1 - \alpha_1 t)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
12	$\frac{1}{(T_1s + 1)^2}$	$\alpha_1^2 t e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
13	$\frac{1}{s(T_1s + 1)^2}$	$1 - (1 + \alpha_1 t)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
14	$\frac{1}{s^2(T_1s + 1)^2}$	$t - \frac{2}{\alpha_1} + \left(\frac{2}{\alpha_1} + t\right)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
15	$\frac{b_1 s + 1}{(T_1 s + 1)^2}$	$\alpha_1^2 [b_1 + (1 - \alpha_1 b_1)t] e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
16	$\frac{b_1 s + 1}{s(T_1 s + 1)^2}$	$1 - [1 + \alpha_1 (1 - \alpha_1 b_1)t] e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
17	$\frac{b_1 s + 1}{s^2 (T_1 s + 1)^2}$	$t + C_1 - (C_1 - C_2 t) e^{-\alpha_1 t}$ $C_1 = b_1 - \frac{2}{\alpha_1}, \quad C_2 = 1 - \alpha_1 b_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
18	$\frac{s}{(T_1 s + 1)^n}, \quad n = 2, 3, \dots$	$\alpha_1^n \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} (n-1 - \alpha_1 t) e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
19	$\frac{1}{(T_1 s + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\alpha_1^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
20	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$1 - e^{-\alpha_1 t} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^i \frac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
21	$\frac{1}{s^2(T_1s+1)^n}, \quad n=1,2,\dots$	$t - \frac{n}{\alpha_1} + e^{-\alpha_1 t} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^{i-1} (n-i) \frac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
22	$\frac{s}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{1}{T_1(T_2 - T_1)}, \quad C_2 = \frac{1}{T_2(T_2 - T_1)}$
23	$\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$C_1(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \quad C_1 = \frac{1}{T_1 - T_2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
24	$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \quad C_2 = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$
25	$\frac{1}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$t - C_0 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad C_0 = T_1 + T_2$ $C_1 = \frac{T_1^2}{T_1 - T_2}, \quad C_2 = \frac{T_2^2}{T_1 - T_2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
26	$\frac{b_1 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{T_1 - b_1}{T_1(T_1 - T_2)}, \quad C_2 = \frac{T_2 - b_1}{T_2(T_1 - T_2)}$
27	$\frac{b_1 s + 1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{b_1 - T_1}{T_1 - T_2}, \quad C_2 = \frac{T_2 - b_1}{T_1 - T_2}$
28	$\frac{b_1 s + 1}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$t + C_0 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad C_0 = -T_1 - T_2 + b_1$ $C_1 = \frac{(b_1 - T_1)T_1}{T_2 - T_1}, \quad C_2 = \frac{(T_2 - b_1)T_2}{T_2 - T_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
29	$\frac{s}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad n = 2, 3, \dots, T_i - \text{různé}$	$-\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, \quad C_i = \frac{T_i^{n-3}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \quad \alpha_i = \frac{1}{T_i}$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
30	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad n = 2, 3, \dots, T_i - \text{různé}$	$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, \quad C_i = \frac{T_i^{n-2}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \quad \alpha_i = \frac{1}{T_i}$
31	$\frac{1}{s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad n = 2, 3, \dots, T_i - \text{různé}$	$1 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, \quad C_i = \frac{T_i^{n-1}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \quad \alpha_i = \frac{1}{T_i}$
32	$\frac{1}{s^2 \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad n = 2, 3, \dots, T_i - \text{různé}$	$t - C_0 + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, \quad \alpha_i = \frac{1}{T_i}$ $C_i = \frac{T_i^n}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \quad C_0 = \sum_{i=1}^n T_i$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
33	$\frac{s}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}, \quad 0 \leq \xi_0 < 1$	$-C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi), \quad C_1 = \frac{1}{\omega T_0^3}, \quad \gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$ $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\gamma}$
34	$\frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}, \quad 0 \leq \xi_0 < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad C_1 = \frac{1}{\omega T_0^2}, \quad \gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$ $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}$
35	$\frac{1}{s(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)}, \quad 0 \leq \xi_0 < 1$	$1 - C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad C_1 = \frac{1}{\omega T_0}, \quad \gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$ $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\gamma}$

Tab. 3

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
36	$\frac{1}{s^2(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)}, \quad 0 \leq \xi_0 < 1$	$t - C_0 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + 2\varphi), \quad C_0 = 2\xi_0 T_0$ $C_1 = \frac{1}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\xi_0}{T_0}, \quad \omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\gamma}$
37	$\frac{b_1 s + 1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}, \quad 0 \leq \xi_0 < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad C_1 = \frac{1}{\omega T_0^3} \sqrt{(1 - 2b_1 \gamma) T_0^2 + b_1^2}$ $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}, \quad \omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega b_1}{1 - \gamma b_1}$
38	$\frac{b_1 s + 1}{s(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)}, \quad 0 \leq \xi_0 < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi), \quad C_1 = \frac{1}{\omega T_0^2} \sqrt{(1 - 2b_1 \gamma) T_0^2 + b_1^2}$ $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}, \quad \omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega T_0^2}{b_1 - \gamma T_0^2}$

b_1, b_2 – reálné konstanty, $T_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots$

Číslo skladové:	2180	300
Určeno pro posluchače:	2. a 3. ročník Bc. FS 1. a 2. ročník Mg. FS	
Autoři:	prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.	
Katedra, institut:	automatizační techniky a řízení	352
Název:	Slovníky L- a Z-transformace s řešenými příklady	
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2010, dotisk 1. vydání	
Počet stran:	76	
Vydala:	VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba	
Tisk:	REPRONIS s.r.o. Českobratrská 20, 702 00 Ostrava	
Náklad:	200 ks	
Tématická skupina:	17	

Prodejné

ISBN 978-80-248-0851-2