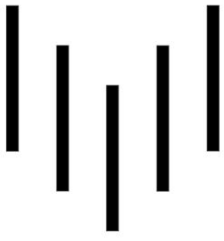
Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní



ZÁKLADY AUTOMATICKÉ REGULACE

Miluše Vítečková
Antonín Víteček

Ostrava 2023

Lektor: doc. Ing. Milan Heger, CSc.

©Miluše Vítečková, Antonín Víteček, 2023
ISBN 978-80-248-1924-2

Učebnice je věnována základům teorie automatické regulace. Pokrývá nejdůležitější oblasti analogové regulace a velmi stručně rovněž popisuje problematiku číslicové, dvou- a třípolohové regulace.

Vzhledem k tomu, že učebnice je věnována základním znalostem, nejsou v textu uváděny odkazy na použitou literaturu. Jako rozšiřující studijní literaturu z oblasti automatické regulace autoři doporučují především dvě velmi přístupně psané publikace:

BALÁTĚ, J. *Automatické řízení (2. vydání).* Nakladatelství BEN – Technická literatura, Praha 2005,

ŠVARC, I. – ŠEDA, M. – VÍTEČKOVÁ, M. *Automatické řízení.* Akademické nakladatelství CERM, VUT v Brně, Brno 2007.

Pro oblast modelování a identifikace jako rozšiřující literatura je vhodná publikace:

NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů.* Montanex, Ostrava 1999.

Z anglicky psaných publikací autoři doporučují přístupně a na velmi dobré úrovni zpracované knihy:

DORF, R.C. – BISHOP, R. *Modern Control Systems (9th ed.)*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2001,

FRANKLIN, G.F. – POWELL, J.D. – EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems (4th ed.)*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2002.

Užitečnou pomůckou při studiu anglické literatury mohou být skripta:

VÍTEČKOVÁ, M. – VÍTEČEK, A. *Anglicko-český slovník základních pojmů z oblasti automatického řízení.* 2. rozšířené vydání. Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava, Ostrava 2009.

Autoři děkují doktorandům katedry automatizační techniky a řízení Fakulty strojní VŠB – TU Ostrava za nakreslení některých obrázků, a především lektorovi doc. Ing. Milanu Hegerovi, CSc. za pečlivé přečtení celé učebnice a velmi cenné připomínky.

Druhé vydání učebnice bylo podstatně rozšířeno a upraveno tak, aby mohlo být používáno nejenom v bakalářském, ale i navazujícím magisterském studiu a aby bylo vhodné i pro odborníky z praxe zabývající se automatizací.

Autoři budou vděční za připomínky a nalezené chyby a prosí o jejich zaslání na adresy: miluse.viteckova@vsb.cz, antonin.vitecek@vsb.cz .

Obsah

Seznam základních použitých symbolů		5
1	AUTOMATICKÁ REGULACE	12
1.1	Struktura regulačního obvodu	12
1.2	Třídění regulačních obvodů	15
2	LAPLACEOVA TRANSFORMACE	20
2.1	Definiční vztahy a základní vlastnosti	20
2.2	Určování originálů z obrazů	27
2.3	Řešení lineárních diferenciálních rovnic	30
3	MATEMATICKÉ MODELY	36
3.1	Lineární matematické modely	36
3.2	Třídění základních lineárních dynamických členů	52
3.3	Algebra blokových schémat	61
3.4	Linearizace	68
4	REGULAČNÍ OBVOD	76
4.1	Regulátory	76
4.2	Regulované soustavy	97
4.3.	Stabilita	109
5	SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU	140
5.1	Kvalita regulace	140
5.2	Seřizování regulátorů	172
5.3	Číslicová regulace	216
6	DVOU- A TŘÍPOLOHOVÁ REGULACE	225
7	ZÁVĚR	232
8	REJSTŘÍK	233
9	LITERATURA	237
PŘÍLOHY		239
1	Definiční vztahy a základní vlastnosti Laplaceovy transformace	239
2	Slovník Laplaceovy transformace	240

Seznam základních použitých symbolů

a zesílení otevřeného regulačního obvodu u metody požadovaného modelu

$a, a_i, b, b_i, \ldots$ konstanty

a_i koeficienty levé strany lineární diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu ve jmenovateli přenosu

A, A_i, B, B_i konstanty, koeficienty

$A(\omega) = \mathrm{mod} G(j\omega) = |G(j\omega)|$ modul kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $A(\omega)$ = amplitudová kmitočtová charakteristika

A_o modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu

A_R modul kmitočtového přenosu regulátoru

A_S modul kmitočtového přenosu regulované soustavy

A_{wy} modul kmitočtového přenosu řízení (uzavřeného regulačního obvodu)

$\boldsymbol{A}$ stavová matice systému (matice u vektoru $\boldsymbol{x}$ v lineární stavové rovnici) řádu n [typu (n,n)]

b_i koeficienty pravé strany lineární diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu v čitateli přenosu

B amplituda relé

$\boldsymbol{b}$ stavový vektor vstupu dimenze n

$\boldsymbol{c}$ výstupní vektor stavu dimenze n

C kapacita

d konstanta převodu

e regulační odchylka

$e_v(\infty)$ trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou

$e_w(\infty)$ trvalá regulační odchylka způsobená žádanou veličinou

f obecná funkce

$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ kmitočet [Hz]

$g(t)$ impulsní funkce, grafické vyjádření $g(t)$ = impulsní charakteristika

$g_S(t)$ impulsní funkce regulované soustavy

$G(s)$ L-přenos (Laplaceův přenos), L-obraz impulsní funkce

$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}$ kmitočtový přenos, grafické vyjádření $G(j\omega)$ = amplitudofázová kmitočtová charakteristika

G_F přenos filtru

G_K přenos kompenzátoru (kompenzačního členu)

$G_{MČ}$ přenos měřicího členu

G_o přenos otevřeného regulačního obvodu

G_P přenos, přes který působí na regulační obvod poruchová veličina

G_R přenos regulátoru

G_S přenos regulované soustavy

G_{vy} přenos poruchy

G_{ve} odchylkový přenos poruchy
G_{wy} přenos řízení
G_{we} odchylkový přenos řízení
G_{ZV} přenos zpětné vazby
h šířka hystereze
$h(t)$ přechodová funkce, grafické vyjádření $h(t)$ = přechodová charakteristika
$h_S(t)$ přechodová funkce regulované soustavy
$h_v(t)$ přechodová funkce regulačního obvodu vyvolaná poruchovou veličinou
$h_w(t)$ přechodová funkce regulačního obvodu vyvolaná žádanou veličinou
H_i Hurwitzovy determinanty (subdeterminanty)
$\boldsymbol{H}$ Hurwitzova matice
$H(s)$ L-obraz přechodové funkce
i činitel interakce, proud
I_i integrální kritéria kvality regulace ($i = IE, IAE, ISE, ITAE$)
$j = \sqrt{-1}$ imaginární jednotka
k relativní diskrétní čas (uvádí se v hranatých závorkách)
k_i koeficient přenosu (zisk), zesílení ($|k_i| > 1$), tlumení ($|k_i| < 1$) (i = 1, 2, 3, …)
kT diskrétní čas
k_P zesílení regulátoru
k_{Pk} kritické zesílení regulátoru
k_{ZV} koeficient zpětné vazby
K_D váha diferenční složky číslicového regulátoru
K_P váha proporcionální složky číslicového regulátoru
K_S váha sumační složky číslicového regulátoru
L indukčnost
L operátor přímé L-transformace (Laplaceovy transformace)
L^{-1} operátor zpětné (inverzní) L-transformace (Laplaceovy transformace)
$L(\omega) = 20\log A(\omega)$ logaritmický modul kmitočtového přenosu [dB], grafické vyjádření $L(\omega)$ = logaritmická amplitudová kmitočtová charakteristika
L_o logaritmický modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu [dB]
L_R logaritmický modul kmitočtového přenosu regulátoru [dB]
L_{wy} logaritmický modul kmitočtového přenosu řízení (uzavřeného regulačního obvodu) [dB]
m stupeň mnohočlenu v čitateli přenosu
m_A amplitudová bezpečnost
$m_L = 20\log m_A$ logaritmická amplitudová bezpečnost [dB]
M mnohočlen v čitateli přenosu (kořeny = nuly)
M_s maximum modulu funkce citlivosti

n stupeň charakteristického mnohočlenu, stupeň mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, řád diferenciální rovnice, dimenze vektoru stavových proměnných $\boldsymbol{x}$

N charakteristický mnohočlen, mnohočlen ve jmenovateli přenosu (kořeny = póly)

$N(j\omega)$ Michajlovova funkce, grafické vyjádření $N(j\omega)$ = Michajlovova charakteristika

$N_P(\omega) = \mathrm{Re}N(j\omega)$ reálná část Michajlovovy funkce, grafické vyjádření $N_P(\omega)$ = reálná část Michajlovovy charakteristiky

$N_Q(\omega) = \mathrm{Im}N(j\omega)$ imaginární část Michajlovovy funkce, grafické vyjádření $N_Q(\omega)$ = imaginární část Michajlovovy charakteristiky

p počet stavitelných parametrů

$P(\omega) = \mathrm{Re}G(j\omega)$ reálná část kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $P(\omega)$ = reálná část kmitočtové charakteristiky

pp pásmo proporcionality

q řád integračního členu, stupeň astatismu (typ) regulačního obvodu

$Q(\omega) = \mathrm{Im}G(j\omega)$ imaginární část kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $Q(\omega)$ = imaginární část kmitočtové charakteristiky

r řád derivačního členu

r_s relativní stupeň lineárního dynamického systému

r_0 váha proporcionální složky analogového regulátoru

r_{-1} váha integrační složky analogového regulátoru

r_1 váha derivační složky analogového regulátoru

R odpor

$s = \alpha + j\omega$ komplexní proměnná, nezávisle proměnná u obrazu v L-transformaci (Laplaceově transformaci) [čas^{-1}], [s^{-1}]

s_i kořeny mnohočlenu s komplexní proměnnou s

S doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou

$S(j\omega)$ funkce citlivosti

t (spojitý) čas

t_m doba dosažení maximální hodnoty y_m (maximálního překmitu)

t_o rychlost odezvy

t_r doba regulace

$t_\varphi = \dfrac{\varphi}{\omega}$ čas odpovídající fázi φ

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ perioda (doba kmitu)

T vzorkovací perioda, perioda

T_d dopravní zpoždění u spojitých systémů (členů)

T_D derivační časová konstanta

T_I integrační časová konstanta

T_{Ik} kritická integrační časová konstanta

T_i setrvačná časová konstanta (i = 0, 1, 2, …)

$T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k}$ kritická perioda
T_n doba náběhu
T_p doba přechodu
T_Σ náhradní součtová časová konstanta
T_u doba průtahu
$T(j\omega)$ doplňková funkce citlivosti
u akční veličina, řízení, vstupní veličina (vstup)
u_T tvarovaná akční veličina
v poruchová veličina (porucha)
w žádaná veličina
x stavová veličina (stav)
$\boldsymbol{x}$ vektor stavových veličin (stav) dimenze n
y regulovaná veličina, výstupní veličina (výstup)
$y_m = y(t_m)$ maximální hodnota regulované veličiny při překmitu (maximální překmit)
y_v odezva vyvolaná poruchovou veličinou
y_w odezva vyvolaná žádanou veličinou
y_p přechodná část odezvy
y_u ustálená část odezvy
Z impedance

α stupeň stability (absolutní tlumení), sklon, koeficient u MPM
$\alpha = \mathrm{Re}\, s$ reálná část komplexní proměnné s
β sklon, koeficient u MPM
γ fázová bezpečnost
δ relativní tolerance regulačního pochodu
$\delta(t)$ Diracův jednotkový impuls
Δ přírůstek, tolerance regulačního pochodu
$\eta(t)$ Heavisideův jednotkový skok
$\omega = 2\pi f$ úhlový kmitočet [čas^{-1}], [s^{-1}]
$\omega = \mathrm{Im}\, s$ imaginární část komplexní proměnné s
ω_m mezní úhlový kmitočet
$\omega_k = \dfrac{2\pi}{T_k}$ kritický úhlový kmitočet
ω_0 úhlový kmitočet netlumených kmitů, přirozený úhlový kmitočet
ω_R rezonanční kmitočet
ω_τ úhlový kmitočet řezu (průchodu)
$\omega_{-\pi}$ úhlový kmitočet, při kterém fáze = $-\pi$
$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ fáze kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $\varphi(\omega)$ = fázová kmitočtová charakteristika
φ_o fáze otevřeného regulačního obvodu
φ_R fáze kmitočtového přenosu regulátoru

ξ_i koeficient relativního (poměrného) tlumení (relativní tlumení)
κ překmit
τ_j časová konstanta

Horní indexy

* optimální
-1 inverzní
T transponovaný

Symboly nad písmeny

$\dot{}$ (totální) derivace podle času
$\wedge$ odhad

Relační znaménka

$\approx$ přibližně rovno
$\doteq$ po zaokrouhlení rovno
$\triangleq$ korespondence mezi originálem a obrazem
$\Rightarrow$ implikace
$\Leftrightarrow$ ekvivalence

Grafické značky

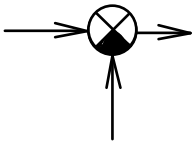
○ (jednonásobná) nula
◎ dvojnásobná nula
× (jednonásobný) pól
※ dvojnásobný pól


nelineární systém (prvek, člen)


lineární systém (prvek, člen)


jednorozměrový signál


mnohorozměrový signál


součtový člen (vyplněný segment označuje znaménko minus)

Zkratky

arg argument
dB decibel
dek dekáda
det determinant
dim dimenze (rozměr)
Im imaginární, imaginární část
konst konstantní, konstanta
lim limita
max maximální, maximum
min minimální, minimum

mod	modul
rank	hodnost
Re	reálný, reálná část
sign	znaménko, znaménková funkce

Originály jsou značeny písmeny malé abecedy a jejich **obrazy** stejnými písmeny velké abecedy.

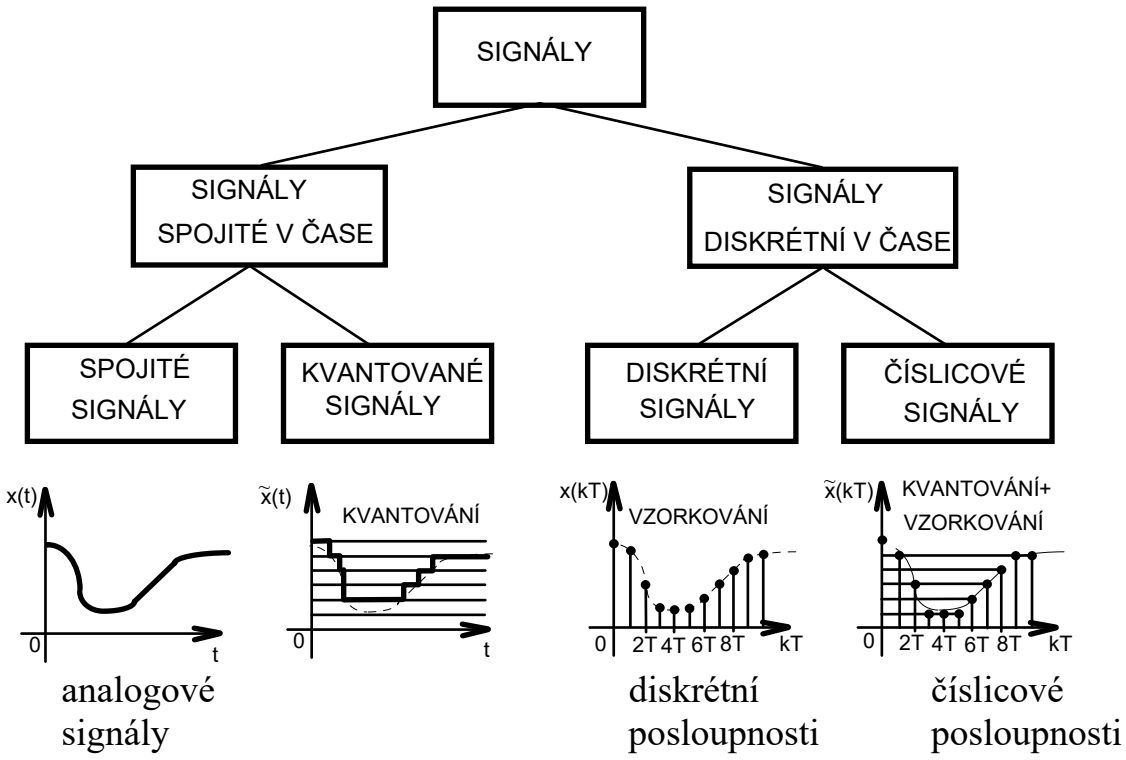
U přenosů a veličin index z písmen velké abecedy se týká prvků, index z písmen malé abecedy se týká celého uzavřeného nebo otevřeného regulačního obvodu.

Doporučované české zkratky a označení

A/Č	analogově číslicový převodník
AR	analogový regulátor
Č/A	číslicově analogový převodník
ČR	číslicový regulátor
D	derivační složka analogového regulátoru, diferenční složka číslicového regulátoru
ER	extremální regulátor
ERO	extremální regulační obvod
ES	extremální soustava
I	integrační složka analogového regulátoru, integrační analogový regulátor
K	kompenzátor
MČ	měřicí člen
MNDP	metoda násobného dominantního pólu
MOM	metoda optimálního modulu
MPM	metoda požadovaného modelu
MSO	metoda symetrického optima
OFF	vypnuto
ON	zapnuto
P	proporcionální složka analogového (číslicového) regulátoru, proporcionální analogový (číslicový) regulátor
PD	proporcionálně derivační analogový regulátor, proporcionálně diferenční číslicový regulátor, číslicový regulátor PD
PI	proporcionálně integrační analogový regulátor
PID	proporcionálně integračně derivační analogový regulátor
PS	proporcionálně sumační číslicový regulátor, číslicový regulátor PI
PSD	proporcionálně sumačně diferenční číslicový regulátor, číslicový regulátor PID
R	regulátor
RO	regulační obvod
S	regulovaná soustava, sumační složka u číslicového regulátoru, sumační číslicový regulátor, číslicový regulátor I, snímač
TAR	teorie automatické regulace

TAŘ teorie automatického řízení
TŘ teorie řízení
ZN Ziegler - Nichols

Signály (veličiny)



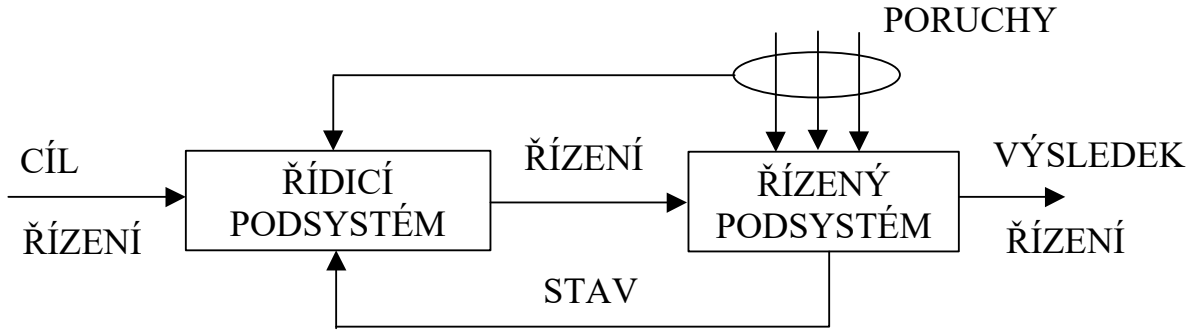
analogové signály | diskrétní posloupnosti | číslicové posloupnosti

1 Automatická regulace

V této kapitole je stručně popsán jednoduchý regulační obvod, jeho struktura a vlastnosti. Rovněž je uvedeno základní třídění regulačních obvodů.

1.1 Struktura regulačního obvodu

Teorie regulace je nejdůležitější částí ***teorie řízení***, která se zabývá studiem ***systémů řízení***. Obecný systém řízení (obr. 1.1) se skládá z ***řídicího podsystému*** (prvku) a ***řízeného podsystému*** (prvku).



Obr. 1.1 – Schéma obecného systému řízení

Úkolem systému řízení je působit řídicím podsystémem na řízený podsystém tak, aby ***výsledek řízení*** byl v souladu s ***cílem řízení***. Toto cílené působení řídicího podsystému na řízený podsystém se nazývá ***řízení***.

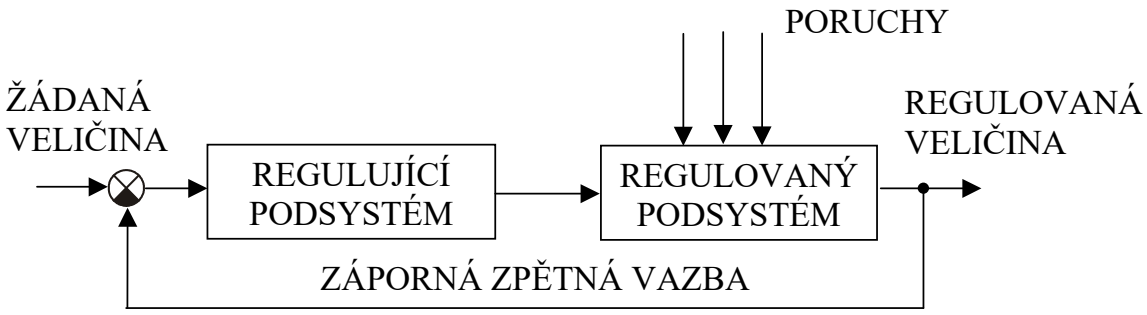
Řídicí podsystém může kvalitněji plnit cíl řízení, pokud je informován o ***poruchách*** a pomocí ***zpětné vazby*** o ***stavu*** řízeného podsystému.

Často systém řízení neobsahuje všechny vazby jak na obr. 1.1, ale je podstatně jednodušší. Na obr. 1.2a je ***systém regulace*** (systém uzavřeného řízení) a na obr. 1.2b je ***systém ovládání*** (systém otevřeného řízení).

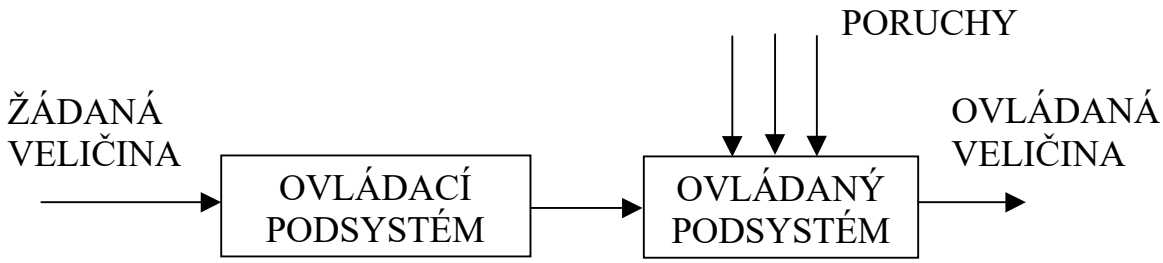
V obou případech cílem řízení je, aby výstupní veličina, tj. regulovaná nebo ovládaná veličina se pokud možno co nejvíce blížila (ideálně, aby byla rovna) žádané veličině bez ohledu na nepříznivý vliv poruchových veličin (poruch).

Je zřejmé, že systém regulace (obr. 1.2a) zajistí kvalitnější řízení, protože regulující (řídicí) podsystém je pomocí zpětné vazby prostřednictvím regulované veličiny informován o působících poruchách a dokonce i změnách vlastností regulovaného (řízeného) podsystému. Naproti tomu systém ovládání většinou nemusí kvalitní řízení zajistit, protože ovládací (řídicí) podsystém není informován o působících poruchách a změnách vlastností ovládaného (řízeného) podsystému, a tedy nemůže na ně reagovat. Rovněž je zřejmé, že vlastnosti ovládaného podsystému musí být velmi dobře známé.

a)



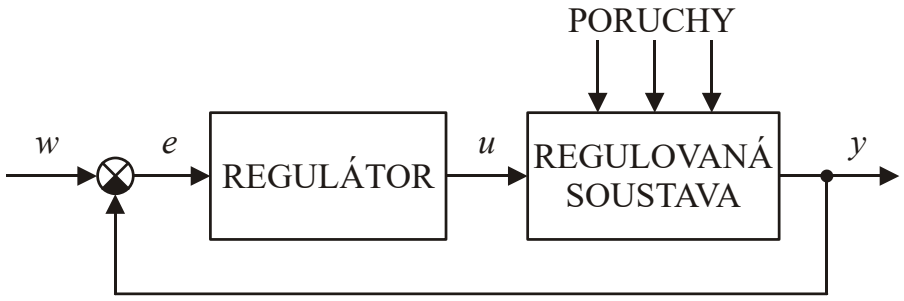
b)



Obr. 1.2 – Blokové schéma systému: a) regulace, b) ovládání

Řízení se tedy dělí na ***regulaci*** (uzavřené řízení, zpětnovazební řízení) a ***ovládání*** (otevřené řízení, řízení bez zpětné vazby). Pokud řízení probíhá automaticky, tj. bez přímé účasti člověka, jde o ***automatické*** řízení. Teoretickými aspekty automatického řízení se zabývá ***teorie automatického řízení*** (TAŘ) a podobně, teoretickými aspekty automatické regulace se zabývá ***teorie automatické regulace*** (TAR). Slovo automatický se často vynechává.

Z výše uvedeného je zřejmé, že nejdůležitějším systémem řízení je systém zpětnovazebního řízení, tj. systém regulace (obr. 1.2a). Velmi často má jednoduchou strukturu, jako na obr. 1.3 a běžně v technické praxi se nazývá ***regulační obvod***. Regulujícím podsystémem (prvkem) je ***regulátor***, regulovaným podsystémem (prvkem) je ***regulovaná soustava*** a řízením je ***akční veličina*** *u*.



Obr. 1.3 – Obecné blokové schéma regulačního obvodu

Regulovaná soustava je tvořena souborem zařízení, v nichž probíhá nějaký dílčí proces, u kterého je třeba dodržovat určité podmínky, jako např.: stálou teplotu, teplotu měnící se podle určitého programu, lineárně rostoucí otáčky a jejich udržování na zadané výši, stabilizace elektrického napětí nebo proudu

atd. Regulátor je tvořen souborem zařízení, která tyto požadované podmínky dodržují.

Úkolem regulačního obvodu je zajištění těchto požadavků, což může být vyjádřeno ***cílem regulace***. Cíl regulace může být formulován ve dvou vzájemně ekvivalentních tvarech.

Pomocí vhodně zvoleného regulátoru a jeho seřízení vytvořit takovou ***akční veličinu*** u, která bez ohledu na negativní působení poruchových veličin zajistí, aby:

- ***regulovaná veličina*** y byla v každém časovém okamžiku blízká (ideálně, aby se rovnala) ***žádané veličině*** w, co může být vyjádřeno vztahem

$$y \to w, \tag{1.1}$$

- ***regulační odchylka***

$$e = w - y \tag{1.2}$$

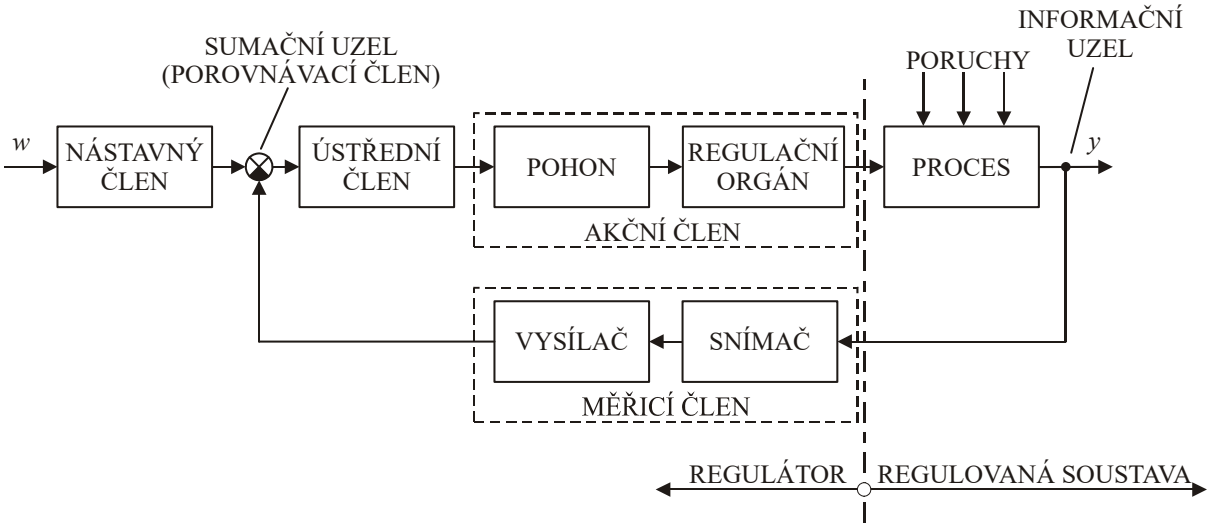
byla v každém časovém okamžiku blízká nule (ideálně, aby byla nulová), co může být vyjádřeno vztahem

$$e \to 0\,. \tag{1.3}$$

Z obou formulací vyplývá, že **regulátor má v podstatě dvojí funkci spočívající v zajištění sledování žádané veličiny** w **regulovanou veličinou** y **a potlačení negativního vlivu poruchových veličin na činnost regulačního obvodu**.

Tam, kde není explicitně vyjádřena nezávisle proměnná, vztahy a závěry platí jak pro spojité regulační obvody (regulační obvody s analogovými regulátory), tak pro diskrétní regulační obvody (regulační obvody s číslicovými regulátory).

Přístrojová skladba regulátoru běžného regulačního obvodu je ukázána na obr. 1.4.



Obr. 1.4 – Přístrojová skladba regulátoru běžného regulačního obvodu

Přístrojová skladba regulátoru na obr. 1.4 se týká tzv. ***nepřímého regulátoru*** vyžadujícího zdroj pomocné energie. Většinou se regulátory skládají ze čtyř

základních částí: ***nástavného***, ***měřicího***, ***ústředního*** a ***akčního členu***. Měřicí člen je tvořen snímačem a vysílačem (převodníkem). Snímač (čidlo) snímá hodnotu regulované veličiny a vysílač (převodník) ji převádí na veličinu vhodnou k přenosu do sumačního uzlu (porovnávacího členu). Žádaná veličina se v nástavném členu mění na veličinu stejného charakteru jako je veličina vystupující z měřicího členu. V sumačním uzlu se vytváří regulační odchylka, která vstupuje do ústředního členu (je to v podstatě vlastní regulátor). Ten na základě daného ***algoritmu regulace*** generuje veličinu vstupující do akčního členu. Akční člen se skládá z pohonu, který působí na regulační orgán měnící hodnotu akční veličiny. Ústřední člen velmi často obsahuje nástavný člen a sumační uzel a podle druhu pomocné energie se dělí na: elektrický, pneumatický a hydraulický.

Pokud ústřední členy pobírají pro svoji činnost výhradně energii z regulované soustavy, pak jde o ***přímé regulátory***. Jejich přístrojová skladba však většinou bývá velmi jednoduchá a neobsahují odděleně výše uvedené čtyři části. Konstruují se jako jednoúčelové.

Rozdělení regulačního obvodu na regulátor a regulovanou soustavu na obr. 1.4 se týká přístrojové skladby regulátoru. **Při analýze a syntéze často akční a měřicí člen přiřazujeme k regulované soustavě**.

1.2 Třídění regulačních obvodů

Regulační obvody lze třídit podle různých hledisek, např. podle:

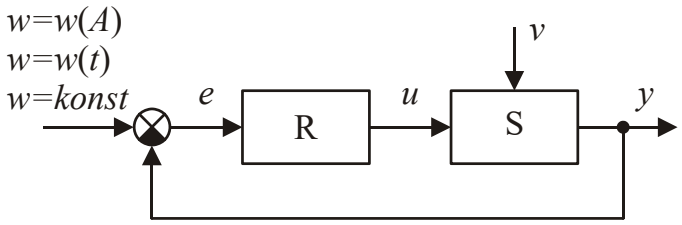
- ***funkce, kterou plní*** (podle cíle regulace) – regulační obvody:
  - ♦ ***stabilizující*** (na konstantní hodnotu), žádaná veličina je nastavena na konstantní hodnotu;
  - ♦ ***programové*** – s časovým programem (žádaná veličina je nenáhodná časová funkce) a s parametrickým programem (žádaná veličina je nenáhodná funkce určitého parametru);
  - ♦ ***sledovací*** (servomechanismy), žádaná veličina může být náhodná i nenáhodná funkce času nebo nějakého parametru;
  - ♦ ***extremální*** (optimalizační), regulovaná veličina je udržována na maximální, nebo minimální (tj. extrémní) hodnotě;
- ***počtu hlavních regulovaných veličin*** – regulační obvody:
  - ♦ ***jednorozměrové*** (jednorozměrné), v regulačním obvodě vystupuje jedna hlavní regulovaná veličina;
  - ♦ ***mnohorozměrové*** (vícerozměrné), v regulačním obvodě vystupuje více hlavních regulovaných veličin;
- ***struktury*** – regulační obvody:
  - ♦ ***jednoduché***, v regulačním obvodě vystupují pouze základní vazby;
  - ♦ ***rozvětvené***, v regulačním obvodě vystupují i jiné vazby než základní;
- ***časového průběhu veličin*** – regulační obvody:
  - ♦ ***spojité*** (analogové), všechny veličiny jsou v čase spojité;
  - ♦ ***diskrétní***, všechny veličiny jsou v čase diskrétní;

- ♦ ***hybridní***, alespoň jedna veličina v čase je diskrétní;

- ***způsobu seřizování regulátoru*** – regulační obvody:
  - ♦ ***s pevným nastavením***, nastavení regulátoru je pevné;
  - ♦ ***adaptivní***, nastavení regulátoru nebo jeho struktura se mění v závislosti na měnících se vlastnostech regulované soustavy, poruch a průběhu žádané veličiny;
- ***matematických modelů*** – regulační obvody:
  - ♦ ***lineární***, matematické modely všech členů jsou lineární;
  - ♦ ***nelineární***, matematický model alespoň jednoho členu je nelineární.

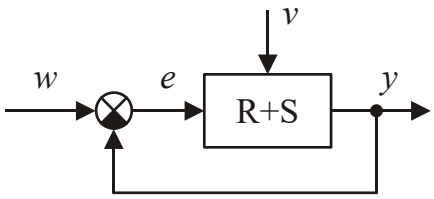
Je samozřejmé, že uvedené třídění regulačních obvodů má pracovní charakter a často je dáno domluvou.

Na obr. 1.5 – 1.13 jsou ukázány některé druhy regulačních obvodů. Regulátor je označen písmenem R a regulovaná soustava písmenem S. Působení poruchových veličin na regulovanou soustavu je vyjádřeno agregovanou (souhrnnou) ***poruchovou veličinou*** *v*. Na obr. 1.5 jsou zaznačeny různé druhy regulace. Pro $w = \text{konst}$ jde o stabilizující regulaci, neboli o regulaci na konstantní hodnotu. Je to nejběžnější typ regulace, kdy regulovaná veličina *y* se udržuje na konstantní hodnotě, v ideálním případě rovné nastavené žádané hodnotě *w*. Pro $w = w(t)$, kde $w(t)$ je konkrétní zadaná časová funkce, jde o regulaci s časovým programem a pro $w = w(A)$, kde $w(A)$ je konkrétní zadaná funkce parametru *A*, jde o regulaci s parametrickým programem. Tato regulace se také nazývá vlečná.



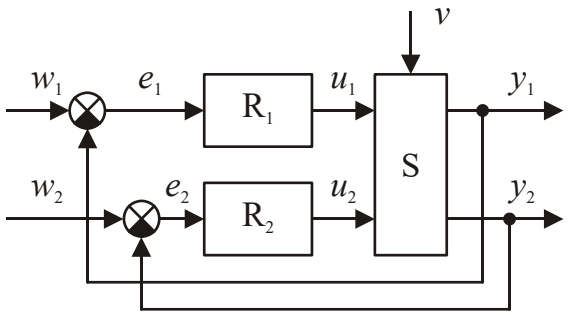
Obr. 1.5 – Jednoduchý regulační obvod

Obr. 1.6 znázorňuje servomechanismus, tj. sledovací regulační obvod. Nejčastěji se jedná o regulaci polohy (natočení), rychlosti (úhlové rychlosti), příp. zrychlení (úhlového zrychlení), při čemž $w = w(t)$ je většinou náhodná časová funkce. Při této regulaci, např. změnu polohy žádané veličiny *w*, pro kterou je třeba nepatrné síly, lze převést na odpovídající změnu polohy regulované veličiny *y* při mnohonásobně větší zátěži. Takovými regulačními obvody jsou např. různé posilovače řízení, korektory u regulačních pohonů, kopírovací zařízení atd. Zásadní rozdíl mezi programovou a sledovací regulací spočívá v tom, že na výstupní straně jde většinou o veliké výkony, že vliv poruchových veličin je většinou zanedbatelný a že servomechanismy se nerozdělují na regulátor a regulovanou soustavu.



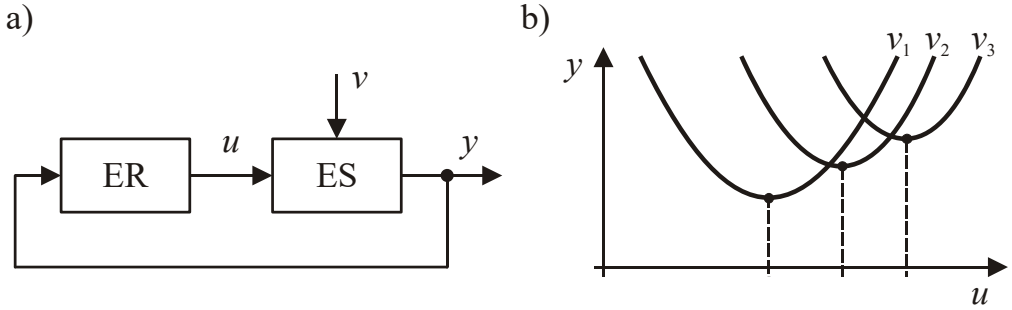
Obr. 1.6 – Servomechanismus

Na obr. 1.7 je dvourozměrový regulační obvod. Obsahuje dva regulátory R_1 a R_2, dvě hlavní regulované veličiny y_1 a y_2 a dvě odpovídající žádané veličiny w_1 a w_2. Úkolem tohoto regulačního obvodu je zajištění cíle regulace [viz (1.1) nebo (1.3)] pro obě regulované veličiny.



Obr 1.7 – Dvourozměrový regulační obvod

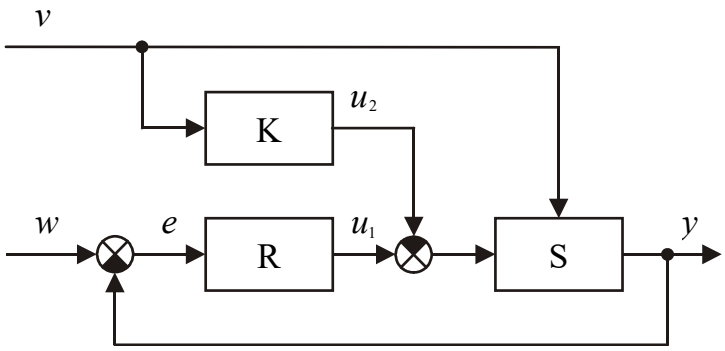
Obr. 1.8 ukazuje extremální regulační obvod, který se skládá z extremálního regulátoru označeného písmeny ER a extremální soustavy označené písmeny ES. Extremální soustava (obr. 1.8b) musí mít v pracovní oblasti unimodální statickou charakteristiku (tj. obsahující pouze jediný extrém požadovaného druhu – maximum, nebo minimum). Cílem extremální regulace je vyhledat na statické charakteristice extremální soustavy extrém požadovaného druhu a regulovanou veličinu y na něm udržovat, i když tento extrém při působení poruch neustále mění svoji polohu, viz obr. 1.8b.



Obr. 1.8 – Extremální regulační obvod: a) blokové schéma, b) statické charakteristiky extremální soustavy

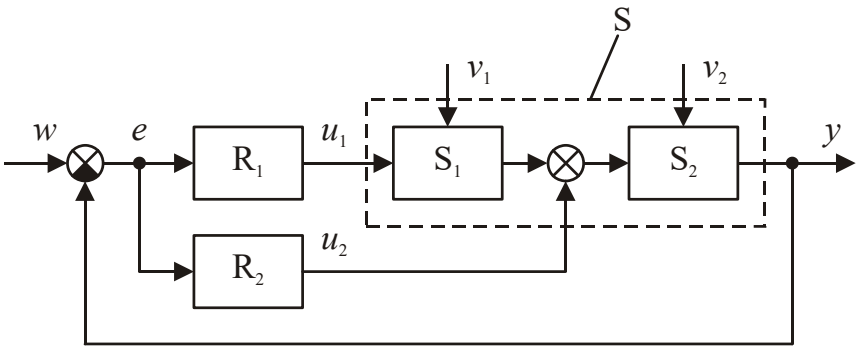
Na obr. 1.9 – 1.13 jsou znázorněny rozvětvené regulační obvody. Obr. 1.9 představuje rozvětvený regulační obvod s kompenzací (s měřením) poruchové veličiny v, který se rovněž nazývá kombinovaným regulačním obvodem. Regulační obvod obsahuje kompenzátor označený písmenem K, který na základě měřené poruchové veličiny v vytváří protipůsobení kompenzující její

negativní vliv. Použití kompenzátoru nemá vliv na základní dynamické vlastnosti (především stabilitu) regulačního obvodu.



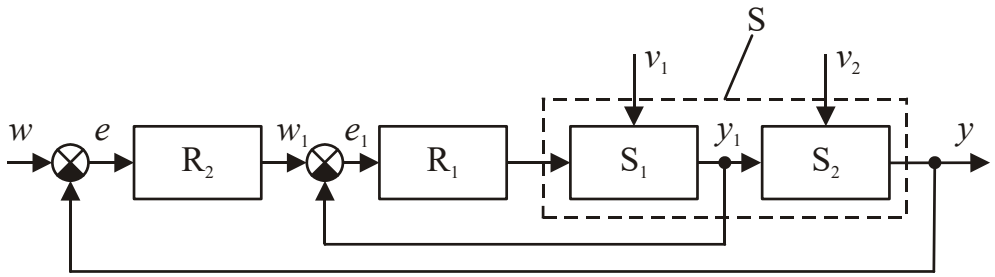
Obr. 1.9 – Rozvětvený regulační obvod s kompenzací poruchové veličiny

Jde-li regulovanou soustavu S fyzicky rozdělit na dvě části S_1 a S_2, kde část S_1 je pomalejší než část S_2 a část S_2 lze přímo ovlivňovat, pak použitím rozvětveného regulačního obvodu s pomocnou akční veličinou u_2 vytvářenou pomocným regulátorem R_2 (obr. 1.10) lze zlepšit kvalitu regulačního pochodu jak vzhledem k žádané veličině w, tak i silnějším potlačením obou poruch v_1 a v_2.



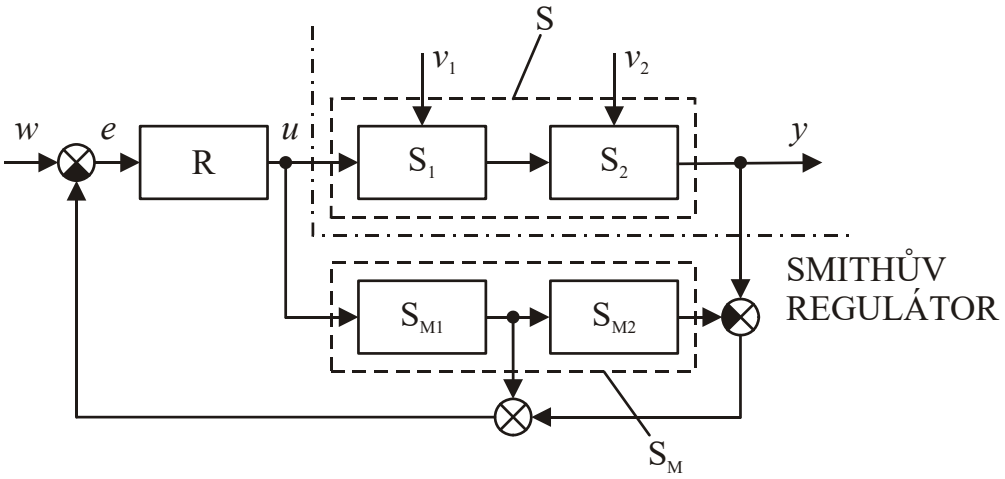
Obr. 1.10 – Rozvětvený regulační obvod s pomocnou akční veličinou

Pokud regulovaná soustava S umožňuje měřit pomocnou regulovanou veličinu y_1 za částí S_1, která může být i velmi silně nelineární (ale neměla by obsahovat dopravní zpoždění), pak použitím rozvětveného regulačního obvodu s pomocnou regulovanou veličinou na obr. 1.11 lze podstatným způsobem zlepšit kvalitu regulačního pochodu. Při správné volbě a seřízení regulátorů R_1 a R_2 je v podstatě eliminována vnitřní smyčka. Takový rozvětvený regulační obvod se chová jako jednoduchý regulační obvod s regulátorem R_2 a regulovanou soustavou S_2. Regulátor R_1 je podřízený a volí se co nejjednodušší. Regulátor R_2 je nadřazený, hlavní. Jde o nejjednodušší hierarchické řízení, protože vnitřní smyčka je podřízena vnější nadřazené smyčce. Tomuto rozvětvenému regulačnímu obvodu se rovněž říká kaskádní (kaskádový) regulační obvod.



Obr. 1.11 – Rozvětvený regulační obvod s pomocnou regulovanou veličinou

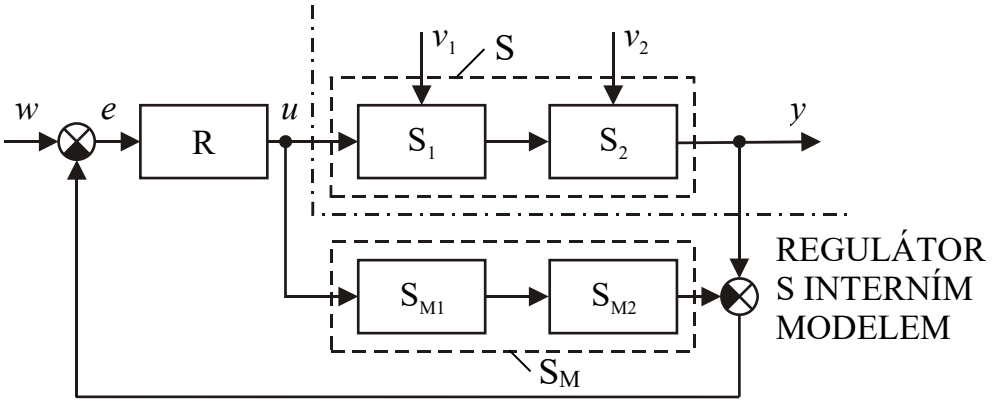
Regulované soustavy často obsahují dopravní zpoždění, které se projevuje tím, že odezvu regulované soustavy nezkresluje, ale o určitou dobu, rovnou právě dopravnímu zpoždění, ji zpozdí. V tomto případě lze použít např. rozvětvený regulační obvod se Smithovým regulátorem na obr. 1.12, kde druhá část S_2 regulované soustavy S reprezentuje dopravní zpoždění (je zřejmé, že rozdělení regulované soustavy S na část S_1 a S_2 není fyzické, ale matematické). Smithův regulátor obsahuje kromě konvenčního regulátoru R také model regulované soustavy S_M rozdělený na model bez dopravního zpoždění S_{M1} a model dopravního zpoždění S_{M2}. Z obr. 1.12 vyplývá, že regulátor získává informaci o nezpožděné regulované veličině z modelu první části regulované soustavy bez dopravního zpoždění S_{M1}, a tedy lze ho seřizovat tak, jako by regulovaná soustava S dopravní zpoždění neobsahovala, tj. při jeho seřizování se bere v úvahu pouze část S_1. Další část rozvětvení slouží především pro identifikaci (tj. zjištění) poruchové veličiny *v*. Je-li model regulované soustavy S_M (tj. modely částí S_{M1} a S_{M2}) adekvátní (tj. jeho přesnost odpovídá danému účelu), pak rozvětvený regulační obvod se Smithovým (někdy také predikčním) regulátorem zajistí stejnou kvalitu regulačního pochodu, jako kdyby regulovaná soustava S neobsahovala dopravní zpoždění S_2 (zpoždění odezvy se samozřejmě vždy projeví).



Obr. 1.12 – Rozvětvený regulační obvod se Smithovým regulátorem

Při regulaci soustav s dopravním zpožděním S_2 lze rovněž použít rozvětvený regulační obvod s regulátorem s vnitřním modelem podle obr. 1.13. V tomto případě regulátor R není konvenční, ale představuje inverzní vlastnosti části

regulované soustavy neobsahující dopravní zpoždění S_1 doplněné filtrem zajišťujícím fyzikální realizovatelnost této inverze. Vlastní rozvětvení s modelem regulované soustavy S_M slouží především k identifikaci poruchové veličiny *v*. Z obr. 1.12 a 1.13 je zřejmé, že vnitřní (interní) model používá i Smithův regulátor, ale v názvu se používá pouze u druhého případu.



Obr. 1.13 – Rozvětvený regulační obvod s regulátorem s vnitřním modelem

V současné době rozvětvené struktury regulačních obvodů mají veliký význam, protože rozvětvení (rozšíření o dodatečné vazby a modely) lze snadno při použití číslicové výpočetní techniky řešit softwarově. Jde především o rozvětvené regulační obvody na obr. 1.9, 1.11 – 1.13.

Rozvětvené regulační obvody se používají tehdy, když jednoduchá struktura regulačního obvodu nedovoluje zajistit požadovanou kvalitu regulačního pochodu.

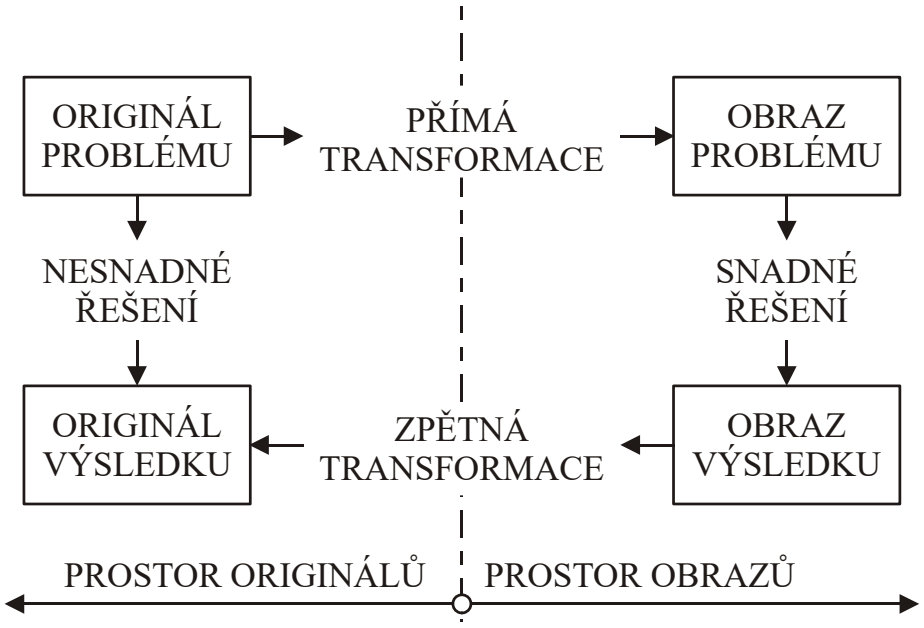
2 Laplaceova transformace

Kapitola je věnována základům Laplaceovy transformace, které jsou potřebné pro analýzu a syntézu spojitých lineárních regulačních obvodů.

2.1 Definiční vztahy a základní vlastnosti

Laplaceova transformace (L-transformace) představuje velmi účinný nástroj při popisu, analýze a syntéze spojitých lineárních systémů řízení.

Účelem transformace je převést složitý problém z ***prostoru originálů*** do ***prostoru obrazů***, kde se tento transformovaný problém vyřeší velmi snadno a pak se převede zpět do prostoru originálů v souladu s obr. 2.1.



Obr. 2.1 – Obecné schéma řešení problémů pomocí transformace

Prostor originálů je časová oblast a prostor obrazů je oblast komplexní proměnné. Za složité problémy v časové oblasti jsou považovány matematické operace, jako jsou např. derivování a integrování. Těmto operacím v oblasti komplexní proměnné odpovídají jednoduché algebraické operace násobení a dělení komplexní proměnnou. Stejně tak řešení lineárních diferenciálních rovnic v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné řešení algebraických rovnic.

Laplaceova transformace je definována vztahy

$$X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \ , \tag{2.1}$$

$$x(t) = \mathrm{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} X(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \ , \tag{2.2}$$

kde $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ je komplexní proměnná ($\alpha = \mathrm{Re}\ s$, $\omega = \mathrm{Im}\ s$), t – reálná proměnná (v tomto případě čas), $x(t)$ – ***originál*** – reálná funkce definovaná v oblasti pro $t \in \langle 0, \infty)$, $X(s)$ – ***obraz*** – komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné s, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ – imaginární jednotka, L – ***operátor přímé Laplaceovy transformace***, L^{-1} – ***operátor zpětné*** (inverzní) ***Laplaceovy transformace***, c – reálná konstanta zvolená tak, aby v polorovině Re $s > c$ funkce $X(s)$ neměla žádné singulární body.

Ze vztahu (2.1) vyplývá, že Laplaceova transformace zobrazuje funkci reálné proměnné $x(t)$ na komplexní funkci komplexní proměnné $X(s)$. Hodnota originálu $x(t)$ pro $t \in \langle 0, \infty)$ představuje ve fyzikálních interpretacích zpravidla velikost určité fyzikální veličiny v časovém okamžiku t. Z tohoto důvodu v těchto případech fyzikální rozměr komplexní proměnné s je $\mathrm{čas}^{-1}$ [s^{-1}]. Imaginární část komplexní proměnné, tj. $\omega = \mathrm{Im}\ s$ má fyzikální interpretaci úhlového kmitočtu s rozměrem $\mathrm{čas}^{-1}$ [s^{-1}].

Aby časová funkce $x(t)$ byla originálem (předmětem), musí být:
a) nulová pro záporný čas, tj.:

$$x(t)=\begin{cases} x(t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

b) exponenciálního řádu, tj. musí vyhovovat nerovnosti

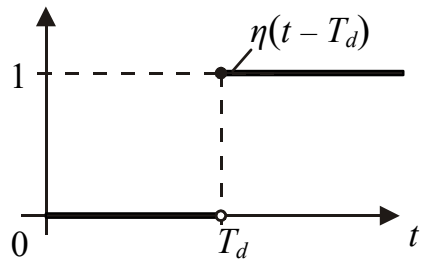
$$\left.\begin{aligned} &|x(t)| \leq M\, \mathrm{e}^{\alpha_0 t}\ , \\ &M > 0,\ \alpha_0 \in \langle 0,\infty),\ t \in \langle 0,\infty)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

c) po částech spojitá.

Poslední dvě podmínky většina časových funkcí používaných v technice splňuje. Druhé podmínce nevyhovuje např. funkce $x(t)=\mathrm{e}^{t^2}$.

První podmínku lze splnit vždy vynásobením dané časové funkce ***Heavisideovým jednotkovým skokem***, pro $T_d = 0$ definovaným vztahem (viz obr. 2.2)

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$



Obr. 2.2 – Jednotkový Heavisideův skok pro $T_d > 0$

Protože v podstatě každá spojitá funkce $x(t)$ před použitím Laplaceovy transformace musí být vynásobena Heavisideovým jednotkovým skokem, proto zápis $x(t)\eta(t)$ se většinou zjednodušuje a symbol $\eta(t)$ se vynechává.

Originál se značí malým písmenem a jeho obraz stejným velkým písmenem. Vztah mezi originálem a jeho obrazem se nazývá ***korespondence*** a zapisuje se ve tvaru

$$x(t) \mathrel{\hat{=}} X(s). \tag{2.6}$$

Korespondence mezi originálem a obrazem v Laplaceově transformaci je jednoznačná, jsou-li považovány za ekvivalentní takové časové funkce, jejichž funkční hodnoty se liší o konečnou hodnotu pouze v konečném počtu izolovaných bodů.

U Laplaceovy transformace počáteční hodnotu $x(0)$ v případě, že funkce $x(t)$ není v bodě $t = 0$ spojitá, je třeba chápat jako pravostrannou limitu

$$x(0)=x(0_+)=\lim_{t\to 0_+} x(t)\,. \tag{2.7}$$

Totéž se týká i derivací funkce $x(t)$, a proto je třeba hodnoty $x(0)$, $\frac{\mathrm{d}\,x(0)}{\mathrm{d}\,t}$, … považovat za limity zprava.

Příklad 2.1

Pomocí definičního vzorce přímé Laplaceovy transformace (2.1) je třeba určit obrazy časových funkcí (originálů):
a) $\eta(t - T_d)$, b) t, c) e^{-at}, d) $\sin \omega t$, e) $\delta(t)$ (a, ω, T_d jsou konstanty).

Řešení:

a) $$\mathrm{L}\{\eta(t-T_d)\} = \int_0^\infty \eta(t-T_d)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \int_{T_d}^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_{T_d}^\infty = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s},$$

$$\eta(t-T_d) \doteq \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}.$$

Je zřejmé, že zpoždění originálu o dobu T_d odpovídá násobení obrazu exponenciální funkcí $\mathrm{e}^{-T_d s}$.

b) $$\mathrm{L}\{t\} = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \left[t\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2},$$

$$t \doteq \frac{1}{s^2}.$$

Při integrování byla použita metoda integrace per partes.

$$\int_a^b u\dot{v}\,\mathrm{d}\,t = [uv]_a^b - \int_a^b \dot{u}v\,\mathrm{d}\,t, \tag{2.8}$$

kde $u = t$, $\dot{v} = \mathrm{e}^{-st}$.

c) $$\mathrm{L}\{\mathrm{e}^{-at}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{s+a}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a},$$

$$\mathrm{e}^{-at} \doteq \frac{1}{s+a}.$$

d) $$\mathrm{L}\{\sin \omega t\} = \int_0^\infty (\sin \omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}\,t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}\,t\right] =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left\{\left[-\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}\right]_0^\infty + \left[\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\right]_0^\infty\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

$$\sin \omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Byl použit Eulerův vztah

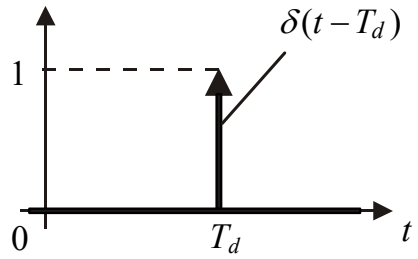
$$\sin \omega t = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right).$$

e) Symbol $\delta(t)$ označuje tzv. ***Diracův jednotkový impuls***, který může být pro $T_d = 0$ definován např. vztahy (viz obr. 2.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\,\mathrm{d}t = x(0),\ \ \delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$$\delta(t) \mathrel{\hat{=}} 1.$$



Obr. 2.3 – Jednotkový Diracův impuls pro $T_d > 0$

Příklad 2.2

Pomocí definičního vzorce přímé Laplaceovy transformace (2.1) je třeba určit obrazy matematických operací: a) $a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)$, kde a_1, a_2 jsou libovolné konstanty, mohou být i komplexní, b) $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}$, c) $\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$.

Řešení:

a) $$\mathrm{L}\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} = \int_0^{\infty} [a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= a_1\int_0^{\infty} x_1(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \pm a_2\int_0^{\infty} x_2(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = a_1X_1(s) \pm a_2X_2(s),$$

$$a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t) \mathrel{\hat{=}} a_1X_1(s) \pm a_2X_2(s).$$

Odvozená korespondence vyjadřuje ***linearitu*** Laplaceovy transformace.

b) $$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \left[x(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty sx(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = sX(s) - x(0),$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} \mathrel{\hat{=}} sX(s) - x(0).$$

Při integrování byla použita metoda integrace per partes (2.8), kde $u = \mathrm{e}^{-st}$, $\dot{v} = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}$.

Podobně by bylo možné určit i obraz derivace *n*-tého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^n\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^n} \mathrel{\hat{=}} s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}\,x(0)}{\mathrm{d}\,t} - \ldots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}\,x(0)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}.$$

Budou-li počáteční podmínky nulové, pak platí velmi jednoduchá, ale důležitá korespondence

$$\frac{\mathrm{d}^n\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^n} \mathrel{\hat{=}} s^n X(s).$$

Je vidět, že derivaci *n*-tého řádu originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné násobení obrazu *n*-tou mocninou komplexní proměnné s.

c) $$\mathrm{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\,\tau\right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\,\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left[\left[\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\,\tau\right]\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty x(t)\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}\,t =$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{s}X(s),$$

$$\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\,\tau \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}X(s).$$

Byla použita metoda integrace per partes (2.8), kde $u = \int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\,\tau$, $\dot{v} = \mathrm{e}^{-st}$.

Je zřejmé, že integraci originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné dělení obrazu komplexní proměnnou *s*.

V příkladech 2.1 a 2.2 byly odvozeny pomocí definičního vzorce přímé Laplaceovy transformace (2.1) obrazy některých jednoduchých časových funkcí a matematických operací. Používání definičního vzorce zpětné Laplaceovy transformace (2.2) je většinou velmi zdlouhavé a pracné, vyžaduje dobrou znalost teorie funkcí komplexní proměnné. Při praktickém používání Laplaceovy transformace se s definičními vzorci (2.1) a (2.2) většinou nepracuje. S výhodou se využívá ***slovníku Laplaceovy transformace***, ve kterém jsou uvedeny základní korespondence, viz přílohy 1 a 2.

Příklad 2.3

Na základě korespondence

$$\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s+a} \tag{2.10}$$

a vlastností Laplaceovy transformace z tabulky definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace (příloha 1) lze odvodit některé další korespondence.

Řešení:

a) Pro $a = 0$ (vlastnost 18 v tabulce definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace – příloha 1) z korespondence (2.10) se dostane

$$\mathrm{e}^{0} = 1 \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s},$$

$$\eta(t) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}.$$

b) Na základě linearity (vlastnost 3 v tabulce definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace – příloha 1), předchozí korespondence a korespondence (2.10) lze psát

$$\eta(t) - \mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)},$$

$$1 - \mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{a}{s(s+a)}.$$

c) Derivací korespondence (2.10) podle parametru a (vlastnost 20 v tabulce definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace – příloha 1) se dostane

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\mathrm{e}^{-at}\right) = -t\,\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{s+a}\right) = -\frac{1}{(s+a)^2},$$

$$t\,\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{(s+a)^2}.$$

d) Z předchozí korespondence pro $a = 0$ (vlastnost 18 v tabulce definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace – příloha 1) se obdrží

$$t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s^2}.$$

e) Na základě integrace v časové oblasti (vlastnost 12 v tabulce definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace – příloha 1) lze z předchozí korespondence získat novou korespondenci

$$\int_0^t \tau \,\mathrm{d}\,\tau \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

$$\frac{t^2}{2} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s^3}.$$

f) Z předchozí korespondence pomocí vlastnosti 8 v tabulce definičních vztahů a základních vlastností Laplaceovy transformace – příloha 1 se obdrží

$$\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{(s+a)^3}.$$

g) Z korespondence (2.10) pro $a = \pm \mathrm{j}\omega$ se dostane

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega t} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s \mp \mathrm{j}\omega}.$$

Z Eulerových vztahů

$$\sin\omega t = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right), \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

se získají další dvě důležité korespondence:

$$\sin\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

$$\sin\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

$$\cos\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Podobným způsobem lze získat i další korespondence. Je vidět, že při praktickém používání Laplaceovy transformace se většinou vystačí se znalostí jejích základních vlastností a několika důležitých korespondencí.

2.2 Určování originálů z obrazů

Slovníku Laplaceovy transformace (příloha 2) je možno použít přímo, pokud se v něm najdou originály nebo obrazy v odpovídajícím tvaru. Většinou se vystačí s jednoduchými úpravami. Potíže vznikají při zpětné transformaci, protože obrazy jsou složité a je nutné je rozložit na jednodušší výrazy, které již ve slovníku Laplaceovy transformace lze najít. Nejčastěji se používá rozklad na parciální zlomky.

V praktických případech má obraz nejčastěji tvar ***ryzí racionální lomené funkce***

$$X(s)=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0},\ n>m. \tag{2.11}$$

Pokud stupeň jmenovatele n není větší než stupeň čitatele m, je třeba provést úpravu obrazu vydělením čitatele jmenovatelem.

Obraz ve tvaru racionální lomené funkce (2.11) lze zjednodušit rozložením na ***parciální*** (částečné) ***zlomky***, pro které již ze slovníku Laplaceovy transformace lze snadno najít odpovídající korespondence.

Pro mnohočlen ve jmenovateli platí

$$N(s)=a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0=a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n), \tag{2.12}$$

kde s_1, s_2, ..., s_n jsou ***kořeny*** mnohočlenu $N(s)$ a současně ***póly*** (singulární body) obrazu $X(s)$.

Póly s_i mohou být jednoduché nebo násobné. Nejdříve budou uvažovány jednoduché póly, které mohou být reálné nebo komplexní. Pro reálné koeficienty a_0, a_1, ..., a_n komplexní kořeny musí vystupovat vždy v komplexně sdružených dvojicích, např.

$$s_i=\alpha+\mathrm{j}\beta,\ \ s_{i+1}=\alpha-\mathrm{j}\beta\,. \tag{2.13}$$

Pro komplexně sdruženou dvojici (2.13) platí

$$(s-s_i)(s-s_{i+1})=s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2=s^2+cs+d. \tag{2.14}$$

Dvojice ryze imaginárních pólů

$$s_i=\mathrm{j}\beta,\qquad s_{i+1}=-\mathrm{j}\beta \tag{2.15}$$

je speciálním případem (2.13), resp. (2.14) pro $\alpha = c = 0$.

Nyní jsou uvažovány násobné póly. Pro r-násobný reálný pól s_i lze psát

$$(s-s_i)^r\,. \tag{2.16}$$

Podobně lze i pro r-násobnou komplexně sdruženou dvojici pólů s_i a s_{i+1} v souladu s (2.14) psát

$$(s-s_i)^r(s-s_{i+1})^r=(s^2+cs+d)^r. \tag{2.17}$$

Obraz $X(s)$ ryzí racionální lomené funkce (2.11) pro uvedené typy pólů lze tedy zapsat ve tvaru (za předpokladu, že $a_n = 1$)

$$X(s)=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{M(s)}{(s-a)(s-b)^r(s^2+cs+d)(s^2+es+f)^q}, \tag{2.18}$$

kde $(s-a)$ odpovídá jednoduchému reálnému pólu a,

$(s-b)^r$ odpovídá r-násobnému reálnému pólu b,

$\left(s^2+cs+d\right)$ odpovídá jednoduché komplexně sdružené dvojici pólů $\frac{1}{2}\left(-c\pm\sqrt{c^2-4d}\right)$,

$\left(s^2+es+f\right)^q$ odpovídá q-násobné komplexně sdružené dvojici pólů $\frac{1}{2}\left(-e\pm\sqrt{e^2-4f}\right)$.

Obraz $X(s)$ vyjádřený vztahem (2.18) může být zapsán v rozloženém tvaru

$$X(s)=\frac{A}{s-a}+\frac{B_1}{s-b}+\frac{B_2}{(s-b)^2}+\ldots+\frac{B_r}{(s-b)^r}+ \\ +\frac{Cs+D}{s^2+cs+d}+\frac{E_1s+F_1}{s^2+es+f}+\frac{E_2s+F_2}{\left(s^2+es+f\right)^2}+\ldots+\frac{E_qs+F_q}{\left(s^2+es+f\right)^q}, \tag{2.19}$$

kde konstanty A, B_1, B_2, ..., B_r, C, D, E_1, E_2, ..., E_q, F_1, F_2, ..., F_q se určí např. dosazovací metodou nebo metodou neurčitých koeficientů. Někdy je vhodné tyto metody kombinovat.

Uvedený postup se nazývá ***rozklad na parciální zlomky***.

Příklad 2.4

Je třeba určit originál $x(t)$ k obrazu

$$X(s)=\frac{s^3+s^2+9s-2}{s^3+s^2-2s}\ . \tag{2.20}$$

Řešení:

Obraz (2.20) není ryzí racionální lomená funkce, a proto musí být upraven vydělením čitatele jmenovatelem:

$$\left(s^3+s^2+9s-2\right):\left(s^3+s^2-2s\right)=1+\frac{11s-2}{s^3+s^2-2s}.$$
$$\frac{-s^3-s^2+2s}{11s-2}$$

Obraz (2.20) lze nyní zapsat ve tvaru

$$X(s)=X_1(s)+X_2(s)=1+\frac{11s-2}{s^3+s^2-2s},$$

kde

$$X_2(s)=\frac{11s-2}{s^3+s^2-2s}=\frac{11s-2}{s(s-1)(s+2)}$$

je již ryzí racionální lomená funkce, a proto v souladu s (2.19) platí

$$\frac{11s-2}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s+2}. \tag{2.21}$$

a) Dosazovací metoda

Rovnice (2.21) se vynásobí jmenovatelem levé strany a dostane se

$$11s - 2 = A_1(s-1)(s+2) + A_2 s(s+2) + A_3 s(s-1). \tag{2.22}$$

Tato rovnice musí platit pro libovolnou hodnotu komplexní proměnné s. Zvolí se tedy 3 různé hodnoty komplexní proměnné s a dostanou se 3 rovnice pro 3 neznámé konstanty A_1, A_2 a A_3. Je zřejmé, že je vhodné volit póly obrazu $X(s)$, tj.:

$$\begin{aligned}
s = s_1 = 0 \quad &\Rightarrow -2 = A_1(-1)(2) \quad &&\Rightarrow A_1 = 1,\\
s = s_2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad 9 = A_2(1)(3) \quad &&\Rightarrow A_2 = 3,\\
s = s_3 = -2 \quad &\Rightarrow -24 = A_3(-2)(-3) \quad &&\Rightarrow A_3 = -4.
\end{aligned}$$

Rozklad obrazu (2.20) má v souladu s (2.21) tvar

$$X(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{3}{s-1} - \frac{4}{s+2}.$$

Na základě korespondencí odvozených v příkladech 2.1 a 2.3 lze již snadno určit originál

$$x(t) = \delta(t) + \eta(t) + 3\mathrm{e}^{t} - 4\mathrm{e}^{-2t} = \delta(t) + 1 + 3\mathrm{e}^{t} - 4\mathrm{e}^{-2t}.$$

Nesmí se zapomenout, že se jedná o originál, a tedy platí pouze pro $t \geq 0$.

b) Metoda neurčitých koeficientů

Vztah (2.22) se upraví podle mocnin komplexní proměnné s, tj.

$$11s - 2 = (A_1 + A_2 + A_3)s^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)s - 2A_1.$$

Protože koeficienty u stejných mocnin komplexní proměnné s musí být stejné, lze proto psát:

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 + A_2 + A_3,\\
11 &= A_1 + 2A_2 - A_3,\\
-2 &= -2A_1.
\end{aligned}$$

Z této soustavy 3 lineárních algebraických rovnic snadno získáme 3 neznámé konstanty $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = -4$. Další postup je shodný s případem a).

2.3 Řešení lineárních diferenciálních rovnic

Největší význam Laplaceovy transformace spočívá v jednoduchém a efektivním řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a jejich soustav. Při jejím použití se lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty n-tého řádu spolu se zadanými počátečními podmínkami transformuje z časové oblasti (prostoru originálů) do oblasti komplexní

proměnné (prostoru obrazů), kde jí odpovídá algebraická rovnice *n*-tého stupně. Tato algebraická rovnice je lineární podle obrazu řešení. Zpětnou Laplaceovou transformací obrazu řešení se získá originál řešení, tj. výsledné časové řešení v souladu s obr. 2.1. Velmi výhodná je skutečnost, že při řešení jsou současně uvažovány počáteční podmínky.

Stejného postupu se používá i při řešení lineárních integrálních a integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a jejich soustav.

Je uvažována lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m} + \ldots + b_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 u(t) \quad (2.23)$$

spolu s příslušnými počátečními podmínkami

$$y(0), \frac{\mathrm{d}\, y(0)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}, \quad (2.24a)$$

$$u(0), \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(0)}{\mathrm{d}t^{m-1}}. \quad (2.24b)$$

V případě nespojitosti počátečních podmínek (2.24) v bodě $t = 0$ je třeba uvažovat jejich pravostranné limity.

Časová funkce $u(t)$ se nazývá ***vstupní funkce*** a $y(t)$ ***výstupní funkce*** nebo ***řešení***. Větší z čísel n nebo m se nazývá ***řád diferenciální rovnice***.

Nebude-li v (2.23) uvažována pravá strana, dostane se diferenciální rovnice ***homogenní*** nebo také ***bez pravé strany***

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = 0, \quad (2.25)$$

pro níž je třeba uvažovat počáteční podmínky (2.24a).

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice (2.23) spolu s počátečními podmínkami (2.24) bude mít tvar algebraické rovnice

$$\left(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right) Y(s) - L(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0\right) U(s) - R(s), \quad (2.26)$$

kde $L(s)$ je mnohočlen nejvýše $(n-1)$-ho stupně určený počátečními podmínkami levé strany diferenciální rovnice (2.24a), $R(s)$ – mnohočlen nejvýše $(m-1)$-ho stupně určený počátečními podmínkami pravé strany diferenciální rovnice (2.24b).

Z algebraické rovnice (2.26) lze nyní snadno vyznačit obraz řešení

$$Y(s) = \frac{M(s)}{N(s)} U(s) + \frac{L(s) - R(s)}{N(s)}, \quad (2.27)$$

$$M(s) = b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0, \quad (2.28)$$

$$N(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n). \quad (2.29)$$

Společný jmenovatel obrazu řešení (2.27), tj. mnohočlen (2.29) zásadním způsobem ovlivňuje vlastnosti řešení

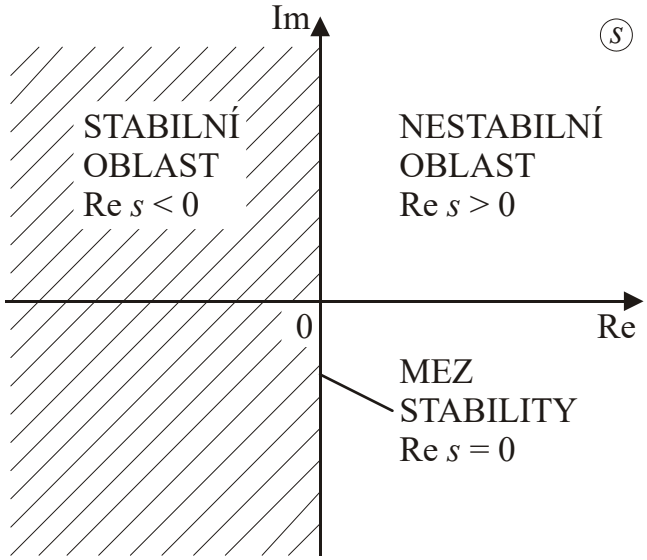
$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y(s)\}, \tag{2.30}$$

a proto se nazývá ***charakteristický mnohočlen*** příslušné diferenciální rovnice (2.23) a samozřejmě i homogenní rovnice (2.25). Když se položí rovný nule, dostane se ***charakteristická rovnice*** příslušné diferenciální rovnice (2.23) a samozřejmě i homogenní rovnice (2.25)

$$a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0. \tag{2.31}$$

Kořeny $s_1, s_2, \ldots, s_n$ charakteristického mnohočlenu (2.29), resp. charakteristické rovnice (2.31) rozhodují o ***stabilitě*** řešení (2.30) diferenciální rovnice (2.23). **Řešení lineární diferenciální rovnice** (2.23) **je (asymptoticky) stabilní, když omezené vstupní funkci** $u(t)$ **odpovídá omezené řešení** $y(t)$ (2.30). ***Nutná a postačující podmínka (asymptotické) stability*** má tvar (viz obr. 2.4)

$$\mathrm{Re}\, s_i < 0,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{2.32}$$



Obr. 2.4 – Stabilní a nestabilní oblast pro kořeny charakteristického mnohočlenu $N(s)$

Příklad 2.5

Pomocí Laplaceovy transformace je třeba řešit homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y(t) = 0,\ \omega > 0$$

při počátečních podmínkách

$$y(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}\, y(0)}{\mathrm{d}\, t} = 3\,.$$

Řešení:

Na levou i pravou stranu diferenciální rovnice se použije Laplaceova transformace

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} + \mathrm{L}\left\{\omega^2 y(t)\right\} = \mathrm{L}\{0\}$$

a dostane se

$$s^2 Y(s) - s y(0) - \frac{\mathrm{d}\, y(0)}{\mathrm{d}t} + \omega^2 Y(s) = 0\,.$$

Po dosazení počátečních podmínek a úpravě se obdrží obraz řešení

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + \omega^2}\,.$$

Originál řešení se určí přímo z odvozené korespondence v příkladě 2.1d.

$$y(t) = \frac{3}{\omega}\sin \omega t,\ t \geq 0\,.$$

Časový průběh řešení je na obr. 2.5.

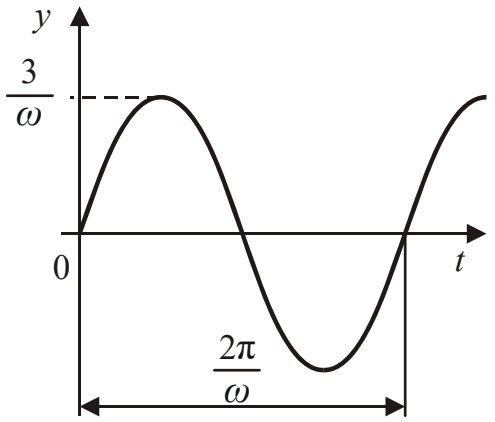
Z obrazu řešení vyplývá, že charakteristický mnohočlen diferenciální rovnice

$$N(s) = s^2 + \omega^2$$

má dva komplexně sdružené ryze imaginární kořeny

$$s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\,\omega,$$

a proto v souladu s obr. 2.4 její řešení je na mezi stability, viz obr. 2.5.



Obr. 2.5 – Časový průběh řešení z příkladu 2.5

Příklad 2.6

Je třeba najít řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

při počátečních podmínkách

$$y(0)=3,\ \dot{y}(0)=-2$$

pro $u(t) = 12$.

Řešení:

Na lineární diferenciální rovnici se použije Laplaceova transformace

$$\mathrm{L}\{\ddot{y}(t)\}+\mathrm{L}\{4\dot{y}(t)\}+\mathrm{L}\{3y(t)\}=\mathrm{L}\{u(t)\}$$

a po úpravě se dostane

$$Y(s)=Y_R(s)+Y_V(s)=\frac{1}{s^2+4s+3}U(s)+\frac{(s+4)y(0)+\dot{y}(0)}{s^2+4s+3}.$$

Po dosazení počátečních podmínek a uvažování obrazu vstupní funkce $U(s)=\frac{12}{s}\ \left[u(t)=12\ \hat{=}\ U(s)=\frac{12}{s}\right]$ se obdrží

$$Y_R(s)=\frac{12}{s(s^2+4s+3)}=\frac{12}{s(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3},$$

$$Y_V(s)=\frac{3s+10}{s^2+4s+3}=\frac{3s+10}{(s+1)(s+3)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{B_1}{s+3}.$$

Rozklad na parciální zlomky se provede např. dosazovací metodou:

$$12=A(s+1)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s+1),$$
$$s=0\Rightarrow A=4,$$
$$s=-1\Rightarrow B=-6,$$
$$s=-3\Rightarrow C=2;$$

$$3s+10=A_1(s+3)+B_1(s+1),$$
$$s=-1\Rightarrow A_1=\frac{7}{2},$$
$$s=-3\Rightarrow B_1=-\frac{1}{2};$$

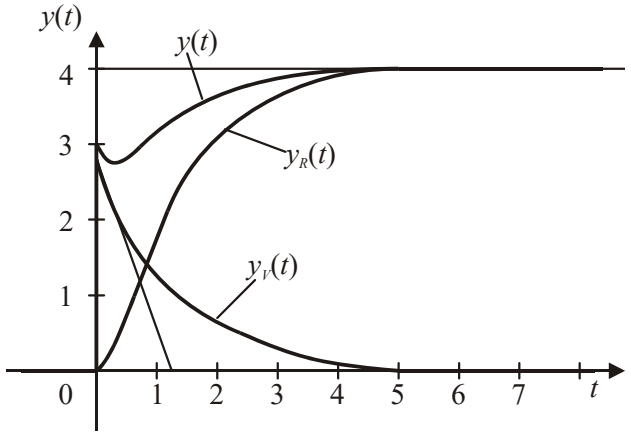
$$Y_R(s)=\frac{4}{s}-\frac{6}{s+1}+\frac{2}{s+3},$$
$$Y_V(s)=\frac{7}{2(s+1)}-\frac{1}{2(s+3)},$$

kde $Y_R(s)$ je obraz ***vynucené*** (relaxované) části řešení (je to odezva na vstup), $Y_V(s)$ – obraz ***volné*** části řešení (odezva na počáteční podmínky).

Nyní již na základě korespondencí odvozených v příkladech 2.1 a 2.3 se dostane:

$$y_R(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y_R(s)\} = 4 - 6\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-3t},$$
$$y_V(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y_V(s)\} = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t},$$
$$y(t) = y_R(t) + y_V(t) = 4 - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}\ .$$

Průběh celkového řešení i jeho částí je ukázáno na obr. 2.6. Je vidět, že řešení $y(t)$ vyhovuje zadaným počátečním podmínkám.



Obr. 2.6 – Časový průběh řešení z příkladu 2.6

Těmto podmínkám vyhovuje i volná část řešení $y_V(t)$, která v tomto případě je současně i řešením homogenní diferenciální rovnice (protože počáteční podmínky pravé strany jsou nulové)

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 0,$$
$$y(0) = 3,\ \dot{y}(0) = -2\,.$$

Z charakteristického mnohočlenu

$$N(s) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$$

vyplývá, že jeho kořeny $s_1 = -1$ a $s_2 = -3$ jsou záporné reálné, a proto řešení je stabilní. Vstupní funkce $u(t) = 12$ je omezená a ze získaného řešení $y(t)$ i z obr. 2.6 je zřejmé, že výstupní funkce $y(t)$ je rovněž omezená.

Při běžném řešení diferenciálních rovnic se většinou celkové řešení nerozděluje na část vynucenou a volnou.

Příklad 2.7

Je třeba vyřešit jednoduchou lineární integrodiferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = u(t)$$

při nulové počáteční podmínce $y(0) = 0$ a $u(t) = \eta(t)$.

Řešení:

Na integrodiferenciální rovnici se použije Laplaceova transformace

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}\right\}+\mathrm{L}\{6y(t)\}+\mathrm{L}\left\{9\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right\}=\mathrm{L}\{u(t)\},$$

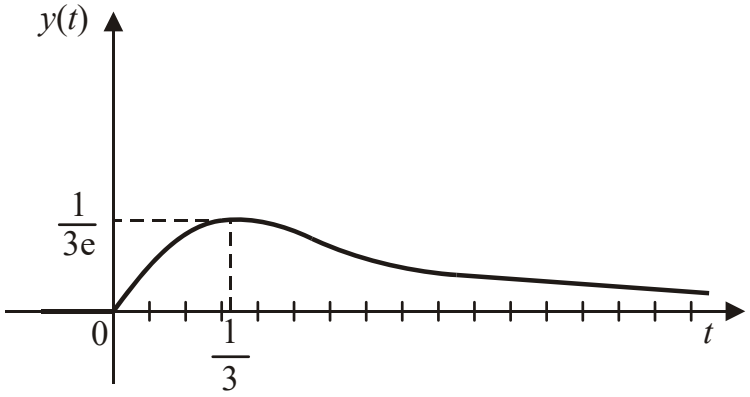
$$sY(s)-y(0)+6Y(s)+\frac{9}{s}Y(s)=U(s).$$

Pro $y(0)=0$ a $U(s)=\mathrm{L}\{\eta(t)\}=\frac{1}{s}$ po úpravě se obdrží obraz řešení

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+6s+9}=\frac{1}{(s+3)^2}.$$

Z korespondence odvozené v příkladě 2.3 se dostane přímo originál řešení (obr. 2.7)

$$y(t)=t\,\mathrm{e}^{-3t},\ t\geq 0.$$



Obr. 2.7 – Časový průběh řešení z příkladu 2.7

3 Matematické modely

Kapitola uvádí nejdůležitější tvary lineárních matematických modelů a třídění základních dynamických členů. Vysvětluje algebru blokových schémat a stručně popisuje linearizaci.

3.1 Lineární matematické modely

Jsou uvažovány pouze ***lineární stacionární dynamické členy***, tj. takové, jejichž vlastnosti se v čase nemění. Místo pojmu stacionární se rovněž často používá pojem ***t-invariantní***. Jejich matematické modely mohou mít různé tvary a mohou popisovat jejich vlastnosti v různých oblastech (prostorech). Proto je třeba vždy vybrat takový matematický model, který pro daný účel bude

nejvhodnější. V teorii lineární regulace se nejčastěji pracuje s matematickými modely v šesti tvarech, ze kterých lze určit všechny důležité dynamické i statické vlastnosti uvažovaných lineárních členů.

Jednou z nejdůležitějších vlastností je ***fyzikální realizovatelnost***, která spočívá v tom, že daný matematický model může popisovat (reprezentovat) nějaký skutečný (reálný) lineární dynamický člen. Podmínka fyzikální realizovatelnosti v podstatě vyjadřuje ***princip příčinnosti*** (kauzality) znamenající, že následek (reakce, výstup) je vyvolán vždy příčinou (akcí, vstupem). Prakticky to znamená, že odezva dynamického členu nemůže vzniknout před okamžikem změny vstupní veličiny.

Další důležitou vlastností dynamického členu je jeho vlastnost v ustáleném stavu, která vyjadřuje závislost ustálených hodnot výstupní veličiny na ustálených hodnotách vstupní veličiny. Grafické zobrazení této závislosti se nazývá ***statická charakteristika***. U lineárních dynamických členů statická charakteristika, pokud existuje, je vždy přímka procházející počátkem souřadnic (obr. 3.1).

Níže budou uvedeny základní tvary matematických modelů lineárních stacionárních dynamických členů (se soustředěnými parametry).

A – Diferenciální rovnice

Nejčastěji je k dispozici popis vlastností lineárního dynamického členu ve tvaru ***lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty***

$$\begin{aligned} &a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = \\ &= b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} &y(0), \frac{\mathrm{d}\, y(0)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}, \\ &u(0), \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(0)}{\mathrm{d}t^{m-1}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

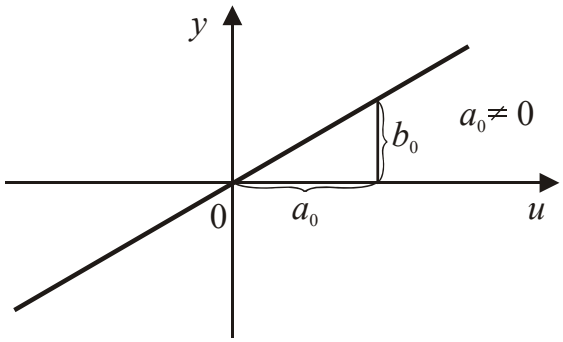
kde $y(t)$ je výstupní veličina a $u(t)$ – vstupní veličina, n – řád daného lineárního dynamického členu, $r_s = n - m$ – ***relativní stupeň*** daného lineárního dynamického členu.

V ustáleném stavu vymizí všechny změny v čase, a proto platí

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^i\, y(t)}{\mathrm{d}\, t^i} \to 0 \;\; \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,n, \\ y(t) \to y(\infty) = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}^j\, u(t)}{\mathrm{d}\, t^j} \to 0 \;\; \text{pro} \quad j = 1,2,\ldots,m, \\ u(t) \to u(\infty) = u. \end{cases} \tag{3.3}$$

Na základě vztahů (3.3) a (3.1) lze ***získat rovnici statické charakteristiky*** (obr. 3.1)

$$y = \frac{b_0}{a_0} u, \qquad a_0 \neq 0\,. \tag{3.4}$$



Obr. 3.1 – Statická charakteristika lineárního dynamického členu

Rozlišuje se ***podmínka fyzikální realizovatelnosti*** silná a slabá. V případě lineární diferenciální rovnice (3.1) tyto podmínky mají tvar

silná $\qquad n > m \;\Rightarrow\; r_s > 0\,,$ (3.5a)

slabá $\qquad n = m \;\Rightarrow\; r_s = 0\,.$ (3.5b)

Pokud platí

$$n < m\,, \tag{3.5c}$$

pak není splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti a daný matematický model nepopisuje skutečný (reálný) dynamický člen.

B – Přenos

Přenos $G(s)$ je dán poměrem obrazu výstupní veličiny $Y(s)$ k obrazu vstupní veličiny $U(s)$ při nulových počátečních podmínkách. Použitím Laplaceovy transformace na lineární diferenciální rovnici (3.1) za předpokladu nulových počátečních podmínek (3.2) se dostane [viz rovněž (2.26)]

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right) U(s)\,,$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}\,. \tag{3.6}$$

Ze srovnání (3.1) s (3.6) je vidět, že přenos lze z dané lineární diferenciální rovnice získat přímo, protože v čitateli vystupují koeficienty její pravé strany a ve jmenovateli koeficienty její levé strany. Koeficienty jsou násobeny komplexní proměnnou s umocněnou na stupeň, který odpovídá řádu příslušné derivace.

Jmenovatel přenosu (3.6)

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)$$

je ***charakteristický mnohočlen*** daného lineárního dynamického členu a je zřejmé, že je shodný s charakteristickým mnohočlenem lineární diferenciální rovnice (3.1) [viz rovněž (2.29)].

Přenos (3.6) je často vyjadřován ve tvaru součinu kořenových činitelů jmenovatele a čitatele, tj.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m (s - s_1^0)(s - s_2^0) \ldots (s - s_m^0)}{a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)}, \tag{3.7}$$

kde

$$M(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 = b_m (s - s_1^0)(s - s_2^0) \ldots (s - s_m^0)$$

je mnohočlen čitatele přenosu (3.6), s_i jsou ***póly*** (i = 1, 2, ..., n) a s_j^0 jsou ***nuly*** (j = 1, 2, ..., m) daného lineárního dynamického členu.

Derivaci i-tého řádu v časové oblasti (oblasti originálů) odpovídá i-tá mocnina komplexní proměnné s v oblasti komplexní proměnné (oblasti obrazů), a proto v ustáleném stavu platí [viz (3.3)]

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; s \to 0, \tag{3.8}$$

tj. ze vztahu (3.6) se dostane rovnice statické charakteristiky

$$y = [\lim_{s \to 0} G(s)] u, \qquad a_0 \neq 0. \tag{3.9}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (3.5).

C – Kmitočtový přenos

Kmitočtový (frekvenční) přenos $G(\mathrm{j}\omega)$ lze formálně získat z přenosu $G(s)$ záměnou komplexní proměnné s za „komplexní kmitočet“ $\mathrm{j}\omega$, tj.

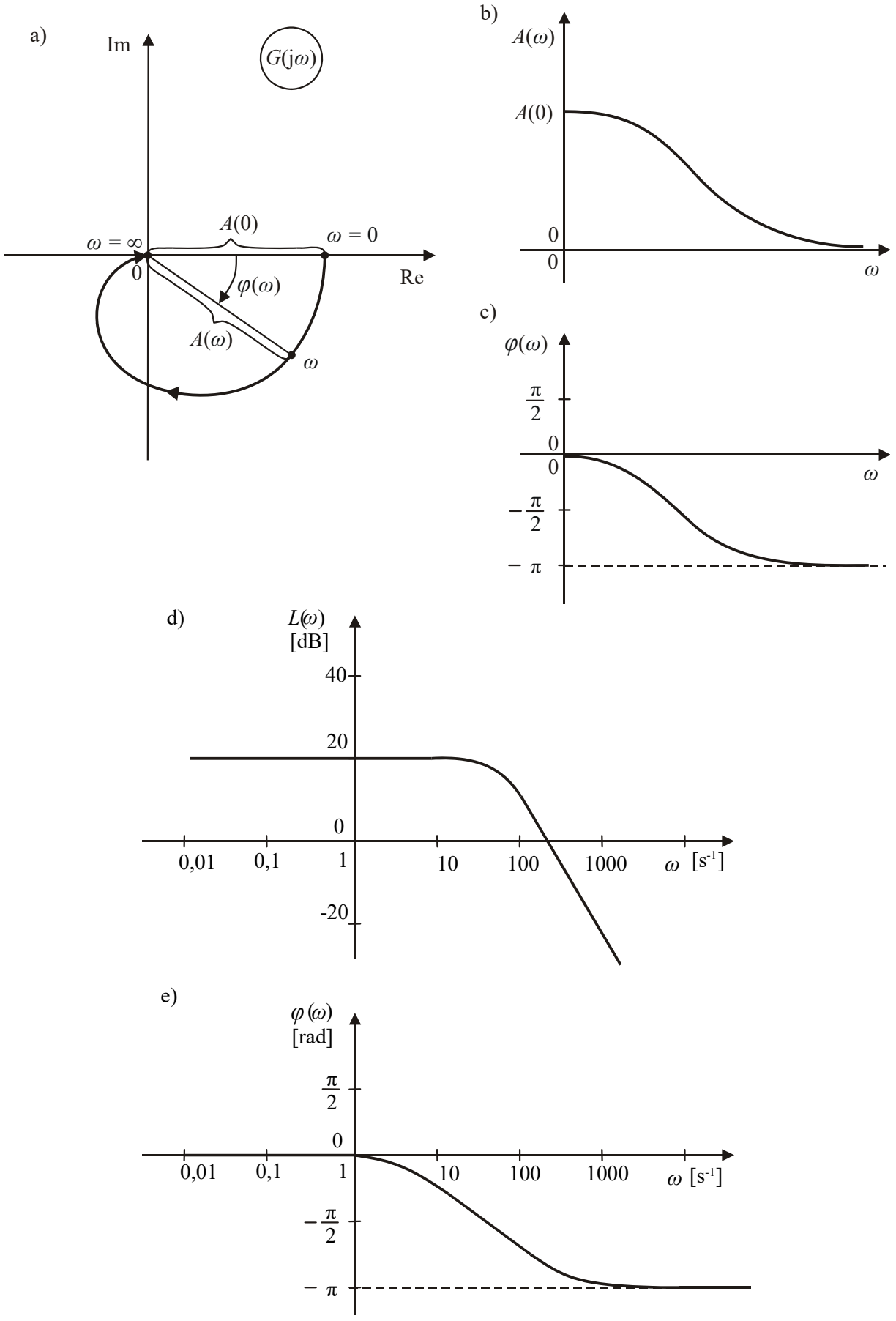
$$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{b_m (\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1} (\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \ldots + b_1 \mathrm{j}\omega + b_0}{a_n (\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1} (\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 \mathrm{j}\omega + a_0} = A(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}, \tag{3.10}$$

$$A(\omega) = \mathrm{mod}\, G(\mathrm{j}\omega) = \left| G(\mathrm{j}\omega) \right|, \tag{3.11a}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(\mathrm{j}\omega), \tag{3.11b}$$

kde $A(\omega)$ je ***amplituda*** (modul) kmitočtového přenosu, $\varphi(\omega)$ – ***fáze*** (argument) kmitočtového přenosu, ω – ***úhlový kmitočet*** (rozměr čas^{-1}) [s^{-1}].

Z důvodu odlišení úhlového kmitočtu (T – perioda, f – kmitočet)



Obr. 3.2 – Kmitočtové charakteristiky: a) amplitudofázová, b) amplitudová, c) fázová, d) logaritmická amplitudová, e) logaritmická fázová

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

od „obyčejného“ kmitočtu

$$f = \frac{1}{T}$$

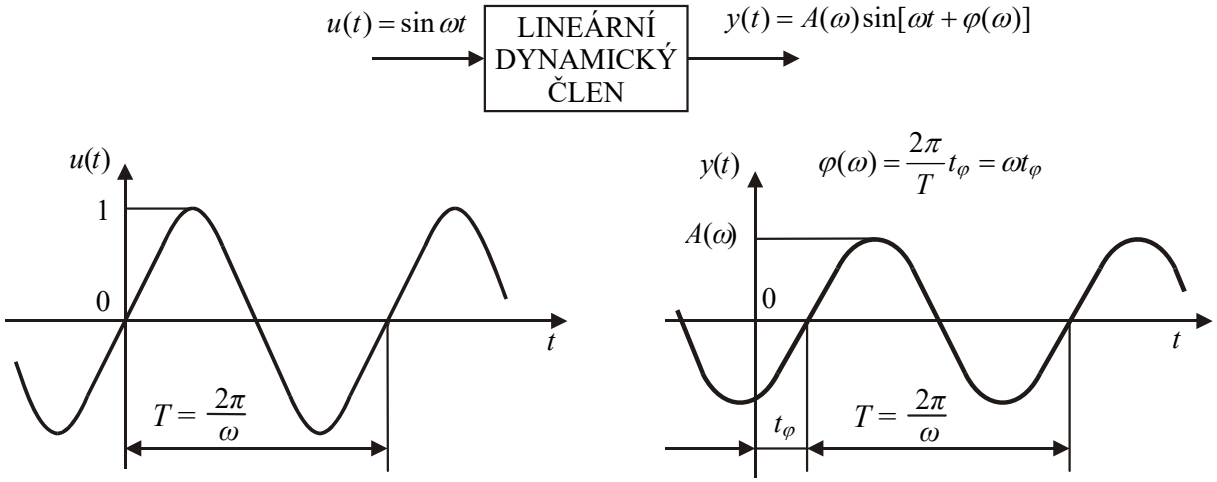
s jednotkou Hz (herz) a rozměrem [s^{-1}], se často používá pro úhlový kmitočet ω místo [s^{-1}] označení [rad s^{-1}].

Zobrazení kmitočtového přenosu pro $\omega = 0$ až $\omega = \infty$ v komplexní rovině se nazývá ***amplitudofázová kmitočtová charakteristika*** (obr. 3.2a). Zobrazí-li se zvlášť amplituda $A(\omega)$ a fáze $\varphi(\omega)$ pro $\omega = 0$ až $\omega = \infty$ dostane se ***amplitudová kmitočtová charakteristika*** (obr. 3.2b) a ***fázová kmitočtová charakteristika*** (obr. 3.2c). V případě, že se použije vztah

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) \tag{3.12}$$

a kmitočtová osa bude mít měřítko logaritmické, obdrží se ***logaritmická amplitudová kmitočtová charakteristika*** (obr. 3.2d) a ***logaritmická fázová kmitočtová charakteristika*** (obr. 3.2e). $L(\omega)$ je logaritmická amplituda (logaritmický modul) kmitočtového přenosu [dB]. U logaritmických kmitočtových charakteristik se s výhodou využívá aproximace přesných průběhů pomocí přímkových úseků, viz např. obr. 4.5.

Kmitočtový přenos má veliký význam z praktického hlediska, protože vyjadřuje pro každou hodnotu úhlového kmitočtu ω amplitudu (modul) $A(\omega)$ a fázi $\varphi(\omega)$ ustálené harmonické (sinusoidální) odezvy na harmonický průběh vstupní veličiny s jednotkovou amplitudou a nulovou fází. Tzn. že kmitočtovou charakteristiku lze pro daný lineární dynamický člen určit experimentálně, tj. lze ji využít k experimentální identifikaci (obr. 3.3).



Obr. 3.3 – Interpretace kmitočtové charakteristiky lineárního dynamického členu

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (3.5). V případě kmitočtového přenosu (3.10) mají názornou fyzikální interpretaci. Protože kmitočtový přenos $G(j\omega)$ charakterizuje přenášení harmonického signálu pro

různé úhlové kmitočty ω, je zřejmé, že reálný lineární dynamický člen nemůže přenést průběh nekonečně vysokého úhlového kmitočtu, a proto u fyzikálně realizovatelných matematických modelů musí platit

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\omega\to\infty} G(\mathrm{j}\omega) = 0 \\ &\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0 \\ &\lim_{\omega\to\infty} L(\omega) = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ n > m\,.$$

Je to silná podmínka fyzikální realizovatelnosti. V ustáleném stavu platí $t \to \infty \ \Rightarrow\ \omega \to 0$, a proto rovnice statické charakteristiky je dána vztahem

$$y = [\lim_{\omega\to 0} G(\mathrm{j}\omega)]u\,, \quad a_0 \neq 0\,. \tag{3.13}$$

D – Impulsní funkce

Impulsní (impulsová, váhová) ***funkce*** $g(t)$ popisuje odezvu lineárního dynamického členu na vstupní veličinu $u(t)$ ve tvaru Diracova impulsu $\delta(t)$. Její grafické vyjádření je ***impulsní charakteristika***, viz obr. 3.4.

Na základě vztahu (3.6) lze psát

$$Y(s) = G(s)U(s)\,, \tag{3.14}$$

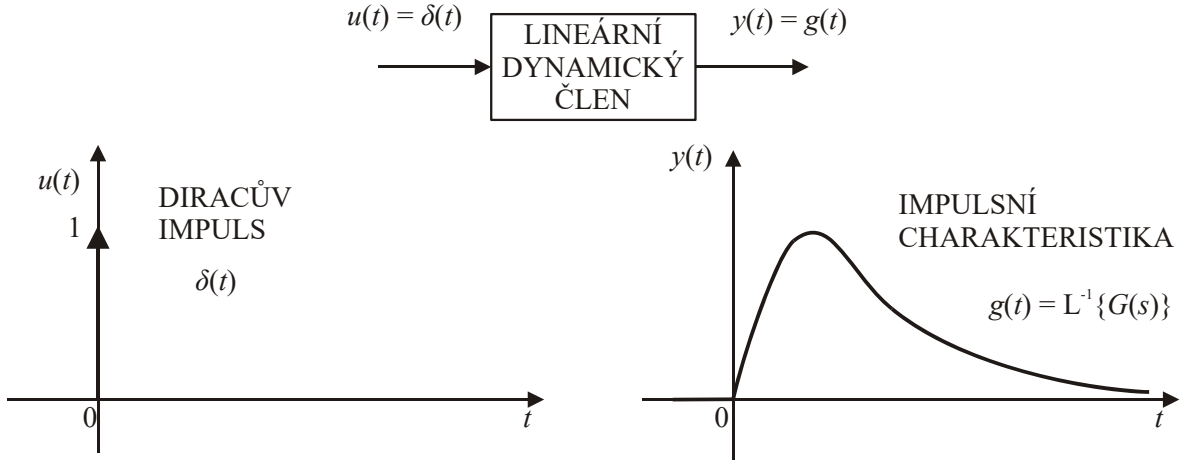
a proto pro

$$u(t) = \delta(t) \mathrel{\hat{=}} U(s) = 1$$

se dostane

$$\begin{aligned} &Y(s) = G(s) \ \Rightarrow \\ &g(t) = \mathrm{L}^{-1}\{G(s)\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že impulsní funkce $g(t)$ je originál k přenosu $G(s)$.



Obr. 3.4 – Impulsní funkce (charakteristika) lineárního dynamického členu

Protože vstupem je Diracův impuls, nelze přímo určit závislost mezi výstupem a vstupem v ustáleném stavu, viz obr. 3.4. Statická charakteristika je přímková a prochází počátkem, proto stačí určit její jediný nenulový bod. U lineárních dynamických členů integraci vstupu odpovídá integrace výstupu, a proto lze psát

$$u = u(\infty) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1,$$

$$y = y(\infty) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

Odtud se dostane rovnice statické charakteristiky (pokud existuje)

$$y = [\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau]u . \tag{3.16}$$

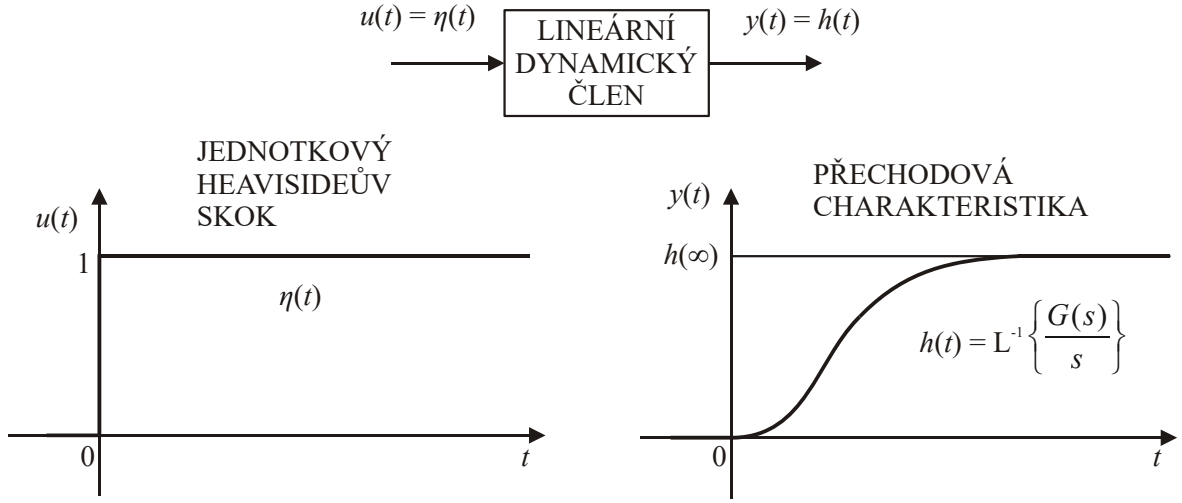
Podmínky fyzikální realizovatelnosti mají tvar:

silná $\quad |g(0)| < \infty ,$ (3.17a)

slabá $\quad g(0)$ obsahuje $\delta(t)$. (3.17b)

E – Přechodová funkce

Přechodová funkce $h(t)$ charakterizuje odezvu lineárního dynamického členu na vstupní veličinu $u(t)$ ve tvaru jednotkového Heavisideova skoku $\eta(t)$. Její grafické vyjádření je ***přechodová charakteristika***, viz obr. 3.5.



Obr. 3.5 – Přechodová funkce (charakteristika) lineárního dynamického členu

V souladu s definicí přechodové funkce $h(t)$ lze psát

$$u(t) = \eta(t) \triangleq U(s) = \frac{1}{s}$$

a po dosazení do (3.14) se dostane

$$Y(s) = H(s) = G(s)\frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \tag{3.18}$$

V případě přechodové funkce $h(t)$ je závislost mezi výstupem a vstupem v ustáleném stavu jednoduchá a vyplývá přímo z obr. 3.5. Rovnice statické charakteristiky tedy je (pokud existuje)

$$y = [\lim_{t\to\infty} h(t)]u\,. \tag{3.19}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti mají tvar:

silná $h(0) = 0\,,$ (3.20a)

slabá $0 < |h(0)| < \infty\,.$ (3.20b)

F – Stavový model

Stavový model lineárního dynamického členu je ze všech uvedených matematických modelů nejobecnější, protože dovoluje pomocí ***stavových*** (vnitřních) ***veličin*** popsat i takové vlastnosti, které z vnějšího pohledu, tj. pohledu výstupní veličiny $y(t)$, jsou utajeny. Takovými vlastnostmi jsou ***řiditelnost*** a ***pozorovatelnost*** lineárního dynamického členu. Zjednodušeně tyto vlastnosti mohou být formulovány v následujícím tvaru. Lineární dynamický člen je řiditelný, když existuje takové řízení (vstup) $u(t)$, které za konečnou dobu $t_1 - t_0$ převede daný člen z libovolného stavu $\boldsymbol{x}(t_0)$ do libovolného stavu $\boldsymbol{x}(t_1)$. Podobně lineární dynamický člen je pozorovatelný, když na základě známého průběhu řízení (vstupu) $u(t)$ a průběhu výstupu $y(t)$ na konkrétním konečném časovém intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ lze určit výchozí stav $\boldsymbol{x}(t_0)$. Dále budeme uvažovat vždy jednorozměrový řiditelný a pozorovatelný lineární dynamický člen.

Stavový model se skládá ze dvou rovnic

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad \text{– ***stavová rovnice***}, \tag{3.21a}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t) \qquad \text{– ***výstupní rovnice***}, \tag{3.21b}$$

kde $\boldsymbol{x}(t)$ je vektor stavových veličin dimenze n, $\boldsymbol{A}$ – stavová matice (matice dynamiky, matice systému) řádu n, $\boldsymbol{b}$ – stavový vektor vstupu dimenze n, $\boldsymbol{c}$ – výstupní vektor stavu dimenze n, d – konstanta převodu.

Vektor stavových veličin $\boldsymbol{x}(t)$ musí mít tolik složek $x_i(t)$, aby byl možný jednoznačný popis dynamických vlastností daného lineárního členu. Jejich volba je libovolná. Z tohoto důvodu ke každé lineární diferenciální rovnici existuje nekonečně mnoho různých stavových modelů, které ovšem z pohledu závislosti výstupní veličiny $y(t)$ na vstupní veličině $u(t)$ jsou zcela ekvivalentní. Tzn. že z těchto různých stavových modelů se po úpravě dostane vždy původní výchozí lineární diferenciální rovnice. Praktický význam mají stavové modely, ve kterých matice $\boldsymbol{A}$ má speciální tvary.

Pro ilustraci bude uveden pouze tzv. ***kanonický*** (normální) ***tvar řízení*** pro lineární diferenciální rovnici (3.1) pro $a_n = 1$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

$\boldsymbol{c}^T = [b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0], \; d = 0$ pro $n > m$.

Takový tvar je vždy řiditelný (ve vektoru ***b*** vystupuje 1) a dá se dokázat, že je i pozorovatelný. Jeho výhodou je, že pro $a_n = 1$ lze na něj převést lineární diferenciální rovnici (3.1) přímo a že ve stavové matici ***A*** v posledním řádku vystupují záporné koeficienty její levé stany, tj. koeficienty jejího charakteristického mnohočlenu a ve vektoru ***c*** jsou koeficienty její pravé strany.

V ustáleném stavu vymizí změny v čase, a proto platí

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}, \\ u(t) \to u, \\ y(t) \to y. \end{cases} \tag{3.23}$$

Po uvažování (3.23) ve stavovém modelu (3.21) se dostane

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u,$$
$$y = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + du$$

a z této soustavy rovnic se po úpravě obdrží rovnice statické charakteristiky (pokud existuje)

$$y = (-\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{b} + d)u. \tag{3.24}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti mají u stavového modelu jednoduchý tvar [viz též (3.22)]

silná $\quad d = 0,$ (3.25a)

slabá $\quad d \neq 0 \;\; (n = m).$ (3.25b)

Je zřejmé, že běžný stavový model ve tvaru (3.21) je minimálně slabě fyzikálně realizovatelný.

Matematické modely ve tvaru lineární diferenciální rovnice, přenosu, kmitočtového přenosu, impulsní funkce a přechodové funkce (tj. modely A ÷ E), které vyjadřují závislost mezi výstupní veličinou $y(t)$ a vstupní veličinou $u(t)$ bez použití stavových (vnitřních) veličin $x_i(t)$ jsou ***vnější popisy***. Matematické modely ve tvaru stavového modelu (F) jsou ***vnitřní popisy***.

Matematické modely ve tvaru lineární diferenciální rovnice, impulsní funkce, přechodové funkce a stavového modelu (A, D ÷ F) popisují vlastnosti lineárních

dynamických členů v časové oblasti (t). Matematické modely ve tvaru přenosu (B) v oblasti komplexní proměnné (s) a ve tvaru kmitočtového přenosu (C) v kmitočtové oblasti (ω).

Matematické modely ve tvaru lineární diferenciální rovnice a stavového modelu (A, F) mohou uvažovat nenulové počáteční podmínky. Při použití matematických modelů ve tvaru přenosu, kmitočtového přenosu, impulsní a přechodové funkce (B ÷ E) musí být vždy uvažovány nulové počáteční podmínky, jinak tyto modely ztrácejí svou jednoznačnou vypovídací schopnost o dynamických a statických vlastnostech daného lineárního dynamického členu.

Za předpokladu nulových počátečních podmínek (stavový model musí být řiditelný a pozorovatelný) všechny uvedené tvary matematických modelů (tj. A ÷ F) jsou vzájemně ekvivalentní.

Např. použitím Laplaceovy transformace na stavový model (3.21) za předpokladu nulových počátečních podmínek se dostane

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{b}U(s),$$
$$Y(s) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}(s) + dU(s).$$

Z této soustavy rovnic se již snadno získá přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{c}^T(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\,. \tag{3.26a}$$

Pro praktické účely pro určení přenosu ze stavového modelu je výhodnější použití vztahu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})}{\det(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})} + d\,, \tag{3.26b}$$

kde det je determinant. Vztah (3.26b) nevyžaduje inverzi matice ($s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}$).

Podobně lze snadno získat převodní vztahy mezi originály a obrazy impulsní a přechodové funkce

$$G(s) = sH(s) \qquad \Leftrightarrow \qquad H(s) = \frac{G(s)}{s}\,, \tag{3.27a}$$

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}\,t} \qquad \Leftrightarrow \qquad h(t) = \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\,. \tag{3.27b}$$

Derivace v levém vztahu (3.27b) je zobecněná derivace, tj. v bodech nespojitosti t_i prvního druhu (skoky funkce jsou konečné velikosti) přechodové funkce $h(t)$ je třeba navíc uvažovat výrazy

$$\delta(t - t_i)[\lim_{t\to t_{i+}} h(t_i) - \lim_{t\to t_{i-}} h(t_i)]\,. \tag{3.28}$$

Proto také platí

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\,\eta(t)}{\mathrm{d}\,t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta(t) = \int_0^t \delta(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\,. \tag{3.29}$$

Pro regulaci mají největší význam přenosy, protože v oblasti komplexní proměnné mají vlastnosti lineárních komutativních operátorů.

Příklad 3.1

U lineárního dynamického členu je k dispozici jeho matematický model ve tvaru lineární diferenciální rovnice 1. řádu ($a_0', a_1', b_0' > 0, b_1' \geq 0$)

$$a_1' \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + a_0' y(t) = b_1' \frac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} + b_0' u(t), \qquad y(0) = u(0) = 0 .$$

Je třeba převést danou diferenciální rovnici na matematické modely ve tvaru přenosu, kmitočtového přenosu, impulsní funkce, přechodové funkce a stavového modelu a provést analýzu jejich vlastností.

Řešení:

a) Diferenciální rovnice

Matematický model ve tvaru diferenciální rovnice již je, a proto bude provedena jeho analýza. Je zřejmé, že $n = m = 1$ ($b_1' > 0$, $r_s = 0$), a tedy daný matematický model je slabě fyzikálně realizovatelný. Pro $b_1' = 0$, $n = 1 > m = 0$ ($r_s = 1$) matematický model bude silně fyzikálně realizovatelný.

V ustáleném stavu platí $t \to \infty \Rightarrow \dot{y}, \dot{u} \to 0$, a proto rovnice statické charakteristiky má tvar

$$y = \frac{b_0'}{a_0'} u .$$

b) Přenos

Na danou diferenciální rovnici se použije Laplaceova transformace a za předpokladu nulových počátečních podmínek (to je splněno) se po úpravě dostane

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1' s + b_0'}{a_1' s + a_0'} .$$

Pro další práci je vhodné přenos upravit na tvar

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}, \qquad a_0 = \frac{a_0'}{a_1'} > 0, \; b_0 = \frac{b_0'}{a_1'} > 0, \; b_1 = \frac{b_1'}{a_1'} \geq 0 .$$

Pro $b_1 > 0$ je $n = 1 = m = 1$ ($r_s = 0$), a proto je splněna slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti a pro $b_1 = 0$ je $n = 1 > m = 0$ ($r_s = 1$), a proto je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti.

V ustáleném stavu platí $t \to \infty \Rightarrow s = 0$, a proto v souladu se vztahem (3.9) se dostane rovnice statické charakteristiky

$$y = [\lim_{s\to 0} G(s)]u \;\Rightarrow\; y = \frac{b_0}{a_0}u, \qquad \frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0'}{a_0'}.$$

c) Kmitočtový přenos

Kmitočtový přenos $G(\mathrm{j}\omega)$ se získá z přenosu $G(s)$ formálním dosazením $s = \mathrm{j}\omega$, tj.

$$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{b_1\,\mathrm{j}\omega + b_0}{\mathrm{j}\omega + a_0}.$$

Výhodné je vyjádření kmitočtového přenosu v následujících tvarech

$$G(\mathrm{j}\omega) = P(\omega) + \mathrm{j}Q(\omega) = A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)},$$

$$P(\omega) = \mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) = \frac{a_0 b_0 + b_1\omega^2}{a_0^2 + \omega^2},$$

$$Q(\omega) = \mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega) = \frac{(a_0 b_1 - b_0)\omega}{a_0^2 + \omega^2},$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{\sqrt{a_0^2 b_0^2 + (a_0^2 b_1^2 + b_0^2)\omega^2 + b_1^2\omega^4}}{a_0^2 + \omega^2},$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \mathrm{arctg}\frac{(a_0 b_1 - b_0)\omega}{a_0 b_0 + b_1\omega^2},$$

kde $P(\omega)$ je reálná část kmitočtového přenosu, $Q(\omega)$ – imaginární část kmitočtového přenosu.

Je zřejmé, že platí

$$\omega = 0 \;\Rightarrow\quad P(0) = A(0) = G(0) = \frac{b_0}{a_0},$$

$$Q(0) = 0,$$

$$b_1 > \frac{b_0}{a_0} \;\Rightarrow\; \varphi(0) = \mathrm{arctg}\frac{+0}{a_0 b_0} = 0 \text{ (1.kvadrant)},$$

$$b_1 = \frac{b_0}{a_0} \;\Rightarrow\; \varphi(0) = \mathrm{arctg}\frac{+0}{a_0 b_0} = 0 \text{ (1.kvadrant)},$$

$$b_1 < \frac{b_0}{a_0} \;\Rightarrow\; \varphi(0) = \mathrm{arctg}\frac{-0}{a_0 b_0} = 0 \text{ (4.kvadrant)},$$

$$b_1 = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(0) = \mathrm{arctg}\frac{-0}{a_0 b_0} = 0 \text{ (4.kvadrant)},$$

$$\omega = a_0 \Rightarrow \quad P(a_0) = \frac{a_0 b_1 + b_0}{2a_0},$$

$$Q(a_0) = \frac{a_0 b_1 - b_0}{2a_0},$$

$$A(a_0) = \frac{\sqrt{a_0^2 b_1^2 + b_0^2}}{a_0 \sqrt{2}},$$

$$b_1 > \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \varphi(a_0) = \operatorname{arctg} \frac{a_0 b_1 - b_0}{a_0 b_1 + b_0} > 0 \text{ (1.kvadrant)},$$

$$b_1 = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \varphi(a_0) = \operatorname{arctg} \frac{+0}{a_0 b_1 + b_0} = 0 \text{ (1.kvadrant)},$$

$$b_1 < \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \varphi(a_0) = \operatorname{arctg} \frac{-|a_0 b_1 - b_0|}{a_0 b_1 + b_0} < 0 \text{ (4.kvadrant)},$$

$$b_1 = 0 \Rightarrow \varphi(a_0) = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4} \text{ (4.kvadrant)},$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \quad P(\infty) = A(\infty) = b_1,$$

$$Q(\infty) = 0,$$

$$b_1 > \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \varphi(\infty) = \operatorname{arctg} \frac{+0}{b_1} = 0 \text{ (1.kvadrant)},$$

$$b_1 = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \varphi(\infty) = \operatorname{arctg} \frac{+0}{b_0} = 0 \text{ (1.kvadrant)},$$

$$b_1 < \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \varphi(\infty) = \operatorname{arctg} \frac{-0}{b_1} = 0 \text{ (4.kvadrant)},$$

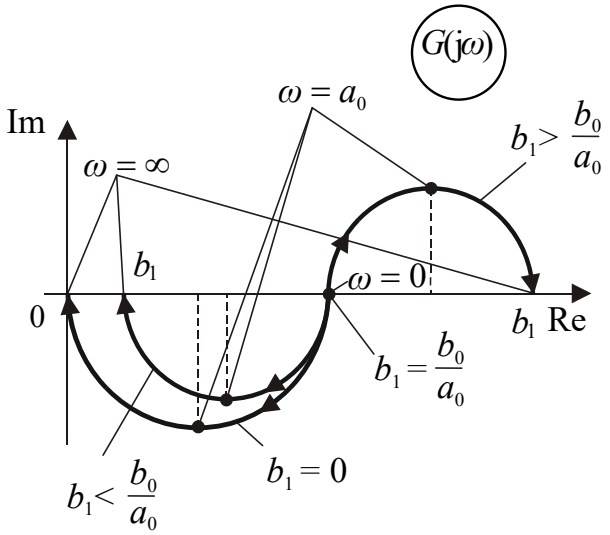
$$b_1 = 0 \Rightarrow \varphi(\infty) = \operatorname{arctg} \frac{-\infty}{a_0 b_0} = -\frac{\pi}{2} \text{ (4.kvadrant)}.$$

Amplitudofázové kmitočtové charakteristiky $G(\mathrm{j}\omega)$ pro různé hodnoty b_1 jsou na obr. 3.6.

Z obr. 3.6 vyplývá, že pro $b_1 > 0$ amplitudofázová kmitočtová charakteristika končí na kladné reálné poloose, a tedy daný lineární dynamický člen by teoreticky měl přenést nekonečně vysoký úhlový kmitočet ($\omega = \infty$) se zesílením b_1. Tento případ odpovídá slabé fyzikální realizovatelnosti. Pro $b_1 = 0$ amplitudofázová kmitočtová charakteristika končí v počátku, a tedy je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti.

V ustáleném stavu platí $t \to \infty \Rightarrow \omega \to 0$, a proto rovnice statické charakteristiky bude (viz obr. 3.6)

$$y = [\lim_{\omega \to 0} G(\mathrm{j}\omega)]u \Rightarrow y = \frac{b_0}{a_0} u\,.$$



Obr. 3.6 – Amplitudofázové kmitočtové charakteristiky z příkladu 3.1

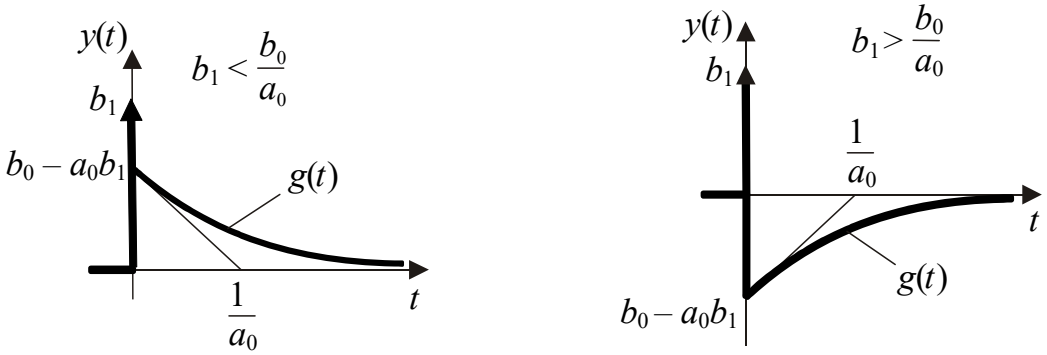
d) Impulsní funkce

Impulsní funkce $g(t)$ je originál k přenosu $G(s)$, a proto lze psát [viz vztah (3.15)]

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} = b_1 + \frac{b_0 - a_0 b_1}{s + a_0},$$

$$g(t) = \mathrm{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{b_1 + \frac{b_0 - a_0 b_1}{s + a_0}\right\} = b_1\delta(t) + (b_0 - a_0 b_1)\,\mathrm{e}^{-a_0 t}.$$

Impulsní charakteristiky $g(t)$ pro různé hodnoty b_1 jsou na obr. 3.7.



Obr. 3.7 – Impulsní charakteristiky z příkladu 3.1

Pro $b_1 > 0$ impulsní funkce $g(t)$ obsahuje Diracův impuls $\delta(t)$, a proto v tomto případě je splněna slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti [viz obr. 3.7 a vztah (3.17b)]. Pro $b_1 = 0$ je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti, viz vztah (3.17a).

Rovnice statické charakteristiky se určí na základě vztahu (3.16), tj. lze psát

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{t\to\infty}\int_0^t [b_1\delta(\tau) + (b_0 - a_0 b_1)\mathrm{e}^{-a_0\tau}]\,\mathrm{d}\tau = b_1 - \left[\frac{b_0 - a_0 b_1}{a_0}\mathrm{e}^{-a_0\tau}\right]_0^\infty = \frac{b_0}{a_0},$$

$$y = [\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau]u \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{b_0}{a_0}u\,.$$

e) Přechodová funkce

Přechodová funkce $h(t)$ se snadno získá ze vztahu (3.18)

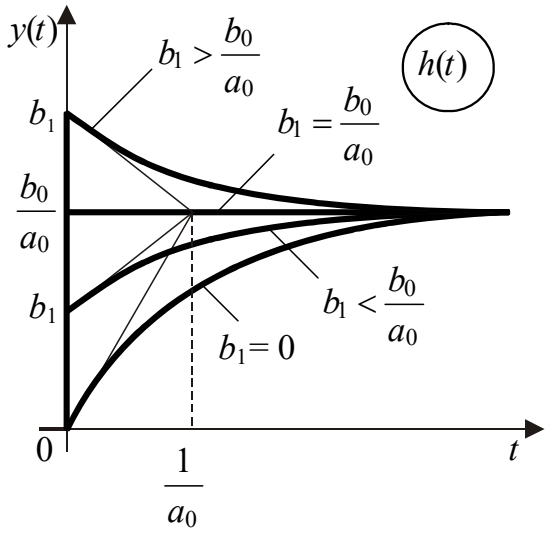
$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{b_1}{s} + \frac{b_0 - a_0 b_1}{s(s+a_0)}\right\} = b_1 + \left(\frac{b_0}{a_0} - b_1\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-a_0 t}\right).$$

Její grafické vyjádření, tj. přechodová charakteristika $h(t)$ pro různé hodnoty b_1 je ukázána na obr. 3.8.

Z přechodové funkce $h(t)$ a na základě vztahů (3.20) je zřejmé (viz obr. 3.8), že pro $b_1 = 0$ je splněna silná a pro $b_1 > 0$ slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti.

Rovnice statické charakteristiky v souladu se vztahem (3.19) má tvar

$$y = [\lim_{t\to\infty} h(t)]u \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{b_0}{a_0}u\,.$$



Obr. 3.8 – Přechodové charakteristiky z příkladu 3.1

Snadno lze ověřit, že mezi impulsní $g(t)$ a přechodovou $h(t)$ funkcí platí převodní vztahy (3.27b), tj.

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}\,t} = b_1\delta(t) + (b_0 - a_0 b_1)\mathrm{e}^{-a_0 t},$$

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t [b_1\delta(\tau) + (b_0 - a_0 b_1)\mathrm{e}^{-a_0\tau}]\,\mathrm{d}\tau = b_1 + \left(\frac{b_0}{a_0} - b_1\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-a_0 t}\right).$$

Při derivaci přechodové funkce $h(t)$ musel být uvažován skok v čase $t = 0$ z 0 na hodnotu $h(0) = b_1$, viz vztah (3.28).

f) Stavový model

Je vhodné vyjít z upraveného přenosu [aby bylo možné přímo použít vztahy (3.22) je nutné, aby přenos byl ve tvaru ryzí racionální lomené funkce, tj. $n > m$]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} = b_1 + \frac{b_0 - a_0 b_1}{s + a_0},$$

kterému odpovídá stavový model

$$\dot{x}(t) = -a_0 x(t) + u(t),$$
$$y(t) = (b_0 - a_0 b_1) x(t) + b_1 u(t),$$

tj. $\boldsymbol{x}(t) = x(t)$, $\boldsymbol{A} = -a_0$, $\boldsymbol{b} = 1$, $\boldsymbol{c}^T = b_0 - a_0 b_1$, $d = b_1$.

Je zřejmé, že pro $d = b_1 = 0$ je stavový model silně fyzikálně realizovatelný a pro $d = b_1 \neq 0$ je stavový model slabě fyzikálně realizovatelný.

V ustáleném stavu platí $t \to \infty$, a proto se ze stavového modelu dostane úpravou rovnice statické charakteristiky

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -a_0 x + u \qquad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{a_0} u, \\ y = (b_0 - a_0 b_1) x + b_1 u \end{array}\right\} \Rightarrow \; y = \frac{b_0}{a_0} u .$$

Stejná rovnice by se obdržela ze vztahu (3.24).

Snadno se lze rovněž přesvědčit, že použitím vztahu (3.26) se dostane výchozí přenos $G(s)$.

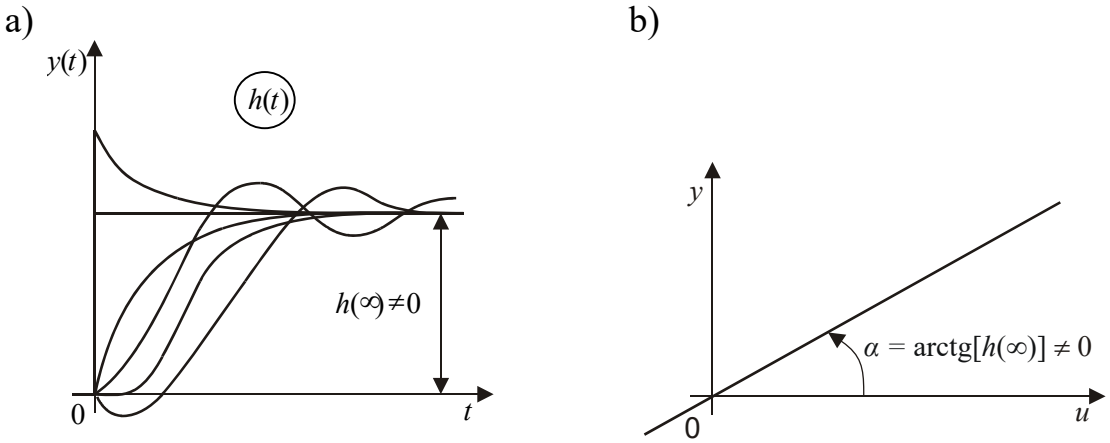
3.2 Třídění základních lineárních dynamických členů

Lineární dynamické členy lze třídit podle různých hledisek. Velmi důležitým hlediskem je vlastnost (klidového) ustáleného stavu a to, zda existuje a je nenulový, nulový, příp. neexistuje. Vlastnost ustáleného stavu se velmi dobře posuzuje podle průběhu přechodové charakteristiky $h(t)$ pro $t \to \infty$. Dále se předpokládá, nedynamické členy jsou stabilní.

Proporcionální členy

Proporcionální členy se vyznačují tím, že ustálený stav $h(\infty)$ na přechodové charakteristice $h(t)$ existuje a je nenulový (obr. 3.9a), tzn. že mezi ustálenými hodnotami výstupní veličiny y a odpovídajícími ustálenými hodnotami vstupní veličiny u existuje proporcionalita, tj. netriviální lineární závislost, kterou vyjadřuje statická charakteristika (obr. 3.9b)

Pro proporcionální členy se používají rovněž jiné názvy, jak např.: statické (nevhodný název), setrvačné, s autoregulací, se samovyrovnáním a poziční (tento název je vhodné používat pouze pro nelineární členy).



Obr. 3.9 – Proporcionální členy: a) přechodové charakteristiky, b) statická charakteristika

Proporcionální členy se vyznačují tím, že ve jmenovateli ani v čitateli přenosu nelze vytknout komplexní proměnnou s.

Přenosy základních proporcionálních členů mají tvar:

Proporcionální člen bez setrvačnosti (ideální proporcionální člen)

$$G(s) = k_1, \tag{3.30}$$

kde k_1 je ***koeficient přenosu***, jehož fyzikální rozměr je dán poměrem fyzikálních rozměrů výstupní $y(t)$ a vstupní $u(t)$ veličiny. Pro $|k_1| > 1$ jde o zesílení a pro $|k_1| < 1$ o tlumení. Proporcionální člen bez setrvačnosti je pouze slabě fyzikálně realizovatelný.

Proporcionální člen se setrvačností 1. řádu (aperiodický člen 1. řádu, jednokapacitní člen, setrvačný člen 1. řádu)

$$G(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \tag{3.31}$$

kde T_1 je ***časová konstanta*** s fyzikálním rozměrem čas.

Proporcionální člen se setrvačností 2. řádu (setrvačný člen 2. řádu)

$$G(s) = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}, \tag{3.32}$$

kde T_0 je časová konstanta [čas], ξ_0 – ***relativní tlumení***.

Pro $\xi_0 > 1$ lze psát

$$G(s) = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \tag{3.33a}$$

$$T_1 = T_0\left(\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - 1}\right) > T_2 = T_0\left(\xi_0 - \sqrt{\xi_0^2 - 1}\right), \tag{3.33b}$$

kde T_1 a T_2 jsou časové konstanty [čas].

Proporcionální člen s přenosem (3.33) se nazývá ***aperiodický člen 2. řádu*** (dvoukapacitní člen).

Pro $\xi_0 = 1$ se dostane přenos

$$G(s) = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} = \frac{k_1}{(T_0 s + 1)^2}, \tag{3.34}$$

tzv. ***mezního aperiodického členu 2. řádu*** (členu se dvěma stejnými kapacitami).

Pro $0 < \xi_0 < 1$ přenos (3.32) nelze rozložit. Takový proporcionální člen se nazývá ***kmitavý člen 2. řádu***.

Pro $\xi_0 = 0$ se obdrží přenos

$$G(s) = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 1}, \tag{3.35}$$

tzv. ***konzervativního členu 2. řádu*** (bezeztrátového členu 2. řádu).

Přenos obecného ***proporcionálního členu se setrvačností n-tého řádu*** má tvar

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}, \qquad a_0 \neq 0, \qquad b_0 \neq 0. \tag{3.36}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (3.5).

Mezi proporcionální členy patří ***člen dopravního zpoždění*** (ideálně zpožďující člen), který je v časové oblasti popsán vztahem

$$y(t) = u(t - T_d) \tag{3.37}$$

a v oblasti komplexní proměnné přenosem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{3.38}$$

kde T_d je dopravní zpoždění [čas].

Člen dopravního zpoždění se v časové oblasti vyznačuje tím, že časovou odezvu nezmění, ale pouze zpozdí o dopravní zpoždění T_d a v oblasti kmitočtové nezmění modul (amplitudu), ale způsobí fázové zpoždění o úhel $\varphi(\omega) = -\omega T_d$.

Impulsní funkce je dána vztahem (viz obr. 2.3)

$$g(t) = \delta(t - T_d) \tag{3.39}$$

a přechodová funkce vztahem (viz obr. 2.2)

$$h(t) = \eta(t - T_d). \tag{3.40}$$

Přenos členu dopravního zpoždění (3.38) je dán transcendentní (nealgebraickou) funkcí na rozdíl od přenosu běžného proporcionálního členu (3.36), který je dán racionální lomenou funkcí.

Při analýze a syntéze regulačních obvodů se často člen dopravního zpoždění (3.38) nahrazuje jednoduchým přenosem ve tvaru racionální lomené funkce. Nejčastěji se používá ***Padého rozvoj***.

Fázovací člen 1. řádu (Padého rozvoj 1. řádu)

$$G(s) = \mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2} s}{1 + \frac{T_d}{2} s}. \tag{3.41}$$

Fázovací člen 2. řádu (Padého rozvoj 2. řádu)

$$G(s) = \mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2} s + \frac{T_d^2}{12} s^2}{1 + \frac{T_d}{2} s + \frac{T_d^2}{12} s^2}. \tag{3.42}$$

Často se rovněž používá méně přesná aproximace 2. řádu získaná ***Taylorovým rozvojem*** ($\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$)

$$G(s) = \mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{T_d}{2}s}}{\mathrm{e}^{\frac{T_d}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2} s + \frac{T_d^2}{8} s^2}{1 + \frac{T_d}{2} s + \frac{T_d^2}{8} s^2}. \tag{3.43}$$

Aproximace 1. řádu získaná Taylorovým rozvojem má stejný tvar jako Padého rozvoj 1. řádu (3.41).

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že člen dopravního zpoždění má teoreticky nekonečně mnoho pólů (kořenů jmenovatele přenosu) a nekonečně mnoho nul (kořenů čitatele přenosu). Vyplývá to z jeho vyjádření nekonečným rozvojem. Je to velmi nepříjemná vlastnost členu dopravního zpoždění. Další jeho nepříjemnou vlastností je, že patří mezi ***členy s neminimální fází***, tj. takové, jejichž některé póly (kořeny jmenovatele) nebo nuly (kořeny čitatele) leží v pravé polorovině komplexní roviny *s* [viz čitatele vztahů (3.41) – (3.43)].

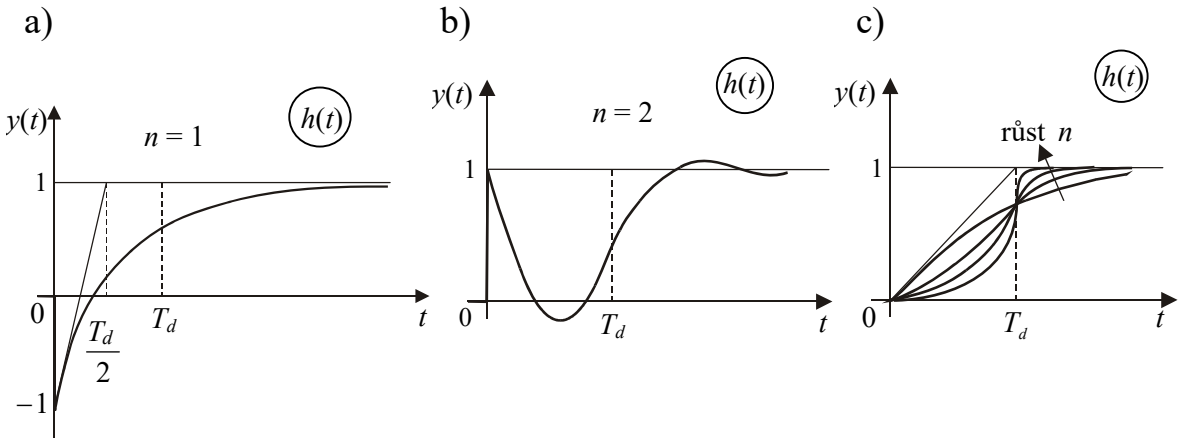
U lineárních neminimálněfázových dynamických členů není vzájemně jednoznačný vztah mezi amplitudovou a fázovou kmitočtovou charakteristikou, tj. při popisu jejich vlastností musí být k dispozici vždy obě charakteristiky.

Na základě vztahu

$$\mathrm{e}^{-T_d s} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{T_d}{n} s + 1 \right)^n} \tag{3.44}$$

člen dopravního zpoždění může být aproximován rovněž ***členem s minimální fází*** (přenos neobsahuje nuly a všechny *n*-násobné póly $-\frac{n}{T_d}$ leží v levé

polorovině komplexní roviny s), ale tato aproximace dává dobré výsledky pro veliká n ($n \geq 8$).

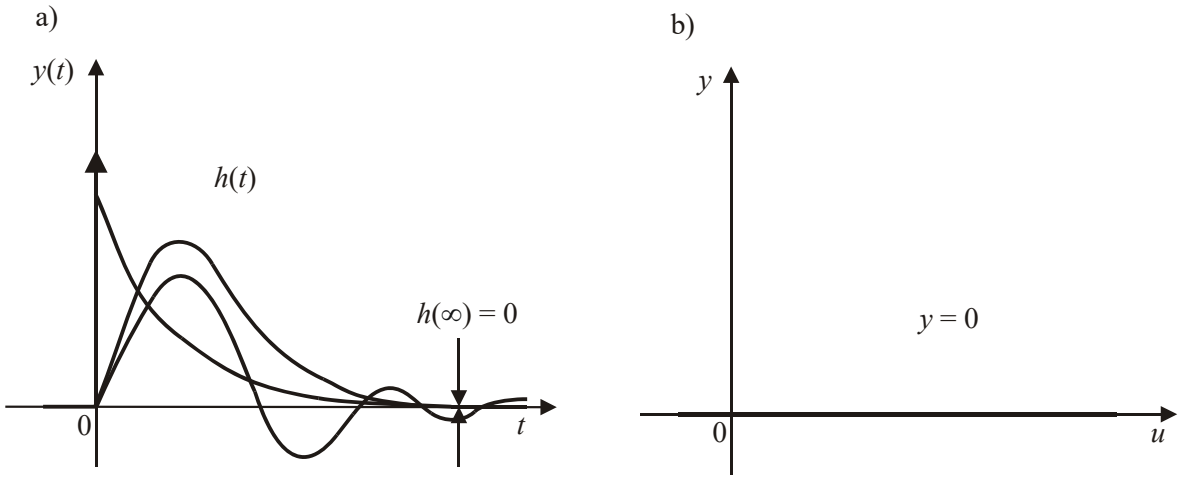


Obr. 3.10 – Přechodové charakteristiky náhrad členu dopravního zpoždění vztahy: a) (3.41), b) (3.42), c) (3.44)

Přechodové charakteristiky různých náhrad členu dopravního zpoždění jsou na obr. 3.10.

Derivační členy

U derivačních členů sice ustálený stav $h(\infty)$ na přechodové charakteristice $h(t)$ existuje, ale je nulový (obr. 3.11a), tzn. statická charakteristika je triviální (obr. 3.11b).



Obr. 3.11 – Derivační členy: a) přechodové charakteristiky, b) statická charakteristika

Pro derivační členy se rovněž používá název předstihové členy.

Přenosy derivačních členů se vyznačují tím, že v jejich čitatelích lze vytknout komplexní proměnnou s.

Přenosy základních derivačních členů mají tvar:

Derivační člen bez setrvačnosti (ideální derivační člen)

$$G(s) = k_1 s\,, \tag{3.45}$$

kde k_1 je koeficient přenosu s fyzikálním rozměrem daným poměrem fyzikálních rozměrů výstupní veličiny $y(t)$ a vstupní veličiny $u(t)$, tento poměr fyzikálních rozměrů je ještě násoben časem.

Derivační člen bez setrvačnosti je fyzikálně nerealizovatelný.

Derivační člen se setrvačností 1. řádu (reálný derivační člen)

$$G(s) = \frac{k_1 s}{T_1 s + 1}. \tag{3.46}$$

Derivační člen se setrvačností 1. řádu je pouze slabě fyzikálně realizovatelný.

Přenos obecného ***derivačního členu r-tého řádu se setrvačností n-tého řádu*** má tvar

$$G(s) = s^r \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0},\ a_0 \neq 0, \qquad b_0 \neq 0, \qquad r > 0\,. \tag{3.47}$$

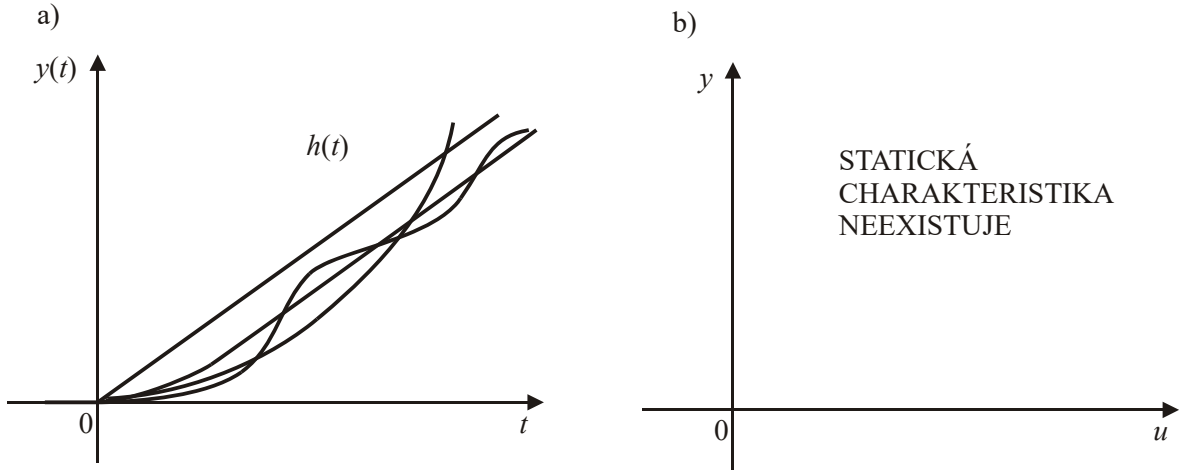
Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy:

silná $\quad n > m + r\,,$ (3.48a)

slabá $\quad n = m + r\,.$ (3.48b)

Integrační členy

U integračních členů klidový ustálený stav $h(\infty)$ na přechodové charakteristice $h(t)$ neexistuje (obr. 3.12a), a proto u nich neexistuje ani statická charakteristika (obr. 3.12b). Prakticky to znamená, že pro každou nenulovou ustálenou hodnotu vstupní veličiny výstupní veličina roste (nebo klesá) až na hodnotu danou fyzikálním omezením.



Obr. 3.12 – Integrační členy: a) přechodové charakteristiky, b) statická charakteristika neexistuje

Pro integrační členy se používá také název astatické členy.

Integrační členy se vyznačují tím, že ve jmenovatelích jejich přenosů lze vytknout komplexní proměnnou s.

Přenosy základních integračních členů mají tvar:

Integrační člen bez setrvačnosti (ideální integrační člen)

$$G(s) = \frac{k_1}{s}, \tag{3.49}$$

kde k_1 je koeficient přenosu s fyzikálním rozměrem daným poměrem fyzikálních rozměrů výstupní $y(t)$ a vstupní $u(t)$ veličiny, tento poměr fyzikálních rozměrů je ještě podělený časem.

Je zřejmé, že integrační člen bez setrvačnosti je silně fyzikálně realizovatelný.

Integrační člen se setrvačností 1. řádu (reálný integrační člen)

$$G(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}. \tag{3.50}$$

Integrační člen se setrvačností 1. řádu je silně fyzikálně realizovatelný.

Obecný ***integrační člen q-tého řádu se setrvačností n-tého řádu*** má přenos ve tvaru:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^q \left(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right)}, \quad a_0 \neq 0, \; b_0 \neq 0, \; q > 0 \tag{3.51}$$

a podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy:

silná $\quad q + n > m$, (3.52a)

slabá $\quad q + n = m$. (3.52b)

Kombinací uvedených tří druhů lineárních dynamických členů lze vytvořit lineární člen s požadovanými dynamickými vlastnostmi. Je rovněž zřejmé, že derivační a integrační vlastnosti jsou dominující, tzn. sériovým spojením derivačního, resp. integračního členu s proporcionálním členem se získá derivační, resp. integrační člen. Proporcionální část obsahující setrvačnost způsobuje pomalejší odezvu. Z tohoto důvodu časové konstanty T_i (i = 0, 1, 2,…) vystupující ve jmenovatelích přenosů se často nazývají ***setrvačné časové konstanty***.

Příklad 3.2

Dynamický člen je popsán lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_2 \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} + b_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 u(t)$$

při nulových počátečních podmínkách.

U daného dynamického členu je třeba určit všechny jeho vlastnosti za těchto předpokladů:

a) $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 > 0$;

b) $a_0, a_1, a_2 > 0$; $b_0, b_1 \neq 0$; $b_2 = 0$;

c) $a_0 = 0$; $a_1, a_2 \neq 0$; $b_0, b_1, b_2 > 0$;

d) $a_0 = a_1 = 0$; $a_2 \neq 0$; $b_0, b_1, b_2 > 0$;

e) $a_0, a_1, a_2 > 0$; $b_0 = 0$; $b_1, b_2 \neq 0$;

f) $a_0, a_1, a_2 > 0$; $b_0 = b_1 = 0$; $b_2 \neq 0$.

Řešení:

Dynamický člen je lineární, protože je popsán lineární diferenciální rovnicí. Nejlépe se pracuje s přenosem, a proto po použití Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek se dostane

$$\left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right) U(s) \quad \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

ad a)

Pro tento případ má přenos výše odvozený tvar, ze kterého vyplývá, že ze jmenovatele ani z čitatele nelze vytknout komplexní proměnnou s, a proto daný lineární dynamický člen je proporcionální člen se setrvačností 2. řádu.

Protože $n = m = 2$ jde o slabě fyzikálně realizovatelný proporcionální člen.

Ve jmenovateli vystupuje mnohočlen 2. stupně

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_2 (s - s_1)(s - s_2)$$

s kořeny

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že pro ($a_0, a_1, a_2 > 0$):

$a_1^2 > 4a_0 a_2 \Rightarrow s_1 \neq s_2$ kořeny budou reálné záporné,

$a_1^2 = 4a_0 a_2 \Rightarrow s_1 = s_2$ dvojnásobný reálný záporný kořen,

$a_1^2 < 4a_0 a_2 \Rightarrow s_1 \neq s_2$ komplexně sdružené kořeny se zápornou reálnou částí.

Je zřejmé, že kořeny vždy leží v levé polorovině komplexní roviny s. Lze tedy říci, že **nutnou a postačující podmínkou pro to, aby kořeny mnohočlenu 2. stupně ležely v levé polorovině komplexní roviny kořenů je, aby všechny jeho koeficienty existovaly a byly kladné** (tj. $a_0, a_1, a_2 > 0$). Je to Stodolova nutná a postačující podmínka (asymptotické) stability pro systém 2. řádu.

Čitatel je tvořen rovněž mnohočlenem 2. stupně, a proto pro něj budou platit stejné závěry.

Protože póly (kořeny jmenovatele) i nuly (kořeny čitatele) přenosu leží v levé polorovině komplexní roviny s, daný proporcionální člen je minimálněfázový (s minimální fází).

ad b)

Přenos má tvar

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Ze jmenovatele ani čitatele nelze vytknout komplexní proměnnou s, a proto jde o silně fyzikálně realizovatelný ($n = 2 > m = 1$) proporcionální člen se setrvačností 2. řádu.

Pro sign b_1 = sign b_0 nula (kořen čitatele) i póly (kořeny jmenovatele) přenosu budou ležet v levé polorovině komplexní roviny s, a proto proporcionální člen bude minimálněfázový.

Pro sign $b_1 \neq$ sign b_0 nula (kořen čitatele) přenosu bude kladná, a tedy proporcionální člen bude neminimálněfázový.

ad c)

Přenos má tvar

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s(a_2 s + a_1)},$$

ze kterého vyplývá $q = 1$, $n = 1$, $m = 2$. V tomto případě jde o slabě fyzikálně realizovatelný ($q + n = m = 2$) integrační člen 1. řádu ($q = 1$) se setrvačností 1. řádu ($n = 1$).

Pro sign a_2 = sign a_1 pól (kořen jmenovatele) i nuly (kořeny čitatele) přenosu leží v levé polorovině komplexní roviny s (nulový pól integrační části se neuvažuje), a proto v tomto případě integrační člen je minimálněfázový.

Pro sign $a_2 \neq$ sign a_1 pól (kořen jmenovatele) přenosu je kladný, leží v pravé polorovině komplexní roviny s, a proto v tomto případě integrační člen je neminimálněfázový a nestabilní.

ad d)

Přenos má tvar

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2},$$

ze kterého vyplývá, že $q = 2$, $n = 0$, $m = 2$. Jde tedy o slabě fyzikálně realizovatelný ($q + n = m = 2$) integrační člen 2. řádu ($q = 2$) bez setrvačnosti ($n = 0$).

Protože nuly (kořeny čitatele) přenosu leží v levé polorovině komplexní roviny s (dva nulové póly integrační části se neuvažují), daný integrační člen je minimálněfázový.

ad e)

Přenos má tvar

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{s(b_2 s + b_1)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Pro přenos platí, že $r = 1$, $m = 1$, $n = 2$, a proto jde o slabě fyzikálně realizovatelný ($n = m + r = 2$) derivační člen 1. řádu ($r = 1$) se setrvačností 2. řádu ($n = 2$).

Pro sign b_2 = sign b_1 nula (kořen čitatele) a póly (kořeny jmenovatele) přenosu leží v levé polorovině komplexní roviny s, proto je daný derivační člen v tomto případě minimálněfázový („nulová“ nula derivační části se neuvažuje).

Pro sign $b_2 \neq$ sign b_1 nula (kořen čitatele) přenosu leží v pravé polorovině komplexní roviny s, a proto derivační člen je neminimálněfázový.

ad f)

Přenos má tvar

$$G(s) = \frac{b_2 s^2}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

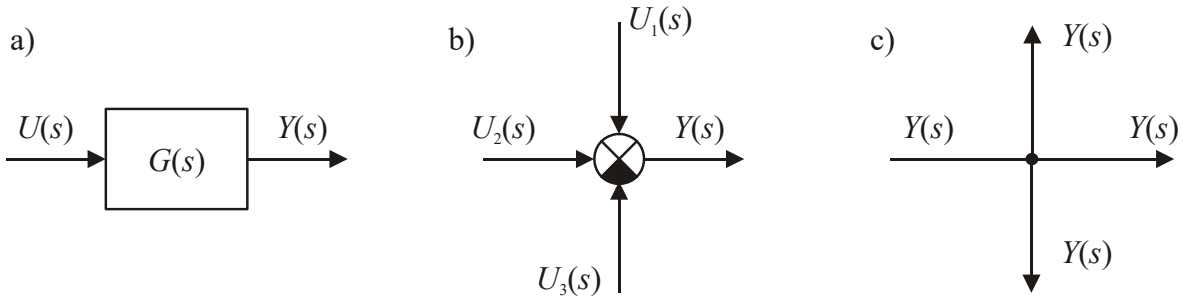
Pro přenos platí, že $r = 2$, $m = 0$, $n = 2$. Jde o slabě fyzikálně realizovatelný ($n = m + r = 2$) derivační člen 2. řádu ($r = 2$) se setrvačností 2. řádu ($n = 2$).

Protože póly (kořeny jmenovatele) přenosu leží v levé polorovině komplexní roviny s, daný derivační člen je minimálněfázový („nulové“ nuly derivační části se neuvažují).

Pokud by výchozí přenos obsahoval dopravní zpoždění [viz (3.38)], pak by šlo ve všech případech o lineární neminimálněfázový dynamický člen.

3.3 Algebra blokových schémat

Velikou výhodou popisu vlastností lineárních dynamických členů pomocí přenosů je možnost používání blokových schémat, ve kterých každý člen je vyjádřen blokem s vepsaným přenosem (obr. 3.13a), sčítání či odčítání veličin je vyjádřeno sumačním uzlem (obr. 3.13b) a větvení veličin informačním uzlem (obr. 3.13c).



Obr. 3.13 – Vyjádření: a) dynamického členu blokem, b) sčítání či odečítání veličin sumačním uzlem, c) větvení veličin informačním uzlem

Pro blok na obr. 3.13a platí

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

a pro sumační uzel na obr. 3.13b

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s) - U_3(s)\,.$$

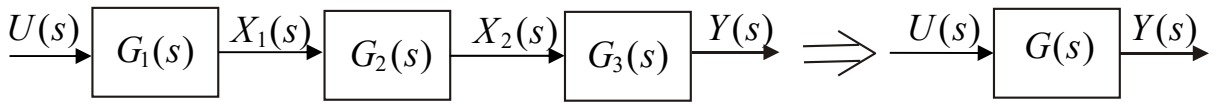
Ze sumačního uzlu může vycházet pouze jeden výstup.

Vyplněný segment vyjadřuje znaménko minus. Někdy místo vyplněného segmentu se znaménko minus napíše u příslušné veličiny.

Informační uzel žádné vysvětlení nevyžaduje, protože jeho funkce je zřejmá.

Pomocí bloků, sumačních a informačních uzlů lze vytvořit i velmi složitá bloková schémata, která se dají, po případných úpravách, vždy rozložit na tři základní zapojení: sériové (za sebou), paralelní (vedle sebe) a zpětnovazební.

Sériové zapojení



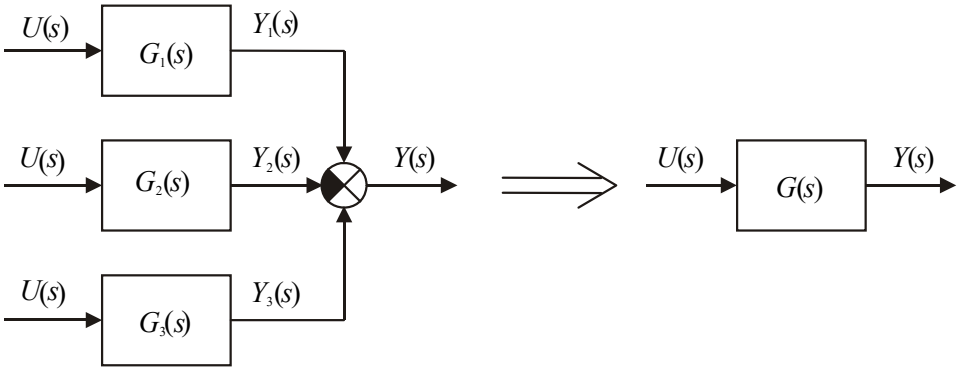
Obr. 3.14 – Sériové zapojení bloků

Pro sériové zapojení bloků na obr. 3.14 platí

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= G_3(s)X_2(s) \\ X_2(s) &= G_2(s)X_1(s) \\ X_1(s) &= G_1(s)U(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\,. \tag{3.53}$$

U sériového zapojení platí, že výsledný přenos je dán součinem jednotlivých přenosů (na pořadí nezáleží).

Paralelní zapojení



Obr. 3.15 – Paralelní zapojení bloků

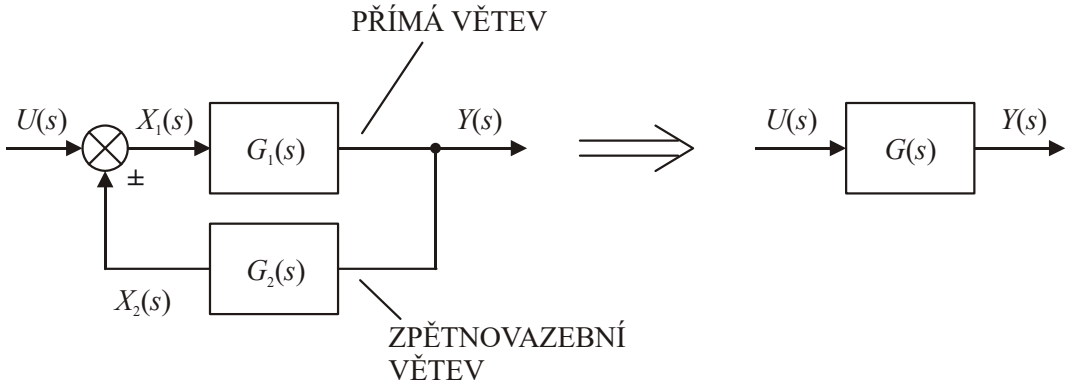
Pro paralelní zapojení bloků na obr. 3.15 lze psát

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) - Y_2(s) + Y_3(s) \\ Y_1(s) &= G_1(s)U(s) \\ Y_2(s) &= G_2(s)U(s) \\ Y_3(s) &= G_3(s)U(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = G_1(s) - G_2(s) + G_3(s)\,. \tag{3.54}$$

U paralelního zapojení platí, že výsledný přenos je dán součtem jednotlivých přenosů s uvažováním příslušných znamének u součtového uzlu.

Je zřejmé, že jak u sériového, tak i u paralelního zapojení počet bloků může být libovolný.

Zpětnovazební zapojení



Obr. 3.16 – Zpětnovazební zapojení bloků

Zpětnovazební zapojení bloků na obr. 3.16 je velmi důležité a jak bude ukázáno dále, je základem pro celou teorii automatického řízení. Platí pro něj vztahy

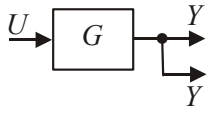
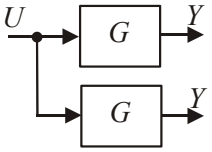
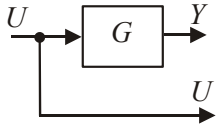
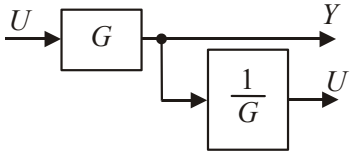
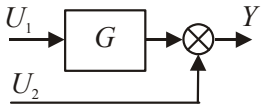
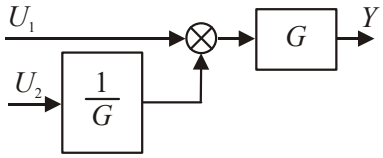
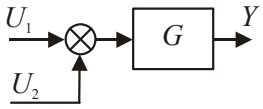
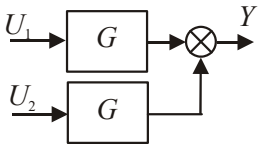
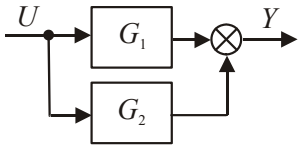
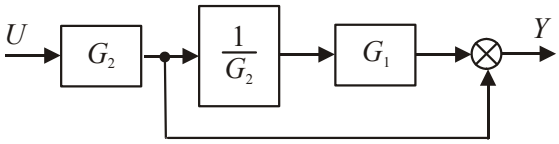
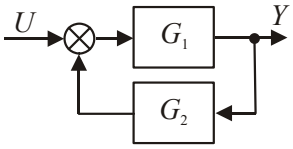
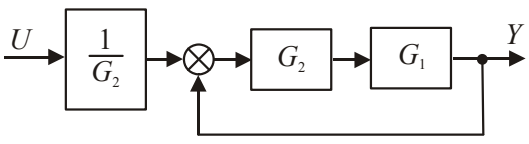
$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)X_1(s) \\ X_1(s) &= U(s) \pm X_2(s) \\ X_2(s) &= G_2(s)Y(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}. \tag{3.55}$$

U zpětnovazebního zapojení je výsledný přenos dán přenosem v přímé větvi podělený záporným (v případě kladné zpětné vazby), resp. kladným (v případě záporné zpětné vazby) součinem přenosů v přímé i zpětnovazební větvi zvětšeným o jedničku. Přenos větve bez uvedeného konkrétního přenosu (bez bloku) je uvažován jako jednotkový.

Se znalostí uvedených tří zapojení a jednoduchých úprav blokových schémat ukázaných v tab. 3.1 lze snadno zjednodušit libovolně složité blokové schéma. Z důvodu jednoduchosti a přehlednosti je vhodné, především u složitějších blokových schémat, neuvádět u přenosů a obrazů veličin nezávisle proměnnou s.

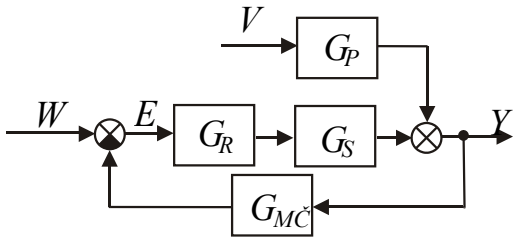
Pokud blokové schéma při zjednodušování a určování výsledných přenosů obsahuje více vstupních a výstupních veličin, pak pro každou výstupní veličinu se postupně uvažují všechny vstupní veličiny, při čemž neuvažované vstupní veličiny se považují za nulové (nekreslí se). Výsledné přenosy pro jednotlivé výstupní veličiny jsou na základě linearity dány součtem vlivů všech vstupních veličin. Z důvodu jednoznačného popisu výsledného přenosu se často používá index, jehož první písmeno označuje vstupní veličinu a druhé písmeno výstupní veličinu.

Tab. 3.1 – Základní úpravy blokových schémat

Přesunutí informačního uzlu před blok	
	
Přesunutí informačního uzlu za blok	
	
Přesunutí sumačního uzlu před blok	
	
Přesunutí sumačního uzlu za blok	
	
Přesunutí bloku z paralelní větve	
	
Přesunutí bloku ze zpětnovazební větve	
	

Příklad 3.3

Blokové schéma na obr. 3.17 je třeba zjednodušit za předpokladu, že za výstupní veličiny jsou uvažovány obrazy Y a E. Z důvodu jednoduchosti a přehlednosti u přenosů a obrazů veličin není uváděna nezávisle proměnná – komplexní proměnná s.

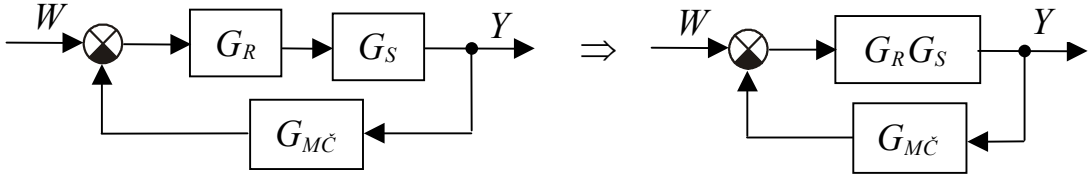


Obr. 3.17 – Blokové schéma z příkladu 3.3

Řešení:

a)

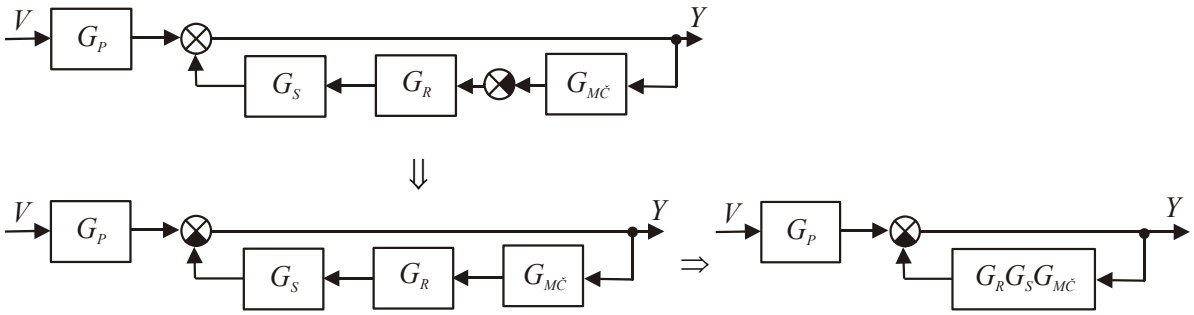
Nejdříve se předpokládá, že výstupní veličina je Y a vstupní veličina W, a proto se uvažuje $V = 0$. Postupná úprava a zjednodušení blokového schématu je na obr. 3.18. Z posledního schématu již plyne výsledný přenos



Obr. 3.18 – Postupné určování přenosu G_{wy} – příklad 3.3

$$G_{wy} = \frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S G_{MČ}}.$$

Nyní jako vstupní veličina je uvažována V a výstupní Y.



Obr. 3.19 – Postupné určování přenosu G_{vy} – příklad 3.3

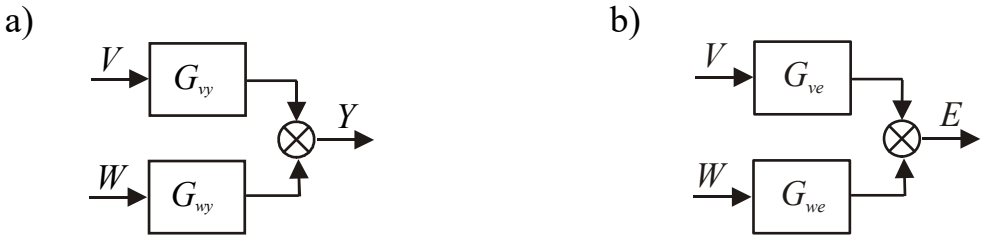
Vstupní veličina $W = 0$ a sumační uzel se znaménkem minus se přesune, další úpravy jsou zřejmé z obr. 3.19. Výsledný přenos má tvar (na pořadí přenosů v součinu $G_R G_S G_{MČ}$ nezáleží)

$$G_{vy} = \frac{G_P}{1 + G_R G_S G_{MČ}}.$$

Pro výstupní veličinu Y platí rovnice

$$Y = G_{wy} W + G_{vy} V,$$

které odpovídá zjednodušené blokové schéma na obr. 3.20a.



Obr. 3.20 – Zjednodušené blokové schéma z obr. 3.17 za předpokladu, že výstupní veličina je: a) *Y*, b) *E*

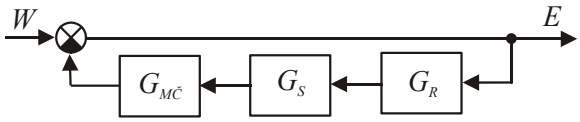
b)

Nyní se předpokládá, že výstupní veličina je *E*. Pro vstupní veličinu *W* za předpokladu $V = 0$ je výchozí blokové schéma na obr. 3.21 a pro vstupní veličinu *V* za předpokladu $W = 0$ je výchozí blokové schéma na obr. 3.22. Pro obě bloková schémata lze napsat výsledné přenosy přímo

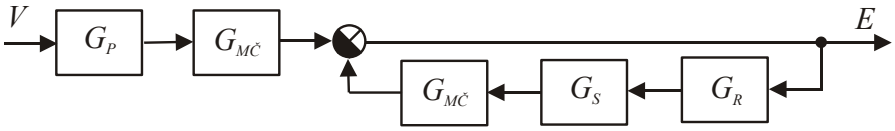
$$G_{we} = \frac{1}{1 + G_R G_S G_{MČ}}$$

a

$$G_{ve} = -\frac{G_P G_{MČ}}{1 + G_R G_S G_{MČ}}.$$



Obr. 3.21 – Výchozí blokové schéma pro určení přenosu G_{we} – příklad 3.3



Obr. 3.22 – Výchozí blokové schéma pro určení přenosu G_{ve} – příklad 3.3

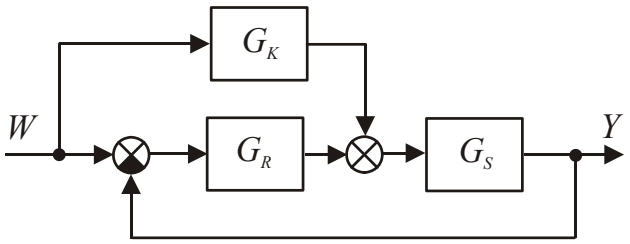
Pro výstupní veličinu *E* platí rovnice

$$E = G_{we} W + G_{ve} V,$$

které odpovídá zjednodušené blokové schéma na obr. 3.20b.

Příklad 3.4

Pro zapojení na obr. 3.23 je třeba určit výsledný přenos G_{wy}.



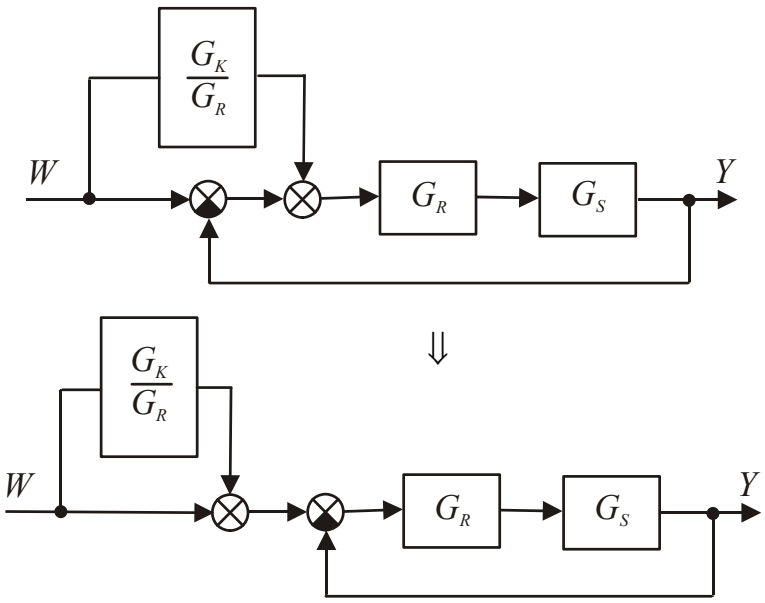
Obr. 3.23 – Blokové schéma z příkladu 3.4

Řešení:

Sumační uzel mezi bloky s přenosy G_R a G_S se postupně přesune v souladu s obr. 3.24 tak, aby pak již bylo možné jednoduše určit hledaný přenos G_{wy}.

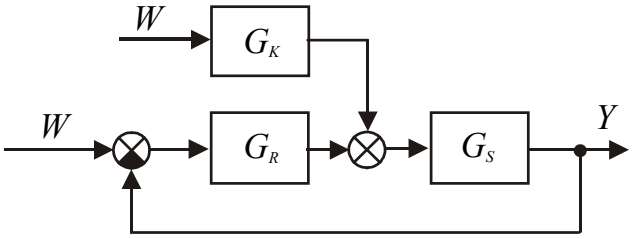
Na základě obr. 3.24 pro paralelní a zpětnovazební zapojení lze psát

$$G_{wy} = \frac{Y}{W} = \left(\frac{G_K}{G_R} + 1\right)\frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S} = \frac{G_K G_S + G_R G_S}{1 + G_R G_S}.$$



Obr. 3.24 – Postupná úprava blokového schématu z obr. 3.23 – příklad 3.4

Výsledný přenos G_{wy} lze získat ještě snadněji. Blokové schéma na obr. 3.23 se upraví v souladu s obr. 3.25.



Obr. 3.25 – Upravené blokové schéma z obr. 3.23 – příklad 3.4

Na základě obr. 3.25 pro výstupní veličinu Y (tj. její obraz) platí

$$Y = \frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S} W + \frac{G_K G_S}{1 + G_R G_S} W = \frac{G_K G_S + G_R G_S}{1 + G_R G_S} W .$$

Je zřejmé, že byl získán stejný výsledný přenos G_{wy} jako při předchozím postupu.

3.4 Linearizace

V předchozích podkapitolách se předpokládalo, že uvedené matematické modely a jimi popisované reálné členy (objekty) jsou lineární. Ve skutečnosti však všechny reálné členy mají nelineární vlastnosti, a to jak statické, tak i dynamické. Pokud tyto nelineární vlastnosti uvažovaného dynamického členu nejsou podstatné, tj. při malých změnách jeho některých parametrů nezpůsobují kvalitativně jiné chování, pak ho lze v okolí ***pracovního bodu*** popsat lineárním matematickým modelem. Lineární matematický model se získá pro zvolený nebo daný pracovní bod z nelineárního matematického modelu tzv. ***linearizací***.

Existují různé linearizační postupy. Ty nejjednodušší se používají při linearizaci nelineárních statických charakteristik, které jsou dány ve tvaru grafů a spočívají v náhradě nelineárních průběhů v okolí pracovního bodu vhodně zvolenými přímkami. Ty složitější využívají při volbě vhodných přímek optimalizace zvolených kritérií. Nejčastěji se používá minimalizace součtu čtverců odchylek.

Je-li matematický model nelineárního statického členu s jednou výstupní veličinou y a m vstupními veličinami u_1, u_2,…, u_m (vzhledem k tomu, že jde o statický člen, nemusí být uvažována nezávisle proměnná čas t) dán analyticky, např. ve tvaru

$$y = f(u_1, u_2, \ldots, u_m), \tag{3.56}$$

pak je vhodné použít v pracovním bodě

$$y_0 = f(u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{m0}) \tag{3.57}$$

náhradu pomocí tečné nadroviny

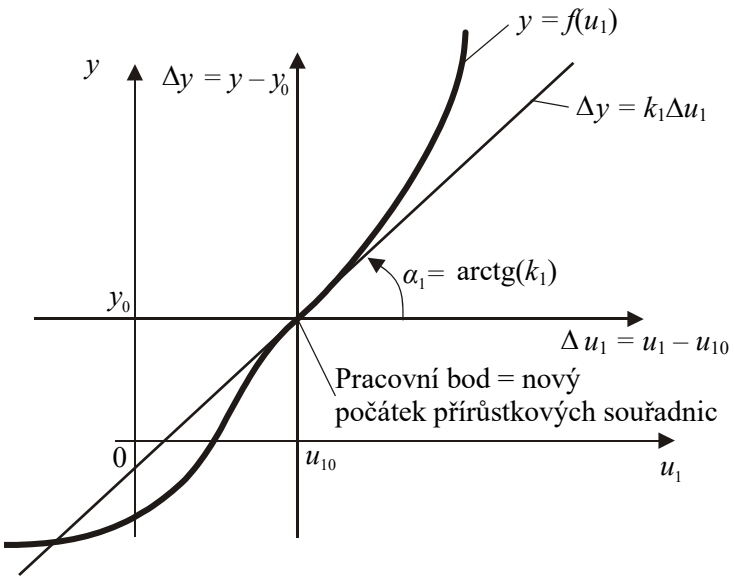
$$\hat{y} = y_0 + \Delta y, \tag{3.58}$$

kde

$$\Delta y = k_1 \Delta u_1 + k_2 \Delta u_2 + \ldots + k_m \Delta u_m \tag{3.59}$$

je přírůstek výstupní veličiny, tj. $\Delta y = y - y_0$ a $\Delta u_1 = u_1 - u_{10}$, $\Delta u_2 = u_2 - u_{20}$,…, $\Delta u_m = u_m - u_{m0}$ jsou přírůstky odpovídajících vstupních veličin a

$$k_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_0 , k_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|_0 , \ldots, k_m = \left.\frac{\partial f}{\partial u_m}\right|_0 \tag{3.60}$$



Obr. 3.26 – Geometrická interpretace linearizace tečnou pro jednu vstupní veličinu

jsou parciální derivace vypočtené v pracovním bodě (3.57) a $\hat{y}$ je výstupní veličina v absolutním vyjádření získána po linearizaci. Z geometrické interpretace pro jednu vstupní veličinu (obr. 3.26) vyplývá, že koeficient k_1 je směrnicí tečny, tj. směrnicí linearizační přímky.

Linearizace pomocí tečné nadroviny může být použita, pokud parciální derivace (3.60) existují a jsou spojité. Po linearizaci je třeba nový počátek v přírůstkových souřadnicích (veličinách) uvažovat v pracovním bodě (3.57), viz obr. 3.26.

Je zřejmé, že lineární náhrada tečnou nadrovinou pro dostatečně malé okolí pracovního bodu může být velmi kvalitní a že uvedený postup může být použit pro libovolný počet výstupních veličin, tj. pro mnohorozměrový nelineární statický člen.

V případě diferenciálních rovnic, kde nelinearita nevystupuje v derivacích podle času, musí být uvažován čas t. Např. pro i-tou derivaci výstupní veličiny podle času při linearizaci platí

$$\frac{\mathrm{d}^i\, y(t)}{\mathrm{d}\, t^i} = \frac{\mathrm{d}^i [y_0 + \Delta y(t)]}{\mathrm{d}\, t^i} = \frac{\mathrm{d}^i\, \Delta y(t)}{\mathrm{d}\, t^i}, \tag{3.61}$$

protože y_0 = konst.

Pokud matematický vztah, který má být linearizován je velmi složitý, je vhodné rozdělit ho na jednodušší vztahy, ty linearizovat a pak znovu dosazováním určit výsledný linearizovaný vztah nebo použít algebru blokových schémat.

Příklad 3.5

Je třeba linearizovat násobicí

$$y = u_1 u_2$$

a dělicí

$$y = \frac{u_1}{u_2}$$

člen a určit maximální relativní chyby linearizovaných modelů pro pracovní bod určený nominálními hodnotami $u_{10} = 10$, $u_{20} = 8$ a pro hodnoty u_1 a u_2 lišící se od hodnot nominálních maximálně o 10 %.

Řešení:

a) Násobicí člen

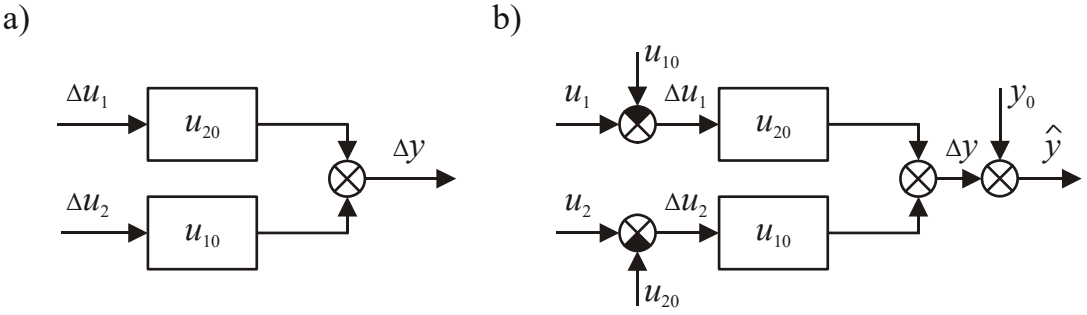
V souladu se vztahy (3.56) – (3.60) lze psát

$$y_0 = u_{10}u_{20}, \qquad y = u_1u_2,$$

$$\Delta y = k_1\Delta u_1 + k_2\Delta u_2, \qquad k_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u_1}\right|_0 = u_{20}, \qquad k_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial u_2}\right|_0 = u_{10},$$

$$\hat{y} = y_0 + \Delta y = u_{10}u_{20} + \Delta y,$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_{10}, \qquad \Delta u_2 = u_2 - u_{20}.$$



Obr. 3.27 – Linearizace násobicího členu: a) blokové schéma pro přírůstkové veličiny, b) blokové schéma pro absolutní veličiny

Je zřejmé, že násobicí člen v lineárních blokových schématech může být zastoupen součtovým členem, viz obr. 3.27a. Pokud je třeba pracovat s veličinami v absolutním vyjádření, pak je možno použít blokové schéma na obr. 3.27b.

Určení maximální relativní chyby:

Maximální 10% přírůstky vstupních veličin u_1 a u_2 jsou dány vztahy

$$|\Delta u_1| = 0{,}1 \cdot u_{10} = 0{,}1 \cdot 10 = 1,$$

$$|\Delta u_2| = 0{,}1 \cdot u_{20} = 0{,}1 \cdot 8 = 0{,}8.$$

Protože má být určena pouze maximální relativní chyba náhrady, je třeba vždy určit pouze maximální a minimální hodnotu. Lze proto psát:

$$y = u_1u_2 = (u_{10} \pm |\Delta u_1|)(u_{20} \pm |\Delta u_2|),$$

$$y_{\max} = (u_{10} + |\Delta u_1|)(u_{20} + |\Delta u_2|) = (10 + 1)(8 + 0{,}8) = 96{,}8;$$

$$y_{\min} = (u_{10} - |\Delta u_1|)(u_{20} - |\Delta u_2|) = (10-1)(8-0{,}8) = 64{,}8\,;$$

$$\Delta y = u_{20}(\pm|\Delta u_1|) + u_{10}(\pm|\Delta u_2|)\,;$$

$$\Delta y_{\max} = u_{20}|\Delta u_1| + u_{10}|\Delta u_2| = 8\cdot 1 + 10\cdot 0{,}8 = 16\,;$$

$$\Delta y_{\min} = u_{20}(-|\Delta u_1|) + u_{10}(-|\Delta u_2|) = 8\cdot(-1) + 10\cdot(-0{,}8) = -16\,;$$

$$\hat{y} = y_0 + \Delta y = u_{10}u_{20} + \Delta y\,;$$

$$\hat{y}_{\max} = u_{10}u_{20} + \Delta y_{\max} = 10\cdot 8 + 16 = 96\,;$$

$$\hat{y}_{\min} = u_{10}u_{20} + \Delta y_{\min} = 10\cdot 8 - 16 = 64\,;$$

$$\delta = \frac{\hat{y}_{\max} - y_{\max}}{y_{\max}}\cdot 100 = \frac{96-96{,}8}{96{,}8}\cdot 100 \doteq -0{,}83\ \%\,;$$

$$\delta = \frac{\hat{y}_{\min} - y_{\min}}{y_{\min}}\cdot 100 = \frac{64-64{,}8}{64{,}8}\cdot 100 \doteq -1{,}23\ \%\,;$$

Při náhradě nelineárního násobicího členu lineárním součtovým členem (obr. 3.27a) pro zvolený pracovní (nominální) bod a maximálně desetiprocentní odchylky vstupních veličin od nominálních hodnot maximální relativní chyba součinu bude menší než 1,25 %.

b) Dělicí člen

V souladu se vztahy (3.56) – (3.60) lze psát

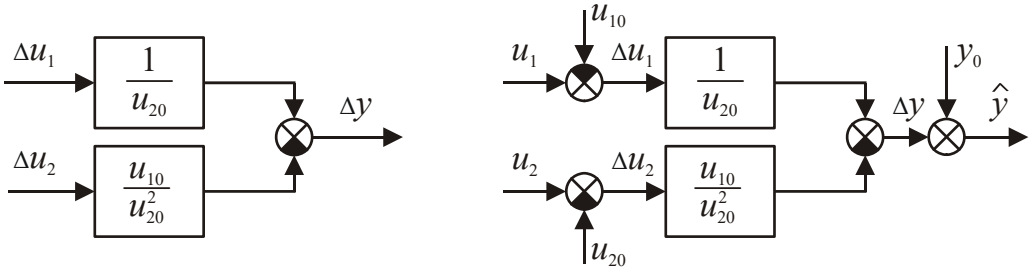
$$y_0 = \frac{u_{10}}{u_{20}}, \qquad y = \frac{u_1}{u_2},$$

$$\Delta y = k_1\Delta u_1 + k_2\Delta u_2, \qquad k_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u_1}\right|_0 = \frac{1}{u_{20}}, \qquad k_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial u_2}\right|_0 = -\frac{u_{10}}{u_{20}^2},$$

$$\hat{y} = y_0 + \Delta y = \frac{u_{10}}{u_{20}} + \Delta y,$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_{10}, \qquad \Delta u_2 = u_2 - u_{20}.$$

a) b)



Obr. 3.28 – Linearizace dělicího členu: a) blokové schéma pro přírůstkové veličiny, b) blokové schéma pro absolutní veličiny

Na obr. 3.28a je lineární náhrada dělicího členu rozdílovým členem pro přírůstkové veličiny a na obr. 3.28b je uvedeno blokové schéma pro absolutní veličiny (pro veličiny v absolutním vyjádření).

Určení maximální relativní chyby:

Bude postupováno jako v předchozím případě pro $|\Delta u_1| = 1$ a $|\Delta u_2| = 0{,}8$.

$$y = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_{10} \pm |\Delta u_1|}{u_{20} \pm |\Delta u_2|},$$

$$y_{\max} = \frac{u_{10} + |\Delta u_1|}{u_{20} - |\Delta u_2|} = \frac{10+1}{8-0{,}8} \doteq 1{,}53;$$

$$y_{\min} = \frac{u_{10} - |\Delta u_1|}{u_{20} + |\Delta u_2|} = \frac{10-1}{8+0{,}8} \doteq 1{,}02;$$

$$\Delta y = \frac{1}{u_{20}}(\pm|\Delta u_1|) - \frac{u_{10}}{u_{20}^2}(\pm|\Delta u_2|);$$

$$\Delta y_{\max} = \frac{1}{u_{20}}|\Delta u_1| - \frac{u_{10}}{u_{20}^2}(-|\Delta u_2|) = \frac{1}{8}\cdot 1 + \frac{10}{8^2}\cdot 0{,}8 = 0{,}25;$$

$$\Delta y_{\min} = \frac{1}{u_{20}}(-|\Delta u_1|) - \frac{u_{10}}{u_{20}^2}|\Delta u_2| = -\frac{1}{8}\cdot 1 - \frac{10}{8^2}\cdot 0{,}8 = -0{,}25;$$

$$\hat{y} = y_0 + \Delta y = \frac{u_{10}}{u_{20}} + \Delta y;$$

$$\hat{y}_{\max} = \frac{u_{10}}{u_{20}} + \Delta y_{\max} = \frac{10}{8} + 0{,}25 = 1{,}5;$$

$$\hat{y}_{\min} = \frac{u_{10}}{u_{20}} + \Delta y_{\min} = \frac{10}{8} - 0{,}25 = 1;$$

$$\delta = \frac{\hat{y}_{\max} - y_{\max}}{y_{\max}} \cdot 100 = \frac{1{,}5 - 1{,}53}{1{,}53} \cdot 100 \doteq -1{,}96\ \%;$$

$$\delta = \frac{\hat{y}_{\min} - y_{\min}}{y_{\min}} \cdot 100 = \frac{1 - 1{,}02}{1{,}02} \cdot 100 \doteq -1{,}96\ \%;$$

Při náhradě nelineárního dělicího členu lineárním rozdílovým členem (obr. 3.28a) pro zvolený pracovní (nominální) bod a maximálně desetiprocentní odchylky vstupních veličin od nominálních hodnot maximální relativní chyba podílu bude menší než 2 %.

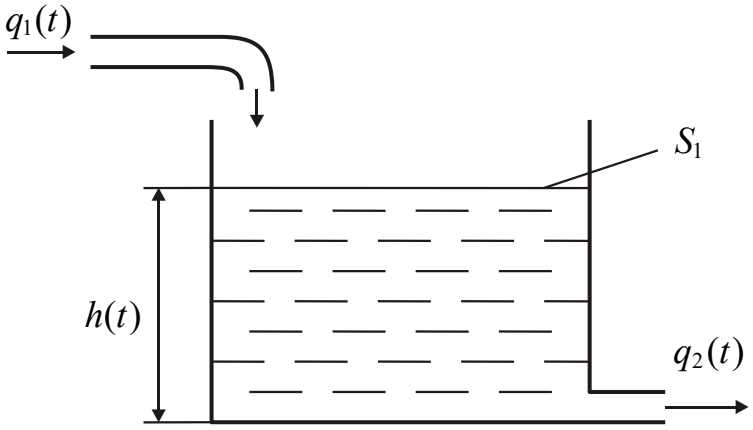
Příklad 3.6

Je třeba určit linearizovaný matematický model kapalinové nádrže na obr. 3.29 s přítokem $q_1(t)$ [m^3s^{-1}] a volným odtokem $q_2(t)$ [m^3s^{-1}] za předpokladu, že

průřez nádrže S_1 [m^2] je konstantní, výstupní veličinou je výška hladiny kapaliny $h(t)$ [m] a pro odtok platí

$$q_2(t) = \alpha S_2 \sqrt{2gh(t)},$$

kde S_2 je konstantní odtokový průřez [m^2], g – tíhové zrychlení [m s^{-2}], α – koeficient průtoku [-].



Obr. 3.29 – Zjednodušené schéma nádrže s přítokem a volným odtokem z příkladu 3.6

Řešení:

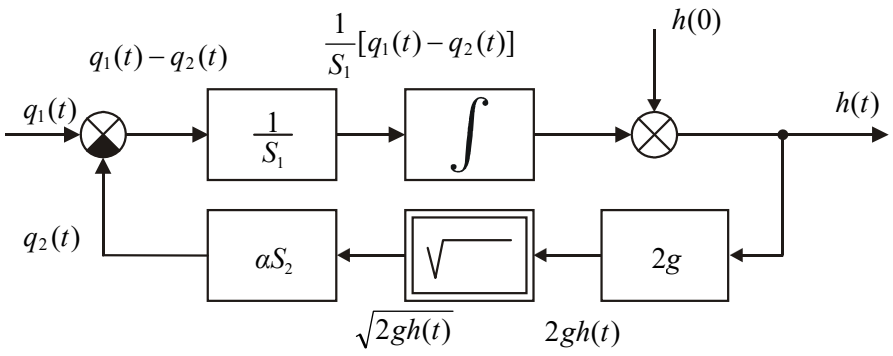
Pro nádrž platí jednoduchá bilanční rovnice (přírůstek objemu je roven rozdílu přítoku a odtoku za časový přírůstek)

$$S_1 \,\mathrm{d}\, h(t) = [q_1(t) - q_2(t)]\,\mathrm{d}\, t\,.$$

Po dosazení za odtok $q_2(t)$ se dostane

$$\frac{\mathrm{d}\, h(t)}{\mathrm{d}\, t} = \frac{1}{S_1}[q_1(t) - \alpha S_2 \sqrt{2gh(t)}]\,.$$

Blokové schéma odpovídající této nelineární diferenciální rovnici 1. řádu je na obr. 3.30, kde $h(0)$ je počáteční výška hladiny.



Obr. 3.30 – Blokové schéma nelineárního matematického modelu nádrže s přítokem a volným odtokem z příkladu 3.6

V ustáleném stavu platí

$$t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}\,t} \to 0 \\ h(t) \to h(\infty) = h \\ q_1(t) \to q_1(\infty) = q_1 \\ q_2(t) \to q_2(\infty) = q_2 \end{cases}$$

a proto se po úpravě ze vztahu

$$0 = \frac{1}{S_1}\left(q_1 - \alpha S_2 \sqrt{2gh}\right)$$

dostane rovnice statické charakteristiky

$$h = \frac{q_1^2}{2g\alpha^2 S_2^2} \quad \Leftrightarrow q_1 = \alpha S_2 \sqrt{2gh}\,, \qquad h \geq 0\,.$$

Nyní je možné provést pro zvolený pracovní bod

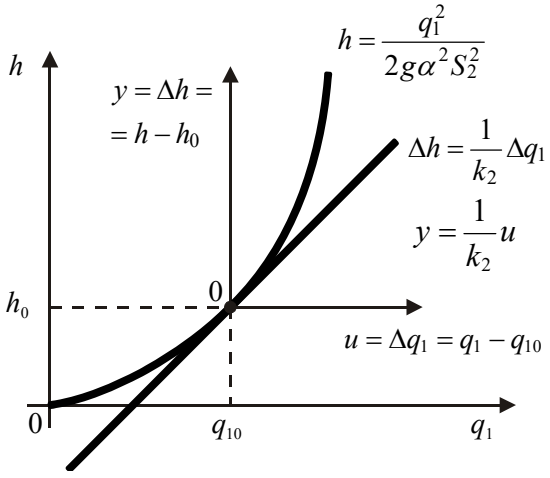
$$h_0 = \frac{q_{10}^2}{2g\alpha^2 S_2^2}$$

linearizaci. V souladu se vztahy (3.56) – (3.61) a při uvažování, že v ustáleném stavu platí $q_1 = q_2$, lze psát

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta h(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{S_1}[\Delta q_1(t) - k_2 \Delta h(t)],$$

kde koeficient k_2 je určen v pracovním bodě (q_{10}, h_0), tj.

$$k_2 = \left.\frac{\partial q_2}{\partial h}\right|_0 = \frac{\alpha S_2 \sqrt{g}}{\sqrt{2h_0}}\,.$$



Obr. 3.31 – Geometrická interpretace linearizace statické charakteristiky nádrže s přítokem a volným odtokem z příkladu 3.6

Geometrická interpretace linearizace nelineární statické charakteristiky nádrže je na obr. 3.31.

V teorii automatické regulace se často přírůstkové veličiny zastupují veličinami standardně používanými, tj.

$$y(t) = \Delta h(t), \qquad u(t) = \Delta q_1(t)$$

pak linearizovaný matematický model nádrže s přítokem a volným odtokem má tvar

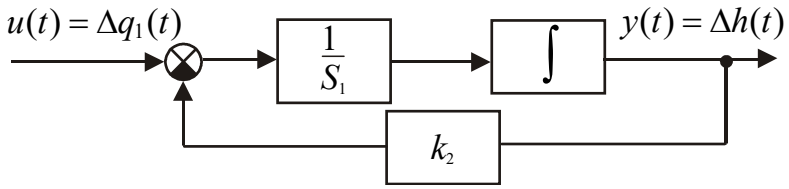
$$\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} = \frac{1}{S_1}[u(t) - k_2 y(t)]$$

resp.

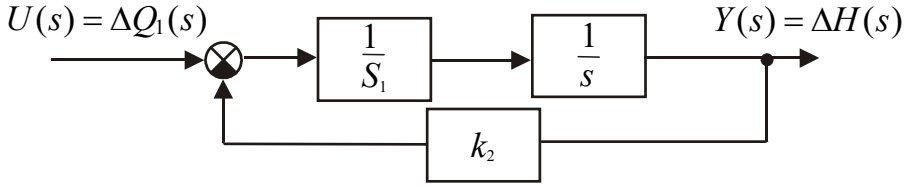
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \qquad k_1 = \frac{1}{k_2}, \qquad T_1 = \frac{S_1}{k_2},$$

kde k_1 je koeficient přenosu [$m^{-2}s$], T_1 – časová konstanta [s].

a)



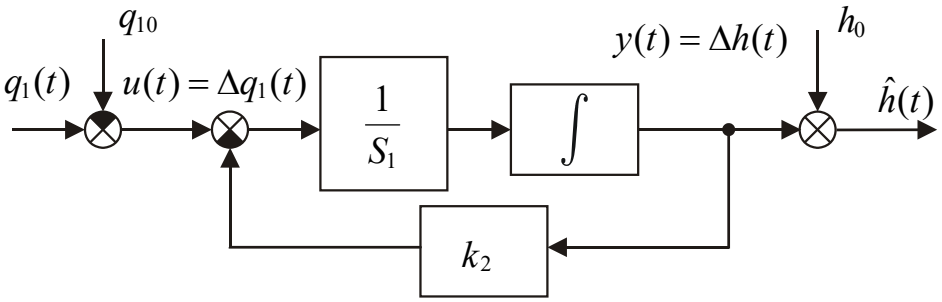
b)



Obr. 3.32 – Blokové schéma linearizovaného matematického modelu nádrže s přítokem a volným odtokem z příkladu 3.6: a) v časové oblasti, b) v oblasti komplexní proměnné

Blokové schéma linearizovaného matematického modelu v přírůstkových veličinách v časové oblasti je na obr. 3.32a a v obrazech (tj. v oblasti komplexní proměnné) na obr. 3.32b.

Pokud je třeba pracovat s veličinami v absolutním vyjádření, pak je možné použití blokového schématu na obr. 3.33.



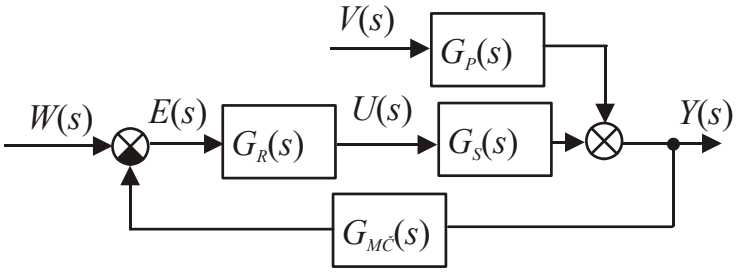
Obr. 3.33 – Blokové schéma linearizovaného matematického modelu nádrže s přítokem a volným odtokem s absolutním vyjádřením vstupní a výstupní veličiny z příkladu 3.6

4 Regulační obvod

Kapitola je věnována popisu a analýze regulačního obvodu. Jsou zde uvedeny konvenční lineární regulátory a základní metody identifikace regulovaných soustav. Dále jsou popsány nejdůležitější metody ověřování stability regulačních obvodů.

4.1 Regulátory

Je uvažován poměrně obecný regulační obvod na obr. 4.1, kde $G_R(s)$ je přenos regulátoru, $G_S(s)$ – přenos regulované soustavy, $G_{MČ}(s)$ – přenos měřicího členu, $G_P(s)$ – přenos, přes který na regulační obvod působí poruchová veličina s obrazem $V(s)$, $W(s)$ – obraz žádané veličiny, $E(s)$ – obraz regulační odchylky, $U(s)$ – obraz akční veličiny, $Y(s)$ – obraz regulované veličiny.



Obr. 4.1 – Blokové schéma obecného regulačního obvodu

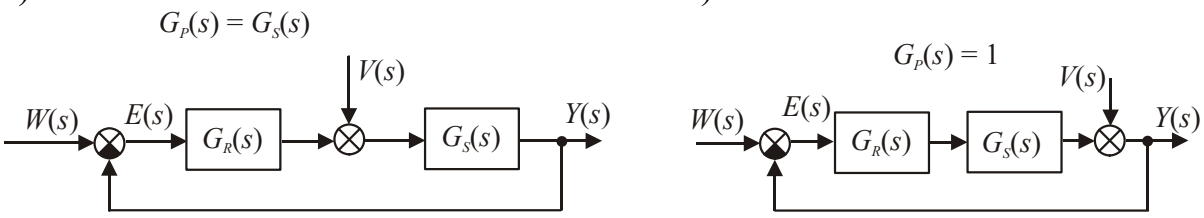
Z důvodu jednoduchosti a tam, kde nemůže dojít k neporozumění, bude místo přesného pojmu „obraz veličiny“ používán zjednodušený pojem „veličina“.

Měřicí člen s přenosem $G_{MČ}(s)$ musí měřit přesně a rychle, a proto ve většině praktických případů lze předpokládat, že

$$G_{MČ}(s) = 1. \tag{4.1}$$

Navíc informaci o regulované veličině $Y(s)$ lze získat právě prostřednictvím měřicího členu, a proto v případě potřeby je ho možné přiřadit k regulované soustavě.

Přenos $G_P(s)$ umožňuje umístit působení poruchové veličiny $V(s)$ do libovolného místa regulačního obvodu. Dva nejdůležitější případy, kdy poruchová veličina $V(s)$ působí na vstupu, resp. na výstupu regulované soustavy $G_S(s)$ pro (4.1) jsou na obr. 4.2.



Obr. 4.2 – Regulační obvod s poruchou: a) na vstupu regulované soustavy, b) na výstupu regulované soustavy

Pokud poruchové veličiny nelze měřit ani jinak přesněji specifikovat, pak je vhodné je agregovat do jediné poruchové veličiny $V(s)$ a umístit ji do nejméně příznivého místa v regulačním obvodě. V případě integrační regulované soustavy je to její vstup (obr. 4.2a) a v případě proporcionální regulované soustavyje to její výstup (obr. 4.2b).

Jak již bylo uvedeno v podkap. 1.1, cíl regulace může být vyjádřen dvěma ekvivalentními tvary, viz vztahy (1.1) a (1.3). Pro regulační obvod na obr. 4.1, za předpokladu splnění vztahu (4.1), lze v souladu s výsledky příkladu 3.3 psát:

a) Cíl regulace ve tvaru

$$y(t) \to w(t) \mathrel{\hat{=}} Y(s) \to W(s)\,. \tag{4.2}$$

V souladu s obr. 4.1 a vztahem (4.1) pro regulovanou veličinu platí (viz příklad 3.3)

$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) + G_{vy}(s)V(s)\,, \tag{4.3}$$

kde

$$G_{wy}(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \tag{4.4}$$

je ***přenos řízení*** a

$$G_{vy}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = [1 - G_{wy}(s)]G_P(s) \tag{4.5}$$

je ***přenos poruchy***.

Aby cíl regulace (4.2) byl splněn pro libovolnou žádanou $W(s)$ a poruchovou $V(s)$ veličinu, musí být splněny podmínky

$$G_{wy}(s) \to 1 \tag{4.6}$$

a

$$G_{vy}(s) \to 0\,. \tag{4.7}$$

První podmínka pro přenos řízení (4.6) vyjadřuje funkci regulátoru spočívající v zajištění sledování žádané veličiny $W(s)$ regulovanou veličinou $Y(s)$ a druhá podmínka pro přenos poruchy (4.7) vyjadřuje funkci regulátoru spočívající v potlačení vlivu poruchové veličiny $V(s)$ na činnost regulačního obvodu.

b) Cíl regulace ve tvaru

$$e(t) \to 0 \mathrel{\hat{=}} E(s) \to 0\,. \tag{4.8}$$

V souladu s obr. 4.1 a vztahem (4.1) pro regulační odchylku platí (viz příklad 3.3)

$$E(s) = G_{we}(s)W(s) + G_{ve}(s)V(s)\,, \tag{4.9}$$

kde

$$G_{we}(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} = 1 - G_{wy}(s) \tag{4.10}$$

je ***odchylkový přenos řízení*** a

$$G_{ve}(s) = -\frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = -[1 - G_{wy}(s)]G_P(s) \tag{4.11}$$

je ***odchylkový přenos poruchy***.

Aby cíl regulace (4.8) byl splněn pro libovolnou žádanou $W(s)$ a poruchovou $V(s)$ veličinu, musí být splněny podmínky

$$G_{we}(s) \to 0 \tag{4.12}$$

a

$$G_{ve}(s) \to 0\,. \tag{4.13}$$

Podobně jako v předchozím případě první podmínka pro odchylkový přenos řízení (4.12) vyjadřuje funkci regulátoru spočívající v zajištění sledování žádané veličiny $W(s)$ regulovanou veličinou $Y(s)$ a druhá podmínka pro odchylkový přenos poruchy (4.13) vyjadřuje funkci regulátoru spočívající v potlačení vlivu poruchové veličiny $V(s)$ na činnost regulačního obvodu.

Ze srovnání vztahů (4.2) ÷ (4.13) vyplývá, že skutečně obě formulace cíle regulace jsou vzájemně ekvivalentní, a proto dále bude uvažován cíl regulace především ve tvaru (4.2).

Je zřejmé, že regulátor bude správně fungovat, budou-li podmínky (4.6) a (4.7) [nebo (4.12) a (4.13)] splněny současně. Pokud poruchová veličina $V(s)$ působí na výstupu regulované soustavy (viz obr. 4.2b), pak obě podmínky jsou zcela ekvivalentní (je to také nejčastěji uvažovaný případ), tj. bude-li zajištěna podmínka (4.6), automaticky bude zajištěna podmínka (4.7). Proto také v teorii automatické regulace se věnuje nejčastěji pozornost přenosu řízení (4.4).

V souladu se vztahem (4.4) pro kmitočtový přenos řízení lze psát

$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = \frac{G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}{1 + G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{\dfrac{1}{G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)} + 1} \tag{4.14}$$

a je zřejmé, že platí

$$\left.\begin{aligned} &\left|G_R(\mathrm{j}\omega)\right| \to \infty \\ &G_S(\mathrm{j}\omega) \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(s) \to 1, \tag{4.15}$$

příp.

$$\left|G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)\right| \to \infty \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(s) \to 1. \tag{4.16}$$

Ze vztahu (4.15) vyplývá, že bude-li zajištěna dostatečně vysoká hodnota modulu kmitočtového přenosu regulátoru

$$A_R(\omega) = \operatorname{mod} G_R(\mathrm{j}\omega) = \left|G_R(\mathrm{j}\omega)\right|, \tag{4.17}$$

pak bude splněna s dostatečnou přesností podmínka (4.6) a pro nesingulární $G_P(s)$ i podmínka (4.7).

Budou-li k dispozici i informace o vlastnostech regulované soustavy vyjádřené jejím přenosem $G_S(s)$, pak je snazší zajistit dostatečně vysokou hodnotu modulu kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$A_o(\omega) = \operatorname{mod} G_o(\mathrm{j}\omega) = \left|G_o(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)\right|, \tag{4.18}$$

viz vztah (4.16).

Vysoké hodnoty modulů $A_R(\omega)$ nebo $A_o(\omega)$ musí být zajištěny v rozsahu pracovních úhlových kmitočtů při současném zabezpečení stability a požadované kvality regulačního pochodu. Toho lze dosáhnout vhodně zvoleným regulátorem a jeho následným správným seřízením.

Průmyslové regulátory se vyrábějí v různých verzích a modifikacích, a proto budou uvedeny pouze základní struktury a modifikace běžně používaných konvenčních regulátorů.

Analogové (spojité) konvenční regulátory jsou realizovány jako kombinace základních třech činností (složek): proporcionální – P, integrační – I a derivační – D. Regulátor u něhož vystupují všechny tři činnosti se nazývá proporcionálně integračně derivační regulátor nebo zkráceně regulátor typu PID a jeho vlastnosti v časové oblasti mohou být popsány vztahem

$$u(t) = \underbrace{r_0 e(t)}_{P} + \underbrace{r_{-1}\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{I} + \underbrace{r_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}}_{D} = k_P\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right], \tag{4.19}$$

kde r_0, r_{-1} a r_1 jsou ***váhy*** proporcionální, integrační a derivační složky regulátoru; k_P – ***zesílení*** regulátoru, T_I a T_D – ***integrační a derivační časová konstanta*** regulátoru.

U průmyslových regulátorů se místo zesílení k_P používá jeho převrácená hodnota vyjádřena v procentech, tzv. ***pásmo proporcionality***

$$pp = \frac{100}{k_P}\,[\%]. \tag{4.20}$$

Rozměr váhy proporcionální složky r_0 a zesílení regulátoru k_P je dán podílem rozměru akční veličiny $u(t)$ a rozměru regulační odchylky $e(t)$. Časové konstanty T_I a T_D mají rozměr času. Rozměr váhy integrační složky r_{-1} je dán podílem rozměru proporcionální složky r_0 a rozměru času, rozměr váhy derivační složky je dán násobkem rozměru váhy proporcionální složky r_0 a rozměru času.

Parametry r_0, r_{-1} a r_1, příp. k_P, T_I a T_D jsou tzv. ***stavitelné parametry regulátoru***. Úkolem seřízení regulátoru je zajištění požadavků na kvalitu regulačního pochodu vhodnou volbou hodnot jeho stavitelných parametrů pro konkrétní regulovanou soustavu.

Mezi stavitelnými parametry regulátoru platí převodní vztahy

$$r_0 = k_P, \qquad r_{-1} = \frac{k_P}{T_I}, \qquad r_1 = k_P T_D, \tag{4.21}$$

resp.

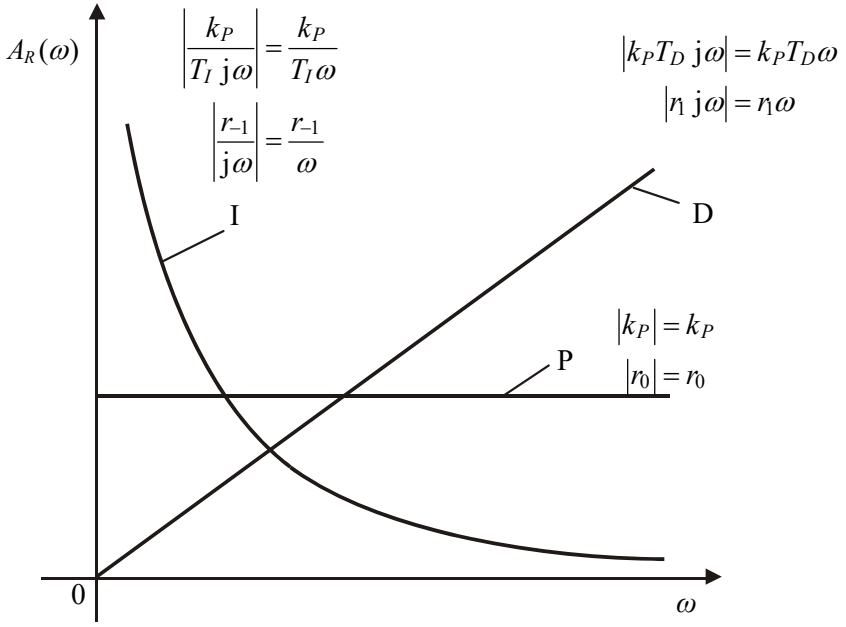
$$k_P = r_0, \qquad T_I = \frac{r_0}{r_{-1}}, \qquad T_D = \frac{r_1}{r_0}. \tag{4.22}$$

Protože váha proporcionální složky r_0 je identická se zesílením k_P, proto se i pro ni používá často název zesílení regulátoru.

Použitím Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek se získá ze vztahu (4.19) přenos regulátoru typu PID

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right). \tag{4.23}$$

Na obr. 4.3 jsou nakresleny průběhy modulů jednotlivých složek P, I a D regulátoru typu PID. Z obr. 4.3 vyplývá, že integrační složka (I) zajišťuje vysokou hodnotu modulu kmitočtového přenosu (4.17) regulátoru PID při nízkých úhlových kmitočtech a především v ustálených stavech (ω = 0), derivační složka (D) při vysokých úhlových kmitočtech a proporcionální složka (P) v celém pracovním pásmu úhlových kmitočtů, ale především pro střední úhlové kmitočty. Právě vhodnou volbou jednotlivých složek P, I a D, tj. vhodnou volbou hodnot stavitelných parametrů regulátoru r_0, r_{-1} a r_1, příp. k_P, T_I a T_D lze dosáhnout vysoké hodnoty modulu kmitočtového přenosu regulátoru (4.17) nebo modulu kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu (4.18), a tím i splnění podmínek (4.15) nebo (4.16).



Obr. 4.3 – Průběhy modulů jednotlivých složek regulátoru typu PID

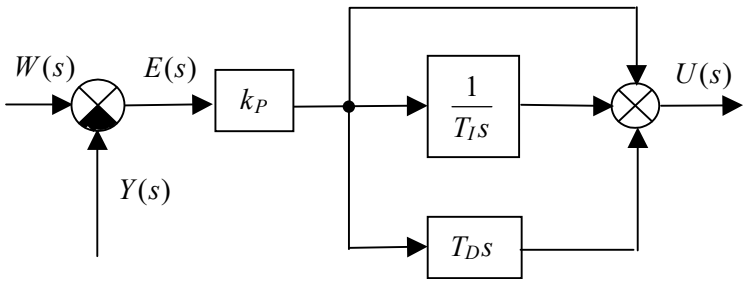
V praxi se používají i jednodušší typy regulátorů (jsou uvažovány pouze vztahy s časovými konstantami): regulátor typu P (proporcionální), regulátor typu I (integrační), regulátor typu PI (proporcionálně integrační) a regulátor typu PD (proporcionálně derivační). Přenosy těchto konvenčních regulátorů jsou přehledně sestaveny v tab. 4.1, řádky 1 ÷ 5. Regulátor se samotnou derivační složkou se nedá použít, protože reaguje pouze na časové změny regulační odchylky e(t), tj. $\dot{e}(t)$ a v ustáleném stavu způsobí jako by rozpojení regulačního obvodu.

Tab. 4.1 – Přenosy konvenčních analogových regulátorů

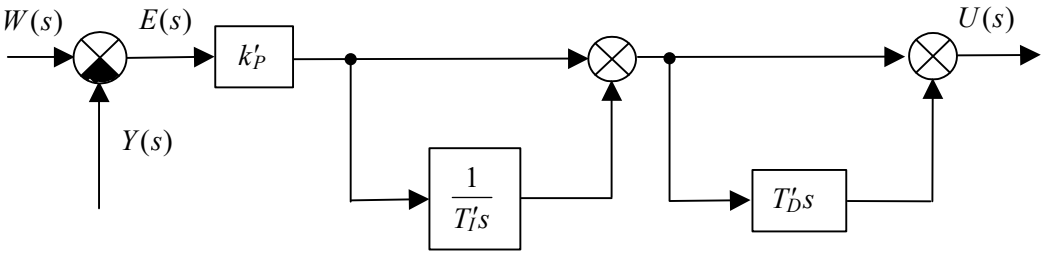
	Typ	Přenos $G_R(s)$
1	P	k_P
2	I	$\frac{1}{T_I s}$
3	PI	$k_P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)$
4	PD	$k_P\left(1+T_D s\right)$
5	PID	$k_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$
6	$\mathrm{PID_i}$	$k'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)\left(1+T'_D s\right)$

Blokové schéma regulátoru typu PID s přenosem (4.23) je na obr. 4.4a, ze kterého vyplývá, že má paralelní strukturu. U takového regulátoru typu PID lze všechny jeho stavitelné parametry nastavit nezávisle, a proto regulátoru s paralelní strukturou se také říká – regulátor typu PID bez interakce.

a)



b)



Obr. 4.4 – Blokové schéma regulátoru PID se strukturou: a) paralelní (bez interakce, b) sériovou (s interakcí)

Někdy se za paralelní formu regulátoru PID považuje pouze tvar (4.23) s váhami a tvar s časovými konstantami (obr. 4.4a) za standardní tvar podle ISA (Instrument Society of America).

Regulátor typu PID lze rovněž realizovat pomocí sériové struktury (viz obr. 4.4b) dané vztahem

$$G_R(s) = \underbrace{k'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)}_{\text{PI}}\underbrace{(1+T'_D s)}_{\text{PD}} = k'_P\,\frac{(T'_I s+1)(T'_D s+1)}{T'_I s}, \tag{4.24}$$

který lze snadno upravit na strukturu paralelní (4.23)

$$G_R(s) = \underbrace{k'_P\,\frac{T'_I+T'_D}{T'_I}}_{k_P}\left(1+\underbrace{\frac{1}{T'_I+T'_D}}_{\frac{1}{T_I}}\frac{1}{s}+\underbrace{\frac{T'_I T'_D}{T'_I+T'_D}}_{T_D}s\right). \tag{4.25}$$

Ze vztahu (4.25) je zřejmé, že při změně hodnoty integrační T'_I nebo derivační T'_D časové konstanty dochází ke změně hodnot všech stavitelných parametrů s odpovídající paralelní strukturou k_P, T_I a T_D , tj. dochází zde k interakci mezi stavitelnými parametry. Proto regulátoru PID se sériovou

strukturou se také říká – regulátor typu PID s interakcí a označuje se jako PID_i (viz tab. 4.1, řádek 6).

Mezi stavitelnými parametry paralelní a sériové struktury platí jednoduché převodní vztahy:

$$k_P = k'_P i\,, \qquad T_I = T'_I i\,, \qquad T_D = \frac{T'_D}{i}\,, \qquad i = 1 + \frac{T'_D}{T'_I}\,, \tag{4.26}$$

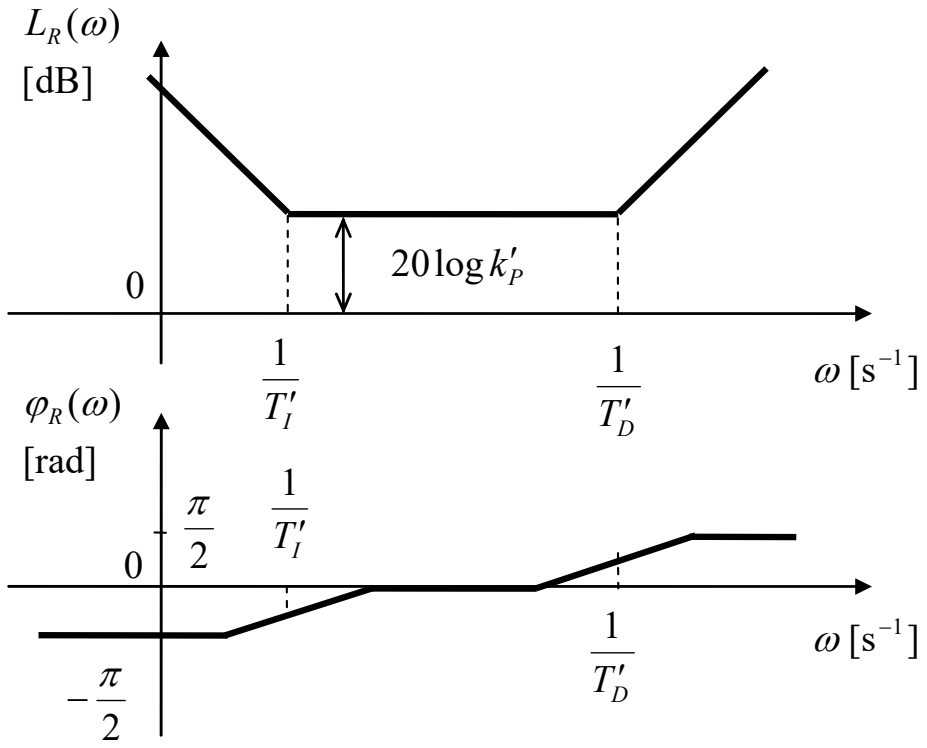
$$k'_P = k_P \beta\,, \qquad T'_I = T_I \beta\,, \qquad T'_D = \frac{T_D}{\beta}\,, \qquad \beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{T_D}{T_I}}\,. \tag{4.27}$$

Koeficient i se nazývá ***činitel interakce***. Hodnoty stavitelných parametrů k_P, T_I a T_D regulátoru typu PID (tj. bez interakce) jsou tzv. efektivní hodnoty, protože většina metod seřizování předpokládá standardní paralelní strukturu regulátoru typu PID (obr. 4.4a), a proto nastavené hodnoty stavitelných parametrů k'_P, T'_I a T'_D regulátoru typu PID_i (tj. s interakcí) je třeba přepočíst na hodnoty efektivní (skutečné) podle vztahů (4.26), tj. na k_P, T_I a T_d.

U regulátoru typu PID se sériovou strukturou, tj. typu PID_i vystupuje omezení [viz vztah pro β (4.27)]

$$\frac{T_D}{T_I} \le \frac{1}{4}\,, \tag{4.28}$$

které však většinou není podstatné.



Obr. 4.5 – Logaritmické kmitočtové charakteristiky regulátoru typu PID_i

Na obr. 4.5 jsou nakresleny přibližné logaritmické kmitočtové charakteristiky regulátoru typu PID s interakcí, tj. regulátoru typu $\mathrm{PID_i}$ [vztah (4.24)].

Pro regulátor typu PID bez interakce (4.23) při splnění podmínky (4.28) logaritmické kmitočtové charakteristiky mají stejný průběh jako na obr. 4.5, ale je třeba uvažovat vztahy (4.27).

Z obr. 4.5 znovu vyplývá, že integrační složka zajišťuje vysokou hodnotu modulu regulátoru při nízkých úhlových kmitočtech a především v ustálených stavech, derivační složka při vysokých úhlových kmitočtech a proporcionální složka v celém pracovním pásmu úhlových kmitočtů, ale především pro střední úhlové kmitočty.

Sériová struktura $\mathrm{PID_i}$ má i své výhody. Jednoduše se realizuje, např. sériovým zapojením regulátorů typu PI a PD, viz obr. 4.4b a vztah (4.24). Je rovněž výrobně levnější. Pro $T_D' = T_D = 0$ obě struktury jsou ekvivalentní typu PI.

Derivační složka má z teoretického hlediska kladný stabilizující vliv na regulační pochod. Z praktického hlediska má však derivační složka velmi nepříjemnou vlastnost, která spočívá v zesilování šumu o vysokých úhlových kmitočtech (viz obr. 4.3 a 4.5) a rychlých změn. Např. pokud derivační složka regulátoru typu PD nebo PID

$$r_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} = k_P T_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.29}$$

zpracovává regulační odchylku $e(t)$, na kterou je aditivně namodulován šum o amplitudě a_S a úhlovém kmitočtu ω_S, tj.

$$e(t) + a_S \sin \omega_S t\,,$$

pak na výstupu derivační složky (4.29) se dostane

$$k_P T_D [\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_S \omega_S \cos \omega_S t], \tag{4.30}$$

kde $\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ je užitečná část a $a_S \omega_S \cos \omega_S t$ je parazitní část výstupu derivační složky.

Ze vztahu (4.30) vyplývá, že při vyšších úhlových kmitočtech ω_S, bude parazitní část převládat nad užitečnou částí a výstup z derivační složky může způsobit nesprávnou činnost nejen vlastního regulátoru, ale i celého regulačního obvodu. Z tohoto důvodu ideální derivační činnost je prakticky nepoužitelná. Pro snížení vlivu parazitní části se používá ***vnitřní filtr*** s přenosem

$$\frac{1}{\frac{T_D}{N} s + 1} = \frac{1}{\alpha T_D s + 1}, \qquad \alpha = \frac{1}{N}, \tag{4.31}$$

kde $N = 5 \div 20$, příp. $\alpha = 0{,}05 \div 0{,}2$.

Úkolem vnitřního filtru je potlačit parazitní šum, který obsahuje především regulovaná veličina $y(t)$. Při hodnotách $\alpha \leq 0{,}1$ se zásadním způsobem neovlivní výsledné vlastnosti regulátoru, a proto se při seřizování regulátorů většinou neuvažuje. Vnitřní filtr (4.31) je v průmyslových regulátorech většinou přednastaven na hodnotu $\alpha = 0{,}1$ ($N = 10$).

Přenos regulátoru typu PID s vnitřním filtrem má tvar

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{\alpha T_D s + 1}\right). \tag{4.32}$$

Konvenční regulátory uvedené v tab. 4.1 i s případným vnitřním filtrem (4.32) umožňují takové seřízení, které zajistí požadovaný regulační pochod pouze z hlediska žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na výstupu regulované soustavy (viz obr. 4.2b), tj. pro $G_P(s) = 1$. Pokud $G_P(s) \neq 0$, pak se většinou volí kompromisní seřízení. Speciálně, pokud $G_P(s)$ obsahuje integrační činnost, kompromisní seřízení není vždy možné, a proto se v poslední době stále častěji používají ***regulátory se dvěma stupni volnosti***. Vlastnosti regulátoru typu PID se dvěma stupni volnosti může být popsán v obrazech vztahem

$$U(s) = k_P\left\{bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s}E(s) + T_D s[cW(s) - Y(s)]\right\}, \tag{4.33}$$

kde b je váha žádané veličiny u proporcionální složky, c – váha žádané veličiny u derivační složky.

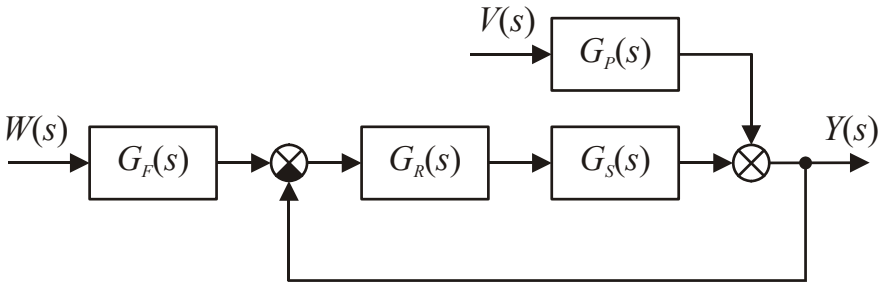
Obě váhy se mohou měnit v rozmezí od 0 do 1. Pro $b = c = 1$ vztah (4.33) vyjadřuje rovnici standardního regulátoru typu PID, viz vztah (4.23) a řádek 5 v tab. 4.1.

Regulační obvod s regulátorem se dvěma stupni volnosti (4.33) může být transformován na schéma (obr. 4.6) se ***vstupním filtrem*** v žádané veličině o přenosu

$$G_F(s) = \frac{cT_I T_D s^2 + bT_I s + 1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}, \tag{4.34}$$

kde $G_R(s)$ je přenos standardního regulátoru PID

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right). \tag{4.35}$$



Obr. 4.6 – Regulační obvod s regulátorem se dvěma stupni volnosti

Z obr. 4.6 je zřejmé, že regulátor typu PID s přenosem $G_R(s)$ [(4.35)] se seřídí z hlediska rychlého potlačení negativního vlivu poruchové veličiny $v(t)$ a vhodnou volbou vah b a c se seřídí vstupní filtr s přenosem $G_F(s)$ [(4.34)] z hlediska změn žádané veličiny $w(t)$. Pro $b = c = 1 \Rightarrow G_F(s) = 1$ a regulační obvod na obr. 4.6 se chová jako regulační obvod se standardním regulátorem typu PID, tj. jako s regulátorem s jedním stupněm volnosti.

Použití regulátoru se dvěma stupni volnosti je velmi důležité při rychlých a skokových změnách žádané veličiny $w(t)$. Např. nebude-li regulátor typu PID derivovat regulační odchylku $e(t)$, ale regulovanou veličinu $y(t)$ se záporným znaménkem, pak je třeba ve vztahu (4.33) uvažovat $c = 0$ a ze vztahu (4.34) se dostane vstupní filtr s přenosem

$$G_F(s) = \frac{bT_I s + 1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}. \tag{4.36}$$

Je zřejmé, že prudké změny žádané veličiny $w(t)$ budou odfiltrovány. Ještě důkladnější filtrace se dosáhne pro $b = c = 0$. V tomto případě přenos vstupního filtru bude

$$G_F(s) = \frac{1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}. \tag{4.37}$$

Rovněž regulátory typu PI a PD mohou být uvažovány se dvěma stupni volnosti. Regulátor typu PI se dvěma stupni volnosti lze popsat vztahem

$$U(s) = k_P[bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s} E(s)] \tag{4.38}$$

a vstupní filtr přenosem

$$G_F(s) = \frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1}. \tag{4.39}$$

Podobně regulátor typu PD se dvěma stupni volnosti lze popsat vztahem

$$U(s) = k_P\{E(s) + T_D s[cW(s) - Y(s)]\} \tag{4.40}$$

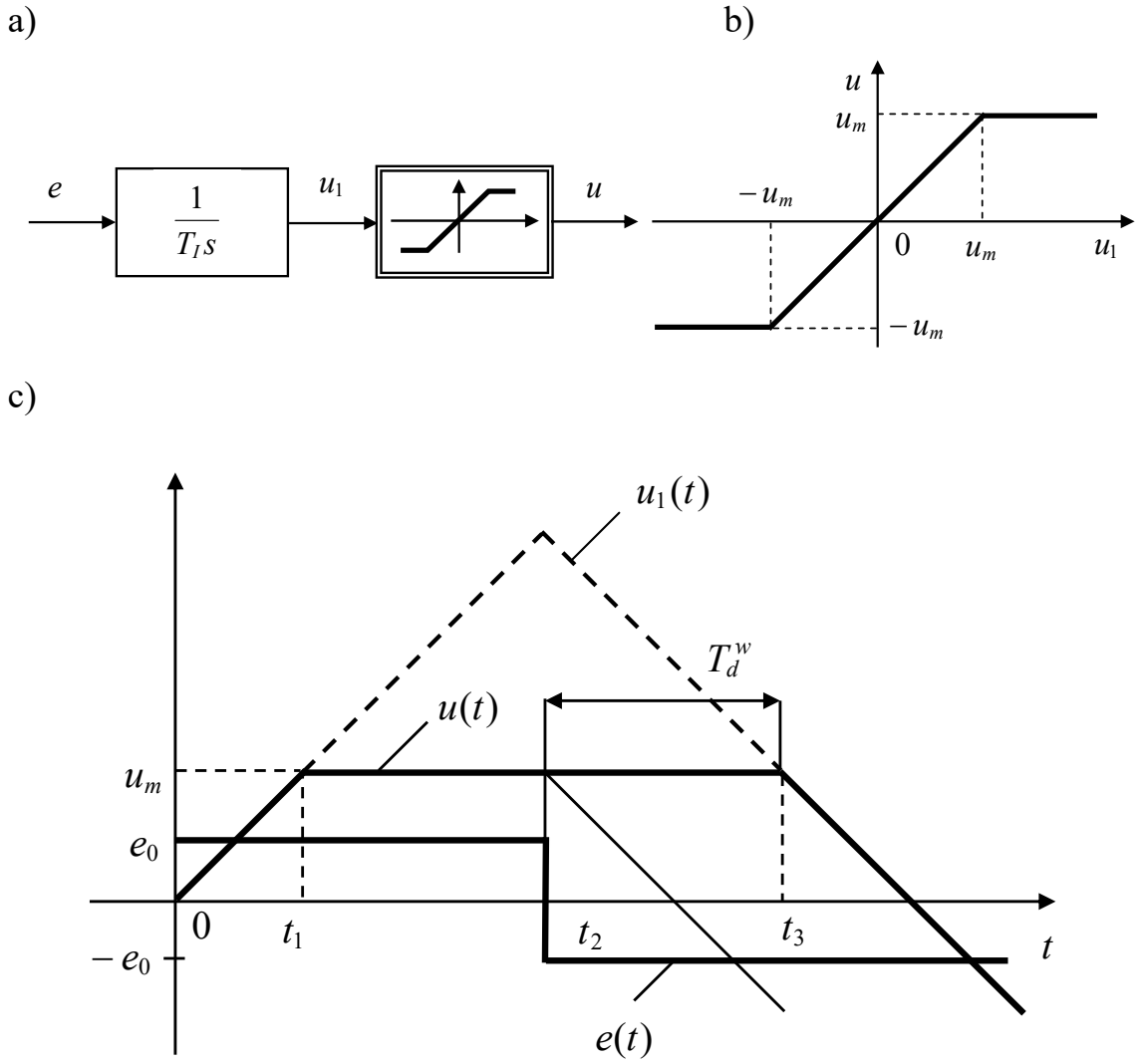
a vstupní filtr přenosem

$$G_F(s) = \frac{cT_D s + 1}{T_D s + 1}. \tag{4.41}$$

U jednodušších regulátorů se dvěma stupni volnosti váhy b a c mohou být pouze nulové, nebo jednotkové.

Velmi nepříjemným jevem při použití regulátoru s integrační složkou při omezení akční veličiny, tj. při existenci nasycení, je pokračující integrace, tzv. ***windup***. Vysvětluje to obr. 4.7.

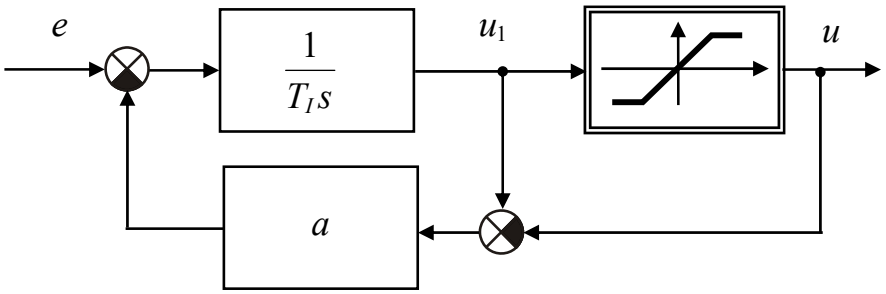
Protože v obrázku vystupují jak originály veličin, tak i jejich obrazy, proto jsou veličiny označeny malými písmeny bez uvedení nezávislých proměnných.



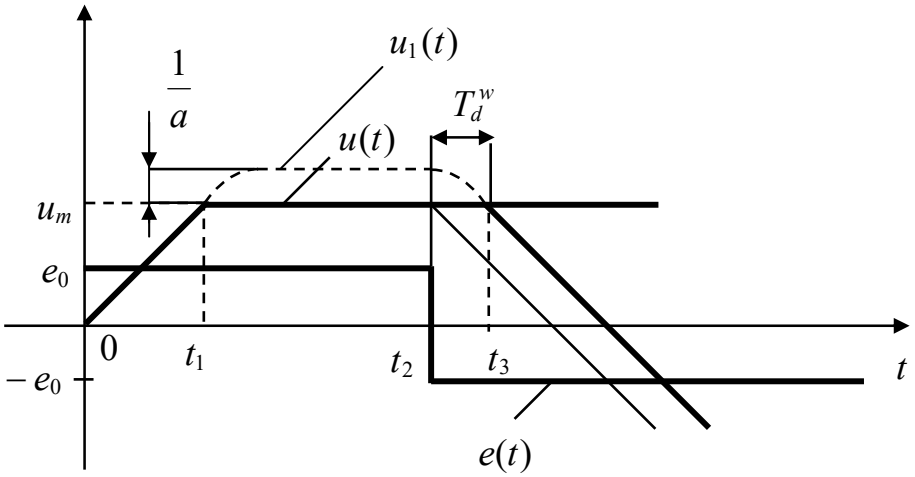
Obr. 4.7 – Regulátor I s omezením akční veličiny: a) schéma, b) statická charakteristika nasycení, c) průběhy veličin

Z obr. 4.7c je zřejmé, že při počáteční skokové změně regulační odchylky $e(t) = e_0\eta(t)$ budou obě výstupní veličiny $u_1(t)$ a $u(t)$ shodně lineárně růst až do okamžiku t_1. Pak výstupní veličina integrátoru $u_1(t)$ bude stále růst, ale výstupní veličina regulátoru $u(t)$ zůstane na hodnotě nasycení u_m. Pokud se v okamžiku t_2 regulační odchylka $e(t)$ změní skokově na hodnotu $-e_0$, pak výstupní veličina integrátoru $u_1(t)$ začne klesat a výstupní veličina regulátoru $u(t) = u_m$ se nebude měnit až do okamžiku t_3, od kterého obě veličiny $u_1(t)$ a $u(t)$ budou shodně klesat. Z průběhů obou veličin je zřejmé, že nasycení (tj. omezení akční veličiny) způsobilo tzv. windup zpoždění T_d^w, které je příčinou existence velikých a dlouho trvajících překmitů v regulačním obvodu, a tím zhoršení kvality regulace.

a)

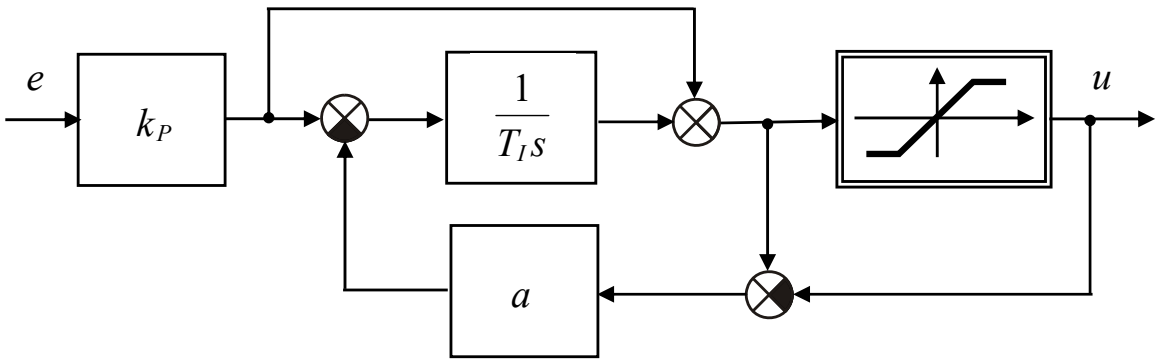


b)



Obr. 4.8 – Regulátor I s opatřením antiwindup: a) schéma, b) průběhy veličin

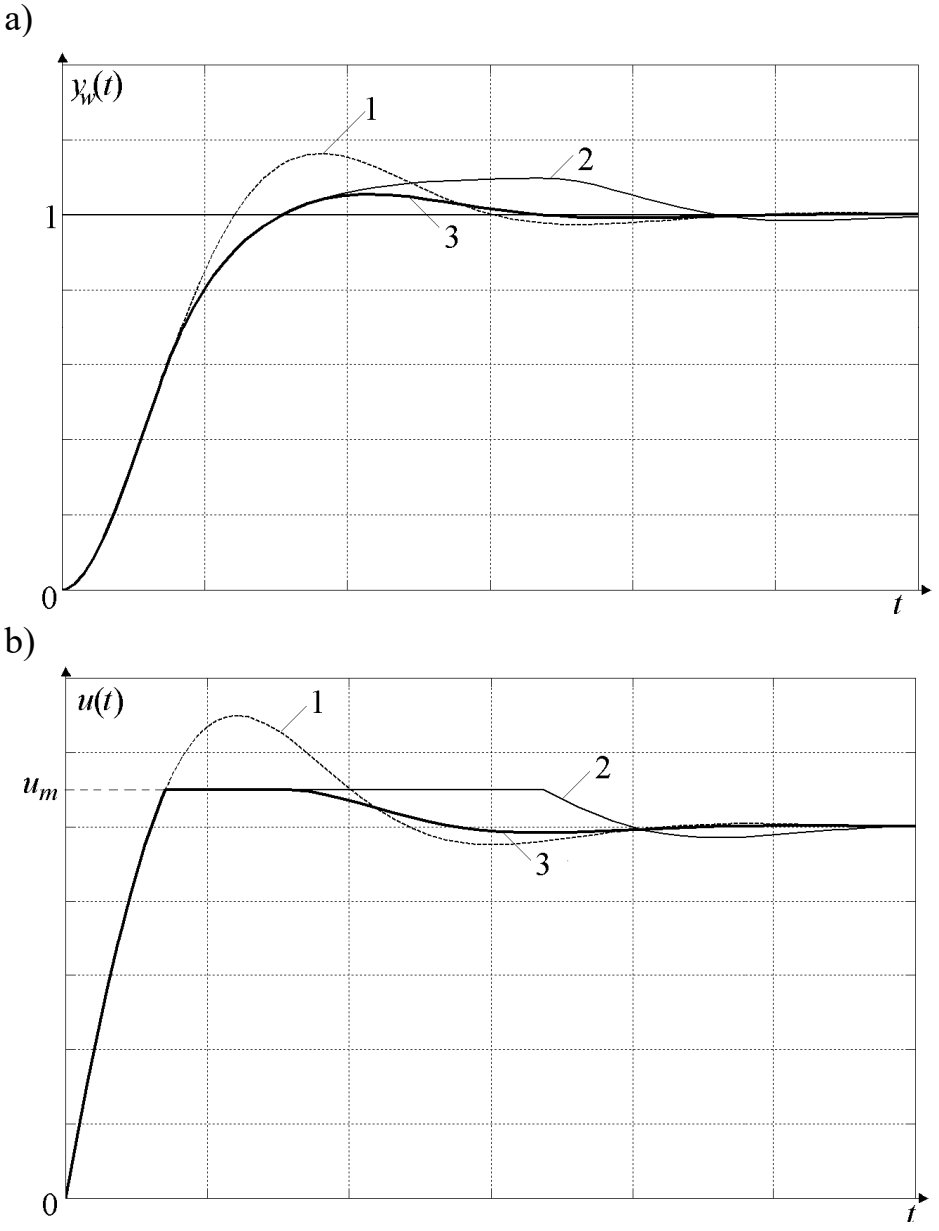
Opatření proti pokračující integraci se nazývá ***antiwindup*** a může být zrealizováno tak, jak je ukázáno na obr. 4.8a. Z obr. 4.8b vyplývá, že když $u_1(t)$ překročí hodnotu $u(t) = u_m$, projeví se záporná zpětná vazba (obr. 4.8a) a vstup integrátoru je zmenšován o veličinu $a[u_1(t) - u(t)]$ a to způsobí pokles růstu výstupní veličiny integrátoru $u_1(t)$. Průběhy $u_1(t)$ a $u(t)$ na obr. 4.8b ukazují, že implementací opatření atiwindup došlo k podstatnému snížení windup zpoždění T_d^w.



Obr. 4.9 – Schéma regulátoru typu PI s opatřením antiwindup.

Realizace regulátoru typu PI s opatřením antiwindup je na obr. 4.9.

Na obr. 4.10 jsou ukázány průběhy regulované a akční veličiny v regulačním obvodu s regulátorem typu I v případě, že omezení akční veličiny nevystupuje (průběh veličiny 1) (lineární regulační obvod), omezení akční veličiny vystupuje, ale není použito opatření antiwindup (průběh veličiny 2) a omezení akční veličiny vystupuje a je použito opatření antiwindup (průběh veličiny 3). Z obr. 4.10 je zřejmé, že omezení akční veličiny způsobuje zpomalení odezvy. Omezení akční veličiny má většinou stabilizující účinek, ale pokud není použito opatření antiwinup, podstatně snižuje kvalitu regulace.



Obr. 4.10 – Průběhy regulované veličiny a) a akční veličiny b) v regulačním obvodu s regulátorem typu I: 1 – lineární, 2 – s omezením akční veličiny bez opatření antiwindup, 3 – s omezením akční veličiny a s opatřením antiwindup

Pokračující integrace – windup vystupuje především v analogových regulátorech. V číslicových regulátorech (kapitola 5.3) opatření antiwindup se jednoduše řeší zastavením integrace (sumace) při nasycení.

Příklad 4.1

Je třeba nakreslit amplitudofázovou kmitočtovou charakteristiku regulátoru typu PID s filtrem v derivační složce s přenosem (4.32) pro $\alpha \geq 0$.

Řešení:

V souladu se vztahem (4.32) kmitočtový přenos regulátoru PID s filtrací derivační složky má tvar

$$G_R(\mathrm{j}\omega) = k_P\left(1+\frac{1}{T_I \mathrm{j}\omega}+\frac{T_D \mathrm{j}\omega}{\alpha T_D \mathrm{j}\omega+1}\right) =$$

$$= k_P\left[\frac{1+(1+\alpha)\alpha T_D^2\omega^2}{1+\alpha^2 T_D^2\omega^2}+j\frac{(T_I-\alpha^2 T_D)T_D\omega^2-1}{T_I\omega(1+\alpha^2 T_D^2\omega^2)}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\, G_R(\mathrm{j}\omega)+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\, G_R(\mathrm{j}\omega).$$

Z podmínky

$$\mathrm{Im}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = 0$$

se obdrží (viz obr. 4.11)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(T_I-\alpha^2 T_D)T_D}} \Rightarrow \mathrm{Re}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = k_P(1+\alpha\frac{T_D}{T_I}) \text{ pro } \alpha > 0,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_I T_D}} \Rightarrow \mathrm{Re}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = k_P \text{ pro } \alpha = 0.$$

Dále je zřejmé, že platí

$$\omega \to 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = k_P,\ \mathrm{Im}\, G_R(\mathrm{j}\omega) \to -\infty \text{ pro } \alpha \geq 0,$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = k_P(1+\dfrac{1}{\alpha}),\ \mathrm{Im}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = 0 \text{ pro } \alpha > 0, \\ \mathrm{Re}\, G_R(\mathrm{j}\omega) = k_P,\ \mathrm{Im}\, G_R(\mathrm{j}\omega) \to \infty \text{ pro } \alpha = 0. \end{cases}$$

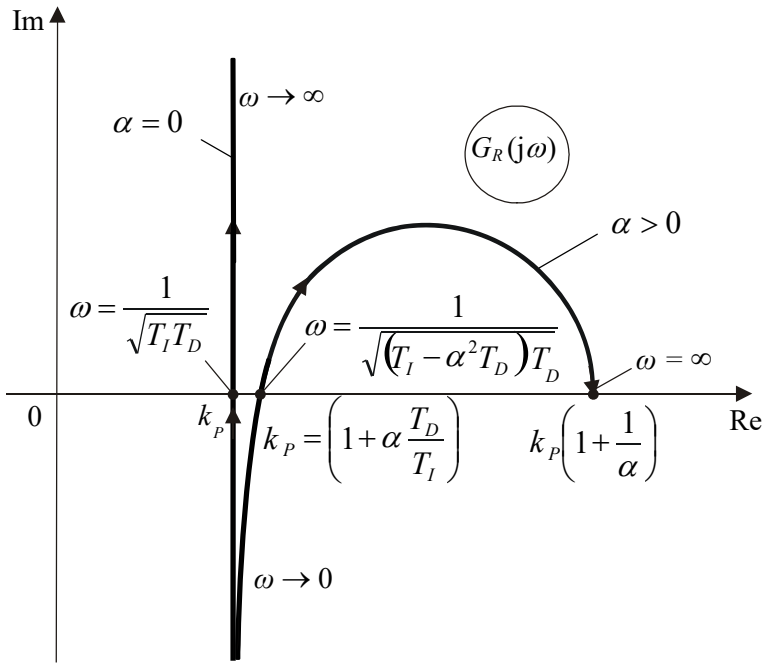
Průběhy amplitudofázové kmitočtové charakteristiky pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha = 0$ jsou ukázány na obr. 4.11. Z těchto průběhů vyplývá, že pro $\alpha = 0$ není pro matematický model regulátoru PID splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti (regulátor nemůže nekonečně zesílit nekonečně vysoké úhlové kmitočty) a pro $\alpha > 0$ je splněna pouze slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti (regulátor nemůže zesílit nekonečně vysoké úhlové kmitočty).

Z obr. 4.11 je rovněž zřejmé, že vysoké hodnoty modulu kmitočtového přenosu regulátoru typu PID budou zajištěny pro úhlové kmitočty

$$0 \leq \omega << \frac{1}{\sqrt{(T_I-\alpha^2 T_D)T_D}}$$

a pro úhlové kmitočty

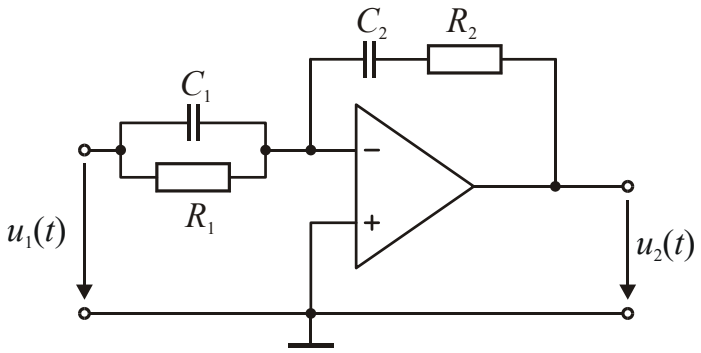
$$\omega >> \frac{1}{\sqrt{(T_I - \alpha^2 T_D)T_D}}.$$



Obr. 4.11 – Průběhy amplitudofázové kmitočtové charakteristiky regulátoru typu PID s filtrací derivační složky

Příklad 4.2

Je třeba určit přenos zapojení s operačním zesilovačem na obr. 4.12, kde $u_1(t)$ a $u_2(t)$ je vstupní a výstupní napětí [V].



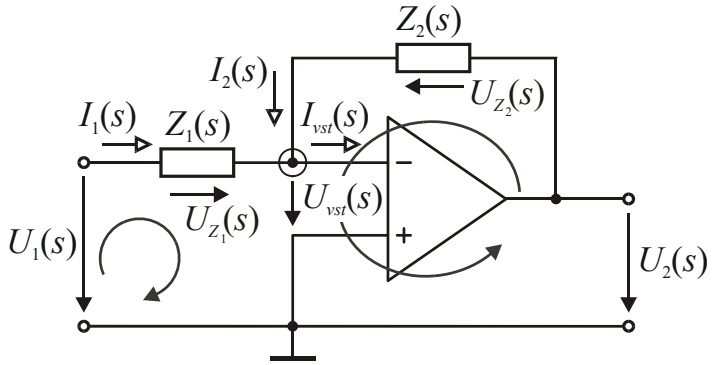
Obr. 4.12 – Zapojení s operačním zesilovačem z příkladu 4.2

Řešení:

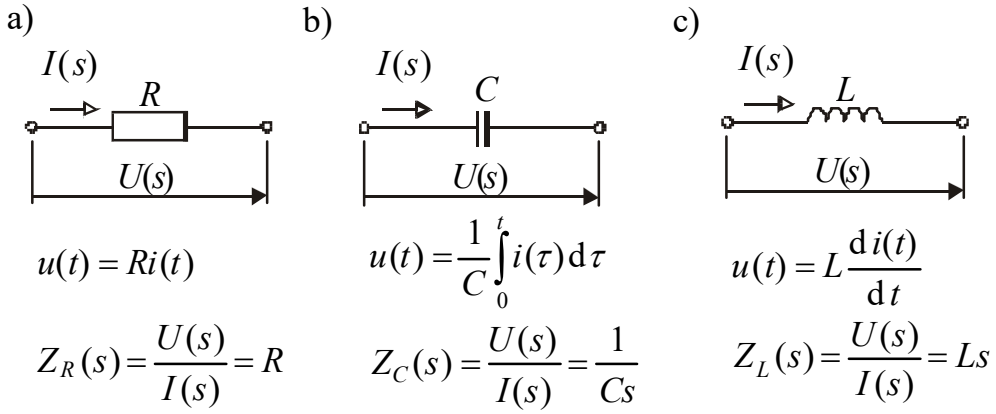
Operační zesilovač je zpravidla integrovaný obvod napájený ze symetrického zdroje napětí (je to aktivní prvek, zdroj napětí se nekreslí), který má teoreticky nekonečně vysoké zesílení $A \to \infty$, nekonečně vysoký vstupní odpor $R_{vst} \to \infty$, nulový výstupní odpor a který vhodnou volbou obrazové impedance $Z_2(s)$ v záporné zpětné vazbě a obrazové impedance $Z_1(s)$ na vstupu realizuje požadované dynamické i statické vlastnosti (tj. realizuje požadované

matematické operace), viz obr. 4.13. Impedance pro základní ideální pasivní prvky: rezistor (odpor) o odporu R [Ω], kondenzátor o kapacitě C [F] a cívku o indukčnosti L [H] jsou přehledně uvedeny na obr. 4.14. Slovo „obrazový“ většinou bude vynecháváno.

Nejdříve bude odvozen přenos obecného zapojení operačního zesilovače se zápornou zpětnou vazbou na obr. 4.13.



Obr. 4.13 – Zapojení operačního zesilovače se zápornou zpětnou vazbou



Obr. 4.14 – Obrazové impedance: a) odporu, b) kondenzátoru, c) cívky

Pro libovolný uzel obvodu musí platit první Kirchhoffův zákon: „Součet okamžitých hodnot vstupujících a vystupujících proudů v daném uzlu je roven nule“. Vstupní proudy se považují za kladné a výstupní proudy za záporné. Zákon samozřejmě platí i pro obrazy. Pro uzel v kroužku (u invertujícího vstupu) na obr. 4.13 platí

$$I_1(s) + I_2(s) - I_{vst}(s) = 0\,,$$

kde $I_{vst}(s)$ je proud procházející vstupním odporem R_{vst}, na kterém vznikne napětí $U_{vst}(s)$.

Podobně pro libovolnou orientovanou smyčku obvodu platí druhý Kirchhoffův zákon: „Součet okamžitých napětí ve větvích smyčky je roven nule“. Napětí se považuje za kladné, jestliže proud ve větvi v daném okamžiku prochází ve smyslu orientace smyčky a za záporné, jestliže prochází v opačném směru.

Pro obě vyznačené smyčky na obr. 4.13 lze psát

$$U_{Z1}(s) + U_{vst}(s) - U_1(s) = 0\,,$$

$$U_{Z2}(s) + U_{vst}(s) - U_2(s) = 0\,,$$

kde $U_{Z1}(s)$ a $U_{Z2}(s)$ jsou napětí na impedancích $Z_1(s)$ a $Z_2(s)$.

Po dosazení do rovnice pro proudy s uvažováním odpovídajících impedancí se dostane

$$\frac{U_1(s) - U_{vst}(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s) - U_{vst}(s)}{Z_2(s)} - \frac{U_{vst}(s)}{R_{vst}} = 0$$

a po uvažování vztahu

$$U_2(s) = -AU_{vst}(s) \;\Rightarrow\; U_{vst}(s) = -\frac{U_2(s)}{A} \qquad (*)$$

se obdrží

$$\frac{U_1(s) + \dfrac{U_2(s)}{A}}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s) + \dfrac{U_2(s)}{A}}{Z_2(s)} + \frac{U_2(s)}{AR_{vst}} = 0\,.$$

Po jednoduché úpravě se získá přenos

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{Z_1(s)\left\{\dfrac{1}{Z_2(s)} + \dfrac{1}{A}\left[\dfrac{1}{Z_1(s)} + \dfrac{1}{Z_2(s)} + \dfrac{1}{R_{vst}}\right]\right\}}\,.$$

Je zřejmé, že pro $A \to \infty$ se dostane

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \to -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\,. \qquad (**)$$

Odtud vyplývá, že vysoká hodnota zesílení A operačního zesilovače v zapojení se zpětnou vazbou je jeho nejdůležitější vlastností a že impedance $Z_2(s)$ ve zpětné vazbě a impedance $Z_1(s)$ na vstupu určují celkové dynamické i statické vlastnosti daného zapojení.

Pro $R_{vst} \to \infty \Rightarrow I_{vst} \to 0$, a proto při analýze zapojení operačního zesilovače se zápornou zpětnou vazbou na obr. 4.13 lze vycházet z jednoduššího vztahu

$$I_1(s) + I_2(s) = 0\,.$$

V tomto případě se obdrží přenos

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{Z_1(s)\left\{\dfrac{1}{Z_2(s)} + \dfrac{1}{A}\left[\dfrac{1}{Z_1(s)} + \dfrac{1}{Z_2(s)}\right]\right\}}\,,$$

ze kterého se pro $A \to \infty$ získá stejný přenos (**).

Ještě většího zjednodušení lze dosáhnout uvažováním vztahu (*), ze kterého vyplývá pro $A \to \infty \Rightarrow U_{vst} \to 0$, a proto lze vycházet z velmi jednoduchého vztahu

$$\frac{U_1(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} = 0\,,$$

ze kterého se dostane výsledný přenos (je použita přesná rovnost)

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\,.$$

Z tohoto vztahu se vychází při analýze zapojení operačního zesilovače se zápornou zpětnou vazbou. V případě, že do kroužkem označeného uzlu (viz obr. 4.13) je zapojeno více impedancí (tj. více vstupů), pak ve jmenovateli přenosu vystupuje součet těchto impedancí.

Z uvedeného postupu odvozování přenosu zapojení s operačním zesilovačem je zřejmé, že správným použitím zjednodušujících předpokladů, lze výsledek získat rychle, efektivně a bez větších výpočtů.

Nyní již může být bez obtíží určen přenos zapojení operačního zesilovače se zápornou zpětnou vazbou na obr. 4.12.

Obrazové impedance $Z_1(s)$ a $Z_2(s)$ zapojení na obr. 4.12 jsou dány vztahy

$$Z_1(s) = \frac{Z_{C1}(s)Z_{R1}(s)}{Z_{C1}(s) + Z_{R1}(s)} = \frac{\dfrac{1}{C_1 s} R_1}{\dfrac{1}{C_1 s} + R_1} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1},$$

$$Z_2(s) = Z_{C2}(s) + Z_{R2}(s) = \frac{1}{C_2 s} + R_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}\,.$$

Výsledný přenos zapojení na obr. 4.12 je pak dán

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{(R_2 C_2 s + 1)(R_1 C_1 s + 1)}{R_1 C_2 s} = -k'_P \frac{(T'_I s + 1)(T'_D s + 1)}{T'_I s},$$

kde

$$k'_P = \frac{R_2}{R_1}\,[-], \qquad T'_I = R_2 C_2\,[\mathrm{s}], \qquad T'_D = R_1 C_1\,[\mathrm{s}]\,.$$

Je zřejmé, že byl získán přenos regulátoru typu $\mathrm{PID_i}$ s interakcí, tj. se sériovou strukturou, viz vztah (4.24).

Poznámka:

Na zapojení na obr. 4.13 lze rovněž pohlížet trochu jinak, viz obr. 4.15a. Je zřejmé, že vstupní $U_1(s)$ i výstupní $U_2(s)$ napětí přivádějí na invertující vstup operačního zesilovače se zesílením $A \to \infty$ napětí $U_{v1}(s)$ a $U_{v2}(s)$ z odpovídajících děličů znázorněných na obr. 4.15.

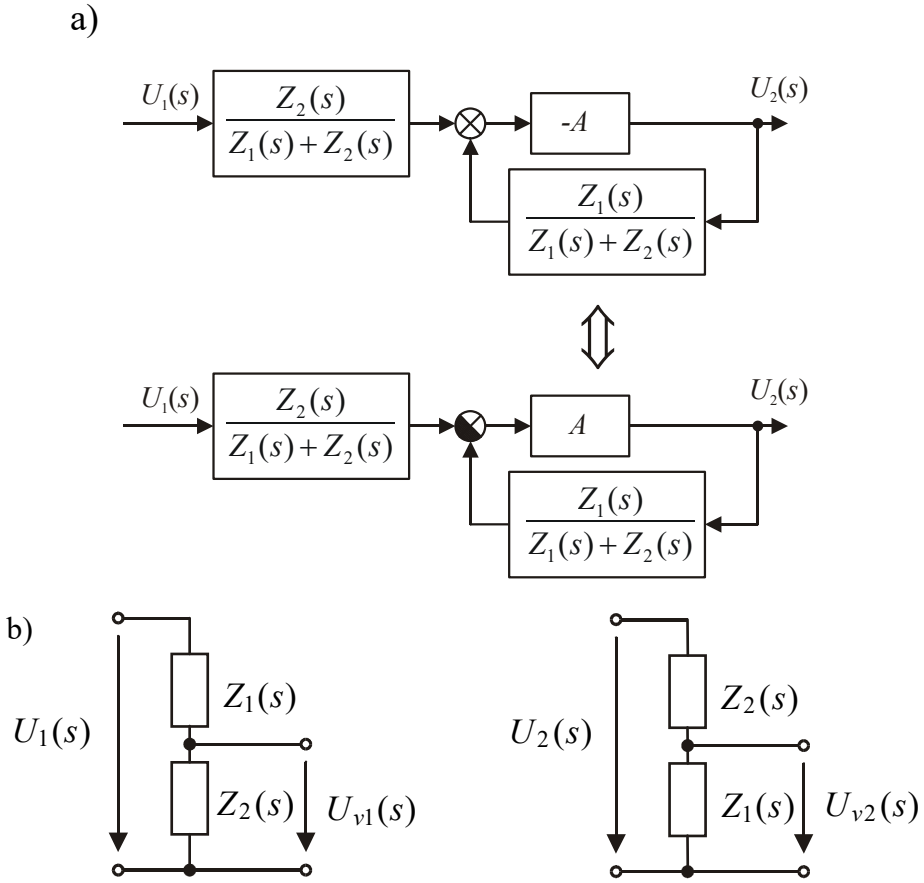
V souladu s blokovým schématem na obr. 4.15 lze psát

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}\frac{A}{1+A\dfrac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}}=$$

$$=-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}\frac{1}{\dfrac{1}{A}+\dfrac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}}.$$

Pro $A \to \infty$ se dostane

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}\to -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}.$$



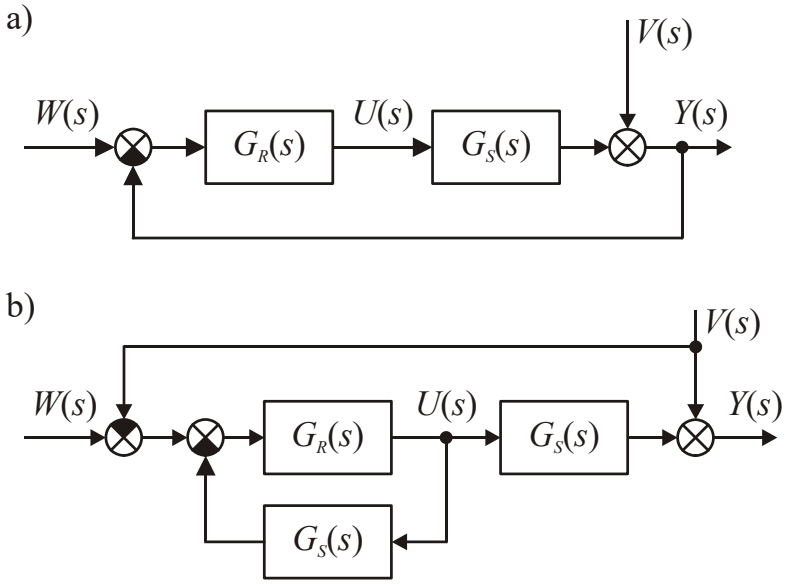
Obr. 4.15 – Zapojení operačního zesilovače se zápornou zpětnou vazbou: a) blokové schéma, b) děliče

Z tohoto pohledu na operační zesilovač se zápornou zpětnou vazbou (tj. při využití invertujícího vstupu) vyplývá velmi důležitý závěr. **Je-li v zapojení se zápornou zpětnou vazbou zajištěno dostatečně vysoké zesílení v přímé větvi, pak takové zapojení realizuje inverzi zpětné vazby. Této vlastnosti využívá i regulace. Bude-li totiž v regulačním obvodě vhodným seřízením regulátoru zajištěna dostatečně vysoká hodnota modulu kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu, pak přenos řízení $G_{wy}(s)$ bude**

přibližně roven inverzi zpětné vazby. Při jednotkové zpětné vazbě to bude jednotka [viz (4.6)].

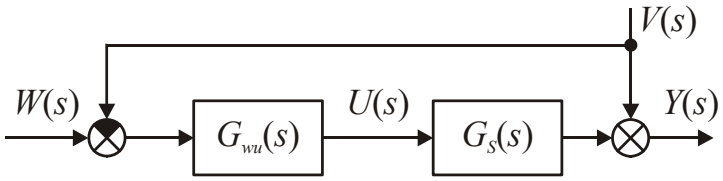
Příklad 4.3

Pomocí algebry blokových schémat (viz podkap. 3.3) lze snadno ukázat, že otevřená (polootevřená) struktura regulačního obvodu na obr. 4.16b je ekvivalentní uzavřené struktuře regulačního obvodu na obr. 4.16a. Je třeba provést analýzu vlastností otevřené struktury regulačního obvodu na obr. 4.16b.



Obr. 4.16 – Blokové schéma regulačního obvodu: a) s uzavřenou strukturou, b) s otevřenou strukturou

Řešení:



Obr. 4.17 – Zjednodušené blokové schéma regulačního obvodu s otevřenou strukturou

Pro otevřenou strukturu regulačního obvodu na obr. 4.16b lze snadno získat přenos řízení (viz obr. 4.17)

$$G_{wy}(s) = G_{wu}(s)G_S(s)$$

i přenos poruchy

$$G_{vy}(s) = 1 - G_{wu}(s)G_S(s) = 1 - G_{wy}(s),$$

kde

$$G_{wu}(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{1}{\dfrac{1}{G_R(s)} + G_S(s)}.$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že pro

$$\left|G_R(\mathrm{j}\omega)\right| \to \infty$$

platí

$$G_{wu}(\mathrm{j}\omega) \to \frac{1}{G_S(\mathrm{j}\omega)} \Rightarrow G_{wu}(s) \to \frac{1}{G_S(s)}.$$

Z otevřené struktury regulačního obvodu na obr. 4.16b nebo 4.17 vyplývá velmi důležitý závěr. Bude-li vhodným seřízením zajištěna dostatečně vysoká hodnota modulu kmitočtového přenosu regulátoru $A_R(\omega) = |G_R(\mathrm{j}\omega)|$, pak přenos $G_{wu}(s)$ bude přibližně roven inverzi zpětné vazby, tj. inverzi přenosu regulované soustavy $G_S^{-1}(s)$, viz poslední vztahy. **Zde je velmi důležité, že inverze je realizována na základě skutečné regulované soustavy. Z tohoto důvodu regulace, tj. řízení se zápornou zpětnou vazbou umožňuje řídit i takové soustavy, jejichž vlastnosti se v určitých mezích mění, příp. nejsou zcela známé**.

Z otevřené struktury na obr. 4.16b a z posledního vztahu vyplývá, že pokud regulovaná soustava nebo její část obsahuje nestabilní nuly nebo dopravní zpoždění (tj. je s neminimální fází), pak stabilní inverze nemůže existovat, a proto regulace takových soustav je velmi obtížná (především při použití jednoduchého regulačního obvodu).

Z uzavřené struktury regulačního obvodu (obr. 4.16a) takový důležitý závěr nelze učinit, protože pro $A_o(\omega) = |G_o(\mathrm{j}\omega)| = |G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)| \to \infty$ se teoreticky realizuje inverze jednotkové zpětné vazby.

Otevřenou strukturu regulačního obvodu využívá např. regulace s interním modelem.

4.2 Regulované soustavy

Matematické modely regulovaných soustav mohou mít tvary uvedené v podkap. 3.1. U lineárních regulovaných soustav se nejčastěji používají matematické modely ve tvaru přenosů s vyjádřenými časovými konstantami, které splňují podmínku

$$T_i \geq T_{i+1}, \qquad i = 0,1,2,\ldots, \tag{4.42}$$

tj. časová konstanta s nižším indexem má vyšší nebo stejnou hodnotu.

Získání matematického modelu reálného objektu se nazývá ***identifikace***. Identifikace může být ***analytická*** nebo ***experimentální***. Praktické metody identifikace leží mezi těmito dvěma krajními případy. Vždy je užitečné teoretickou cestou najít přibližné matematické vztahy popisující daný objekt – regulovanou soustavu a pak experimentálně upřesnit parametry, které v nich

vystupují. Čím lépe jsou připraveny analytické vztahy, tím kratší a méně nákladná jsou experimentální měření.

Při analytické identifikaci se matematický model dané regulované soustavy získá sestavením rovnic vyjadřujících vztahy mezi vstupními, výstupními a stavovými veličinami (viz např. příklady 3.6 a 4.2). Vychází se z rovnic látkové nebo energetické rovnováhy, z rovnic fyzikálních, chemických a biologických procesů a dalších nejrůznějších zákonů. Analytické metody identifikace vyžadují veliké teoretické i praktické znalosti, uplatňování nejrůznějších zjednodušujících předpokladů a aproximace složitých vztahů jednoduššími. Analyticky získaný matematický model lze charakterizovat jako „vnitřní“ popis vlastností dané regulované soustavy a lze z něho získat snadno stavový model.

Takový matematický model vyjadřuje skutečné zákonitosti, jeho parametry a veličiny mají fyzikální smysl, je většinou velmi složitý a nelineární, ale popisuje vlastnosti dané regulované soustavy ve větším „rozsahu“.

Při experimentální identifikaci se matematický model určí na základě změřených údajů o vlastnostech regulované soustavy. Předpokládá se, že hodnoty vstupních a výstupních veličin lze měřit. Experimentálně získaný matematický model lze charakterizovat jako „vnější“ popis vlastností dané regulované soustavy. Má většinou jednoduchý tvar, parametry se snadno určují, ale často nemají fyzikální smysl. Takový model je často použitelný v menším „rozsahu“ (např. v okolí pracovního bodu, v ustáleném stavu apod.).

Každá konkrétní regulovaná soustava vyžaduje jiný způsob identifikace. Nalezení nejvhodnějšího způsobu předpokládá určitou intuici a praxi. Z praktického hlediska nemají význam derivační regulované soustavy.

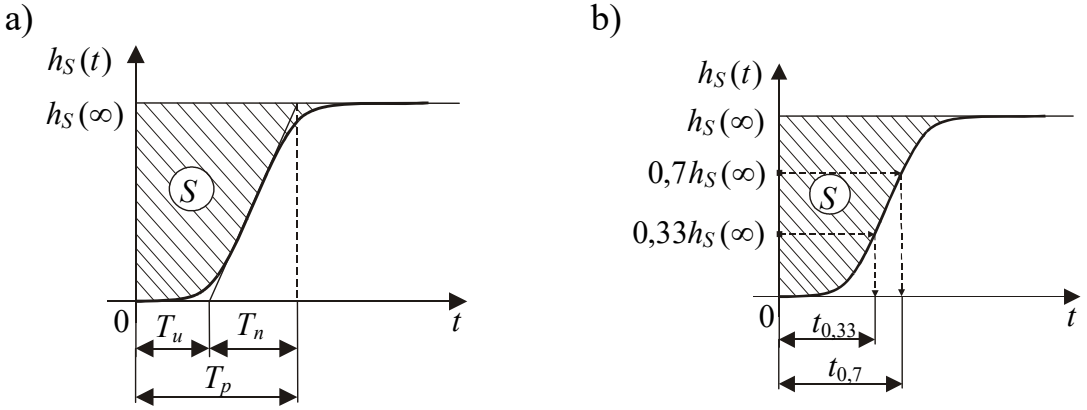
Dále budou ukázány bez odvození některé nejjednodušší experimentální identifikační metody vycházející z přechodových charakteristik, úpravy a zjednodušování přenosů. Předpokládá se, že průběhy přechodových charakteristik jsou vhodně upraveny (filtrovány, vyhlazeny) a že se pracuje s přírůstkovými veličinami, tj. s průběhy začínající v počátku souřadnic (v pracovním bodě).

Nekmitavé proporcionální regulované soustavy

Pokud regulovaná soustava je nekmitavá proporcionální a má přechodovou charakteristiku $h_S(t)$ jak na obr. 4.18a, pak nejjednodušší identifikační metoda spočívá v určení ***doby průtahu*** T_u a ***doby náběhu*** T_n na základě úseků, které vytne tečna vedena inflexním bodem na časové ose a ustálené hodnotě $h_S(\infty)$. Součet obou dob je ***doba přechodu*** T_p. Náhradní přenos má pak tvar

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_n s + 1} \mathrm{e}^{-T_u s}, \tag{4.43}$$

ze kterého je zřejmé, že jde o proporcionální regulovanou soustavu se setrvačností 1. řádu a dopravním zpožděním.



Obr. 4.18 – Identifikace nekmitavé proporcionální regulované soustavy: a) pomocí doby průtahu T_u a doby náběhu T_n, b) pomocí dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$

Koeficient přenosu k_1 u proporcionálních regulovaných soustav pro jednotkovou skokovou změnu akční veličiny, tj. $\Delta u(t) = \eta(t)$, je dán ustáleným stavem na přechodové charakteristice

$$k_1 = h_S(\infty), \tag{4.44}$$

protože $h_S(0) = 0$.

Pokud skok akční veličiny není jednotkový, ale $\Delta u(t) = \Delta u$, pak koeficient přenosu k_1 je dán poměrem

$$k_1 = \frac{h_S(\infty)}{\Delta u}. \tag{4.45}$$

Fyzikální rozměr koeficientu přenosu k_1 je dán poměrem fyzikálního rozměru výstupní veličiny $y_S(t) = h_S(t)$ k fyzikálnímu rozměru akční veličiny $\Delta u(t)$.

Velmi kvalitní matematický model nekmitavé proporcionální regulované soustavy lze získat ***Strejcovou metodou*** experimentální identifikace. Nejdříve se odhadem určí přibližná hodnota dopravního zpoždění T'_d a pomocí doby průtahu T_u a doby náběhu T_n se určí poměr

$$\frac{T_u - T'_d}{T_n}$$

a v tab. 4.2 se najde nejbližší nižší hodnota poměru

$$\frac{T_u - T'_d - \Delta T'_d}{T_n} = \frac{T_u - T_{di}}{T_n}, \tag{4.46}$$

který určí řád setrvačnosti i regulované soustavy s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_i s + 1)^i} \mathrm{e}^{-T_{di}s}, \tag{4.47}$$

dopravní zpoždění

$$T_{di} = T'_d + \Delta T'_d \tag{4.48}$$

a z 3. nebo 4. řádku hodnotu časové konstanty T_i ($\Delta T'_d$ je korekce odhadu T'_d).

Tab. 4.2 – Strejcova metoda experimentální identifikace

i	1	2	3	4	5	6
$\frac{T_u - T_{di}}{T_n}$	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493
$\frac{T_u - T_{di}}{T_i}$	0	0,282	0,805	1,425	2,100	2,811
$\frac{T_n}{T_i}$	1	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699

Pro přibližnou kontrolu lze použít vztah

$$iT_i + T_{di} \approx \frac{S}{h_S(\infty)}, \tag{4.49}$$

kde S je doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou $h_S(t)$, viz obr. 4.18a.

Použijí-li se pro experimentální identifikaci doby $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ (obr. 4.18b), pak lze použít náhradní přenos proporcionální regulované soustavy se setrvačností 1. řádu a dopravním zpožděním

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1} s}, \tag{4.50a}$$

kde

$$\begin{aligned} T_1 &= 1{,}245\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right), \\ T_{d1} &= 1{,}498 t_{0,33} - 0{,}498 t_{0,7}, \end{aligned} \tag{4.50b}$$

příp. náhradní přenos proporcionální regulované soustavy se setrvačností 2. řádu a dopravním zpožděním

$$G_S(s) = \frac{k_1}{\left(T_2 s + 1\right)^2} \mathrm{e}^{-T_{d2} s}, \tag{4.51a}$$

kde

$$\begin{aligned} T_2 &= 0{,}794\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right), \\ T_{d2} &= 1{,}937 t_{0,33} - 0{,}937 t_{0,7}. \end{aligned} \tag{4.51b}$$

Pro přibližnou kontrolu lze využít doplňkovou plochu S nad přechodovou charakteristikou

$$T_1 + T_{d1} \approx \frac{S}{h_S(\infty)}, \tag{4.52}$$

příp.

$$2T_2 + T_{d2} \approx \frac{S}{h_S(\infty)}. \tag{4.53}$$

Vztahy (4.50) byly získány analyticky (viz příklad 4.4) a vztahy (4.51) numericky ze shody náhradní přechodové charakteristiky se skutečnou přechodovou charakteristikou v hodnotách $h_S(0) = 0$, $h_S(t_{0,33}) = 0{,}33h_S(\infty)$, $h_S(t_{0,7}) = 0{,}7h_S(\infty)$ a $h_S(\infty)$.

Velmi dobrou aproximaci průběhu nekmitavé proporcionální regulované soustavy lze získat pomocí náhradního přenosu s rozdílnými časovými konstantami

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_{d2} s} \ , \tag{4.54a}$$

kde

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_1^2}\right), \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(D_2 - \sqrt{D_2^2 - 4D_1^2}\right),$$
$$T_{d2} = 1{,}937 t_{0,33} - 0{,}937 t_{0,7}, \tag{4.54b}$$
$$D_1 = 0{,}794\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right), \qquad D_2 = \frac{S}{h_S(\infty)} - T_{d2} \, .$$

Aby mohl být použit náhradní přenos ve tvaru (4.54a), musí platit $D_2 > 2D_1$, jinak je třeba použít přenos (4.51a).

Pro rychlé převedení přenosu (4.47) na jednodušší přenosy (4.50a) a (4.51a) v souladu se schématem

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{(T_i s + 1)^i} \mathrm{e}^{-T_{di} s} \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \dfrac{1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1} s} \quad \longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_{d2} s} \end{array} \tag{4.55}$$

lze využít tab. 4.3.

Tab. 4.3 – Tabulka pro rychlý převod přenosů v souladu se schématem (4.55)

$\dfrac{1}{(T_i s + 1)^i} \mathrm{e}^{-T_{di} s}$	i	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1} s}$	$\dfrac{T_1}{T_i}$	1	1,568	1,980	2,320	2,615	2,881
	$\dfrac{T_{d1} - T_{di}}{T_i}$	0	0,552	1,232	1,969	2,741	3,537
$\dfrac{1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_{d2} s}$	$\dfrac{T_2}{T_i}$	0,638	1	1,263	1,480	1,668	1,838
	$\dfrac{T_{d2} - T_{di}}{T_i}$	* –0,352	0	0,535	1,153	1,821	2,523

* Použitelné pro $T_{d1} > 0{,}352 T_1$.

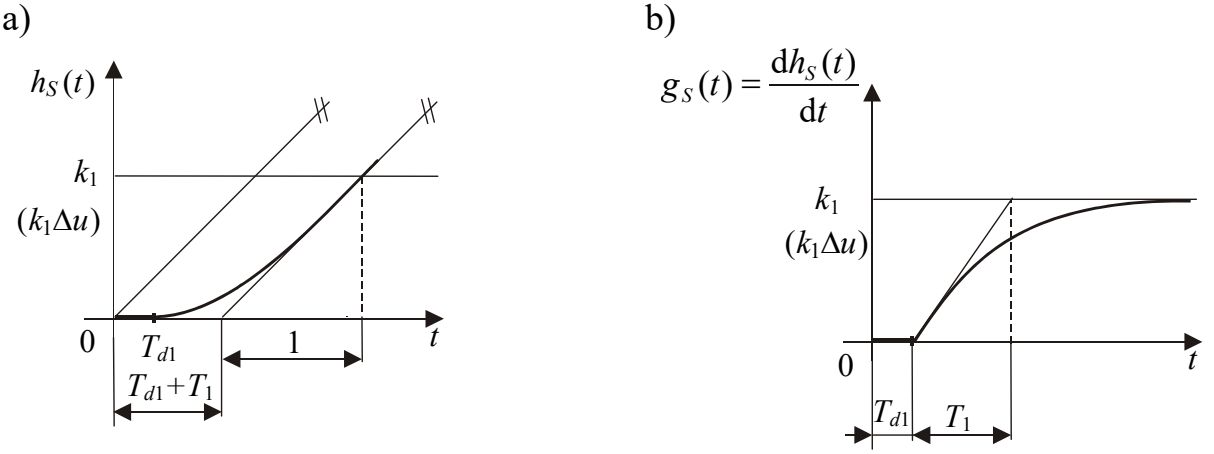
Tab. 4.3. byla získána numericky za předpokladu shody přechodových charakteristik regulovaných soustav v hodnotách $h_S(0)$, $h_S(t_{0,33})$, $h_S(t_{0,7})$ a $h_S(\infty)$.

Nekmitavé integrační regulované soustavy

Identifikaci nekmitavých integračních regulovaných soustav s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_{d1} s} \tag{4.56}$$

lze provést na základě jejich přechodových charakteristik $h_S(t)$ v souladu s obr. 4.19a. Fyzikální rozměr koeficientu přenosu k_1 je dán poměrem fyzikálního rozměru výstupní veličiny $y_S(t) = h_S(t)$ k fyzikálnímu rozměru akční veličiny $\Delta u(t)$, kdy tento poměr fyzikálních rozměrů je ještě podělen rozměrem času.



Obr. 4.19 – Identifikace nekmitavé integrační regulované soustavy z : a) přechodové charakteristiky $h_S(t)$, b) impulsní charakteristiky $g_S(t)$

Pro identifikaci nekmitavých integračních regulovaných soustav (1. řádu) lze použít všechny dříve uvedené metody identifikace pro nekmitavé proporcionální regulované soustavy, pokud místo jejich přechodových charakteristik $h_S(t)$ se použije jejich derivace, tj. impulsní funkce

$$\frac{\mathrm{d}\, h_S(t)}{\mathrm{d}\, t} = g_S(t)\,.$$

Pro integrační regulovanou soustavu s přenosem (4.56) je to ukázáno na obr. 4.19b.

Pokud vstupní skok akční veličiny není jednotkový, tj. $\Delta u(t) \neq \eta(t)$, ale $\Delta u(t) = \Delta u \eta(t)$, pak je třeba uvažovat hodnoty uvedené na obr. 4.19 v závorkách.

Úprava přenosů regulovaných soustav

Některé metody analýzy a syntézy regulačních obvodů vyžadují, aby přenosy regulovaných soustav byly v určitých tvarech. Tyto tvary lze často získat přímo jednoduchou úpravou přenosů.

Úpravu přenosu ve tvaru (4.47) na 1. nebo 2. řád lze snadno provést na základě schématu (4.55) a tab. 4.3, viz příklad 4.6.

Bez odvození budou uvedeny jednoduché úpravy vycházející z rovnosti doplňkových ploch nad přechodovými charakteristikami (viz příklad 4.5 a 4.7).

Pro proporcionální soustavy

a)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_\Sigma s+1)}, \qquad T_\Sigma = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ T_1 >> T_i,\ i = 2,3,\ldots,n. \tag{4.57a}$$

b)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \qquad T_d = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ T_1 >> T_i,\ i = 2,3,\ldots,n. \tag{4.57b}$$

c)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\prod_{i=3}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \qquad T_d = \sum_{i=3}^{n} T_i,\ T_1 \geq T_2 >> T_i,\ i = 3,4,\ldots,n. \tag{4.57c}$$

d)

$$\frac{k_1}{(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s+1)\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s+1} \mathrm{e}^{-T_d s}, \qquad T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i,\ T_0 >> T_i,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.57d}$$

Pro integrační soustavy

e) $$\frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{s(T_\Sigma s+1)}, \qquad T_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i\,. \tag{4.58a}$$

f) $$\frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}, \qquad T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i \,. \tag{4.58b}$$

g)

$$\frac{k_1}{s(T_1 s+1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{4.59}$$

$$T_d = \sum_{i=2}^{n} T_i, \;\; T_1 >> T_i, \;\; i = 2,3,\ldots,n.$$

Výhodné je použití kombinace náhradní součtové časové konstanty T_Σ a náhradního dopravního zpoždění T_d.

Pokud v čitateli přenosu regulované soustavy vystupují dvojčleny

$$1 \pm \tau_i s\,, \tag{4.60}$$

pak každý dvojčlen lze zastoupit výrazem

$$\mathrm{e}^{\pm \tau_i s} \tag{4.61}$$

za předpokladu, že výsledné dopravní zpoždění bude nezáporné.

Velmi jednoduchá, a současně efektivní, je metoda používající empirické „***pravidlo poloviny***“.

Za předpokladu, že přenos regulované soustavy má tvar s nestabilními nulami

$$G_S(s) = \frac{\prod_j (1-\tau_{j0}s)}{\prod_i (T_{i0}s+1)}\mathrm{e}^{-T_{d0}s}, \tag{4.62}$$

$$T_{i0} \geq T_{i+1,0}\,, \;\; \tau_{j0} \geq 0, \;\; T_{d0} \geq 0\,,$$

pak na základě „pravidla poloviny“ se pro náhradní přenos (4.50a) dostane

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2}, \qquad T_{d1} = T_{d0} + \frac{T_{20}}{2} + \sum_{i\geq 3} T_{i0} + \sum_j \tau_{j0}\,, \tag{4.63}$$

resp. pro přenos (4.54a)

$$T_1 = T_{10}, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2}, \qquad T_{d2} = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} + \sum_{i\geq 4} T_{i0} + \sum_j \tau_{j0}\,. \tag{4.64}$$

Výsledné dopravní zpoždění T_{d1}, resp. T_{d2} musí být vždy nezáporné.

Příklad 4.4

Je třeba ukázat, že na základě dob t_A a t_B určených odpovídajícími hodnotami A a B normované přechodové charakteristiky na obr. 4.20 lze určit časovou konstantu T_1 a dopravní zpoždění T_{d1} u náhradního přenosu (4.50a).

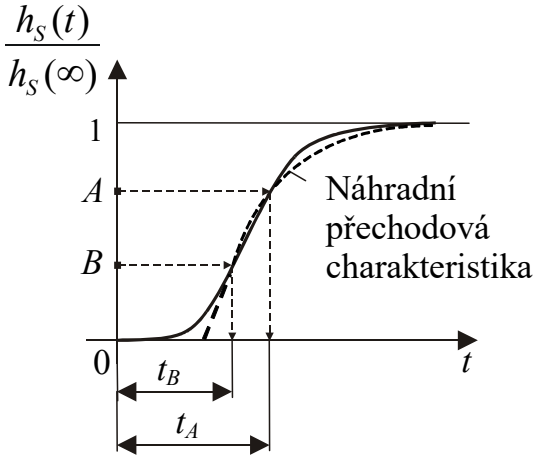
Řešení:

Normovaná přechodová funkce pro přenos (4.50a) je dána vztahem [$k_1 = h_S(\infty)$, viz vztah (4.44)]

$$\frac{h_S(t)}{h_S(\infty)} = (1 - \mathrm{e}^{-(t-T_{d1})/T_1})\eta(t - T_{d1}) .$$

Zpožděný Heavisideův jednotkový skok $\eta(t - T_{d1})$ zajišťuje $h_S(t) = 0$ pro $t < T_{d1}$.

Pro hodnoty A a B platí rovnice



Obr. 4.20 – Identifikace regulované soustavy z normované přechodové charakteristiky pomocí dob t_A a t_B – příklad 4.4

$$A = 1 - \mathrm{e}^{-(t_A - T_{d1})/T_1},$$

$$B = 1 - \mathrm{e}^{-(t_B - T_{d1})/T_1},$$

ze kterých se dostanou požadované vztahy

$$T_1 = \frac{1}{\ln(1 - A) - \ln(1 - B)}(t_B - t_A),$$

$$T_{d1} = \frac{1}{\ln(1 - A) - \ln(1 - B)}[t_B \ln(1 - A) - t_A \ln(1 - B)].$$

Je zřejmé, že hodnoty A a B normované přechodové charakteristiky by měly být zvoleny tak, aby byly přibližně v 1/3 a 2/3 a aby číselné hodnoty koeficientů ve výše uvedených vztazích byly snadno zapamatovatelné.

Např. pro $A = 0{,}33$ a $B = 0{,}7$ se dostane [viz (4.50b)]

$$T_1 \doteq 1{,}245(t_{0,7} - t_{0,33}) \doteq 1{,}25(t_{0,7} - t_{0,33}),$$

$$T_{d1} \doteq 1{,}498t_{0,33} - 0{,}498t_{0,7} \doteq 1{,}5t_{0,33} - 0{,}5t_{0,7} .$$

Podobně pro $A = 0{,}28$ a $B = 0{,}63$ se dostane

$$T_1 \doteq 1{,}502(t_{0,63} - t_{0,28}) \doteq 1{,}5(t_{0,63} - t_{0,28}),$$

$$T_{d1} \doteq 1{,}493 t_{0{,}28} - 0{,}493 t_{0{,}63} \doteq 1{,}5 t_{0{,}28} - 0{,}5 t_{0{,}63}\,.$$

Příklad 4.5

Je třeba ukázat geometrickou interpretaci úprav přenosů vycházejících z rovnosti doplňkových ploch nad přechodovými charakteristikami

$$G_S(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} \approx \frac{1}{T_\Sigma s + 1} = G_1(s)\,,$$

$$G_S(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} \approx \mathrm{e}^{-T_d s} = G_2(s)\,,$$

$$T_\Sigma = T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i\,.$$

Řešení:

Pro určení doplňkové plochy nad přechodovou charakteristikou lze s výhodou využít vztahu (viz příloha 1)

$$\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} X(s)\,,$$

kde $X(s)$ je Laplaceův obraz časové funkce $x(t)$, tj.

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

Proto pro doplňkovou plochu nad přechodovou charakteristikou $h_S(t)$ lze psát

$$\int_0^\infty [1 - h_S(t)]\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1) - 1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} =$$

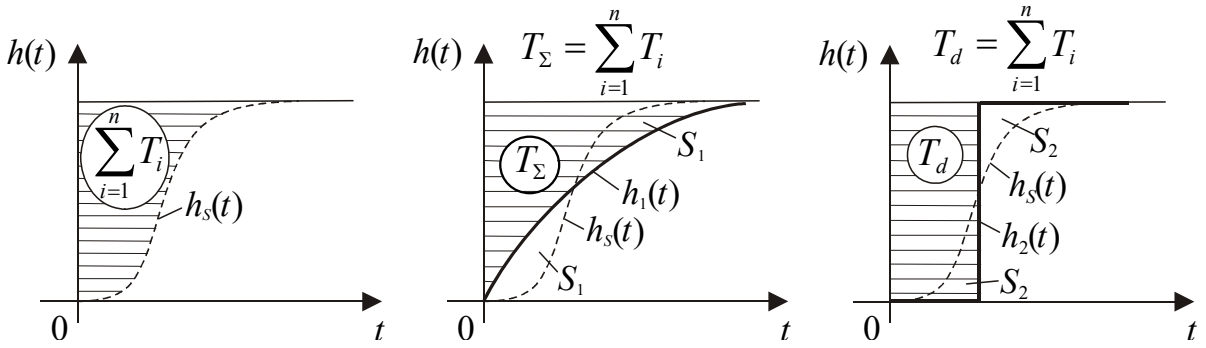
$$= \lim_{s\to 0}\frac{(\prod_{i=1}^{n} T_i)s^{n-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} T_i}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} = \sum_{i=1}^{n} T_i\,.$$

Pro přenos $G_1(s)$ lze doplňkovou plochu nad přechodovou charakteristikou $h_1(t)$ získat na základě právě obdrženého vztahu

$$\int_0^\infty [1 - h_1(t)]\,\mathrm{d}t = T_\Sigma\,.$$

Pro přenos $G_2(s)$ se doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou $h_2(t)$ získá na základě vztahu

$$\int_0^\infty [1 - h_2(t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty [1 - \eta(t - T_d)]\,\mathrm{d}t = T_d\,.$$



Obr. 4.21 – Geometrická interpretace náhradní součtové časové konstanty T_Σ a náhradního dopravního zpoždění T_d – příklad 4.5

Geometrická interpretace náhradní součtové časové konstanty T_Σ a náhradního dopravního zpoždění T_d je ukázána na obr. 4.21. Náhradní přechodové charakteristiky $h_1(t)$ a $h_2(t)$ se protnou s původní přechodovou charakteristikou $h_S(t)$ v takovém bodě, aby jimi vymezené plochy S_1 a S_2 nad a pod odpovídající náhradní přechodovou charakteristikou byly stejné.

Příklad 4.6

Strejcovou metodou identifikace byl získán přenos regulované soustavy ve tvaru

$$G_S(s) = \frac{2}{(2{,}5s + 1)^4}\,\mathrm{e}^{-7s}$$

a je ho třeba upravit na tvary (4.50a) a (4.51a). Časové konstanty a dopravní zpoždění je v minutách a koeficient přenosu je bezrozměrný. Přechodová charakteristika regulované soustavy je na obr. 4.22 označena písmenem c.

Řešení:

Využije se schéma (4.55) a na základě tab. 4.3 lze psát ($i = 4$, $k_1 = 2$, $T_4 = 2{,}5$ min, $T_{d4} = 7$ min):

a) $$\frac{T_1}{T_4} = 2{,}320 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2{,}32 \cdot T_4 = 2{,}32 \cdot 2{,}5 \doteq 5{,}8 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d4}}{T_4} = 1{,}969 \Rightarrow \qquad T_{d1} = 1{,}969 \cdot T_4 + T_{d4} = 1{,}969 \cdot 2{,}5 + 7 \doteq 11{,}9 \text{ min},$$

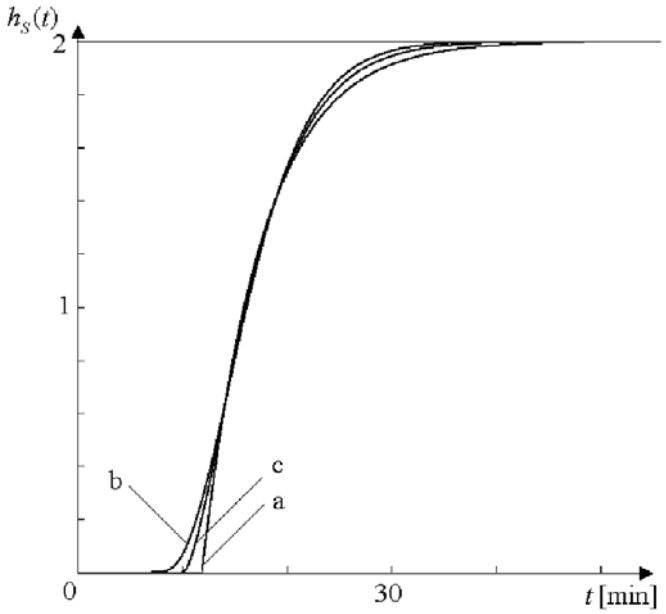
$$G_S(s) \approx \frac{2}{5{,}8s + 1}\,\mathrm{e}^{-11{,}9s}\,.$$

Průběh náhradní přechodové charakteristiky je na obr. 4.22 označen písmenem a.

b) $$\frac{T_2}{T_4} = 1{,}480 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 1{,}48 \cdot T_4 = 1{,}48 \cdot 2{,}5 \doteq 3{,}7 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d2}-T_{d4}}{T_4}=1{,}153 \Rightarrow \qquad T_{d2}=1{,}153\cdot T_4+T_{d4}=1{,}153\cdot 2{,}5+7\doteq 9{,}9 \text{ min},$$

$$G_S(s)\approx\frac{2}{(3{,}7s+1)^2}\mathrm{e}^{-9{,}9s}.$$



Obr. 4.22 – Průběhy náhradních přechodových charakteristik a, b a skutečné přechodové charakteristiky c – příklad 4.6

Průběh náhradní přechodové charakteristiky je na obr. 4.22 označen písmenem b.

Příklad 4.7

Přenos regulované soustavy

$$G_S(s)=\frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\mathrm{e}^{-s}$$

je třeba upravit na tvary (4.50a) a (4.54a). Časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách.

Řešení:

V souladu s „pravidlem poloviny“ lze psát ($T_{10}=8$, $T_{20}=6$, $T_{30}=4$, $\tau_{10}=2$, $T_{d0}=1$, $k_1=1$):

a) Náhradní přenos (4.50a)

$$T_1=T_{10}+\frac{T_{20}}{2}=11 \text{ s}, \qquad T_{d1}=T_{d0}+\frac{T_{20}}{2}+T_{30}+\tau_{10}=10 \text{ s},$$

$$G_S(s)=\frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\mathrm{e}^{-s}\approx\frac{1}{11s+1}\mathrm{e}^{-10s}.$$

b) Náhradní přenos (4.54a)

$$T_1 = T_{10} = 8 \text{ s}, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 8 \text{ s}, \quad T_{d2} = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} + \tau_{10} = 5 \text{ s}.$$

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)} \mathrm{e}^{-s} \approx \frac{1}{(8s+1)^2} \mathrm{e}^{-5s}.$$

Náhradní přenos má pouze shodou okolností stejný tvar jako (4.51a).

4.3 Stabilita

***Stabilita* (lineárního) regulačního obvodu je definována jako jeho schopnost ustálit všechny veličiny na konečných hodnotách, pokud se vstupní veličiny ustálí na konečných hodnotách**. Vstupními veličinami u regulačního obvodu jsou žádaná veličina $w(t)$ a všechny poruchové veličiny, nejčastěji agregované do jediné poruchové veličiny $v(t)$.

Je zřejmé, že následující definice je ekvivalentní. **Lineární regulační obvod je stabilní, když omezeným vstupům odpovídají omezené výstupy**.

Z obou definic vyplývá, že stabilita je charakteristická vlastnost daného regulačního obvodu, která nezávisí na konkrétních vstupech ani na konkrétních výstupech (pro nelineární regulační obvod to neplatí).

Vzhledem k tomu, že regulační obvod plně popisuje rovnice (4.3)

$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) + G_{vy}(s)V(s)$$

nebo rovnice (4.9)

$$E(s) = G_{we}(s)W(s) + G_{ve}(s)V(s),$$

je zřejmé, že stabilita musí být dána výrazem, který vystupuje ve všech základních přenosech, tj. přenosu řízení $G_{wy}(s)$ a přenosu poruchy $G_{vy}(s)$ nebo odchylkovém přenosu řízení $G_{we}(s)$ a odchylkovém přenosu poruchy $G_{ve}(s)$. Ze vztahů na základní přenosy (4.4), (4.5), (4.10) a (4.11) vyplývá, že tímto výrazem je jejich jmenovatel

$$1 + G_R(s)G_S(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \frac{M_o(s)}{N_o(s)} = \frac{N_o(s) + M_o(s)}{N_o(s)} = \frac{N(s)}{N_o(s)}, \quad (4.65)$$

kde $G_o(s)$ je ***přenos otevřeného*** (rozpojeného) ***regulačního obvodu*** (obecně je dán součinem všech přenosů ve smyčce), $N_o(s)$ – charakteristický mnohočlen otevřeného regulačního obvodu (mnohočlen ve jmenovateli přenosu otevřeného regulačního obvodu), $M_o(s)$ – mnohočlen v čitateli přenosu otevřeného regulačního obvodu.

Mnohočlen

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) \quad (4.66)$$

se nazývá ***charakteristický mnohočlen regulačního obvodu*** a po jeho přirovnání nule se obdrží ***charakteristická rovnice regulačního obvodu***

$$N(s) = 0\,. \tag{4.67}$$

Charakteristický mnohočlen (4.66) vystupuje u každého základního přenosu regulačního obvodu (4.4), (4.5), (4.10) a (4.11) po úpravě ve jmenovateli, a tedy je to současně charakteristický mnohočlen příslušné diferenciální rovnice popisující regulační obvod.

V podkap. 2.3 bylo uvedeno, že nutnou a postačující podmínkou stability řešení lineární diferenciální rovnice je, aby kořeny s_1, s_2,..., s_n jejího charakteristického mnohočlenu (příp. její charakteristické rovnice)

$$N(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) \tag{4.68}$$

měly zápornou reálnou část, tj. (viz obr. 2.4)

$$\mathrm{Re}\, s_i < 0, \qquad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,n\,. \tag{4.69}$$

Je tedy zřejmé, že **podmínka zápornosti reálných částí (4.69) kořenů charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu (4.66) [(4.68)] nebo ekvivalentně kořenů charakteristické rovnice regulačního obvodu (4.67) je nutnou a postačující podmínkou (asymptotické) stability daného regulačního obvodu**.

Protože pojem stabilita v nelineárních regulačních obvodech má poněkud jiný význam, je třeba, pokud by mohlo dojít k nedorozumění, stabilitu lineárních regulačních obvodů při splnění nutné a postačující podmínky nazývat asymptotickou stabilitou.

Je třeba si uvědomit, že komplexní kořeny vystupují vždy v komplexně sdružených dvojicích (tj. symetricky podle reálné osy v komplexní rovině s).

Dále je třeba si uvědomit, že kořeny s_1, s_2,..., s_n jsou současně póly všech základních přenosů (tj. přenosu řízení a poruchy a odchylkových přenosů řízení a poruchy, a tedy jsou to póly celého regulačního obvodu. Toto neplatí pro nuly základních přenosů. **Póly regulačního obvodu jsou pro dynamické vlastnosti regulačního obvodu zásadní**.

K nutné a postačující podmínce stability regulačního obvodu (4.69) lze dojít i z druhé strany.

Lze uvažovat libovolný přenos ze základních přenosů regulačního obvodu, např. je uvažován přenos řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \tag{4.70}$$

a obraz žádané veličiny

$$W(s) = \frac{M_w(s)}{N_w(s)}, \tag{4.71}$$

kde $M(s)$, $M_w(s)$ a $N_w(s)$ jsou mnohočleny a $N(s)$ je charakteristický mnohočlen regulačního obvodu.

Za předpokladu, že charakteristický mnohočlen regulačního obvodu $N(s)$ má jednoduché kořeny s_1, s_2,..., s_n a mnohočlen $N_w(s)$ má jednoduché kořeny

$s_1^w, s_2^w, \ldots, s_p^w$ [p je stupeň mnohočlenu $N_w(s)$], lze obraz regulované veličiny – odezvy

$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) = \frac{M(s)}{N(s)}\frac{M_w(s)}{N_w(s)} \tag{4.72}$$

zapsat ve tvaru součtu parciálních zlomků (viz kap. 2)

$$Y(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s - s_i}}_{Y_P(s)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p}\frac{B_j}{s - s_j^w}}_{Y_U(s)} = Y_P(s) + Y_U(s), \tag{4.73}$$

kde $Y_P(s)$ je obraz ***přechodné části odezvy***, $Y_U(s)$ je obraz ***ustálené části odezvy***.

Originál regulované veličiny $y(t)$ se získá z (4.73) pomocí Laplaceovy transformace

$$y(t) = y_P(t) + y_U(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, \mathrm{e}^{s_i t} + \sum_{j=1}^{p} B_j\, \mathrm{e}^{s_j^w t}. \tag{4.74}$$

Konstanty A_i a B_j ve vztazích (4.73) a (4.74) obecně závisí na tvaru přenosu řízení $G_{wy}(s)$ a žádané veličiny $W(s)$, viz (4.70) a (4.71).

Průběh přechodné části regulované veličiny $y_P(t)$ závisí na kořenech charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu, tj. na jeho pólech a je dán vztahem

$$y_P(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, \mathrm{e}^{s_i t}.$$

Průběh ustálené části regulované veličiny

$$y_U(t) = \sum_{j=1}^{p} B_j\, \mathrm{e}^{s_j^w t}$$

je dán průběhem žádané veličiny $w(t)$.

Zde se ustáleným průběhem rozumí obecná daná časová funkce, např. $y_U(t) = Bt$, $y_U(t) = B\sin\omega t$ atd. na rozdíl od ustáleného (klidového) stavu, např. $y_U(t) = y_U = \text{konst}$.

Ze vztahu (4.74) vyplývá, že při omezené vstupní veličině – žádané veličině $w(t)$ ($\mathrm{Re}\, s_j^w < 0$ pro j = 1, 2,..., p) výstupní veličina – regulovaná veličina $y(t)$ bude omezena tehdy a jen tehdy, když bude omezena její přechodná část $y_P(t)$, tj. bude-li platit podmínka (4.69). Proto u stabilního regulačního obvodu musí s rostoucím časem t vymizet přechodná část odezvy, tj.

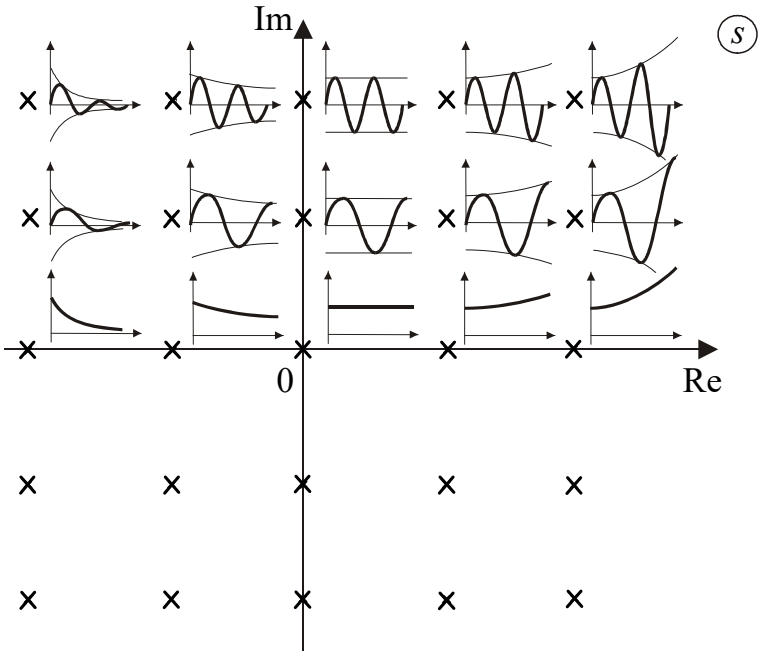
$$\lim_{t\to\infty} y_P(t) = 0, \tag{4.75}$$

a proto pro $t \to \infty$ platí

$$y(t) \to y_U(t). \tag{4.76}$$

Z posledního vztahu vyplývá, že stabilita regulačního obvodu je jeho schopnost ustálit výstupní – regulovanou veličinu $y(t) \rightarrow y_U(t)$ při ustálené vstupní – žádané veličině $w(t) \rightarrow w_U(t)$.

U regulačního obvodu z cíle regulace $y(t) \rightarrow w(t)$ vyplývá samozřejmý požadavek $y_U(t) \rightarrow w_U(t)$.



Obr. 4.23 – Vliv polohy pólů regulačního obvodu na průběh přechodné odezvy

Je zřejmé, že všechny závěry budou platit i pro násobné kořeny mnohočlenů $N(s)$ a $N_w(s)$ ve vztahu (4.72), protože přičtením zanedbatelně malých čísel k násobným kořenům se tyto změní na jednoduché a taková změna nemůže podstatně ovlivnit vlastnosti daného regulačního obvodu.

Vliv polohy pólů regulačního obvodu na průběh přechodné odezvy je názorně ukázán na obr. 4.23. Je třeba si uvědomit, že kmitavé odezvy způsobují komplexně sdružené dvojice pólů.

U regulačních obvodů s dopravním zpožděním má přenos otevřeného regulačního obvodu tvar [srovnej s (4.65)]

$$G_o(s) = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{4.77}$$

z něhož se dostane tzv. ***charakteristický kvazimnohočlen regulačního obvodu*** [srovnej s (4.66)]

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) \mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{4.78}$$

Charakteristický kvazimnohočlen (4.78) má nekonečně mnoho kořenů (viz podkap. 3.2), regulační obvod s dopravním zpožděním má nekonečně mnoho pólů, a proto ověřování splnění nutné a postačující podmínky stability (4.69) přímým výpočtem je nereálné.

Stabilita regulačního obvodu je nutnou podmínkou jeho správné činnosti. K jejímu ověření se používá celá řada nejrůznějších kritérií, která dovolují

kontrolovat splnění nerovností (4.69) bez pracného výpočtu kořenů charakteristického mnohočlenu, resp. kvazimnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$.

Budou uvedena bez odvození tři kritéria stability: Hurwitzovo, Michajlovovo a Nyquistovo.

Hurwitzovo kritérium stability

Hurwitzovo kritérium stability je algebraické kritérium, a proto není vhodné pro regulační obvody s dopravním zpožděním (exponenciální funkce není algebraická). Může však být použito pro přibližné ověření stability v případě, že dopravní zpoždění se zastoupí jeho aproximací ve tvaru racionální lomené funkce, např. (3.41) ÷ (3.43).

Hurwitzovo kritérium stability může být formulováno ve tvaru:

„Lineární regulační obvod s charakteristickým mnohočlenem

$$N(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$$

bude (asymptoticky) stabilní [tj. budou splněny nerovnosti (4.69)] tehdy a jen tehdy, když:

a) všechny koeficienty a_0, a_1,..., a_n existují a jsou kladné (je to ***nutná podmínka stability*** zformulována slovenským technikem A. Stodolou),

b) hlavní rohové minory (subdeterminanty) Hurwitzovy matice

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{bmatrix}, \tag{4.79}$$

$$H_1 = a_{n-1}, \; H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; H_n = |\boldsymbol{H}|$$

jsou kladné.“

Protože platí $H_1 = a_{n-1}$, $H_n = a_0 H_{n-1}$, stačí kontrolovat kladnost pouze H_2, H_3, ..., H_{n-1}. Nulovost některého z Hurwitzových subdeterminantů označuje ***mez stability***. Tak např. bude-li $a_0 = 0$, pak jeden pól je nulový (počátek souřadnic v komplexní rovině s). Tento případ charakterizuje ***nekmitavou*** mez stability. Když $H_{n-1} = 0$, pak dva póly jsou ryze imaginární (póly leží na imaginární ose souměrně podle počátku souřadnic v komplexní rovině s). V tomto případě jde o ***kmitavou*** mez stability, viz obr. 4.23.

V případě splnění Stodolovy nutné podmínky stability lze rovněž použít zjednodušené ***Lineardovo – Chipartovo kritérium*** spočívající v kontrole kladnosti všech lichých, nebo sudých Hurwitzových subdeterminantů.

Nevýhodou Hurwitzova kritéria stability je jeho výpočetní náročnost pro $n \geq 5$.

Michajlovovo kritérium stability

Michajlovovo kritérium stability je kmitočtové kritérium s velmi širokou oblastí využití. Zde bude ukázána jednoduchá formulace vhodná pro regulační obvody bez dopravního zpoždění.

Michajlovovo kritérium stability vychází z charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$, ze kterého se po dosazení $s = \mathrm{j}\omega$ dostane ***Michajlovova funkce***

$$N(\mathrm{j}\omega) = N(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = N_P(\omega) + \mathrm{j}N_Q(\omega), \tag{4.80a}$$

kde

$$N_P(\omega) = \mathrm{Re}\, N(\mathrm{j}\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots \tag{4.80b}$$

je reálná část a

$$N_Q(\omega) = \mathrm{Im}\, N(\mathrm{j}\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots \tag{4.80c}$$

je imaginární část Michajlovovy funkce.

Její grafické vyjádření je ***Michajlovova charakteristika*** (křivka, hodograf).

Nyní již může být formulováno Michajlovovo kritérium ve tvaru:

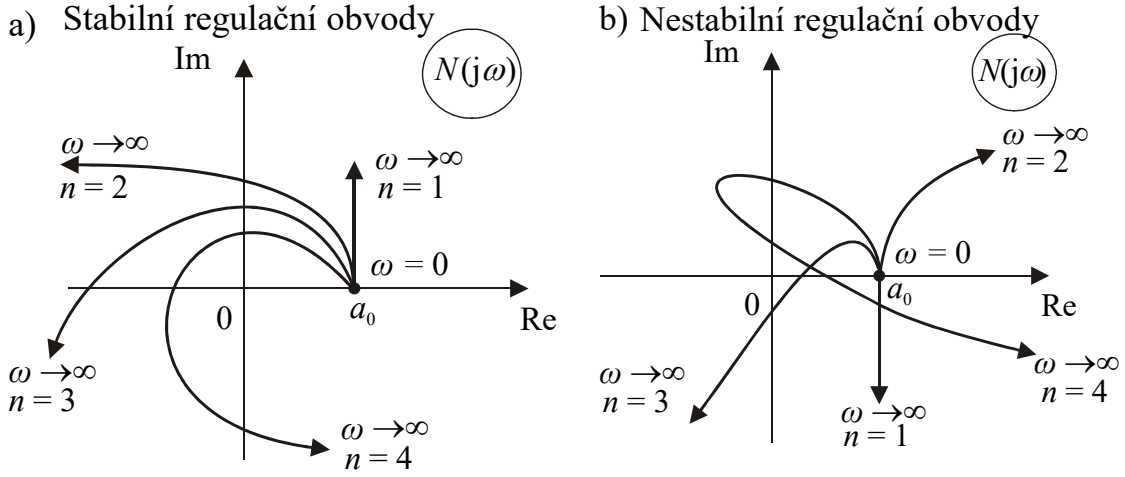
„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když jeho Michajlovova charakteristika $N(\mathrm{j}\omega)$ pro $0 \le \omega \le \infty$ začíná na kladné reálné poloose a postupně v kladném směru (proti pohybu hodinových ručiček) prochází n kvadranty.“

Tuto formulaci lze zapsat vztahem pro změnu argumentu Michajlovovy funkce

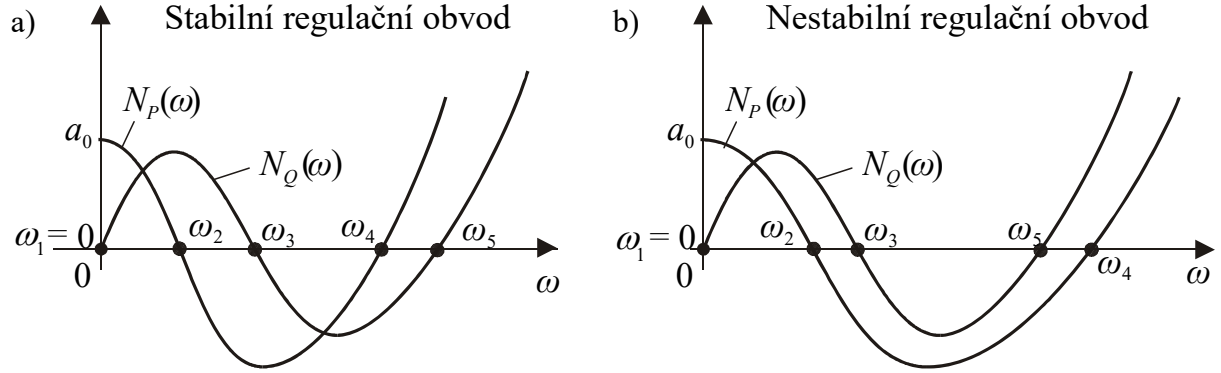
$$\Delta \underset{0\le\omega\le\infty}{\arg}\, N(\mathrm{j}\omega) = n\frac{\pi}{2}, \tag{4.81}$$

kde n je stupeň charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$.

Průběhy Michajlovových charakteristik pro stabilní regulační obvody jsou na obr. 4.24a a pro nestabilní regulační obvody na obr. 4.24b.



Obr. 4.24 – Průběhy Michajlovových charakteristik pro regulační obvody: a) stabilní, b) nestabilní



Obr. 4.25 – Průběhy reálné $N_P(\omega)$ a imaginární $N_Q(\omega)$ části Michajlovové charakteristiky pro $n = 5$ u regulačního obvodu: a) stabilního, b) nestabilního

Z průběhů Michajlovovy charakteristiky $N(\mathrm{j}\omega)$ pro stabilní regulační obvody na obr. 4.24a vyplývá, že pro $0 \le \omega \le \infty$ imaginární $N_Q(\omega)$ a reálná $N_P(\omega)$ část se postupně nulují [$N_Q(\omega)$ při průchodu reálnou osou a $N_P(\omega)$ při průchodu imaginární osou], a proto Michajlovovo kritérium stability lze formulovat v ekvivalentním tvaru (viz obr. 4.25):

„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když $N_P(0) = a_0 > 0$ a pro $0 \le \omega \le \infty$ kořeny $N_Q(\omega)$ a $N_P(\omega)$ se vzájemně střídají."

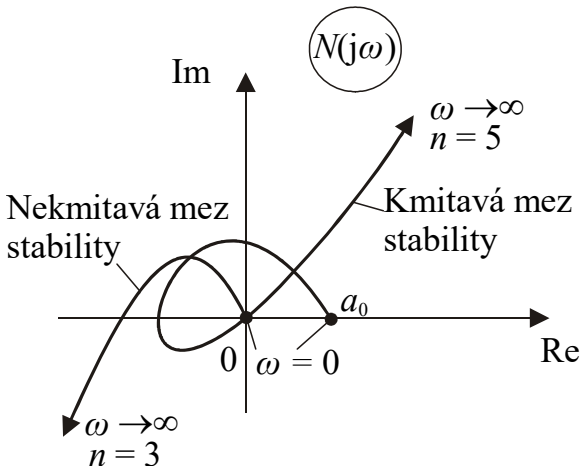
Výhodou této formulace je, že může být zapsána analyticky:

$$\left.\begin{aligned} N_P(\omega)\big|_{\omega=0} = N_P(0) > 0,\ \left.\frac{\mathrm{d}\,N_P(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{\mathrm{d}\,N_P(0)}{\mathrm{d}\,\omega} \le 0, \\ N_Q(\omega)\big|_{\omega=0} = N_Q(0) = 0,\ \left.\frac{\mathrm{d}\,N_Q(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{\mathrm{d}\,N_Q(0)}{\mathrm{d}\,\omega} > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.82a)$$

$$\left.\begin{aligned} N_Q(\omega) = 0 \ \Rightarrow\ \omega_1 = 0 < \omega_3 < \omega_5 < \ldots \\ N_P(0) = a_0 > 0,\ N_P(\omega) = 0 \ \Rightarrow\ \omega_2 < \omega_4 < \ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_1 = 0 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \ldots \qquad (4.82b)$$

Je zřejmé, že počet kořenů ω_i je roven stupni n charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$.

Je-li regulační obvod na nekmitavé mezi stability, pak $N_P(0) = a_0 = 0$ a Michajlovova charakteristika vychází z počátku souřadnic. Naproti tomu, je-li $N_P(0) = a_0 > 0$ a Michajlovova charakteristika prochází počátkem souřadnic, pak jde o kmitavou mez stability, viz obr. 4.26. V tomto případě se současně nulují reálná $N_P(\omega)$ a imaginární $N_Q(\omega)$ část. Této vlastnosti Michajlovovy funkce (charakteristiky) lze s výhodou využít pro analytické určení ***kritického úhlového kmitočtu*** ω_k a dalšího kritického parametru, kterým nejčastěji je ***kritické zesílení regulátoru*** k_{Pk} nebo ***kritická integrační časová konstanta regulátoru*** T_{Ik}.



Obr. 4.26 – Průběhy Michajlovových charakteristik pro regulační obvody na mezi stability

Správně by se mělo hovořit o kritických hodnotách uvedených parametrů. Tyto kritické hodnoty uvedených parametrů způsobují, že regulační obvod je na mezi stability, čili v určitém kritickém stavu mezi stabilitou a nestabilitou. V tomto případě stačí nepatrná změna některé z těchto hodnot a regulační obvod bude stabilní, nebo nestabilní. Z tohoto důvodu **při ověřování stability na základě různých aproximací je třeba vždy k výsledkům přistupovat velice opatrně**.

Geometrická formulace Michajlovova kritéria stability je vhodná v tom případě, kdy koeficienty charakteristického mnohočlenu jsou zadány číselně, jinak je vždy vhodnější formulace analytická.

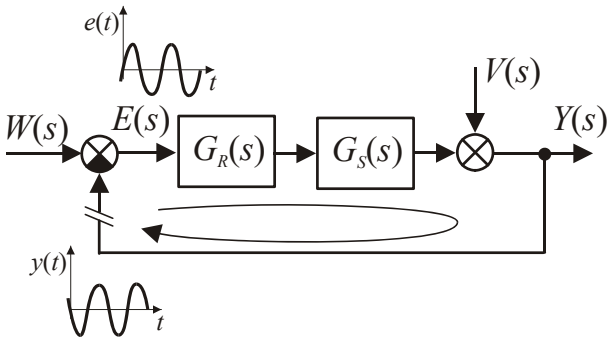
Michajlovovo kritérium stability v uvedených dvou formulacích může být použito i pro přibližné ověření stability regulačních obvodů s dopravním zpožděním za předpokladu, že dopravní zpoždění bude aproximováno racionální lomenou funkcí, např. (3.41) ÷ (3.43).

Nyquistovo kritérium stability

Nyquistovo kritérium stability je kmitočtové, a na rozdíl od Hurwitzova a Michajlovova kritéria vychází z vlastností otevřeného regulačního obvodu a je vhodné i pro regulační obvody s dopravním zpožděním. Může být dokonce rozšířeno i na některé nelineární regulační obvody.

Je uvažován regulační obvod na obr. 4.27, ze kterého vyplývá, že aby v něm vznikly kmity na mezi stability pro $W(s) = V(s) = 0$ a tyto kmity se udržely se stálou amplitudou a stálým úhlovým kmitočtem, musí průběh ve zpětné vazbě před sumačním uzlem být stejný ale opačného znaménka, než je průběh za sumačním uzlem. Lze to vyjádřit v obrazech

$$G_o(s) = -1 \Rightarrow G_o(\mathrm{j}\omega_k) = -1, \tag{4.83}$$



Obr. 4.27 – Regulační obvod na kmitavé mezi stability

kde $G_o(s) = G_R(s)G_S(s)$ je přenos otevřeného regulačního obvodu, který obecně je dán součinem všech přenosů v hlavní a zpětnovazební větvi (tj. ve smyčce), ω_k – kritický úhlový kmitočet.

Je zřejmé, že k výše uvedenému závěru bylo možné dojít za předpokladu, že otevřený regulační obvod je stabilní (jinak by vznik a trvání stálých kmitů v regulační smyčce nebyl možný).

Vztah (4.83) vyjadřuje pro daný regulační obvod podmínku kmitavé meze stability. Lze k ní dojít i na základě stejných jmenovatelů všech základních přenosů [viz např. (4.4), (4.5), (4.10) a (4.11)], ve kterých vystupuje výraz $1 + G_o(s)$. Je zřejmé, že kritický stav vznikne, když uvedený výraz bude roven nule, což odpovídá (4.83).

Vztah (4.83) vyjadřuje tu skutečnost, že je-li lineární regulační obvod na kmitavé mezi stability, pak amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilního otevřeného regulačního obvodu prochází bodem –1 na záporné reálné poloose.

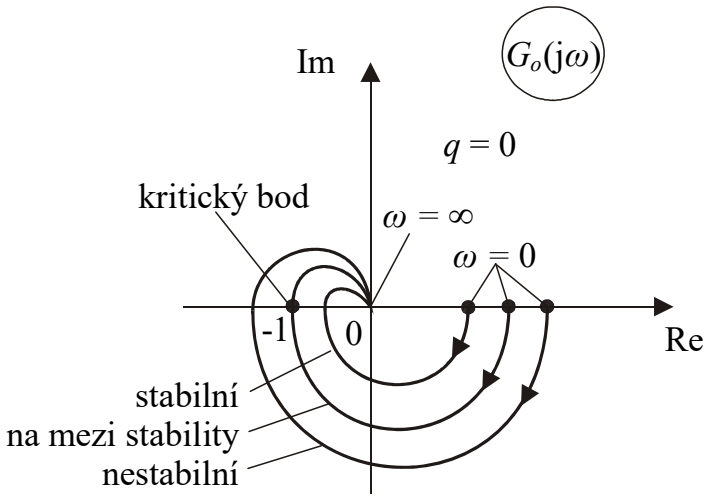
Bod –1 na záporné reálné poloose se nazývá ***kritický bod***.

Ze vztahu (4.83) dále vyplývá, že kdyby v něm místo hodnoty –1 vystupovala např. hodnota –0,5, pak by kmity klesaly – odpovídá to stabilitě a naopak, pokud by tam vystupovala hodnota např. –2, pak by kmity narůstaly – odpovídá to nestabilitě.

Nyní lze již zformulovat Nyquistovo kritérium stability:

„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilního otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ pro $0 \le \omega \le \infty$ neobklopuje kritický bod –1 na záporné reálné poloose.“

Hlavní případy průběhů amplitudofázových kmitočtových charakteristik otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ vzhledem ke kritickému bodu –1 ukazuje obr. 4.28. **Integrační členy vystupující v hlavní a zpětnovazební větvi, tj. ve smyčce, se z hlediska Nyquistova kritéria stability nepovažují za nestabilní (jsou to v podstatě neutrální členy)**. Jejich počet se označuje písmenem q a nazývá se ***stupeň astatismu regulačního obvodu*** (typ regulačního obvodu). V tomto případě pro rozhodnutí o tom, zda amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ obklopuje či neobklopuje kritický bod –1, je třeba tuto charakteristiku spojit s kladnou reálnou poloosou kružnicí o nekonečně velikém poloměru (ukázáno čárkovaně), viz obr. 4.29.



Obr. 4.28 – Průběhy amplitudofázových kmitočtových charakteristik stabilního otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ pro $q = 0$

Pokud amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ má průběh jak na obr. 4.29 pro $q = 2$, pak jde o ***podmíněnou stabilitu***, kdy jak pokles, tak i vzrůst hodnoty $A_o(\omega)$ pro fázi $-\pi$ může způsobit nestabilitu regulačního obvodu.

Výše byla zformulována geometrická verze Nyquistova kritéria stability. Velmi užitečná může být i analytická verze, pro kterou je vhodné kromě kritického úhlového kmitočtu ω_k zavést ještě ***úhlový kmitočet řezu*** (průchodu) $\omega_{ř}$ definovaný vztahem (obr. 4.30)

$$A_o(\omega_{ř}) = 1 \tag{4.84}$$

a ***úhlový kmitočet minus π*** $\omega_{-\pi}$ definovaný vztahem (obr. 4.30)

$$\varphi_o(\omega_{-\pi}) = -\pi\,. \tag{4.85a}$$

Úhlový kmitočet $\omega_{-\pi}$ lze rovněž určit ze vztahu

$$\mathrm{Im}G_o(j\omega_{-\pi}) = 0\,. \tag{4.85b}$$

Pro kmitavou mez stability platí

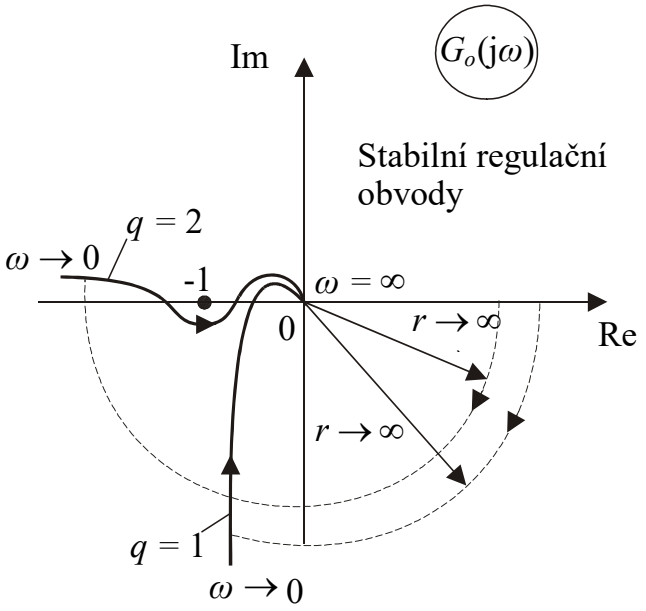
$$\omega_k = \omega_{ř} = \omega_{-\pi}\,. \tag{4.86}$$

Nyní již lze Nyquistovo kritérium stability analyticky zapsat v některém z ekvivalentních tvarů:

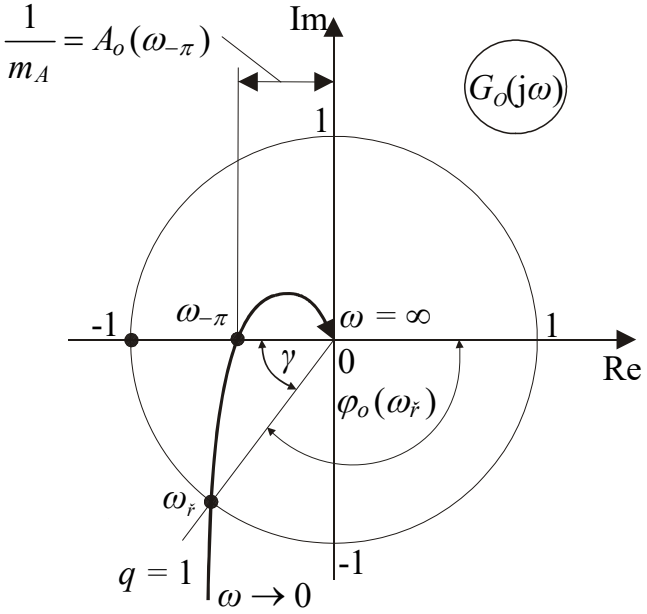
$$G_o(j\omega_{-\pi}) = \mathrm{Re}G_o(j\omega_{-\pi}) > -1\,, \tag{4.87}$$

$$A_o(\omega_{-\pi}) < 1\,, \tag{4.88}$$

$$\varphi_o(\omega_{ř}) > -\pi\,. \tag{4.89}$$



Obr. 4.29 – Průběhy amplitudofázových kmitočtových charakteristik otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ pro $q = 1$ a $q = 2$



Obr. 4.30 – Amplitudová m_A a fázová γ bezpečnost

Je zřejmé, že uvedené jednoduché formulace (4.87) ÷ (4.89) platí pro nepodmíněně stabilní regulační obvody. Pro podmíněně stabilní regulační obvody je lze snadno rozšířit.

Pomocí úhlových kmitočtů $\omega_{\check{r}}$ a $\omega_{-\pi}$ lze definovat další velmi důležité ukazatele (obr. 4.30):

amplitudovou bezpečnost (bezpečnost v amplitudě)

$$m_A = \frac{1}{A_o(\omega_{-\pi})} \tag{4.90}$$

a ***fázovou bezpečnost*** (bezpečnost ve fázi)

$$\gamma = \pi + \varphi_o(\omega_{\check{r}}) . \tag{4.91}$$

Amplitudová bezpečnost m_A vyjadřuje kolikrát lze zvýšit hodnotu $A_o(\omega_{-\pi})$ (kolikrát lze zvýšit hodnotu zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o), aby se regulační obvod dostal na mez stability. Podobně fázová bezpečnost γ vyjadřuje o kolik se může zvětšit fáze $\varphi_o(\omega_{\check{r}})$ (v absolutní hodnotě), aby se regulační obvod dostal na mez stability.

Protože integrační činnost (složka) regulátoru vnáší do otevřeného regulačního obvodu zápornou fázi (viz obr. 4.5 a 4.11 pro $0 \le \omega < \frac{1}{\sqrt{T_I T_D}} = \frac{1}{\sqrt{T_I' T_D'}}$), tj. zmenšuje fázovou bezpečnost γ, proto **integrační činnost regulátoru destabilizuje (zhoršuje stabilitu) regulační obvod**. Je třeba si uvědomit, že integrační časová konstanta T_I, případně T_I' vystupuje ve jmenovateli výrazu vyjadřujícího integrační složku, a proto jejím zvyšováním se snižuje vliv integrační činnosti [viz např. (4.24), (4.25), (4.32), (4.33) atd.)]. Naproti tomu derivační činnost (složka) vnáší do otevřeného regulačního obvodu kladnou fázi (viz obr. 4.5 a 4.11 pro $\omega > \frac{1}{\sqrt{T_I T_D}} = \frac{1}{\sqrt{T_I' T_D'}}$), tj. zvyšuje fázovou bezpečnost γ, proto **derivační činnost regulátoru stabilizuje (zlepšuje stabilitu) regulační obvod** [samozřejmě při vhodné filtraci, viz např. (4.31) a (4.32)].

Pokud jde o proporcionální činnost regulátoru vyjádřenou jeho zesílením k_P, pak je zřejmé, že zvyšuje zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o a tím snižuje amplitudovou bezpečnost m_A, proto **proporcionální činnost regulátoru destabilizuje regulační obvod**. Výjimku tvoří podmínečně stabilní regulační obvody.

Pro stabilitu regulačního obvodu je velmi nebezpečné dopravní zpoždění, jehož kmitočtový přenos v souladu se vztahem (3.38) má tvar

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{e}^{-T_d \mathrm{j}\omega} = A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}, \tag{4.92a}$$

$$A(\omega) = 1, \tag{4.92b}$$

$$\varphi(\omega) = -T_d \omega . \tag{4.92c}$$

Ze vztahů (4.92) je zřejmé, že dopravní zpoždění nemění modul [viz (4.92b)], ale lineárně s rostoucím úhlovým kmitočtem zvyšuje zápornou fázi [viz (4.92c)], tj. snižuje fázovou bezpečnost γ. Proto **dopravní zpoždění vždy podstatně destabilizuje regulační obvod**.

Uvedené formulace Nyquistova kritéria stability platí pouze pro stabilní otevřené regulační obvody, a proto je třeba vždy nejdříve ověřit stabilitu otevřeného regulačního obvodu a teprve pak přistoupit k ověřování stability (uzavřeného) regulačního obvodu.

Místo dlouhého názvu amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu se používá kratší název ***Nyquistova charakteristika*** (křivka).

Nyquistovo kritérium pro nestabilní otevřené regulační obvody je formulováno takto:

„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když amplitudofázová kmitočtová charakteristika nestabilního otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ s p nestabilními póly pro $0 \le \omega \le \infty$ obklopí kritický bod –1 na záporné poloose v kladném směru (proti pohybu hodinových ručiček) $p/2$ krát (tj. $p\pi$)“.

V reálných regulačních obvodech často vystupují nelinearity, případně časově proměnná zesílení. Tyto případy lze popsat nelinearitou

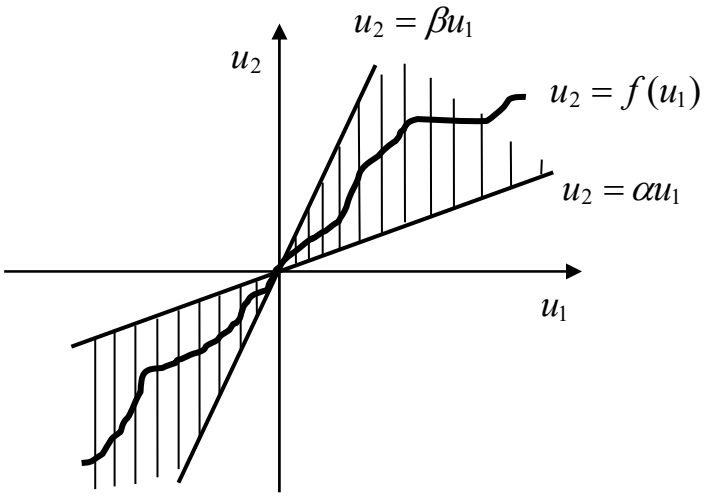
$$u_2 = f(u_1), \quad f(0) = 0,$$

která prochází počátkem a je vymezena přímkami o sklonech α a β (obr. 4.31)

$$0 < \alpha u_1 \le f(u_1) \le \beta u_1 \;\Rightarrow\; 0 < \alpha \le \frac{f(u_1)}{u_1} \le \beta\,. \tag{4.93}$$

Je to tzv. ***sektorová nelinearita*** (α, β).

Většinou se jedná o nelineární akční člen, viz obr. 4.32a. Pro účely stability, lze schéma na obr. 4.32a transformovat na schéma na obr. 4.32b.



Obr. 4.31 – Nelinearita vymezena přímkami o sklonech α a β

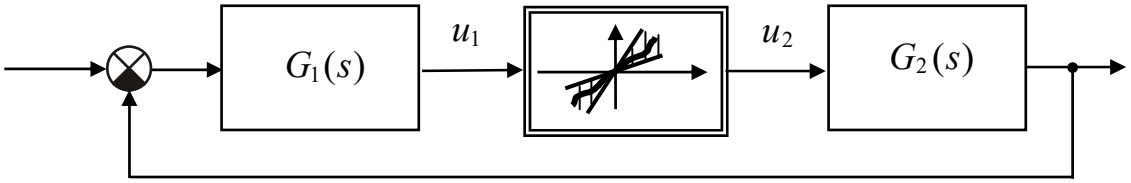
Nyquistovo kritérium může být rozšířeno i na tento případ, je to tzv. ***kruhové kritérium***:

Regulační obvod s nelineární nebo časově proměnnou charakteristikou ležící v sektoru vymezeném přímkami o sklonech α a β je asymptoticky stabilní, pokud amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilní lineární části s přenosem

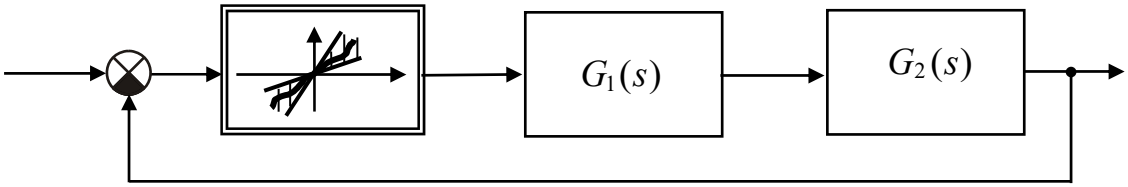
$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \tag{4.94}$$

leží napravo od kružnice procházející body $-\frac{1}{\alpha}$ a $-\frac{1}{\beta}$ na záporné poloose a se středem na záporné poloose (obr. 4.33).

a)

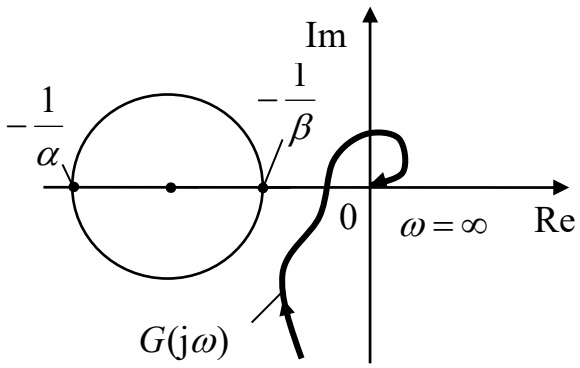


b)



Obr. 4.32 – Regulační obvod s nelinearitou: a) původní, b) upravený

Je to postačující podmínka asymptotické stability a velmi často je příliš konzervativní (tj. má velikou rezervu).



Obr. 4.33 – Geometrická interpretace kruhového kritéria

Pro $\alpha = \beta > 0$ a $G_o(s) = \alpha G(s)$ je zřejmé, že kruhové kritérium přejde na Nyquistovo kritérium pro stabilní otevřené regulační obvody. Kruhové kritérium může být rozšířeno i na nestabilní otevřené regulační obvody.

Příklad 4.8

Charakteristický mnohočlen regulačního obvodu má tvar

$$N(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 .$$

Na základě Hurwitzova kritéria stability je třeba určit podmínky pro koeficienty a_0, a_1 a a_2 zajišťující stabilitu regulačního obvodu.

Řešení:

a) Z nutné Stodolovy podmínky vyplývá: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

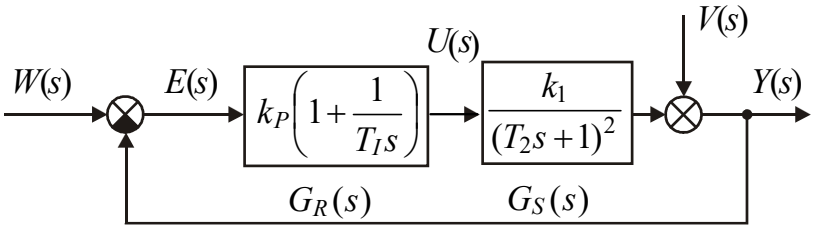
b) Hurwitzova matice pro $n = 2$ je

$$\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Protože Hutwitzův subdeterminant $H_{n-1} = a_1 > 0$, je zřejmé, že pro charakteristický mnohočlen regulačního obvodu 2. stupně Stodolova podmínka existence a nezápornosti koeficientů $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ a $a_2 > 0$ je podmínkou nutnou a postačující pro (asymptotickou) stabilitu daného regulačního obvodu.

Příklad 4.9

U regulačního obvodu na obr. 4.34 je třeba pomocí Hurwitzova kritéria stability v rovině stavitelných parametrů regulátoru (k_P, T_I), příp. ($k_P k_1$, T_I) vyznačit stabilní oblast.



Obr. 4.34 – Blokové schéma regulačního obvodu z příkladu 4.9

Řešení

V souladu s obr. 4.34 je přenos otevřeného regulačního obvodu dán vztahem

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_P k_1 (T_I s + 1)}{T_I s (T_2 s + 1)^2} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}.$$

Nyní může být snadno určen charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = T_I T_2^2 s^3 + 2T_I T_2 s^2 + T_I (1 + k_1 k_P) s + k_1 k_P.$$

a) Z nutné Stodolovy podmínky vyplývá

$k_1 k_P > 0 \Rightarrow k_P > 0,\ k_1 > 0,$

$T_I T_2 > 0 \Rightarrow T_I > 0,\ T_2 > 0.$

b) Hurwitzova matice pro $n = 3$ má tvar

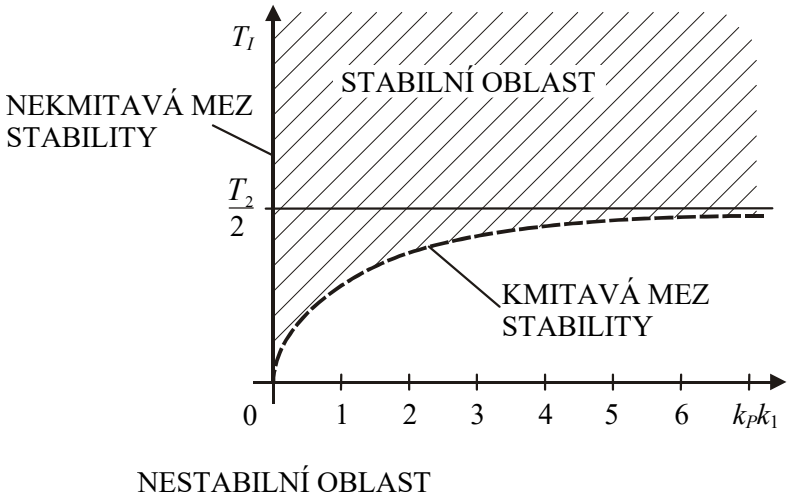
$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc:c} 2T_I T_2 & k_1 k_P & 0 \\ T_I T_2^2 & T_I (1 + k_1 k_P) & 0 \\ \hdashline 0 & 2T_I T_2 & k_1 k_P \end{array}\right].$$

Stačí ověřit kladnost Hurwitzova subdeterminantu

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2T_I T_2 & k_1 k_P \\ T_I T_2^2 & T_I(1+k_1 k_P) \end{vmatrix} = 2T_I^2 T_2(1+k_1 k_P) - k_1 k_P T_I T_2^2 > 0 \Rightarrow T_I > \frac{k_1 k_P T_2}{2(1+k_1 k_P)}.$$

Stabilní oblast v rovině parametrů ($k_P k_1$, T_I) vymezuje poslední nerovnost s asymptotou $0{,}5T_2$ a s nekmitavou mezí stability $k_P = 0$ (resp. $k_P k_1 = 0$) a s kmitavou mezí stability danou rovností (viz obr. 4.35)

$$T_I = \frac{k_1 k_P T_2}{2(1+k_1 k_P)}.$$



Obr. 4.35 – Stabilní oblast pro regulační obvod z příkladu 4.9

Příklad 4.10

U regulačního obvodu na obr. 4.34 z příkladu 4.9 je třeba pomocí Michajlovova kritéria stability v rovině stavitelných parametrů regulátoru (k_P, T_I), příp. ($k_P k_1$, T_I) vyznačit stabilní oblast.

Řešení:

V příkladě 4.9 byl již určen charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(s) = T_I T_2^2 s^3 + 2T_I T_2 s^2 + T_I(1+k_1 k_P)s + k_1 k_P,$$

a proto Michajlovova funkce má tvar

$$N(\mathrm{j}\omega) = N(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = T_I T_2^2 (\mathrm{j}\omega)^3 + 2T_I T_2 (\mathrm{j}\omega)^2 + T_I(1+k_1 k_P)\,\mathrm{j}\omega + k_1 k_P$$
$$= N_P(\omega) + \mathrm{j} N_Q(\omega),$$

kde

$$N_P(\omega) = k_1 k_P - 2T_I T_2 \omega^2,$$
$$N_Q(\omega) = T_I(1 + k_1 k_P - T_2^2 \omega^2)\omega.$$

V souladu s analytickou formulací Michajlovova kritéria stability (4.82) lze psát

$$T_I(1+k_1k_P-T_2^2\omega^2)\omega=0\Rightarrow\omega_1=0,\ \omega_3=\frac{1}{T_2}\sqrt{1+k_1k_P},$$

$$k_1k_P-2T_IT_2\omega^2=0\Rightarrow\omega_2=\sqrt{\frac{k_1k_P}{2T_IT_2}}.$$

Pro kořeny imaginární $N_Q(\omega)$ a reálné $N_P(\omega)$ části Michajlovovy funkce $N(\mathrm{j}\omega)$ musí platit nerovnosti

$$\omega_1=0<\omega_2=\sqrt{\frac{k_1k_P}{2T_IT_2}}<\omega_3=\frac{1}{T_2}\sqrt{1+k_1k_P},$$

ze kterých se po jednoduché úpravě dostane

$$T_I>\frac{k_1k_PT_2}{2(1+k_1k_P)}>0.$$

Je to stejný výsledek jako v příkladě 4.9, a proto stabilní oblast je dána obr. 4.35.

Je zřejmé, že kmitavá mez stability se dostane pro $\omega_2=\omega_3=\omega_k$, tj.

$$T_I=\frac{k_1k_PT_2}{2(1+k_1k_P)}.$$

V tomto případě pro kritický úhlový kmitočet ω_k imaginární $N_Q(\omega)$ i reálná $N_P(\omega)$ část Michajlovovy funkce $N(\mathrm{j}\omega)$ se nulují současně.

Tab. 4.4 – Tabulka hodnot $N_P(\omega)$ a $N_Q(\omega)$ – příklad 4.10

ω	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	∞
$N_P(\omega)=4(1-25\omega^2)$	4	0	-1	$-\infty$
$N_Q(\omega)=25(1-20\omega^2)\omega$	0	1	0	$-\infty$

Pro číselné hodnoty parametrů: $k_Pk_1=4$, $T_I=5$ s a $T_2=10$ s, odpovídající stabilnímu regulačnímu obvodu, lze snadno vykreslit Michajlovovu charakteristiku $N(\mathrm{j}\omega)$ i průběhy její imaginární $N_Q(\omega)$ a reálné $N_P(\omega)$ části, viz obr. 4.36. K tomuto účelu je vhodné sestavit tabulku (tab. 4.4) a volit takový úhlový kmitočet ω, pro který lze snadno vypočíst jejich hodnoty, příp. lze je snadno nakreslit.

Z obr. 4.36a i b vyplývá, že pro uvedené hodnoty parametrů je regulační obvod skutečně stabilní.

Příklad 4.11

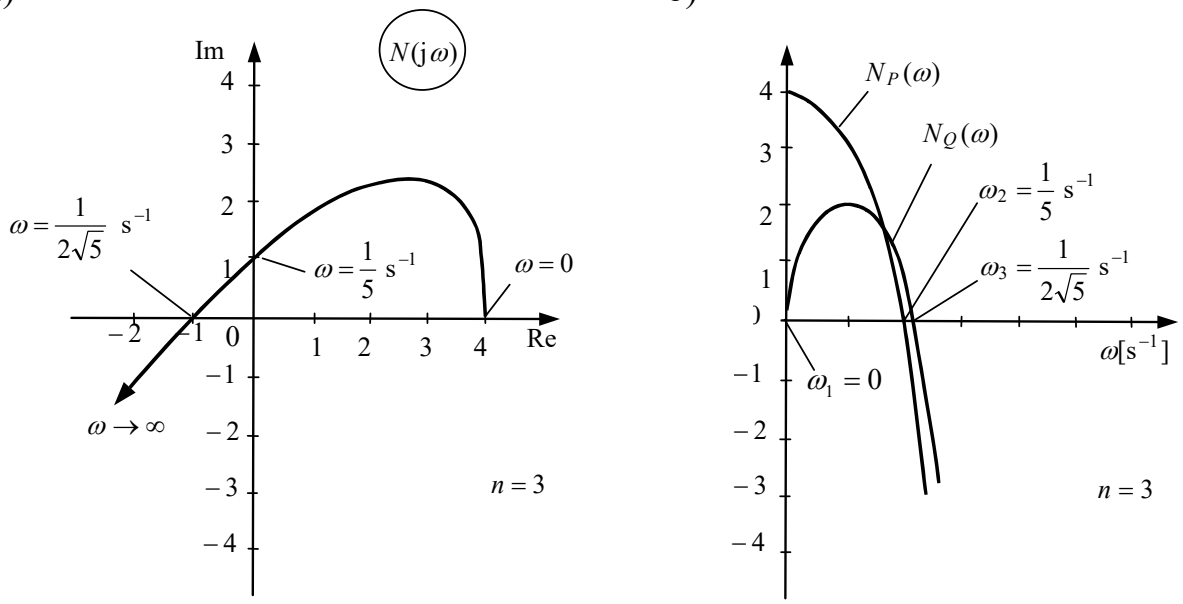
U regulačního obvodu na obr. 4.34 z příkladu 4.9 je třeba pomocí Nyquistova kritéria stability v rovině stavitelných parametrů regulátoru (k_P, T_I), příp. (k_Pk_1, T_I) vyznačit stabilní oblast.

Řešení:

V příkladě 4.9 byl získán přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(s) = \frac{k_P k_1 (T_I s + 1)}{T_I s (T_2 s + 1)^2},$$

a) b)



Obr. 4.36 – Průběhy: a) Michajlovovy charakteristiky $N(\mathrm{j}\omega)$, b) imaginární $N_Q(\omega)$ a reálné $N_P(\omega)$ části – příklad 4.10

ze kterého vyplývá, že otevřený regulační obvod je stabilní (integrační člen se neuvažuje).

Kmitočtový přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = G_o(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{k_P k_1 (T_I\, \mathrm{j}\omega + 1)}{T_I\, \mathrm{j}\omega (T_2\, \mathrm{j}\omega + 1)^2} = \mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega),$$

kde

$$\mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{k_P k_1 (T_I T_2^2 \omega^2 - T_I + 2T_2)}{T_I (T_2^2 \omega^2 + 1)^2},$$

$$\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{k_P k_1 [T_2 (2T_I - T_2)\omega^2 + 1]}{T_I \omega (T_2^2 \omega^2 + 1)^2}.$$

Úhlový kmitočet $\omega_{-\pi}$ se určí z podmínky [viz (4.85b)]

$$\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega_{-\pi}) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{-\pi}^2 = \frac{1}{T_2 (T_2 - 2T_I)}.$$

Pro ověření stability se použije podmínka ve tvaru (4.87), tj.

$$\mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega_{-\pi}) > -1,$$

ze které po dosazení $\omega_{-\pi}$ a poměrně pracné úpravě se dostane

$$-\frac{k_P k_1 (T_2 - 2T_I)}{2T_I} > -1 \Rightarrow T_I > \frac{k_P k_1 T_2}{2(1 + k_P k_1)} .$$

Získaná podmínka stability je stejná jako v předchozích příkladech 4.9 a 4.10, a proto platí i stejné závěry.

Pro číselné hodnoty parametrů: $k_P k_1 = 4$, $T_I = 5$ s a $T_2 = 10$ s, odpovídající stabilnímu regulačnímu obvodu lze sestrojit amplitudofázovou kmitočtovou charakteristiku otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ na základě její reálné $\mathrm{Re}G_o(\mathrm{j}\omega)$ a imaginární $\mathrm{Im}G_o(\mathrm{j}\omega)$ části, tj. (viz tab. 4.5 a obr. 4.37)

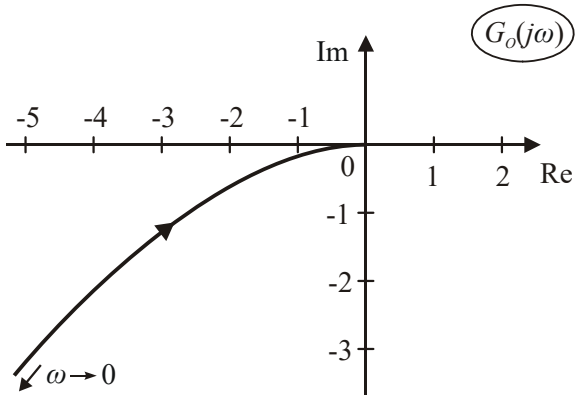
$$\mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{4(100\omega^2 + 3)}{(100\omega^2 + 1)^2} ,$$

$$\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{4}{5\omega(100\omega^2 + 1)^2} .$$

Už na základě imaginární části $\mathrm{Im}G_o(\mathrm{j}\omega)$ lze učinit závěr, že pro dané číselné hodnoty parametrů imaginární část $\mathrm{Im}G_o(\mathrm{j}\omega)$ neprotne zápornou reálnou poloosu, a proto daný regulační obvod je stabilní.

Tab. 4.5 – Tabulka hodnot $\mathrm{Re}G_o(\mathrm{j}\omega)$ a $\mathrm{Im}G_o(\mathrm{j}\omega)$ – příklad 4.11

ω	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$\mathrm{Re}G_o(\mathrm{j}\omega)$	– 12	– 8,32	– 4	– 1,99	– 1,12	– 0,70	– 0,48
$\mathrm{Im}G_o(\mathrm{j}\omega)$	$-\infty$	– 10,24	– 2	– 0,5	– 0,16	– 0,06	– 0,03

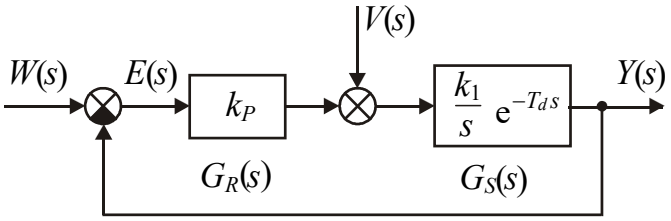


Obr. 4.37 – Amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ – příklad 4.11

Z průběhu amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ na obr. 4.37 jednoznačně vyplývá, že regulační obvod je pro dané číselné hodnoty parametrů stabilní.

Příklad 4.12

U regulačního obvodu s dopravním zpožděním na obr. 4.38 je třeba určit hodnoty zesílení k_P proporcionálního regulátoru, pro které daný regulační obvod bude stabilní.



Obr. 4.38 – Regulační obvod z příkladu 4.12

Řešení:

Protože regulační obvod obsahuje dopravní zpoždění, bude použito Nyquistovo kritérium stability, a to v analytickém tvaru, protože parametry jsou zadány obecně (nečíselně).

V souladu s obr. 4.38 přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_P k_1}{s}\,\mathrm{e}^{-T_d s},$$

ze kterého je zřejmé, že otevřený regulační obvod je stabilní (integrační člen se neuvažuje).

Nyní lze určit kmitočtový přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = G_o(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{k_P k_1}{\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{e}^{-T_d\,\mathrm{j}\omega} = -\mathrm{j}\frac{k_P k_1}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}T_d\omega} = \frac{k_P k_1}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(T_d\omega+\frac{\pi}{2})} =$$

$$= A_o(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_o(\omega)},$$

kde

$$A_o(\omega) = \frac{k_P k_1}{\omega}, \qquad \varphi_o(\omega) = -(T_d\omega + \frac{\pi}{2}).$$

Aby regulační obvod byl stabilní, musí platit [viz (4.88)]

$$\left.\begin{aligned} &A_o(\omega_{-\pi}) < 1 \Rightarrow \frac{k_P k_1}{\omega_{-\pi}} < 1 \\ &\varphi_o(\omega_{-\pi}) = -\pi \Rightarrow -(T_d\omega_{-\pi} + \frac{\pi}{2}) = -\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &k_P < \frac{\pi}{2k_1T_d} \doteq 1{,}57\,\frac{1}{k_1T_d}, \\ &\omega_{-\pi} = \frac{\pi}{2T_d}. \end{aligned}$$

Pro

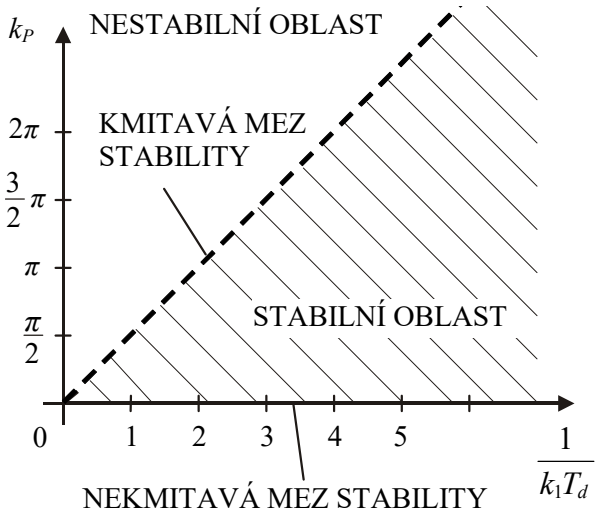
$$k_{Pk} = \frac{\pi}{2k_1T_d}$$

se dostane kmitavá mez stability, pro kterou platí $\omega_{-\pi} = \omega_{\check{r}} = \omega_k$ (obr. 4.39).

Při použití Hurwitzova kritéria stability na regulační obvod s dopravním zpožděním je třeba transcendentní funkci dopravního zpoždění $\mathrm{e}^{-T_d s}$ aproximovat vhodnou algebraickou funkcí, např. pro Padého aproximaci 1. řádu (3.41) se dostane

$$G_o(s) = \frac{k_P k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{k_P k_1 \left(1 - \frac{T_d}{2} s\right)}{s\left(1 + \frac{T_d}{2} s\right)} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)},$$

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = \frac{T_d}{2} s^2 + \left(1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2}\right) s + k_P k_1 .$$



Obr. 4.39 – Stabilní oblast pro regulační obvod na obr. 4.38 – příklad 4.12

Protože charakteristický mnohočlen regulačního obvodu $N(s)$ je 2. stupně, nutná Stodolova podmínka je podmínkou nutnou a postačující pro stabilitu regulačního obvodu (všechny koeficienty charakteristického mnohočlenu musí existovat a být kladné), a proto lze psát

$$k_P k_1 > 0, \quad 1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2} > 0, \quad T_d > 0 \;\Rightarrow\; k_P < \frac{2}{k_1 T_d}.$$

Je zřejmé, že tato podmínka stability je méně přísná, než předchozí přesná podmínka.

Pro Padého aproximaci 2. řádu (3.42) se dostane

$$G_o(s) = \frac{k_P k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{k_P k_1 \left(1 - \frac{T_d}{2} s + \frac{T_d^2}{12} s^2\right)}{s\left(1 + \frac{T_d}{2} s + \frac{T_d^2}{12} s^2\right)} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)},$$

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = \frac{T_d^2}{12} s^3 + \frac{T_d}{2}\left(1 + k_P k_1 \frac{T_d}{6}\right) s^2 + \left(1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2}\right) s + k_P k_1 .$$

Ze Stodolovy nutné podmínky vyplývá

$$k_P k_1 > 0, \;\; T_d > 0, \;\; 1 + k_P k_1 \frac{T_d}{6} > 0, \;\; 1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2} > 0 \;\Rightarrow\; k_P < \frac{2}{k_1 T_d}$$

Hurwitzova matice pro $n = 3$ má tvar

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{ccc:c} \frac{T_d}{2}\left(1 + k_P k_1 \frac{T_d}{6}\right) & k_P k_1 & & 0 \\ \frac{T_d^2}{12} & 1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2} & & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{T_d}{2}\left(1 + k_P k_1 \frac{T_d}{6}\right) & & k_P k_1 \end{array}\right]$$

Stačí zkontrolovat kladnost Hurwitzova subdeterminantu H_2, tj.

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{T_d}{2}\left(1 + k_P k_1 \frac{T_d}{6}\right) & k_P k_1 \\ \frac{T_d^2}{12} & 1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\frac{T_d}{2}\left(1 + k_P k_1 \frac{T_d}{6}\right)\left(1 - k_P k_1 \frac{T_d}{2}\right) - k_P k_1 \frac{T_d^2}{12} > 0,$$

$$k_P^2 + \frac{6}{k_1 T_d} k_P - \frac{12}{k_1^2 T_d^2} < 0,$$

$$\left(k_P + \frac{3 - \sqrt{21}}{k_1 T_d}\right)\left(k_P + \frac{3 + \sqrt{21}}{k_1 T_d}\right) < 0.$$

Výraz ve druhé závorce je vždy kladný, a proto výraz v první závorce musí být záporný, tj.

$$k_P + \frac{3 - \sqrt{21}}{k_1 T_d} < 0 \Rightarrow k_P < \frac{\sqrt{21} - 3}{k_1 T_d} \doteq 1{,}58 \frac{1}{k_1 T_d}.$$

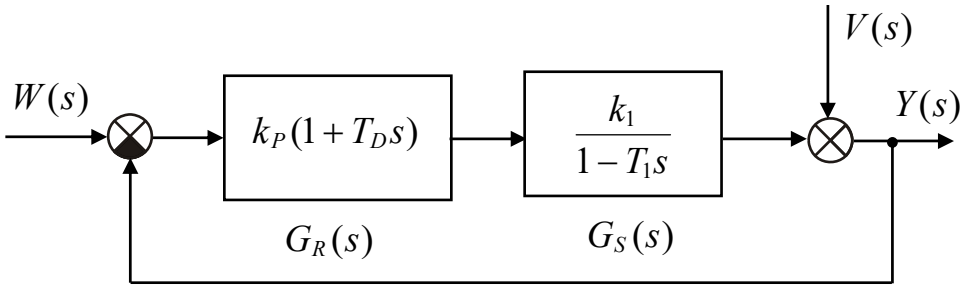
Znovu obdržená nerovnost, i když je podstatně přesnější, je méně přísná, než přesná nerovnost. Platí tedy

$$k_P < \frac{\pi}{2 k_1 T_d} < \frac{\sqrt{21} - 3}{k_1 T_d} < \frac{2}{k_1 T_d}.$$

Je tedy zřejmé, že při použití přibližných vztahů při ověřování stability regulačních obvodů, je třeba výsledky interpretovat velmi opatrně.

Příklad 4.13

Pomocí Nyquistova kritéria je třeba určit hodnoty stavitelných parametrů k_P a T_D, pro které regulační obvod na obr. 4.40 bude stabilní.



Obr. 4.40 – Blokové schéma regulačního obvodu z příkladu 4.13

Řešení:

Z obr. 4.40 vyplývá, že přenos otevřeného regulačního obvodu je dán vztahem

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_P k_1 (T_D s + 1)}{1 - T_1 s} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}$$

Charakteristický mnohočlen otevřeného regulačního obvodu

$$N_o(s) = 1 - T_1 s$$

má jeden nestabilní pól $s_1 = \frac{1}{T_1}$, a proto je třeba použít formulaci Nyquistova kritéria pro nestabilní otevřené regulační obvody.

Z přenosu otevřeného regulačního obvodu lze pro $s = \mathrm{j}\omega$ získat jeho kmitočtový přenos

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = \frac{k_P k_1 (T_D\, \mathrm{j}\omega + 1)}{1 - T_1\, \mathrm{j}\omega} = \mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega),$$

kde

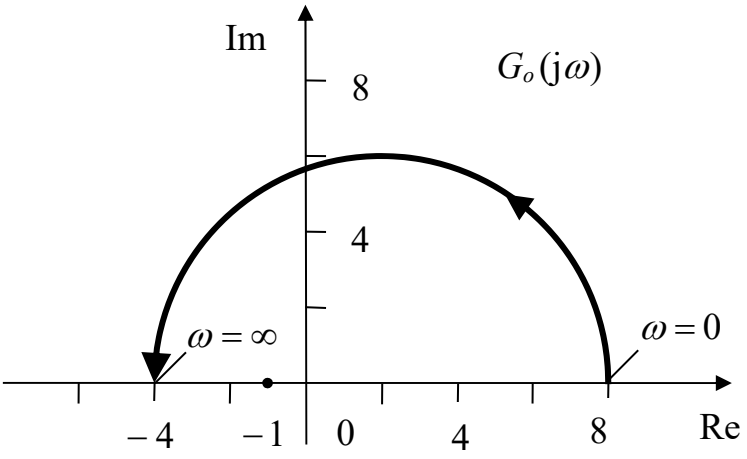
$$\mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = \frac{k_P k_1}{1 + T_1^2 \omega^2}(1 - T_D T_1 \omega^2),$$

$$\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = \frac{k_P k_1}{1 + T_1^2 \omega^2}(T_D + T_1)\omega.$$

Amplitudofázovou kmitočtovou charakteristiku otevřeného regulačního obvodu lze sestrojit na základě tab. 4.6 pro konkrétní číselné hodnoty parametrů regulované soustavy k_1 a T_1 a stavitelných parametrů regulátoru k_P a T_D. Např. na obr. 4.41 je ukázán její průběh pro $k_P k_1 = 8$, $T_D = 0{,}5$ a $T_1 = 1$. V tomto případě je zřejmé, že pro tyto hodnoty parametrů je daný regulační obvod stabilní, protože kritický bod –1 obklopí proti směru hodinových ručiček amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu půlkrát (tj. π, protože $p = 1$).

Tab. 4.6 – Tabulka hodnot ReG_o(jω) a ImG_o(jω) – příklad 4.13

ω	0	$\frac{1}{T_1}$	$\frac{1}{\sqrt{T_1 T_D}}$	∞
ReG_o(jω)	$k_P k_1$	$\frac{k_P k_1}{2}\left(1-\frac{T_D}{T_1}\right)$	0	$-k_P k_1 \frac{T_D}{T_1}$
ImG_o(jω)	0	$\frac{k_P k_1}{2}\left(1+\frac{T_D}{T_1}\right)$	$k_P k_1 \sqrt{\frac{T_D}{T_1}}$	0



Obr. 4.41 – Amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu G_o(jω) – příklad 4.13

Z obr. 4.41 a tab. 4.6 vyplývá, že k obklopení kritického bodu –1 dojde, když pro $\omega = \infty$ bude ReG_o(jω) < –1, tj.

$$-k_P k_1 \frac{T_D}{T_1} < -1 \Rightarrow T_D > \frac{T_1}{k_P k_1}.$$

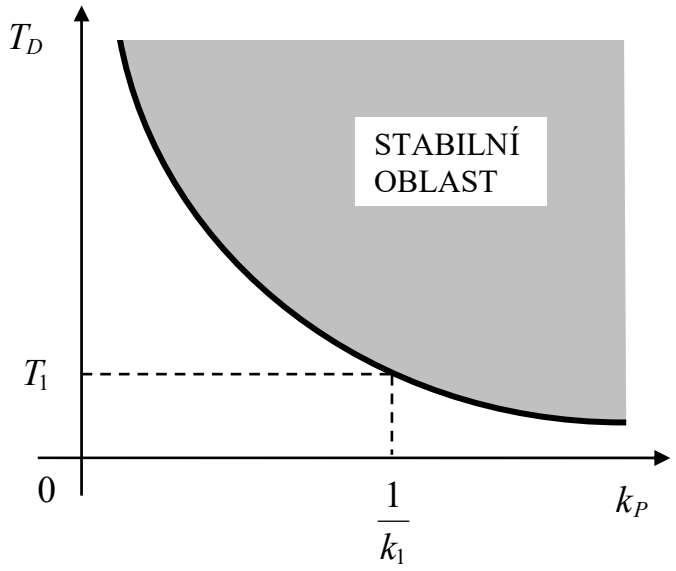
Oblast (asymptotické) stability v rovině stavitelných parametrů regulátoru (k_P, T_D) je na obr. 4.42.

Ke stejnému výsledku, ale podstatně jednodušeji, se lze dostat, pokud bude uvažován charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = (k_1 k_P T_D - T_1)s + k_1 k_P .$$

Protože charakteristický mnohočlen je 1. řádu, lze použít nutnou a postačující Stodolovu podmínku (existence a kladnost všech koeficientů)

$$k_P > 0, \quad k_1 k_P T_D - T_1 > 0 \Rightarrow T_D > \frac{T_1}{k_1 k_P}.$$

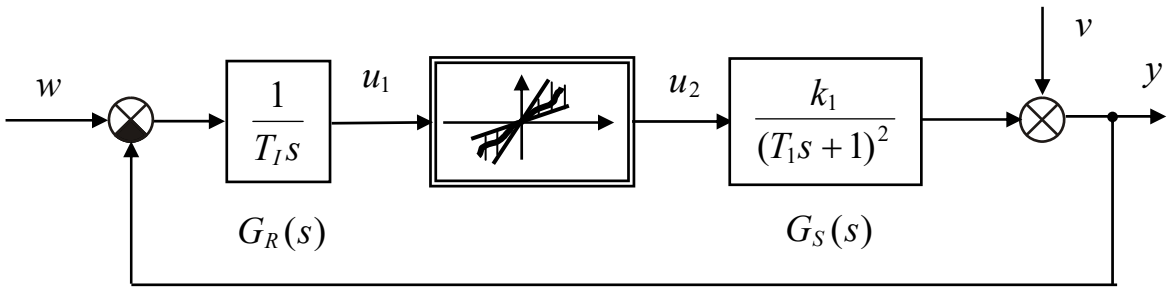


Obr. 4.42 – Stabilní oblast pro regulační obvod z příkladu 4.13

Je tedy zřejmé, že i když Nyquistovo kritérium je velmi obecné a umožňuje řadu dalších zobecnění, jeho použití je výhodné především při používání logaritmických kmitočtových charakteristik a v případě, kdy regulovaná soustava obsahuje dopravní zpoždění.

Příklad 4.14

Je dán regulační obvod s nelineárním akčním členem (obr. 4.43), jehož sektorová nelinearita je vymezena přímkami se sklony α a β (obr. 4.31). Pro hodnotu integrační časové konstanty $T_I^* = 2k_1T_1$, sklony α =0,5 a β = 1,5 je třeba pomocí kruhového kritéria ověřit stabilitu regulačního obvodu.



Obr. 4.43 – Blokové schéma regulačního obvodu s nelineárním akčním členem – příklad 4.14

Řešení:

a) Nejdříve bude uvažován lineární regulační obvod, u kterého nelineární akční člen bude zastoupen lineárním členem o zesílení k_2.

V tomto případě je přenos otevřeného regulačního obvodu dán vztahem

$$G_o(s) = G_R(s) k_2 G_S(s) = \frac{k_1 k_2}{T_I s (T_1 s + 1)^2} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}.$$

Charakteristický mnohočlen lineárního regulačního obvodu má tvar

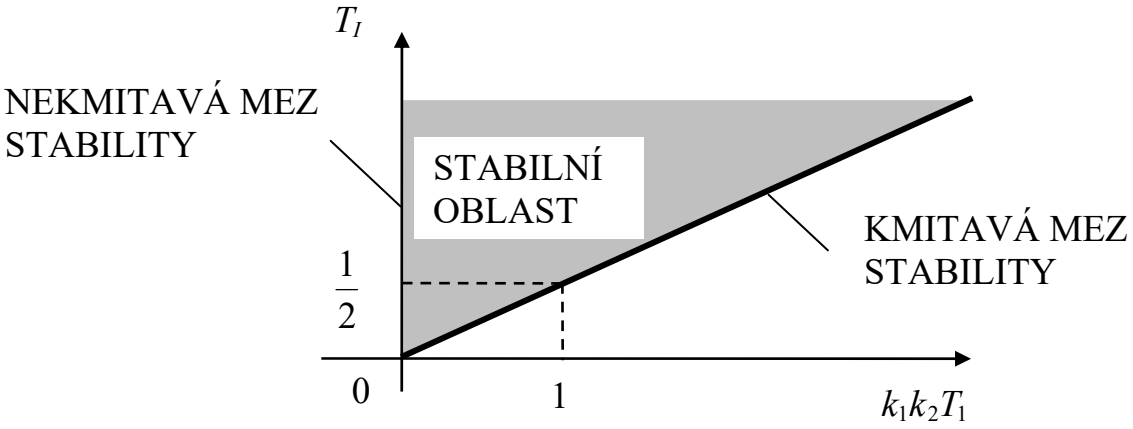
$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = T_I T_1^2 s^3 + 2T_I T_1 s^2 + T_I s + k_1 k_2 .$$

Na základě Hurwitzova kritéria se dostane:
Nutná Stodolova podmínka: $T_I > 0$
Hurwitzova matice:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 2T_I T_1 & k_1 k_2 & 0 \\ T_I T_1^2 & T_I & 0 \\ 0 & 2T_I T_1 & k_1 k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2T_I T_1 & k_1 k_2 \\ T_I T_1^2 & T_I \end{vmatrix} = 2T_I^2 T_1 - k_1 k_2 T_I T_1^2 > 0 \Rightarrow T_I > \frac{k_1 k_2 T_1}{2}.$$

Stabilní oblast je vykreslena na obr. 4.44.



Obr. 4.44 – Stabilní oblast pro nelineární regulační obvod – příklad 4.14

Použije-li se Nyquistovo kritérium, vyjde se z kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu (otevřený regulační obvod je stabilní – integrační člen se neuvažuje)

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = G_o(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{k_1 k_2}{T_I \mathrm{j}\omega (T_1 \mathrm{j}\omega + 1)^2} = \mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega),$$

$$\mathrm{Re}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{k_1 k_2}{T_I} \frac{2T_1}{4T_1^2\omega^2 + (1 - T_1^2\omega^2)^2},$$

$$\mathrm{Im}\, G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{k_1 k_2}{T_I} \frac{1 - T_1^2\omega^2}{\omega[4T_1^2\omega^2 + (1 - T_1^2\omega^2)^2]},$$

pro který se sestaví tab. 4.7.

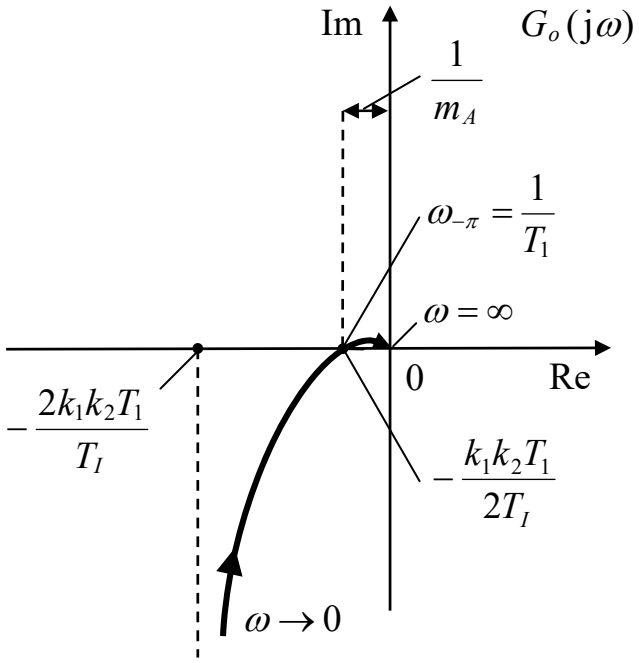
Tab. 4.7 – Tabulka hodnot ReG_o(jω) a ImG_o(jω) – příklad 4.14

ω	0	$\frac{1}{T_1}$	∞
ReG_o(jω)	$-\frac{2k_1k_2T_1}{T_I}$	$-\frac{k_1k_2T_1}{2T_I}$	0
ImG_o(jω)	$-\infty$	0	0

Pomocí tab. 4.7 lze nakreslit průběh amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu, viz obr. 4.45.

Z Nyquistova kritéria pro stabilní otevřený regulační obvod vyplývá nutná a postačující podmínka (asymptotické) stability pro (uzavřený) regulační obvod

$$-1 < -\frac{k_1k_2T_1}{2T_I} \;\Rightarrow\; T_I > \frac{k_1k_2T_1}{2}.$$



Obr. 4.45 – Amplitudofázová kmitočtová charakteristika pro lineární regulační obvod – příklad 4.14

Je samozřejmé, že musel být obdržen stejný výsledek jako při použití Hurwitzova kritéria.

Z výše uvedeného vyplývá, že pokud by byl akční člen lineární pouze s měnícím se zesílením v mezích

$$\alpha = 0{,}5 \le k_2 \le \beta = 1{,}5,$$

pak pro hodnotu integrační časové konstanty regulátoru

$$T_I^* = 2k_1T_1 > \frac{k_1k_2T_1}{2}$$

regulační obvod bude (asymptoticky) stabilní.

Z obr. 4.45 lze snadno určit amplitudovou bezpečnost

$$m_A \frac{k_1k_2T_1}{2T_I} = 1 \Rightarrow m_A = \frac{2T_I}{k_1k_2T_1}.$$

Pro střední (nominální) hodnotu

$$k_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1$$

a $T_I^* = 2k_1T_1$ je amplitudová bezpečnost $m_A = 4$.

Fázovou bezpečnost γ podobně jednoduše určit nelze. Pro $k_2 = 1$ a $T_I^* = 2k_1T_1$ z podmínky

$$\operatorname{mod} G_o(\mathrm{j}\omega_{\check{r}}) = 1$$

byl určen numericky nejprve úhlový kmitočet řezu

$$\omega_{\check{r}} \doteq \frac{0{,}4238}{T_1}$$

a pak ze vztahu

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} G_o(\mathrm{j}\omega_{\check{r}})}{\operatorname{Re} G_o(\mathrm{j}\omega_{\check{r}})}$$

byla vypočtena fázová bezpečnost $\gamma \doteq 0{,}769\,\mathrm{rad} \doteq 44°$.

Z obr. 4.46 je zřejmé, že hodnoty m_A a γ mohly být určeny rovněž graficky.

Zastoupení sektorové nelinearity lineárním členem o zesílení $\alpha \le k_2 \le \beta$ vyplývá z Ajzermanovy hypotézy, která bohužel obecně neplatí.

b) Akční člen v regulačním obvodu na obr. 4.43 je však nelineární, a proto předpoklad o jeho linearitě nemusí dávat správné závěry o stabilitě. Proto nyní bude použito kruhové kritérium.

V souladu s obr. 4.32b lze nelinearitu akčního členu přesunout a pak přenos lineární části regulačního obvodu bude

$$G(s) = G_o(s)\big|_{k_2=1} = \frac{k_1}{T_I s(T_1 s + 1)^2}.$$

Pro $T_I^* = 2k_1T_1$ se dostane kmitočtový přenos lineární části

$$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{2T_1\mathrm{j}\omega(T_1\mathrm{j}\omega+1)^2} = \mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega),$$

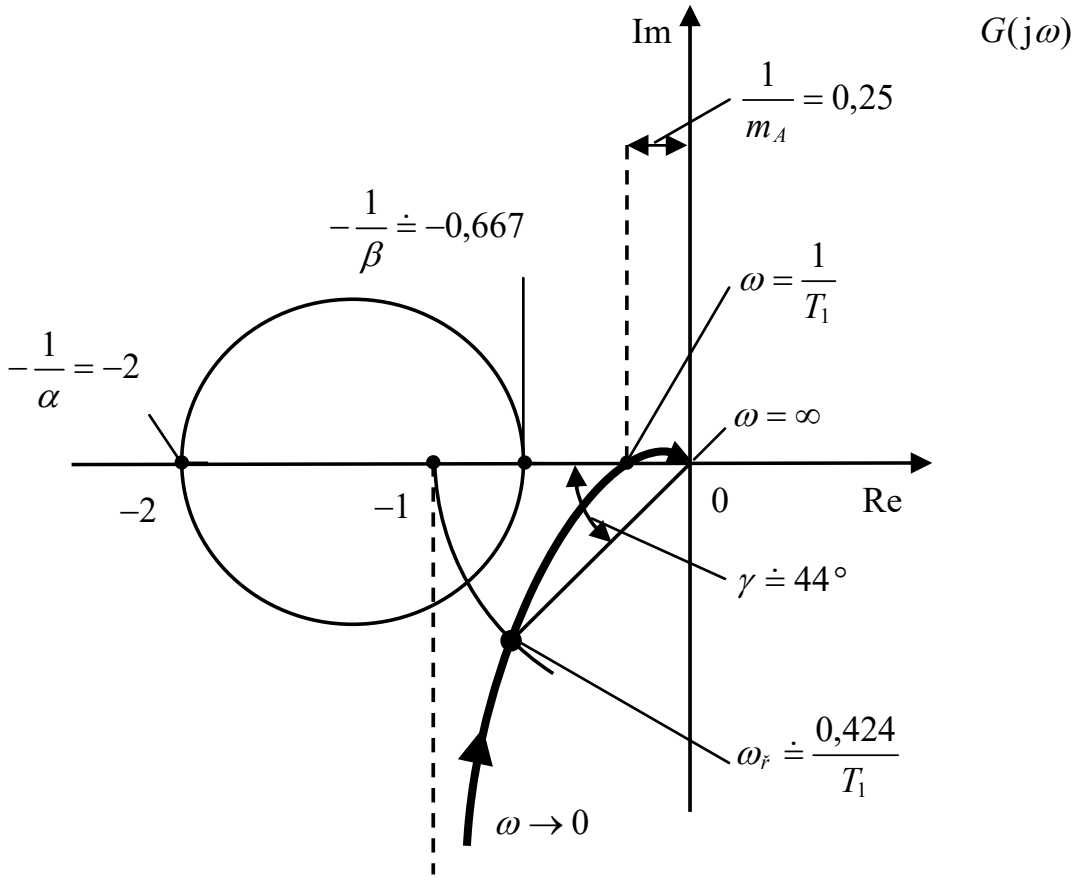
$$\mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) = -\frac{1}{4T_1^2\omega^2 + (1-T_1^2\omega^2)^2},$$

$$\mathrm{Im}\,G_o(\mathrm{j}\omega) = -\frac{1-T_1^2\omega^2}{2T_1\omega[4T_1^2\omega^2 + (1-T_1^2\omega^2)^2]}.$$

Na základě tab. 4.8 byl nakreslen přibližný průběh amplitudofázové kmitočtové charakteristiky lineární části nelineárního regulačního obvodu na obr. 4.43, viz obr. 4.46.

Tab. 4.8 – Tabulka hodnot ReG(jω) a ImG(jω) – příklad 4.14

$T_1\omega$	0	0,4	0,6	0,8	1,0	∞
ReG(jω)	–1	–0,743	–0,541	–0,372	–0,25	0
ImG(jω)	$-\infty$	–0,305	–0,169	–0,065	0	0



Obr. 4.46 – Kruhové kritérium pro nelineární regulační obvod na obr. 4.43 – příklad 4.14

Kružnice pro kruhové kritérium má střed na záporné reálné poloose a prochází na ní body $-1/\alpha = -2$ a $-1/\beta \doteq -0{,}667$.

Protože amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilní lineární části leží napravo od této kružnice je nelineární regulační obvod na obr. 4.43 asymptoticky stabilní (u nelineárních regulačních obvodů musí být vždy použito slovo upřesňující typ stability).

Kruhové kritérium je konzervativní, a proto lze předpokládat, že daný regulační obvod bude stabilní s dostatečnou rezervou.

Příklad 4.15

Jsou dány přenosy

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s+1}$$

a

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s-1}.$$

Je třeba provést analýzu ideálního a reálného krácení dvojčlenů v uvedených přenosech.

Řešení:

V teorii automatické regulace se většinou místo pojmu krácení používá pojem ***kompenzace***. V případě přenosu $G_1(s)$ jde o kompenzaci stabilního pólu $s_1 = -1$ stabilní nulou $s_1^0 = -1$ (kořeny čitatele = nuly, kořeny jmenovatele = póly). U přenosu $G_2(s)$ jde o kompenzaci nestabilního pólu $s_1 = 1$ nestabilní nulou $s_1^0 = 1$.

a) Ideální kompenzace

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s+1} = 1,$$

$$h_1(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_1(s)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \eta(t) = 1.$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s-1} = 1,$$

$$h_2(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_2(s)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \eta(t) = 1.$$

V případě ideální kompenzace dochází ke krácení stejných výrazů ve jmenovateli i čitateli, a proto přechodové charakteristiky $h_1(t)$ a $h_2(t)$ jsou shodné, viz obr. 4.47.

b) Reálná kompenzace (ε – malé číslo)

$$G_1(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+(1+\varepsilon)}{s+1}=\frac{s}{s+1}+\frac{1+\varepsilon}{s+1},$$

$$h_1(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_1(s)\right\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1+\varepsilon}{s(s+1)}\right\}=$$

$$=\mathrm{e}^{-t}+(1+\varepsilon)(1-\mathrm{e}^{-t})=1+\varepsilon-\varepsilon\mathrm{e}^{-t}.$$

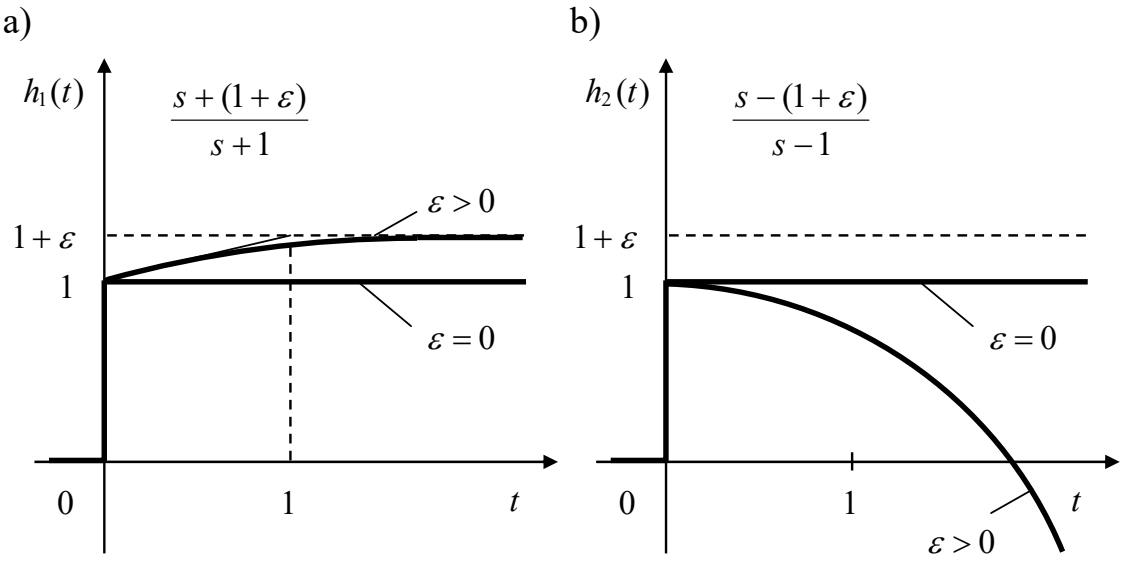
$$G_2(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s-(1+\varepsilon)}{s-1}=\frac{s}{s-1}-\frac{1+\varepsilon}{s-1},$$

$$h_2(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_2(s)\right\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1+\varepsilon}{s(s-1)}\right\}=$$

$$=\mathrm{e}^{t}+(1+\varepsilon)(1-\mathrm{e}^{t})=1+\varepsilon-\varepsilon\mathrm{e}^{t}.$$

Při reálné kompenzaci stabilních dvojčlenů přechodová charakteristika se liší od přechodové charakteristiky při ideální kompenzaci neznačně. Rozdílnost závisí na velikosti a znaménku malého čísla ε. Naproti tomu v případě reálné kompenzace nestabilních dvojčlenů má vždy přechodová charakteristika nestabilní průběh.

Přechodové charakteristiky pro ideální a reálnou kompenzaci stabilního a nestabilního dvojčlenu jsou na obr. 4.47, ze kterého vyplývá, že **v přenosech nikdy není možné kompenzovat (krátit) výrazy obsahující nestabilní kořeny**. Při kompenzaci nestabilních výrazů vznikají neřiditelné a nepozorovatelné módy (charakteristické průběhy), které způsobují nestabilitu.



Obr. 4.47 – Ideální ($\varepsilon = 0$) a reálná ($\varepsilon > 0$) kompenzace dvojčlenu: a) stabilního, b) nestabilního

5 Syntéza regulačního obvodu

Kapitola se zabývá kvalitou regulace a syntézou lineárního regulačního obvodu, tj. volbou regulátoru a jeho seřízením, které požadovanou kvalitu regulace zajistí. Jsou uvedeny jak základní, tak i nové metody seřizování analogových regulátorů a stručně rovněž číslicových regulátorů.

5.1 Kvalita regulace

Cíl regulace zapsaný v ekvivalentních tvarech (4.2) a (4.8), příp. dvojicemi vztahů (4.6), (4.7) a (4.12), (4.13) [viz též (4.15), (4.16)], může být plněn s různou kvalitou, a to pouze za předpokladu, že daný regulační obvod je stabilní. Z těchto vztahů je rovněž zřejmé, že ***kvalitu regulace*** (regulačního pochodu) lze posuzovat v podstatě ve třech oblastech: časové, kmitočtové a komplexní proměnné. Slouží k tomu různá kritéria a ukazatelé.

Časová oblast

Časová oblast je u většiny techniků i projektantů velmi oblíbená, protože umožňuje často rychlé a intuitivní zhodnocení kvality regulace na základě průběhu odezvy regulované veličiny $y(t)$ vyvolané skokovou změnou (polohy) žádané $w(t)$ nebo poruchové $v(t)$ veličiny. Nejčastěji se předpokládá, že vstupní skokové změny jsou jednotkové [tj. ve tvaru Heavisideova jednotkového skoku $\eta(t)$], a proto v tomto případě odezvy jsou přechodové charakteristiky.

Je vhodné průběhy výstupních veličin označit indexy v souladu s označením odpovídajících průběhů vstupních veličin.

Pro současné působení žádané $w(t)$ i poruchové $v(t)$ veličiny pak na základě principu linearity (superpozice) platí (viz příklad 3.3)

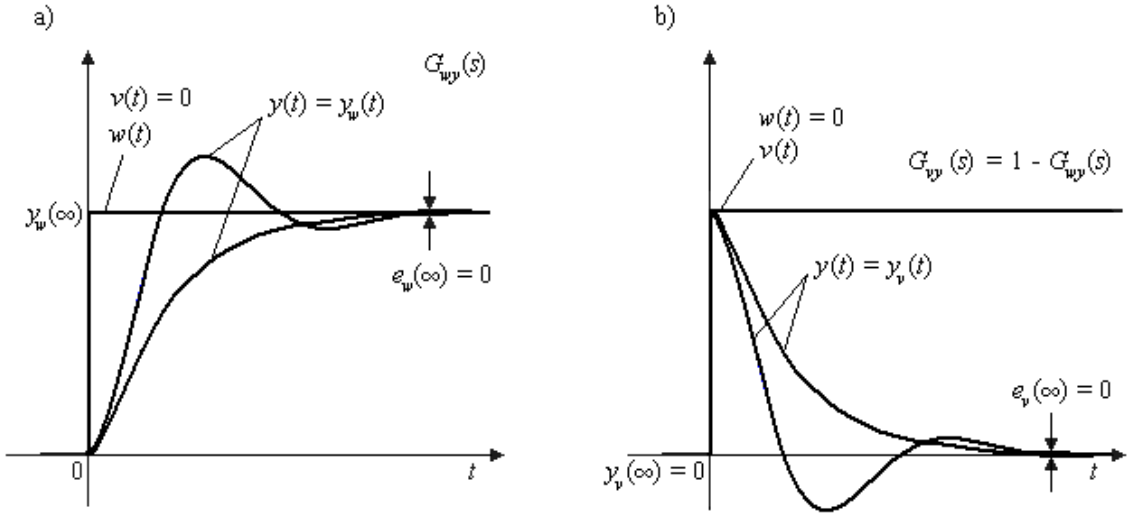
$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) + G_{vy}(s)V(s) = Y_w(s) + Y_v(s) \Rightarrow$$

$$y(t) = y_w(t) + y_v(t) \quad , \tag{5.1}$$

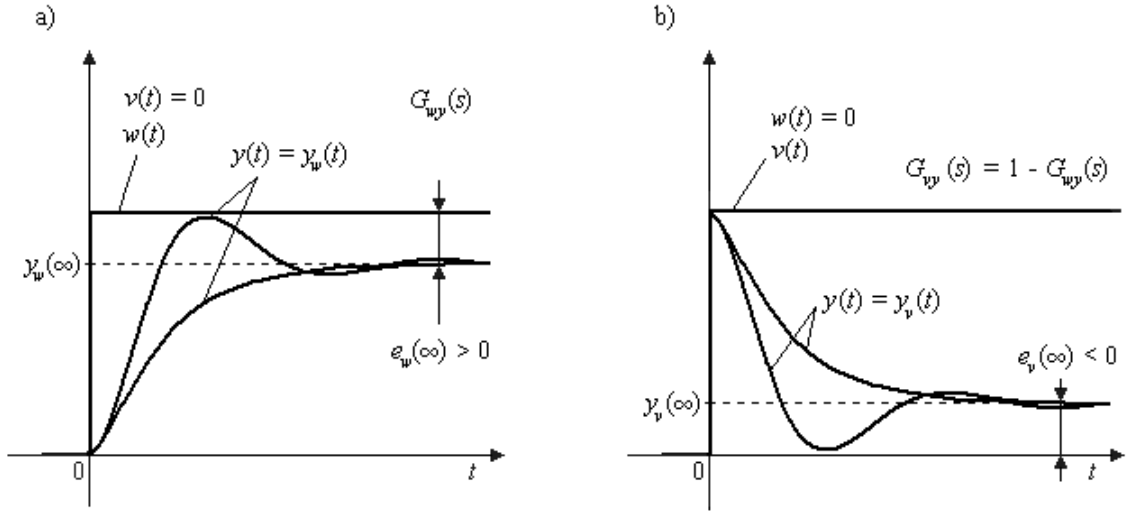
kde $y_w(t)$ je odezva vyvolaná žádanou veličinou $w(t)$ při $v(t) = 0$, $y_v(t)$ – odezva vyvolaná poruchovou veličinou $v(t)$ při $w(t) = 0$.

Typické kmitavé i nekmitavé odezvy regulačního obvodu v přírůstkových veličinách (tj. v odchylkách od pracovního bodu) jsou ukázány na obr. 5.1 a 5.2. Vyplývá z nich důležitý závěr. Působí-li poruchová veličina $v(t)$ na výstupu regulované soustavy, pak pro stejné hodnoty vstupních skokových změn průběhy na obr. 5.1b, 5.2b se získají z odpovídajících průběhů na obr. 5.1a, 5.2a překlopením podle přímky $y_w(\infty)$ a posunutím dolů o tutéž hodnotu, tj. o $y_w(\infty)$. Je to dáno tvarem přenosu poruchy $G_{vy}(s) = 1 - G_{wy}(s)$. Pro struktury regulačního obvodu uvedené na obr. 4.2, trvalé regulační odchylky $e_v(\infty)$ způsobené skokovou změnou poruchové veličiny $v(t)$ mají zápornou hodnotu, viz obr. 5.2b a 5.4b a vztah (4.11).

Odezvy regulačního obvodu na skokové změny žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na výstupu regulované soustavy s nulovými trvalými regulačními odchylkami na obr. 5.1 odpovídají případu, kdy otevřený regulační obvod obsahuje nejméně jeden integrační člen. Počet integračních členů otevřeného regulačního obvodu udává stupeň astatismu (typ) q regulačního obvodu, tzn. v tomto případě $q \geq 1$. Nezáleží při tom, zda integrační člen (činnost, složka) je obsažen v regulátoru, či regulované soustavě.



Obr. 5.1 – Odezvy regulačního obvodu na skokové změny: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na výstupu regulované soustavy v případě nulových trvalých regulačních odchylek

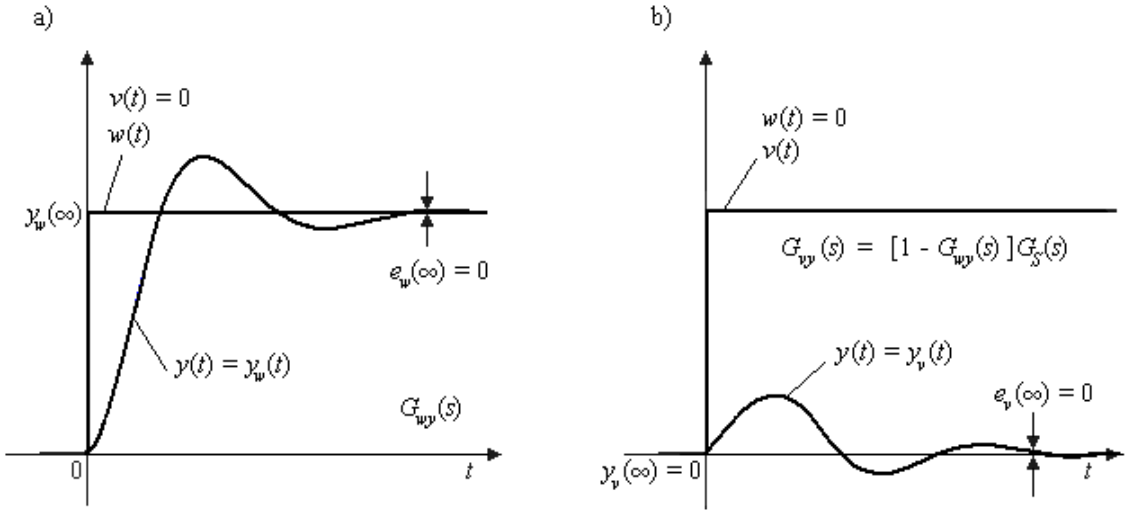


Obr. 5.2 – Odezvy regulačního obvodu na skokové změny: a) žádané veličiny $w(t)$, b)poruchové veličiny $v(t)$ působící na výstupu regulované soustavy v případě nenulových trvalých regulačních odchylek

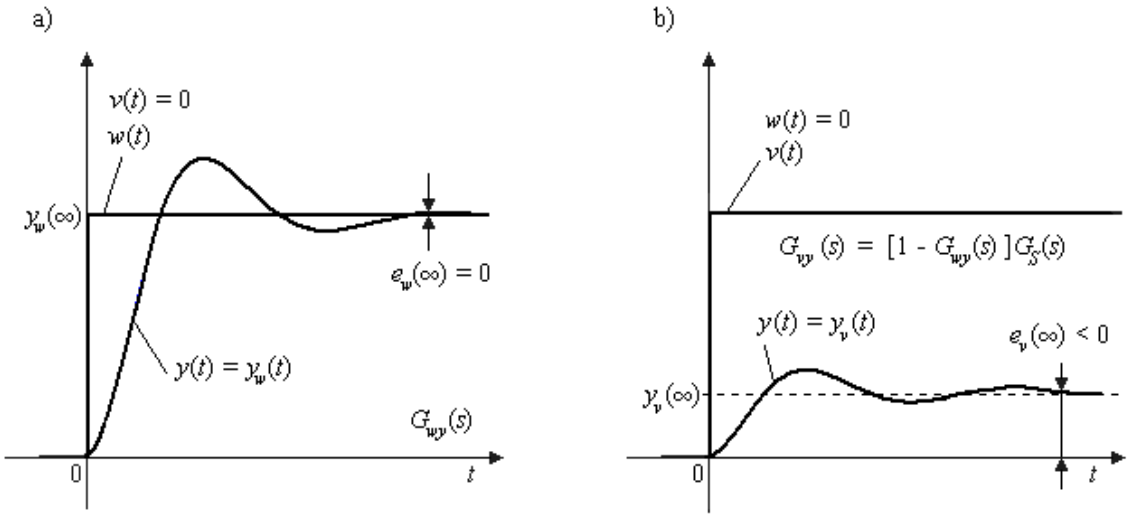
Odezvy regulačního obvodu na skokové změny žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na výstupu regulované soustavy s trvalými

regulačními odchylkami na obr. 5.2 odpovídají případu, kdy otevřený regulační obvod neobsahuje žádný integrační člen – regulační obvod je typu 0, tj. $q = 0$.

Pokud poruchová veličina $v(t)$ působí na vstupu regulované soustavy (na obr. 5.3 a 5.4 jsou uvedeny pouze kmitavé odezvy), pak je třeba rozlišovat případy, kdy regulovaná soustava je integrační (tj. obsahuje integrační členy), nebo proporcionální (tj. neobsahuje integrační členy).



Obr. 5.3 – Odezvy regulačního obvodu na skokové změny: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu proporcionální regulované soustavy v případě regulátoru s integrační složkou



Obr. 5.4 – Odezvy regulačního obvodu na skokové změny: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu integrační regulované soustavy v případě regulátoru bez integrační složky

Je-li regulovaná soustava proporcionální a je použit regulátor s integrační složkou (např. I, PI, PID), pak $q = 1$ a trvalé regulační odchylky nevzniknou, viz obr. 5.3. Z obr. 5.3b rovněž vyplývá, že regulovaná soustava většinou odezvu $y_v(t)$ zatlumí. Je to způsobeno filtračními vlastnostmi (setrvačností) regulované

soustavy. Proto v tomto případě je možné regulátor seřídit „agresivněji“, tj. zvýšit jeho zesílení k_P, příp. snížit jeho integrační časovou konstantu T_I.

Je-li regulovaná soustava integrační (je uvažován pouze jeden integrační člen), pak v případě použití regulátoru bez integrační složky (např. P, PD) regulační obvod má astatismus roven 1 (je typu 1), tj. $q = 1$ a přesto při skokové změně poruchové veličiny $v(t)$ na vstupu regulované soustavy vznikne nenulová trvalá regulační odchylka, viz obr. 5.4b. Bylo by ji možné odstranit pouze použitím regulátoru s integrační složkou, tj. zvýšit typ regulačního obvodu na 2 ($q = 2$).

Tzn. použije-li se regulátor s integrační složkou budou trvalé regulační odchylky $e_w(\infty)$ a $e_v(\infty)$ způsobené skokovými změnami polohy $w(t)$ i $v(t)$ vždy nulové.

Trvalé regulační odchylky lze snadno určit na základě vztahů (příklad 3.3)

$$E(s) = G_{we}(s)W(s) + G_{ve}(s)V(s) = E_w(s) + E_v(s)\ , \tag{5.2}$$

$$e_w(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_w(s), \qquad e_v(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_v(s)\ , \tag{5.3}$$

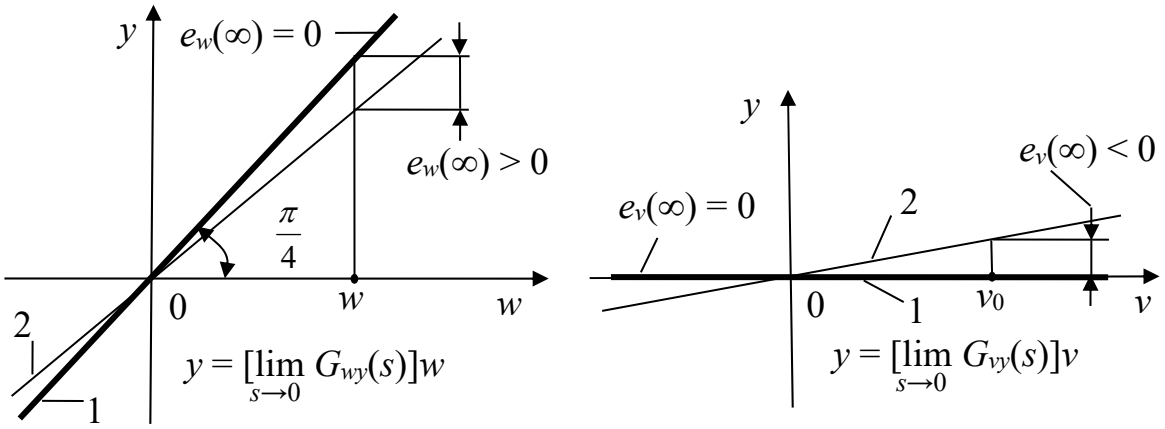
kde $e_w(\infty)$ je trvalá regulační odchylka způsobená žádanou veličinou $w(t)$, $e_v(\infty)$ – trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou $v(t)$.

Uvedené vztahy (5.2) a (5.3) platí i pro jiné než skokové změny polohy vstupních signálů $w(t)$ a $v(t)$, např. pro skokové změny rychlosti nebo zrychlení.

Obecně lze trvalé regulační odchylky snížit zvýšením zesílení regulátoru k_P (v případě použití regulátoru I snížením integrační časové konstanty T_I).

Je nutné si uvědomit, že pokud poruchová veličina $v(t)$ působí na vstupu integrační regulované soustavy, pak je třeba k volbě regulátoru a jeho seřízení přistupovat uvážlivě.

a) b)



Obr. 5.5 – Statické charakteristiky regulačního obvodu – závislost v ustáleném stavu mezi veličinami: a) regulovanou y a žádanou w, b) regulovanou y a poruchovou v (statická charakteristika s nulovou 1 a nenulovou 2 trvalou regulační odchylkou)

Pokud poruchová veličina $v(t)$ působí na vstupu regulované soustavy (příp. obecně viz obr. 4.1) a regulační obvod je třeba seřídit především z hlediska

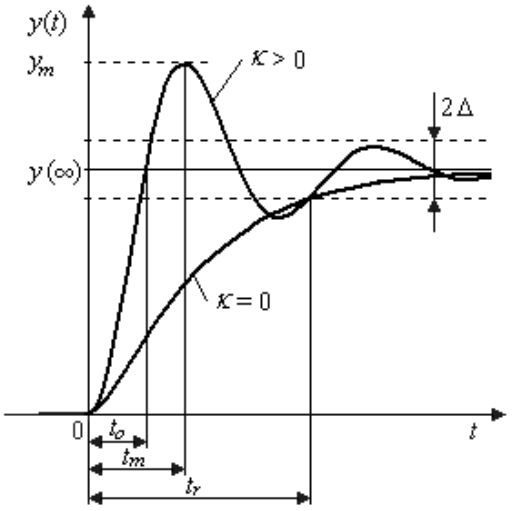
potlačení jejího vlivu na regulační pochod, je třeba zvolit regulátor se dvěma stupni volnosti (viz podkap. 4.1) a pro jeho seřízení použít speciální metody.

Z obr. 5.1 až 5.3 označených a) je zřejmá úloha sledování žádané veličiny $w(t)$ regulovanou veličinou $y_w(t)$ a označených b) úloha potlačení negativního vlivu poruchové veličiny $v(t)$ na regulovanou veličinu $y_v(t)$.

Existence trvalých regulačních odchylek $e_w(\infty)$ a $e_v(\infty)$ vyvolaných skokovými změnami polohy žádané $w(t)$ nebo poruchové $v(t)$ veličiny se projeví rovněž na statických charakteristikách regulačního obvodu (obr. 5.5).

Z obr. 5.5b je zřejmé, že **aby trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou $v(t)$ byla nulová, přenos poruchy $G_{vy}(s)$, příp. odchylkový přenos poruchy $G_{ve}(s)$ musí mít derivační charakter** (viz derivační členy v podkap. 3.2).

Protože již několikrát bylo řečeno, že zajištěním vhodných vlastností regulačního obvodu vzhledem k žádané veličině $w(t)$ budou většinou zajištěny i jeho vhodné vlastnosti vzhledem k poruchové veličině $v(t)$ (pro poruchu působící na výstupu regulované soustavy to platí vždy), dále budou uvažovány především odezvy regulačního obvodu na skokové změny žádané veličiny $w(t)$ a odpovídající regulovaná veličina $y(t)$, příp. regulační odchylka $e(t)$, pokud to nebude nutné, nebude označována indexem w.



Obr. 5.6 – Přechodová charakteristika regulačního obvodu s vyznačenými ukazateli kvality

Na obr. 5.6 jsou dva typické průběhy požadovaných přechodových charakteristik regulačního obvodu vyvolaných skokovou změnou žádané veličiny $w(t)$. Obr. 5.6 platí i pro nejednotkovou skokovou změnu.

Z praktického hlediska jsou pro posouzení kvality regulace nejdůležitější dva ukazatelé, a to ***doba regulace*** t_r a ***relativní překmit*** (přeregulování)

$$\kappa = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad y_m = y(t_m), \tag{5.4}$$

kde y_m je maximální hodnota regulované veličiny při překmitu, t_m – doba dosažení maximální hodnoty y_m, $y(\infty)$ – ustálená hodnota regulované veličiny.

Doba regulace t_r je dána časem, kdy regulovaná veličina $y(t)$ vejde do pásma o šířce 2Δ, tj. $y(\infty) \pm \Delta$, kde ***tolerance regulace*** je dána vztahem

$$\Delta = \delta\, y(\infty), \qquad \delta = 0{,}01 \div 0{,}05 \qquad (1 \div 5)\ \%. \tag{5.5}$$

Relativní tolerance regulace δ má nejčastěji hodnoty 0,05 nebo 0,02.

Relativní hodnoty (5.4) a (5.5) se uvádějí rovněž v procentech.

Při uvádění doby regulace t_r musí být vždy také uvedena hodnota relativní tolerance regulace δ. Pokud není uvedena, předpokládá se, že $\delta = 0{,}05$ (5 %).

Případ $\kappa = 0$ odpovídá nekmitavému (aperiodickému) regulačnímu pochodu, který je požadován u procesů, kde překmit by mohl způsobit nežádoucí účinky (jsou to především tepelné a chemické procesy, ale také pohyby robotů a manipulátorů apod.).

U nekmitavého regulačního pochodu se často požaduje, aby měl minimální dobu regulace t_r. Takový nekmitavý regulační pochod se nazývá ***mezní***.

Pro $\kappa > 0$ regulační pochod je kmitavý a je rychlejší než nekmitavý pochod. Rychlost nárůstu regulované veličiny $y(t)$ se dá ocenit pomocí ***rychlosti odezvy*** t_o. Je to doba, za kterou regulovaná veličina $y(t)$ poprvé dosáhne ustálené hodnoty $y(\infty)$. Rychlost odezvy t_o bývá také definována jako doba od dosažení hodnoty $0{,}1y(\infty)$ do dosažení hodnoty $0{,}9y(\infty)$. Takovým způsobem definovaný ukazatel rychlosti nárůstu regulované veličiny $y(t)$ je použitelný jak pro kmitavé, tak i nekmitavé regulační pochody a dokonce pro pochody s dopravním zpožděním.

Pro většinu procesů je vyhovující regulační pochod s relativním překmitem okolo 0,05 (5 %). Pokud se současně zajistí i minimální doba regulace t_r, pak takový regulační pochod je často považován za „prakticky optimální“. Používá se všude tam, kde malý překmit nevadí, příp. je žádoucí, např. u ručkových měřicích a zapisovacích přístrojů (v tomto případě umožňuje rychle interpolovat polohu ručičky při měření).

Pro komplexní zhodnocení kvality regulačního pochodu jsou velmi vhodná ***integrální kritéria***. Vyšrafovaná plocha na obr. 5.7a vyjadřuje tzv. ***regulační plochu***.

Je zřejmé, že čím regulační plocha bude menší, tím vyšší bude kvalita regulace. Aby se nemuselo pracovat se dvěma průběhy $y(t)$ a $w(t)$ (obr. 5.7a), pracuje se pouze s regulační odchylkou $e(t) = w(t) - y(t)$ (viz obr. 5.7b, c, d) a předpokládá se, že $e(\infty) = e_w(\infty) = 0$. Pokud $e(\infty) \neq 0$, pak ve všech vztazích na integrální kritéria je třeba místo $e(t)$ dosadit výraz $e(t) - e(\infty)$.

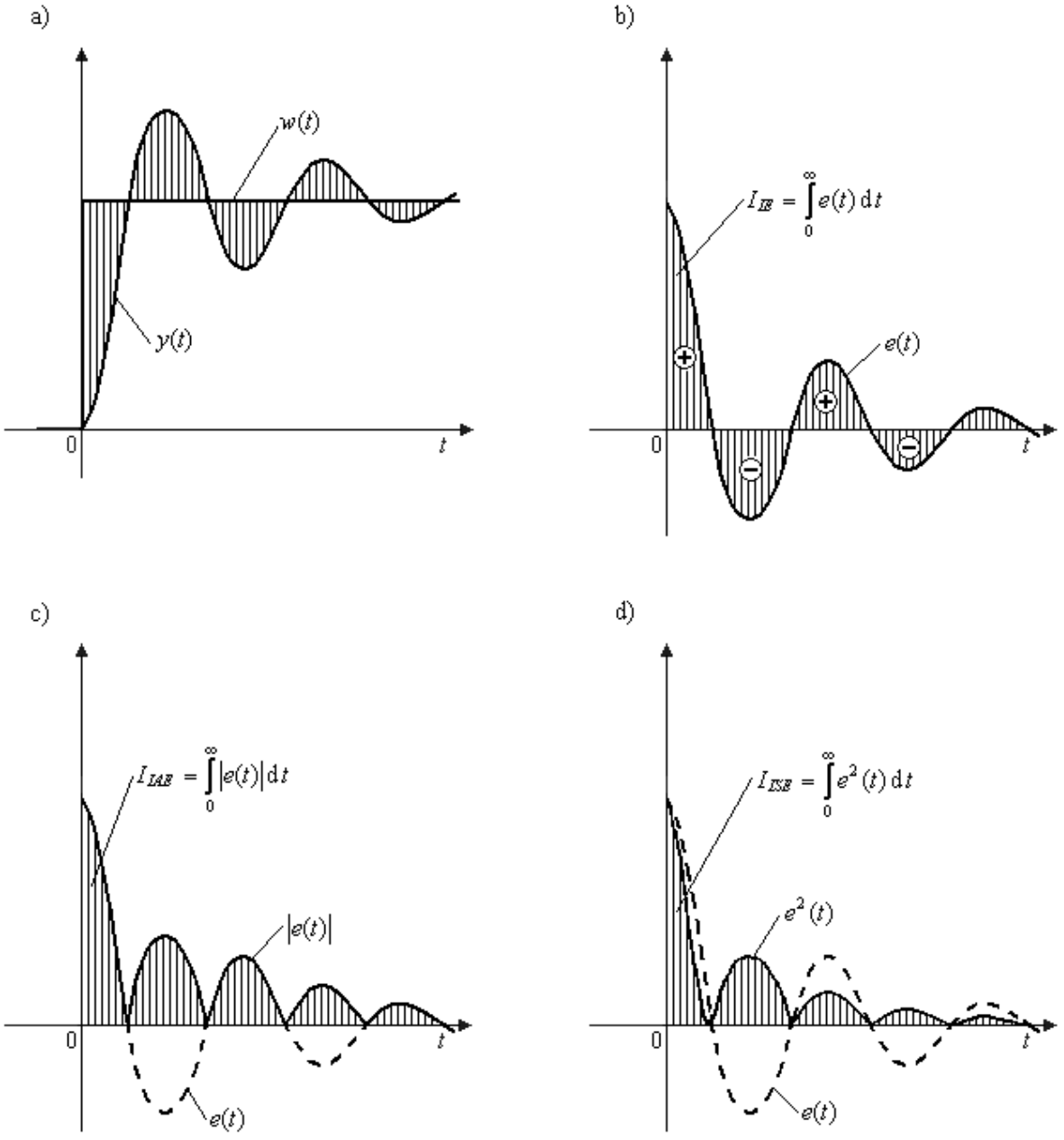
Lineární regulační plocha (obr. 5.7b)

$$I_{IE} = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.6}$$

Kritérium lineární regulační plochy I_{IE} (IE = **I**ntegral of **E**rror) je nejjednodušší. Není vhodné pro kmitavé regulační pochody, protože $I_{IE} = 0$ pro

regulační pochod na mezi kmitavé stability (plochy označené na obr. 5.7b znaménky + a – se vzájemně odečtou). Jeho největší výhodou je, že lze snadno spočítat, protože platí [viz definiční vztah L-transformace (2.1)]

$$I_{IE} = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.7}$$



Obr. 5.7 – Geometrická interpretace integrálních kritérií: a) regulační plocha, b) lineární regulační plocha I_{IE}, c) absolutní regulační plocha I_{IAE}, d) kvadratická regulační plocha I_{ISE}

Absolutní regulační plocha (obr. 5.7c)

$$I_{IAE} = \int_0^\infty \left| e(t) \right| \mathrm{d}t \,. \tag{5.8}$$

Kritérium absolutní regulační plochy I_{IAE} (IAE = **I**ntegral of **A**bsolute **E**rror) odstraňuje nevýhodu předchozího kritéria I_{IE} (viz obr. 5.7c), a proto je použitelné jak pro nekmitavé, tak i kmitavé regulační pochody. Má však velmi nepříjemnou vlastnost, spočívající v tom, že v bodech, ve kterých $e(t)$ mění znaménko není definována derivace $\dot{e}(t)$, a proto hodnotu kritéria absolutní regulační plochy nelze vypočítat analyticky. Jeho hodnotu lze určit pouze simulací.

Je zřejmé, že regulační plocha na obr. 5.7a je vlastně absolutní regulační plocha.

Kvadratická regulační plocha (obr. 5.7d)

$$I_{ISE} = \int_0^\infty e^2(t) \mathrm{d}t \,. \tag{5.9}$$

Kritérium kvadratické regulační plochy I_{ISE} (ISE = **I**ntegral of **S**quared **E**rror) odstraňuje sice nedostatky obou předchozích integrálních kritérií I_{IE} a I_{IAE}, protože je použitelné i pro kmitavé regulační pochody a jeho hodnotu lze určit analyticky [průběh $e^2(t)$ je hladký], ale výsledný průběh regulované veličiny $y(t)$ je příliš kmitavý. Je vhodné v těch případech, kdy žádaná $w(t)$ nebo poruchová $v(t)$ veličina mají náhodný charakter.

Má-li obraz regulační odchylky tvar

$$E(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}, \tag{5.10}$$

pak platí

$$n = 1 \quad I_{ISE} = \frac{b_0^2}{2a_0 a_1}, \tag{5.11}$$

$$n = 2 \quad I_{ISE} = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2}, \tag{5.12}$$

$$n = 3 \quad I_{ISE} = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}. \tag{5.13}$$

Pro vyšší stupeň n vztahy na výpočet kvadratické regulační plochy I_{ISE} jsou složité a nepřehledné.

Kritérium ITAE

$$I_{ITAE} = \int_0^\infty t\left|e(t)\right| \mathrm{d}t\,. \tag{5.14}$$

Integrální kritérium I_{ITAE} (ITAE = **I**ntegral of **T**ime multiplied by **A**bsolute **E**rror) v sobě zahrnuje čas i regulační odchylku, a proto při jeho minimalizaci dochází současně k minimalizaci jak absolutní regulační plochy, tak i doby regulace t_r. Je to velmi oblíbené integrální kritérium i když jeho hodnotu v případě kmitavých průběhů lze určit pouze simulačně.

Pro daný stupeň astatismu q a stupeň n charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$ byly simulačně minimalizací kritéria ITAE získány tzv. ***standardní tvary*** přenosů řízení.

Níže budou uvedeny tyto tvary pouze pro $q = 1$, $n = 2$ a 3.

$$n = 2 \;\; G_{wy}(s) = \frac{a^2}{s^2 + 1{,}4as + a^2} \;\Rightarrow\; G_o(s) = \frac{a^2}{s^2 + 1{,}4as} = \frac{a^2}{s(s + 1{,}4a)}\,, \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \;\; G_{wy}(s) &= \frac{a^3}{s^3 + 1{,}75as^2 + 2{,}15a^2 s + a^3} \;\Rightarrow \\ G_o(s) &= \frac{a^3}{s^3 + 1{,}75as^2 + 2{,}15a^2 s} = \frac{a^3}{s(s^2 + 1{,}75as + 2{,}15a^2)}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Parametr a přizpůsobuje časové měřítko.

Z obou přenosů otevřeného regulačního obvodu $G_o(s)$ vyplývá, že obsahuje jeden integrační člen (ve jmenovateli lze vytknout komplexní proměnnou s), tj. $q = 1$.

Byla uvedena pouze nejdůležitější integrální kritéria. Jejich minimalizací se získají hodnoty stavitelných parametrů zvoleného regulátoru. Minimalizace může být prováděna i simulačně.

Integrální kritéria I_{IAE} a I_{ITAE} lze s výhodou použít při porovnávání a hodnocení kvality různých regulačních pochodů.

Příklad 5.1

U regulačního obvodu s přenosem řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}$$

je třeba určit závislost relativního překmitu κ na relativním tlumení ξ_w.

Řešení:

Přechodová funkce regulačního obvodu $h_w(t)$ se určí snadno pomocí slovníku L-transformace [viz (3.18)]

$$h_w(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{G_{wy}(s)}{s}\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1)}\right\} = 1 - C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi),$$

$$C = \frac{1}{\omega T_w},\ \alpha = \frac{\xi_w}{T_w},\ \omega = \frac{1}{T_w}\sqrt{1-\xi_w^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha} = \arcsin(\omega T_w) = \arccos\xi_w.$$

Maximální hodnota přechodové funkce $y_m = h_w(t_m)$ vystoupí v okamžiku t_m, kdy poprvé derivace $\dot{h}_w(t)$ bude nulová. Platí [viz (3.27)]

$$\frac{\mathrm{d}\,h_w(t)}{\mathrm{d}\,t} = g_w(t) = \mathrm{L}^{-1}\{G_{wy}(s)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}\right\} = \frac{C}{T_w}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\,,$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}\,h_w(t)}{\mathrm{d}\,t} = 0 \;\Rightarrow\; t_m = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi T_w}{\sqrt{1-\xi_w^2}}.$$

Po dosazení t_m do přechodové funkce $h_w(t)$ a úpravě se dostane

$$y_m = h_w(t_m) = 1 - \frac{1}{\omega T_w}\mathrm{e}^{-\pi\xi_w/\sqrt{1-\xi_w^2}}\sin[\pi + \arcsin(\omega T_w)] = 1 + \mathrm{e}^{-\pi\xi_w/\sqrt{1-\xi_w^2}}.$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že relativní překmit je dán vztahem (obr. 5.8)

$$\kappa = \mathrm{e}^{-\pi\xi_w/\sqrt{1-\xi_w^2}},\ \ 0 \le \xi_w < 1,$$

ze kterého lze snadno určit závislost relativního tlumení ξ_w na relativním překmitu κ

$$\xi_w = \frac{|\ln\kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\kappa}},\ \ 0 < \kappa \le 1.$$

Závislost relativního překmitu κ na relativním tlumení ξ_w je uvedena v tab. 5.1.

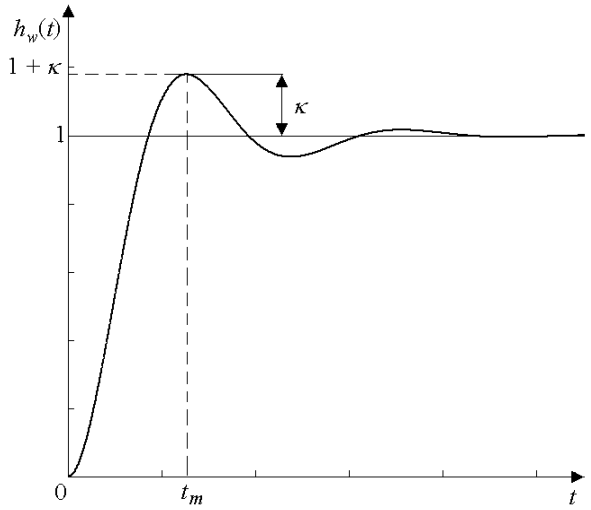
Pro odhad doby regulace t_r lze snadno odvodit přibližný vztah

$$t_r \approx \frac{T_w}{\xi_w}\ln\frac{1}{\delta\sqrt{1-\xi_w^2}}.$$

Průběhy přechodových charakteristik regulačního obvodu $h_w(t)$ pro různé hodnoty relativního tlumení ξ_w je na obr. 5.9.

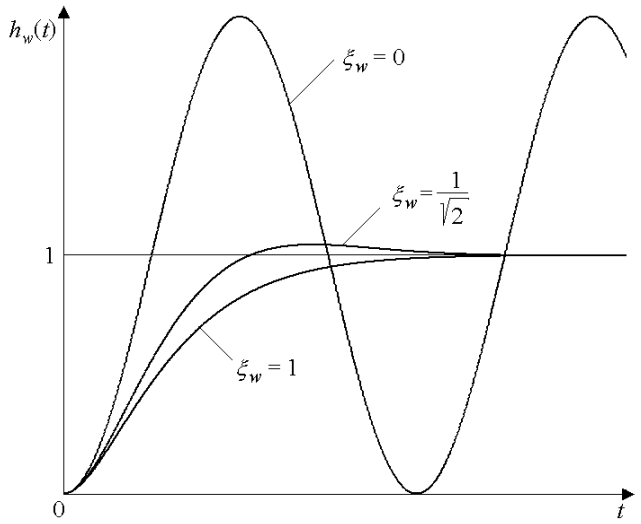
Tab. 5.1 – Závislost relativního překmitu κ na relativním tlumení ξ_w – příklad 5.1

ξ_w	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
κ	1	0,729	0,527	0,372	0,254	0,163	0,095	0,046	0,015	0,002	0



Obr. 5.8 – Geometrická interpretace relativního překmitu κ – příklad 5.1

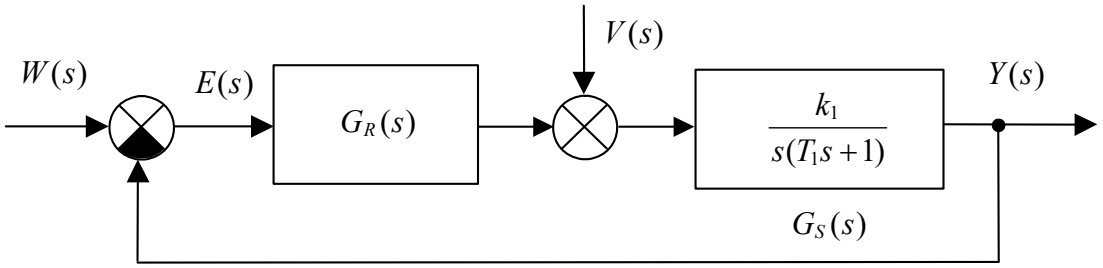
Významný je průběh přechodové charakteristiky $h_w(t)$ pro relativní tlumení $\xi_w = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}707$ s relativním překmitem $\kappa \doteq 0{,}043$ (4,3 %), který je považován z více hledisek za optimální (některá hlediska budou ukázána později). Pro $\xi_w = 1$ se obdrží mezní nekmitavý regulační pochod. S rostoucí hodnotou relativního tlumení $\xi_w > 1$ rychlost nekmitavého regulačního pochodu klesá a doba regulace t_r se prodlužuje.



Obr. 5.9 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu $h_w(t)$ pro různé hodnoty relativního tlumení ξ_w – příklad 5.1

Příklad 5.2

U regulačního obvodu na obr. 5.10 je třeba navrhnout nejjednodušší regulátor, který zajistí nulové trvalé regulační odchylky $e_w(\infty)$ a $e_v(\infty)$ pro skokové změny (polohy) žádané veličiny $w(t) = w_0\eta(t)$ a poruchové veličiny $v(t) = v_0\eta(t)$.



Obr. 5.10 – Schéma regulačního obvodu – příklad 5.2

Řešení:

Nejdříve je třeba určit odchylkové přenosy $G_{we}(s)$, $G_{ve}(s)$ a odpovídající obrazy odchylek $E_w(s)$ a $E_v(s)$ pro $W(s) = w_0/s$ a $V(s) = v_0/s$. V souladu s obr. 5.10 lze psát

$$G_{we}(s) = \frac{E_w(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{s(T_1 s + 1)}{T_1 s^2 + s + k_1 G_R(s)},$$

$$E_w(s) = G_{we}(s)W(s) = \frac{(T_1 s + 1)w_0}{T_1 s^2 + s + k_1 G_R(s)},$$

$$G_{ve}(s) = \frac{E_v(s)}{V(s)} = -\frac{G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = -\frac{k_1}{T_1 s^2 + s + k_1 G_R(s)},$$

$$E_v(s) = G_{ve}(s)V(s) = -\frac{k_1 v_0}{s[T_1 s^2 + s + k_1 G_R(s)]}.$$

a) Regulátor bez integrační složky

Nejjednodušší regulátor bez integrační složky je regulátor typu P s přenosem

$$G_R(s) = k_P.$$

V tomto případě stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 1$ a jeho charakteristický mnohočlen má tvar (získá se po dosazení přenosu regulátoru do libovolného odchylkového přenosu a úpravě ze jmenovatele)

$$N(s) = T_1 s^2 + s + k_1 k_P.$$

Charakteristický mnohočlen $N(s)$ je druhého stupně, všechny jeho koeficienty existují a jsou kladné (zesílení regulátoru k_P nemůže být záporné, protože by došlo ke změně záporné zpětné vazby na kladnou), a proto je splněna nutná a postačující Stodolova podmínka stability – regulační obvod s regulátorem typu P je stabilní.

Trvalé regulační odchylky se určí na základě vztahů (5.3)

$$e_w(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_w(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(T_1 s + 1)w_0}{T_1 s^2 + s + k_1 k_P} = 0,$$

$$e_v(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_v(s) = \lim_{s\to 0} \left(-\frac{k_1 v_0}{T_1 s^2 + s + k_1 k_P} \right) = -\frac{v_0}{k_P}.$$

Regulační obvod s proporcionálním regulátorem typu P zajistí sice nulovou trvalou regulační odchylku $e_w(\infty)$, ale nezajistí již nulovou regulační odchylku $e_v(\infty)$, protože poruchová veličina $v(t)$ působí na vstupu integrační regulované soustavy. Z posledního vztahu je rovněž zřejmé, že trvalou regulační odchylku $e_v(\infty)$ je možno snížit zvýšením zesílení regulátoru k_P.

Použití složitějšího regulátoru typu PD problém existence trvalé regulační odchylky $e_v(\infty)$ neřeší.

b) Regulátor s integrační složkou

Nejjednodušší regulátor s integrační složkou je regulátor typu I s přenosem

$$G_R(s) = \frac{1}{T_I s}.$$

V tomto případě charakteristický mnohočlen regulačního obvodu má tvar

$$N(s) = T_1 T_I s^3 + T_I s^2 + k_1,$$

ze kterého je zřejmé, že v něm chybí koeficient u první mocniny komplexní proměnné s. Není tedy splněna nutná Stodolova podmínka stability, a proto daný regulační obvod s regulátorem typu I je ***strukturálně nestabilní*** (neexistuje taková hodnota integrační časové konstanty T_I, která by daný regulační obvod stabilizovala).

Dalším jednoduchým regulátorem s integrační složkou je regulátor typu PI s přenosem

$$G_R(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k_P (T_I s + 1)}{T_I s}.$$

Při použití regulátoru typu PI stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 2$ (jeden integrační člen obsahuje regulovaná soustava a jeden regulátor) a jeho charakteristický mnohočlen je dán vztahem

$$N(s) = T_1 T_I s^3 + T_I s^2 + k_1 k_P T_I s + k_1 k_P.$$

Např. pomocí Hurwitzova kritéria stability se snadno určí nutné a postačující podmínky stability daného regulačního obvodu

$$k_P > 0, \qquad T_I > T_1.$$

Pro $T_I = T_1$ by došlo ke kompenzaci dvojčlenu regulované soustavy $T_1 s + 1$ dvojčlenem regulátoru $T_I s + 1$ a regulační obvod by byl strukturálně nestabilní.

Po dosazení přenosu regulátoru PI do vztahů na obrazy regulačních odchylek a po úpravě se dostane

$$E_w(s) = \frac{T_I s(T_1 s + 1) w_0}{T_1 T_I s^3 + T_I s^2 + k_1 k_P T_I s + k_1 k_P},$$

$$e_w(\infty) = \lim_{s \to 0} s E_w(s) = 0,$$

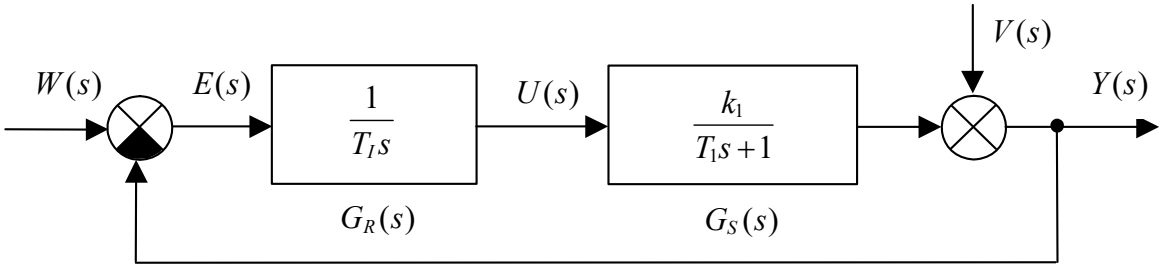
$$E_v(s) = -\frac{k_1 T_I v_0}{T_1 T_I s^3 + T_I s^2 + k_1 k_P T_I s + k_1 k_P},$$

$$e_v(\infty) = \lim_{s \to 0} s E_v(s) = 0.$$

Použitím regulátoru typu PI došlo ke zvýšení stupně astatismu regulačního obvodu na $q = 2$ a k odstranění trvalé regulační odchylky $e_v(\infty)$ způsobené skokovou změnou poruchové veličiny $v(t)$ na vstupu integrační regulované soustavy. Samozřejmě musí být splněny podmínky stability $k_P > 0$ a $T_I > T_1$.

Příklad 5.3

U regulačního obvodu na obr. 5.11 je třeba určit hodnotu integrační časové konstanty T_I na základě minimalizace integrálních kritérií I_{IE}, I_{ISE} a I_{ITAE}.



Obr. 5.11 – Schéma regulačního obvodu – příklad 5.3

Řešení:

Regulační obvod na obr. 5.11 má stupeň astatismu $q = 1$ a jeho přenos řízení je dán vztahem

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s) G_S(s)}{1 + G_R(s) G_S(s)} = \frac{1}{\frac{T_1 T_I}{k_1} s^2 + \frac{T_I}{k_1} s + 1},$$

který je vhodné zapsat ve tvaru

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1},$$

kde

$$T_w = \sqrt{\frac{T_1 T_I}{k_1}}, \qquad \xi_w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_I}{k_1 T_1}} \Rightarrow T_I = 4 k_1 T_1 \xi_w^2.$$

Charakteristický mnohočlen ve jmenovateli přenosu řízení $G_{wy}(s)$ je druhého stupně a pro $T_I > 0$ má všechny koeficienty kladné, a proto je splněna nutná a postačující Stodolova podmínka stability daného regulačního obvodu.

Integrální kritéria budou minimalizována podle ξ_w a pak na základě posledního vztahu bude určena odpovídající integrační časová konstanta T_I.

Vzhledem k tomu, že poruchová veličina $v(t)$ působí na výstupu regulované soustavy, seřízení regulátoru vzhledem k žádané veličině $w(t)$ je stejné jako seřízení vzhledem k poruchové veličině $v(t)$. Proto také odchylkový přenos řízení $G_{we}(s)$ se liší od odchylkového přenosu poruchy $G_{ve}(s)$ pouze znaménkem. Např. odchylkový přenos řízení má tvar

$$G_{we}(s) = \frac{E_w(s)}{W(s)} = 1 - G_{wy}(s) = \frac{s(T_w^2 s + 2\xi_w T_w)}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}$$

a pro jednotkový skok žádané veličiny $w(t) = \eta(t) \triangleq W(s) = \frac{1}{s}$ obraz regulační odchylky bude

$$E_w(s) = G_{we}(s) W(s) = \frac{T_w^2 s + 2\xi_w T_w}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1} \quad .$$

a) Lineární regulační plocha

Regulační pochod bude nekmitavý, když charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(s) = T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1$$

bude mít záporné reálné kořeny, které jsou dány vztahem

$$s_{1,2} = -\frac{\xi_w}{T_w} \pm \frac{1}{T_w}\sqrt{\xi_w^2 - 1}\,.$$

Je zřejmé, že oba kořeny budou záporné reálné pro (viz příklad 5.1)

$$\xi_w \geq 1\,.$$

V souladu se vztahem (5.7) lze psát

$$I_{IE} = \int_0^\infty e_w(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} E_w(s) = \lim_{s\to 0} \frac{T_w^2 s + 2\xi_w T_w}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1} = 2\xi_w T_w\,.$$

Aby hodnota integrálního kritéria I_{IE} byla co nejmenší, musí být relativní tlumení ξ_w rovněž co nejmenší. Protože je zdola omezeno hodnotou 1, je zřejmé, že optimální hodnota relativního tlumení je (optimální nebo jinak významné hodnoty budou označovány *)

$$\xi_w^* = 1 \;\Rightarrow\; T_I^* = 4k_1 T_1\,.$$

Přenos řízení optimální z hlediska lineární regulační plochy je dán vztahem

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{4T_1^2 s^2 + 4T_1 s + 1} \quad .$$

Je zřejmé, že v tomto případě má minimální hodnotu i integrální kritérium I_{IAE}.

b) Kvadratická regulační plocha

Z obrazu regulační odchylky $E_w(s)$ vyplývá, že $a_0 = 1$, $a_1 = 2\xi_w T_w$, $a_2 = T_w^2$, $b_0 = 2\xi_w T_w$, $b_1 = T_w^2$, a proto na základě vztahu (5.12) lze psát

$$I_{ISE} = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2 a_0 a_1 a_2} = \frac{T_w (1 + 4\xi_w^2)}{4\xi_w} .$$

Z podmínek pro minimum kvadratické regulační plochy se dostane

$$\frac{\mathrm{d} I_{ISE}}{\mathrm{d}\xi_w} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{T_w (4\xi_w^2 - 1)}{4\xi_w^2} = 0 \;\Rightarrow\; \xi_w^* = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; T_I^* = k_1 T_1 ,$$

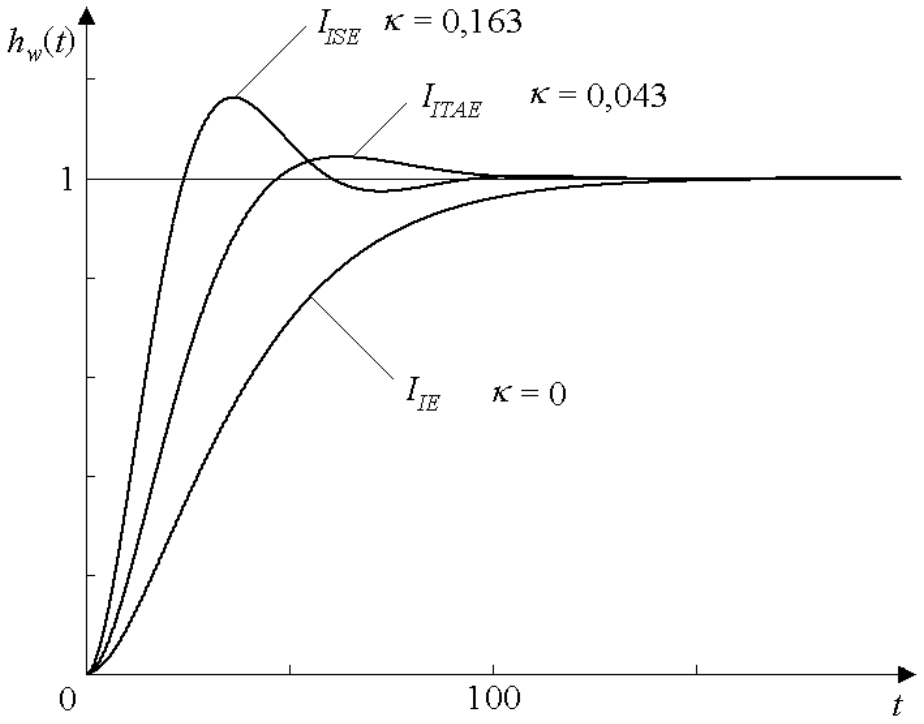
$$\frac{\mathrm{d}^2 I_{ISE}}{\mathrm{d}\xi_w^{\,2}} = \left. \frac{T_w}{2\xi_w^3} \right|_{\xi_w = \frac{1}{2}} > 0 \;\Rightarrow\; \text{minimum} .$$

Přenos řízení optimální z hlediska kvadratické regulační plochy je dán vztahem

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_1^2 s^2 + T_1 s + 1} \quad .$$

c) Kritérium ITAE

Přenos řízení $G_{wy}(s)$ se upraví tak, aby v souladu se standardním tvarem pro kritérium ITAE (5.15) byla u nejvyšší mocniny komplexní proměnné s ve jmenovateli přenosu jednička, tj.



Obr. 5.12 – Průběhy přechodových charakteristik regulačního obvodu seřízeného podle tří různých integrálních kritérií – příklad 5.3

$$G_{wy}(s) = \frac{\dfrac{1}{T_w^2}}{s^2 + \dfrac{2\xi_w}{T_w}s + \dfrac{1}{T_w^2}}$$

a ze vzájemného srovnání koeficientů se dostane

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{T_w^2} \\ 1{,}4a &= \frac{2\xi_w}{T_w} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{1}{T_w} \\ \xi_w &= 0{,}7 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Pro $\xi_w^* = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow T_I^* = 2k_1T_1$.

Pro kritérium ITAE optimální hodnota relativního tlumení je $\xi_w^* = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (přibližně 0,7). Rovněž je zřejmá interpretace parametru *a*, který časově přizpůsobí reálný proces standardnímu procesu.

Přenos řízení optimální z hlediska kritéria ITAE má tvar

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{2T_1^2s^2 + 2T_1s + 1} \quad .$$

Průběhy přechodových charakteristik jsou na obr. 5.12.

Kmitočtová oblast

Pro posuzování kvality regulace je velmi vhodná i kmitočtová oblast, která je oblíbená především u projektantů regulačních obvodů. Nejčastěji se využívají tři kmitočtové přenosy (obr. 5.13):

kmitočtový přenos řízení

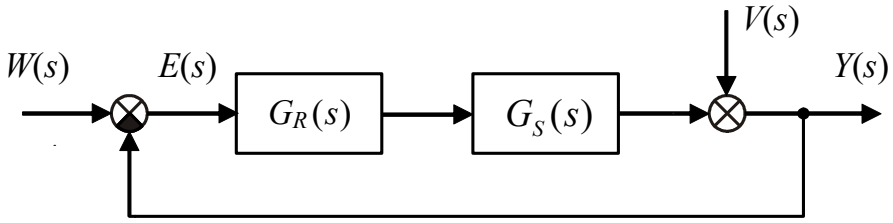
$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = \frac{G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}{1 + G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)} = T(\mathrm{j}\omega), \tag{5.17}$$

kmitočtový přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega), \tag{5.18}$$

kmitočtový přenos poruchy působící na výstupu regulované soustavy

$$G_{vy}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)} = 1 - G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = S(\mathrm{j}\omega). \tag{5.19}$$



Obr. 5.13 – Schéma regulačního obvodu

Z kmitočtového přenosu řízení (5.17) lze získat modul (amplitudu), resp. logaritmický modul regulačního obvodu, tj.

$$A_{wy}(\omega) = \operatorname{mod} G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = \left|G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\right|, \quad \text{resp. } L_{wy}(\omega) = 20\log A_{wy}(\omega)\,. \tag{5.20}$$

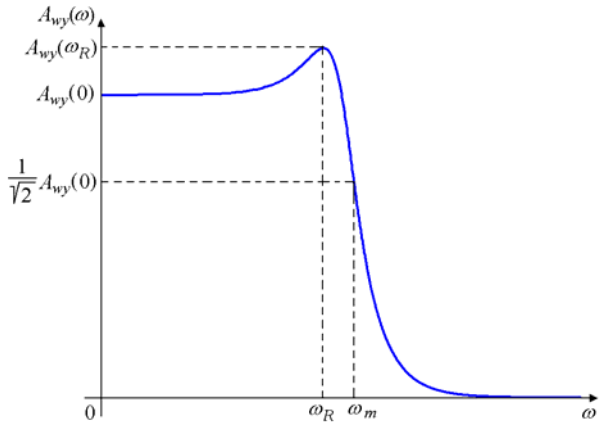
Typický průběh amplitudové kmitočtové charakteristiky regulačního obvodu $A_{wy}(\omega)$ je na obr. 5.14. Z jejího průběhu lze vyčíst ukazatele kvality: $A_{wy}(\omega_R)$ – ***amplitudové rezonanční převýšení***, ω_R – ***rezonanční úhlový kmitočet***, ω_m – ***mezní*** (hraniční) ***úhlový kmitočet***.

Pro správně seřízený regulační obvod je doporučováno, aby platilo

$$A_{wy}(\omega_R) \le 1{,}1 \div 1{,}5, \quad \text{resp. } L_{wy}(\omega_R) \le (0{,}8 \div 3{,}5)\ \mathrm{dB}\,. \tag{5.21}$$

Příliš vysoká hodnota amplitudového rezonančního převýšení dává velikou kmitavost a značný překmit.

Mezní úhlový kmitočet ω_m určuje šířku pracovního pásma regulačního obvodu, tj. oblast pracovních úhlových kmitočtů. Čím je jeho hodnota vyšší, tím vyšší úhlové kmitočty dovede regulační obvod zpracovat. Jeho hodnota je dána poklesem modulu $A_{wy}(\omega)$ $[L_{wy}(\omega)]$ na úroveň $\dfrac{1}{\sqrt{2}} A_{wy}(0) \doteq 0{,}707\, A_{wy}(0)$ $[L_{wy}(0) - 3\ \mathrm{dB}]$ a pokud vystupuje vysoké rezonanční převýšení $A_{wy}(\omega_R)$, pak vzrůstem modulu $A_{wy}(\omega)$ $[L_{wy}(\omega)]$ na úroveň $\sqrt{2} A_{wy}(0) \doteq 1{,}414\, A_{wy}(0)$ $[L_{wy}(0) + 3\ \mathrm{dB}]$.



Obr. 5.14 – Amplitudová kmitočtová charakteristika regulačního obvodu

Z průběhu amplitudové kmitočtové charakteristiky regulačního obvodu $A_{wy}(\omega)$ lze rovněž určit stupeň astatismu q, protože platí

$$A_{wy}(0)=1,\ \text{resp. } L_{wy}(0)=0 \ \Rightarrow\ q\geq 1, \tag{5.22a}$$

$$A_{wy}(0)<1,\ \text{resp. } L_{wy}(0)<0 \ \Rightarrow\ q=0. \tag{5.22b}$$

Určit přesně stupeň astatismu regulačního obvodu q lze z průběhu amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ pro $\omega \to 0$, viz obr. 4.28 ÷ 4.30 a také obr. 5.16.

Z amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ lze určit velmi důležité ukazatele kvality regulace, jako jsou amplitudová m_A a fázová γ bezpečnost (viz obr. 4.30 a 5.16). Pro běžné regulační obvody jsou doporučovány hodnoty

$$m_A=\mathbf{2}\div 5,\ \text{resp. } m_L=20\log m_A=(\mathbf{6}\div 14)\ \mathrm{dB}, \tag{5.23a}$$

$$\gamma=\mathbf{30}^\circ\div 60^\circ\ \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\div\frac{\pi}{3}\right). \tag{5.23b}$$

Hodnoty vyznačené tučně by v žádném případě neměly být překročeny.

Kmitočtové přenosy $G_{wy}(\mathrm{j}\omega)$ a $G_{vy}(\mathrm{j}\omega)$ [viz obr. 5.13 a vztahy (5.17), (5.19)] mají pro teorii automatického řízení zásadní význam, a proto se také označují speciálními symboly $T(\mathrm{j}\omega)$ a $S(\mathrm{j}\omega)$ a mají také své názvy. Ze vztahu (5.19) vyplývá, že platí

$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega)+G_{vy}(\mathrm{j}\omega)=1 \ \Leftrightarrow\ T(\mathrm{j}\omega)+S(\mathrm{j}\omega)=1. \tag{5.24}$$

Funkce $S(\mathrm{j}\omega)$ se nazývá ***funkce citlivosti*** a funkce $T(\mathrm{j}\omega)$ ***doplňková*** (komplementární) ***funkce citlivosti***.

Název funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ vyplývá z následujících úvah.

Ze vztahu

$$Y(\mathrm{j}\omega)=G_{wy}(\mathrm{j}\omega)W(\mathrm{j}\omega) \tag{5.25}$$

pro $W(\mathrm{j}\omega)$ = konst se dostane

$$\frac{\mathrm{d}Y(\mathrm{j}\omega)}{Y(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}, \tag{5.26}$$

tj. relativní změna regulované veličiny (jejího obrazu) je rovna relativní změně vlastností regulačního obvodu (jeho přenosu řízení). Podobně se odvodí z (5.17) vztah

$$\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}=\frac{1}{1+G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}\left[\frac{\mathrm{d}G_R(\mathrm{j}\omega)}{G_R(\mathrm{j}\omega)}+\frac{\mathrm{d}G_S(\mathrm{j}\omega)}{G_S(\mathrm{j}\omega)}\right],$$

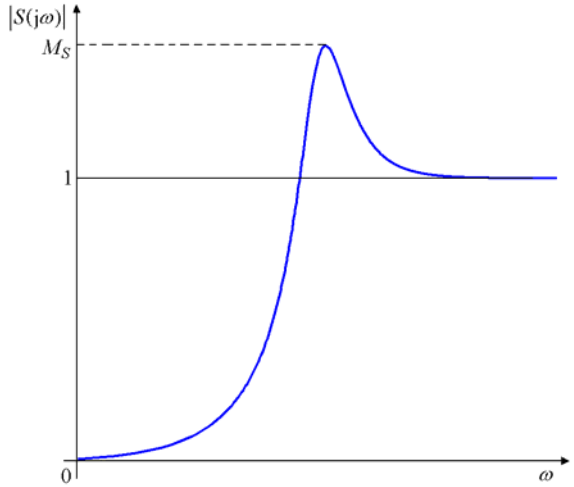
resp.

$$\frac{\mathrm{d}Y(\mathrm{j}\omega)}{Y(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}=S(\mathrm{j}\omega)\left[\frac{\mathrm{d}G_R(\mathrm{j}\omega)}{G_R(\mathrm{j}\omega)}+\frac{\mathrm{d}G_S(\mathrm{j}\omega)}{G_S(\mathrm{j}\omega)}\right], \tag{5.27}$$

který vyjadřuje vliv relativních změn vlastností regulátoru (jeho přenosu) a regulované soustavy (jejího přenosu) na relativní změnu vlastností regulačního

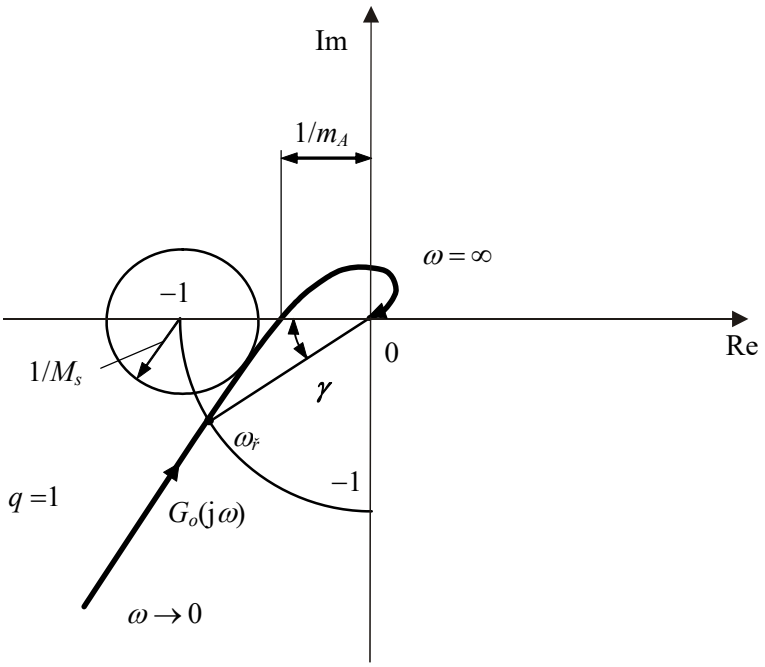
obvodu (jeho přenosu řízení), a tím i na relativní změnu regulované veličiny (jejího obrazu). Ze vztahu (5.27) je zřejmé, že tento vliv vyjadřuje právě funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$. Čím její hodnota bude nižší, tím nižší bude vliv relativních změn vlastností regulátoru a regulované soustavy na relativní změnu vlastností regulačního obvodu a tedy i na relativní změnu regulované veličiny. Malou hodnotu bude mít tehdy, budou-li platit vztahy (4.15) nebo (4.16).

Funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ vyjadřuje tedy ***citlivost***, resp. ***necitlivost*** regulačního obvodu k velmi malým, většinou blíže nespecifikovaným, změnám vlastností jeho členů.



Obr. 5.15 – Průběh modulu funkce citlivosti

Na obr. 5.15 je ukázán typický průběh modulu funkce citlivosti $|S(\mathrm{j}\omega)| = \mathrm{mod}\, S(\mathrm{j}\omega)$. Měřítko úhlového kmitočtu ω bývá nejčastěji logaritmické.



Obr. 5.16 – Geometrická interpretace maxima modulu funkce citlivosti M_S

Velmi důležitou interpretaci má maximální hodnota modulu funkce citlivosti

$$M_S = \max_{0\le\omega<\infty} |S(\mathrm{j}\omega)| = \max_{0\le\omega<\infty} \left| \frac{1}{1+G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)} \right| . \tag{5.28}$$

Převrácená hodnota ***maxima modulu funkce citlivosti*** $1/M_S$ je vlastně nejkratší vzdálenost amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ od kritického bodu –1, viz obr. 5.16.

U správně seřízeného regulačního obvodu by neměla hodnota M_S překročit 2 a měla by být v rozmezí

$$1{,}3 \le M_S \le \mathbf{2} . \tag{5.29}$$

Z obr. 5.16 vyplývají přímo odhady pro amplitudovou bezpečnost

$$m_A > \frac{M_S}{M_S - 1} \tag{5.30a}$$

a fázovou bezpečnost

$$\gamma > 2 \arcsin \frac{1}{2M_S} . \tag{5.30b}$$

Maximum modulu funkce citlivosti M_S je komplexním ukazatelem kvality regulačního obvodu, protože ze vztahů (5.30) vyplývá, že pro $M_S \le 2$ zaručuje amplitudovou bezpečnost $m_A \ge 2$ a fázovou bezpečnost $\gamma > 29$ °. Opačné tvrzení neplatí, tj. m_A a γ nezaručují odpovídající hodnotu M_S.

Pomocí maxima modulu funkce citlivosti M_S lze vyjádřit sklony sektorové nelinearity (obr. 4.31)

$$\alpha = \frac{M_S}{M_S + 1} \le \frac{f(u_1)}{u_1} \le \frac{M_S}{M_S - 1} = \beta \tag{5.31}$$

při které regulační obvod s nelinearitou (obr. 4.32) bude asymptoticky stabilní.

S citlivostí, resp. necitlivostí regulačního obvodu k velmi malým změnám vlastností jeho členů velmi úzce souvisí ***robustnost*** regulačního obvodu, která vyjadřuje schopnost regulačního obvodu plnit cíl regulace při větších, většinou kvantitativně definovaných, změnách vlastností jeho členů i při určitém poklesu kvality, ale vždy při zajištění stability. Např. maximum funkce citlivosti M_S vymezuje sektor pro nelinearitu nebo časovou změnu zesílení, které nezpůsobí ztrátu stability, tj. M_S vyjadřuje určitým způsobem robustnost regulačního obvodu k dané nelinearitě nebo časovým změnám zesílení omezených sklony α a β.

Změna vlastností (neurčitost v chování, nepřesnost modelu, časové změny vlastností atd.) členu regulačního obvodu v kmitočtové oblasti může být vyjádřena ***aditivní neurčitostí*** (obr. 5.17a)

$$\widetilde{G}(\mathrm{j}\omega) = G(\mathrm{j}\omega) + \Delta_a(\mathrm{j}\omega) \;\Rightarrow\; \Delta_a(\mathrm{j}\omega) = \widetilde{G}(\mathrm{j}\omega) - G(\mathrm{j}\omega) \tag{5.32}$$

nebo ***multiplikativní neurčitostí*** (obr. 5.17b)

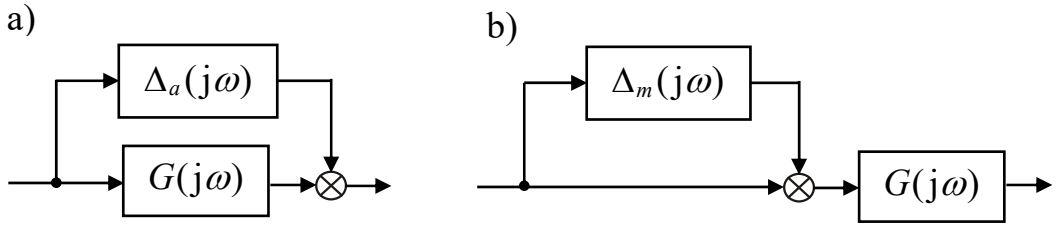
$$\widetilde{G}(\mathrm{j}\omega) = G(\mathrm{j}\omega) + \Delta_m(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega) \;\Rightarrow\; \Delta_m(\mathrm{j}\omega) = \frac{\widetilde{G}(\mathrm{j}\omega) - G(\mathrm{j}\omega)}{G(\mathrm{j}\omega)}, \qquad (5.33)$$

kde $G(\mathrm{j}\omega)$ je nominální a $\widetilde{G}(\mathrm{j}\omega)$ je skutečný kmitočtový přenos daného členu regulačního obvodu.

Z obou vztahů (5.32) a (5.33) vyplývá

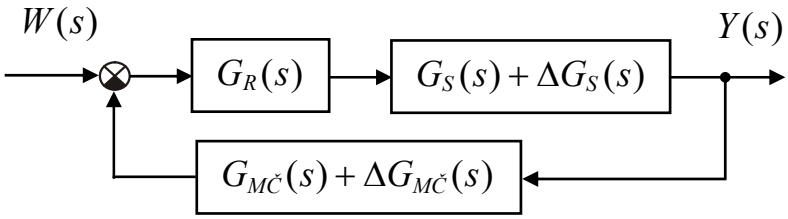
$$\Delta_a(\mathrm{j}\omega) = \Delta_m(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega) \;, \qquad (5.34)$$

tj. mezi oběma neurčitostmi je jednoznačný vztah, a proto je třeba vždy použít takový tvar neurčitosti, který je pro daný účel nejvhodnější.



Obr. 5.17 – Neurčitost: a) aditivní, b) multiplikativní

Dále bude používána pouze aditivní neurčitost, a proto její označení bude v souladu s obr. 5.18.



Obr. 5.18 – Blokové schéma regulačního obvodu s neurčitostmi

Analýzu vlivu neurčitostí regulované soustavy $\Delta G_S(\mathrm{j}\omega)$ a měřicího členu $\Delta G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)$ na vlastnosti regulačního obvodu lze provést na základě obr. 5.18.

Pro regulační obvod na obr. 5.18 platí

$$G_{wy}(s) + \Delta G_{wy}(s) = \frac{G_R(s)[G_S(s) + \Delta G_S(s)]}{1 + G_R(s)[G_S(s) + \Delta G_S(s)][G_{MČ}(s) + \Delta G_{MČ}(s)]} = \\ = \frac{1}{\dfrac{1}{G_R(s)[G_S(s) + \Delta G_S(s)]} + G_{MČ}(s) + \Delta G_{MČ}(s)}. \qquad (5.35)$$

Pro $s = \mathrm{j}\omega$ a

$$\left|G_R(\mathrm{j}\omega)\right| \to \infty$$

$$G_S(\mathrm{j}\omega) + \Delta G_S(\mathrm{j}\omega) \neq 0$$

se dostane

$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega)+\Delta G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\approx\frac{1}{G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)+\Delta G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)}\Rightarrow$$

$$[G_{wy}(\mathrm{j}\omega)+\Delta G_{wy}(\mathrm{j}\omega)][G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)+\Delta G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)]\approx 1. \qquad (5.36)$$

V oblasti pracovních kmitočtů pro dobře seřízený regulační obvod platí $G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\approx 1$ a pro správně zvolený měřicí člen $G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)\approx 1$, a proto za předpokladu

$$\left|\Delta G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\Delta G_{MČ}(\mathrm{j}\omega)\right| << 1$$

se ze vztahu (5.36) obdrží přibližná aditivní neurčitost přenosu regulačního obvodu

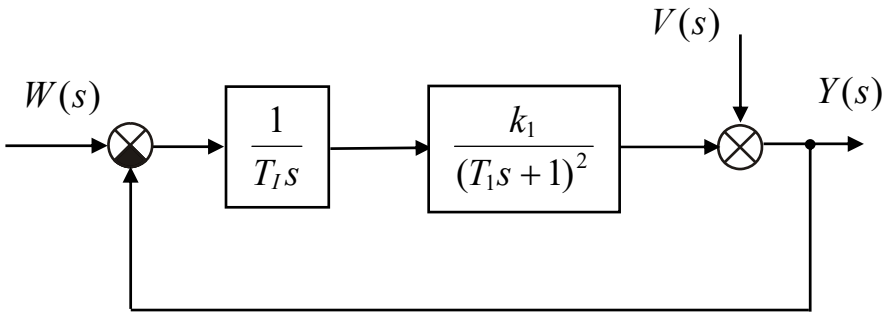
$$\Delta G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\approx -\Delta G_{MČ}(\mathrm{j}\omega). \qquad (5.37)$$

Tento výsledek vyjadřuje tu skutečnost, že **správně navržený a seřízený regulační obvod je robustní vzhledem k neurčitosti regulované soustavy, ale je nerobustní vzhledem k neurčitosti měřicího členu**.

I když tento výsledek byl získán zjednodušeně bez ověření stability, kvality atd., jeho důsledek je významný – **přesnost regulace nemůže být vyšší, než přesnost měřicího členu a malé změny vlastností regulované soustavy se při dobře seřízeném regulátoru na vlastnostech regulačního obvodu téměř neprojeví**.

Příklad 5.4

Je dán regulační obvod na obr. 5.19 (porovnej s příkladem 4.14). Je třeba určit hodnotu integrační časové konstanty regulátoru T_I, která zajistí amplitudovou bezpečnost $m_A = 4$. Pro $m_A = 4$ je třeba graficky určit maximum funkce citlivosti M_S.



Obr. 5.19 – Blokové schéma regulačního obvodu – příklad 5.4

Řešení:

Z porovnání s příkladem 4.14 vyplývá, že regulační obvod na obr. 5.19 je ekvivalentní regulačnímu obvodu na obr. 4.43 při neexistenci nelinearity pro $k_2 = 1$. Proto nutná a postačující podmínka (asymptotické) stability má tvar

$$T_I > \frac{k_1 T_1}{2}.$$

Je zřejmé, že pro mez stability platí (příklad 4.14)

$$m_A \frac{1}{T_I} = \frac{2}{k_1 T_1} \Rightarrow T_I = \frac{m_A k_1 T_1}{2}.$$

Pro $m_A = 4$ se obdrží

$$T_I^* = 2k_1 T_1.$$

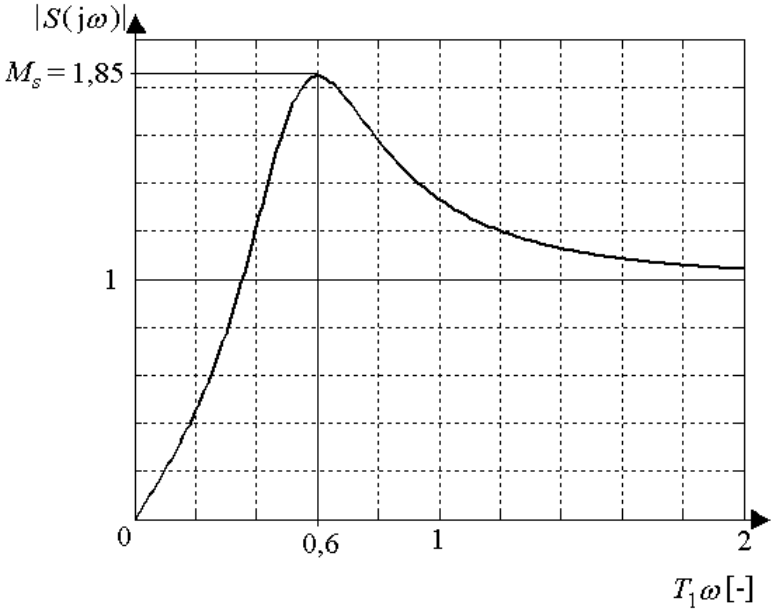
Funkce citlivosti je dána vztahem (5.19)

$$S(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + G_R(\mathrm{j}\omega) G_S(\mathrm{j}\omega)} = \frac{T_I\, \mathrm{j}\omega(T_1\, \mathrm{j}\omega + 1)^2}{T_I\, \mathrm{j}\omega(T_1\, \mathrm{j}\omega + 1)^2 + k_1}.$$

Pro $T_I = T_I^* = 2k_1 T_1$ a úpravě se dostane

$$S(\mathrm{j}\omega) = 2 \frac{-2(T_1\omega)^2 + \mathrm{j} T_1\omega[1 - (T_1\omega)^2]}{1 - 4(T_1\omega)^2 + \mathrm{j}2T_1\omega[1 - (T_1\omega)^2]}.$$

Průběh modulu funkce citlivosti je ukázán na obr. 5.20. Z grafu bylo přibližně určeno pro $\omega \doteq \frac{0{,}6}{T_1}$ maximum funkce citlivosti $M_S \doteq 1{,}85$.



Obr. 5.20 – Průběh modulu funkce citlivosti – příklad 5.4

Pomocí maxima modulu funkce citlivosti M_S lze na základě vztahů (5.30) získat odhady:

$$m_A > \frac{M_S}{M_S - 1} = \frac{1{,}85}{1{,}85 - 1} \doteq 2{,}18,$$

skutečnost: $m_A = 4$;

$$\gamma > 2\arcsin\frac{1}{2M_s} = 2\arcsin\frac{1}{2\cdot 2{,}18} \doteq 0{,}55\,\text{rad} \doteq 31{,}4°$$

skutečnost (viz příklad 4.14): $\gamma \doteq 0{,}77\,\text{rad} \doteq 44°$.

Pomocí maxima modulu funkce citlivosti lze rovněž odhadnout sklony sektorové nelinearity, pro které bude zajištěna asymptotická stabilita.

V souladu se vztahem (5.31) se dostane

$$\alpha = \frac{M_S}{M_S + 1} = \frac{1{,}85}{1{,}85 + 1} \doteq 0{,}65,$$

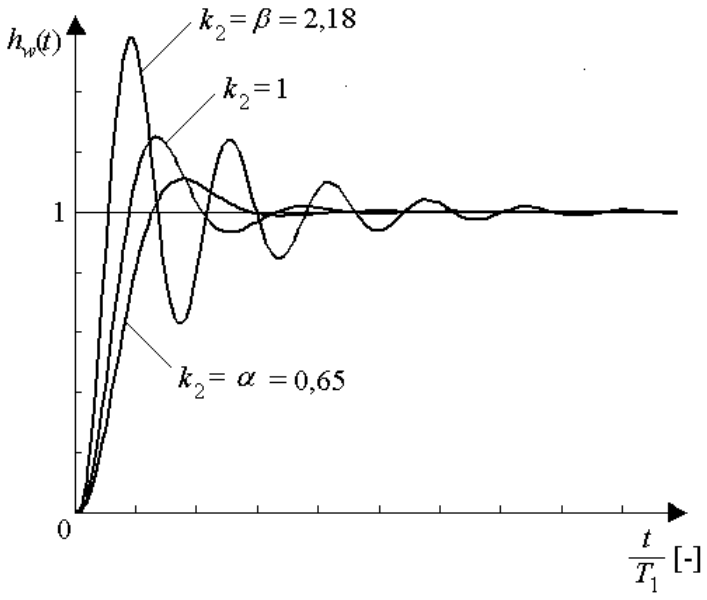
$$\beta = \frac{M_S}{M_S - 1} = \frac{1{,}85}{1{,}85 - 1} \doteq 2{,}18.$$

Vzhledem ke konzervativnosti kruhového kritéria lze očekávat, že regulační obvod bude pro nelinearitu nebo proměnné zesílení v sektoru α =0,65 a β = 2,18 nejenom asymptoticky stabilní, ale i schopen pracovat (i když s nižší kvalitou).

Pokud sektorová nelinearita bude zastoupena zesílením

$$\alpha = 0{,}65 \le k_2 \le \beta = 2{,}18,$$

pak odpovídající přechodové charakteristiky regulačního obvodu pro $T_I^* = 2k_1T_1$ jsou na obr. 5.21 (k_2 = 1 odpovídá nominálnímu regulačnímu obvodu bez nelinearity či neurčitosti).



Obr. 5.21 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu – příklad 5.4

Je zřejmé, že v tomto případě aditivní neurčitost (přenosu) regulované soustavy je dána vztahem

$$\Delta G_S(s) = \frac{k_2}{(T_1 s + 1)^2} - \frac{k_1}{(T_1 s + 1)^2} = \frac{\Delta k_1}{(T_1 s + 1)^2},$$

kde

$$-0{,}35 \le \Delta k_1 \le 1{,}18 .$$

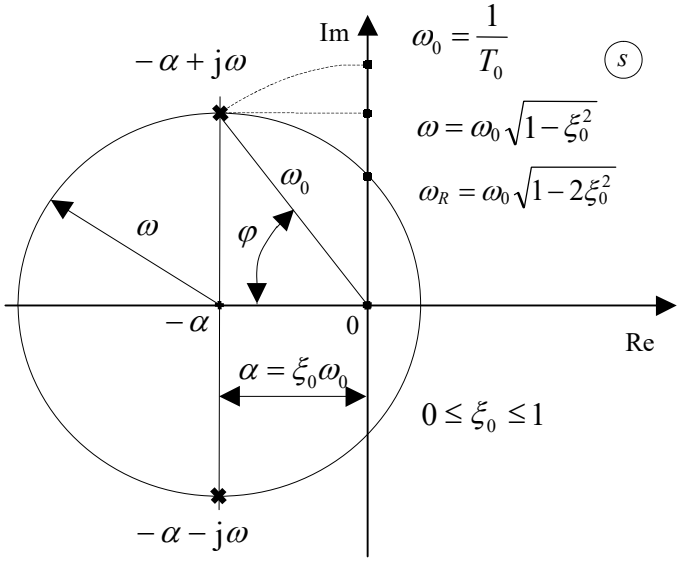
Pokud kvalita regulace vyjádřena v časové oblasti přechodovými charakteristikami na obr. 5.21 je vyhovující, lze říci, že regulační obvod je robustní vzhledem k dané neurčitosti $\Delta G_s(s)$. Zde je neurčitost vyjádřena ekvivalentně v oblasti komplexní proměnné s.

Oblast komplexní proměnné

Na kvalitu regulace má zásadní vliv rozmístění pólů a nul přenosu řízení $G_{wy}(s)$. Vliv rozmístění pólů přenosu řízení $G_{wy}(s)$, na vlastnosti regulačního obvodu je ukázán na obr. 4.23. U regulačního obvodu se samozřejmě předpokládá, že je stabilní, tzn. že všechny jeho póly musí ležet v levé polorovině komplexní roviny s (viz podkap. 4.3).

Vliv rozmístění pólů na dynamické vlastnosti je nejlépe vidět na kmitavém proporcionálním členu 2. řádu s přenosem (viz též příklad 5.1)

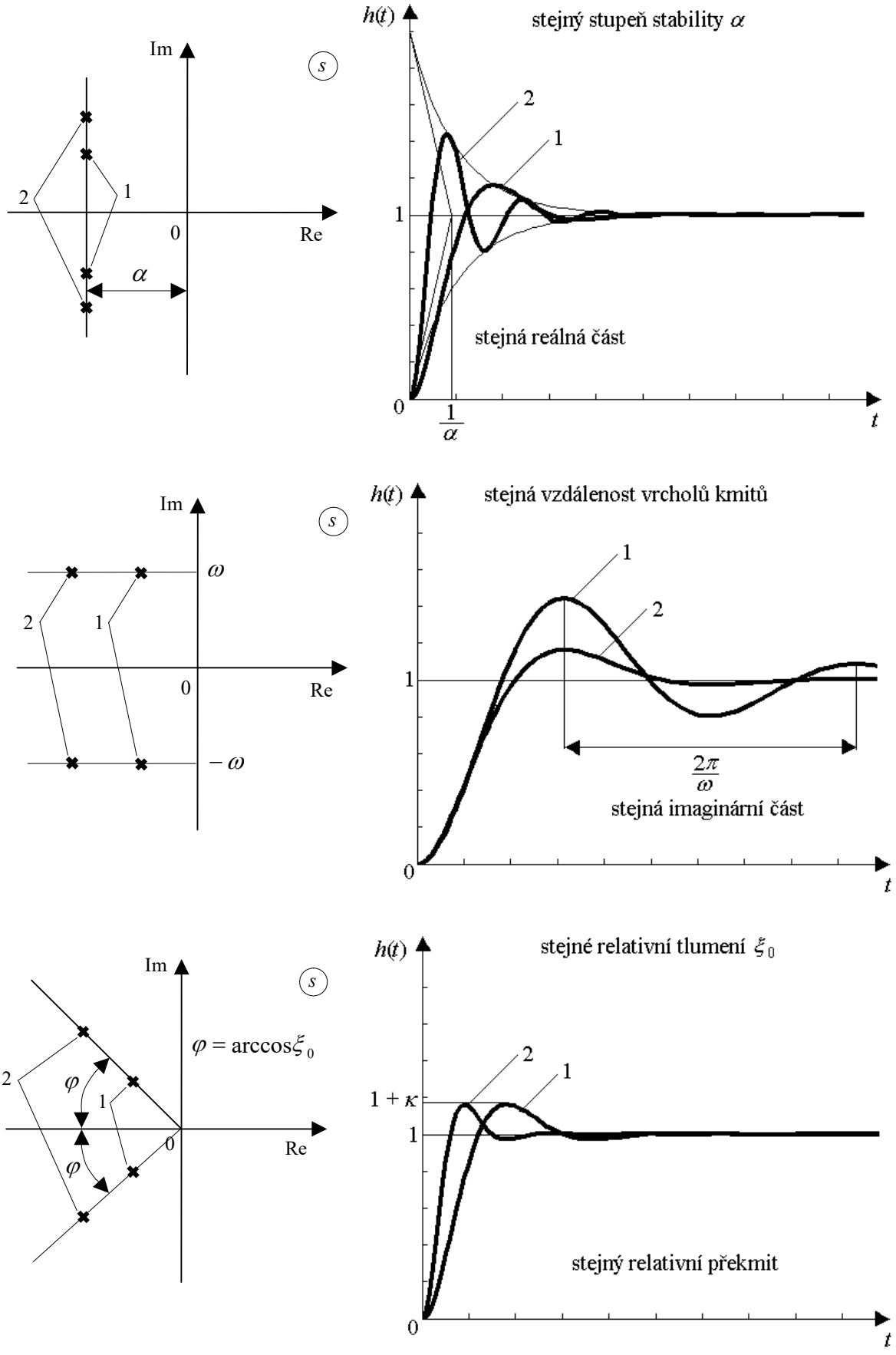
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0 \omega_0 s + \omega_0^2}, \tag{5.38}$$



Obr. 5.22 – Geometrická interpretace parametrů kmitavého proporcionálního členu 2. řádu

jehož přechodová funkce je dána vztahem

$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)}\right\} = 1 - C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi), \tag{5.39}$$



Obr. 5.23 – Vliv rozmístění komplexně sdružených pólů kmitavého proporcionálního členu 2. řádu na průběh jeho přechodové charakteristiky

$$C = \frac{1}{\omega T_0} = \frac{\omega_0}{\omega}, \qquad \alpha = \frac{\xi_0}{T_0} = \xi_0 \omega_0, \qquad \omega_0 = \frac{1}{T_0},$$

$$\omega = \frac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2} = \omega_0\sqrt{1-\xi_0^2}, \qquad \omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\xi_0^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha} = \arccos\xi_0.$$

Názorná geometrická interpretace parametrů kmitavého proporcionálního členu 2. řádu je na obr. 5.22 a vliv rozložení pólů na průběh jeho přechodové charakteristiky je na obr. 5.23. Některé z těchto parametrů mají své speciální názvy: ω_0 – ***úhlový kmitočet netlumených kmitů*** (vlastní nebo přirozený úhlový kmitočet), ω – ***úhlový kmitočet tlumených kmitů***, ω_R – rezonanční úhlový kmitočet, ξ_0 – ***relativní tlumení***, α – ***stupeň stability*** (absolutní tlumení). Stupeň stability α ($\alpha > 0$) má rozměr čas^{-1} na rozdíl od bezrozměrného relativního tlumení ξ_0 a vyjadřuje vzdálenost dvojice pólů od imaginární osy. Vyjadřuje rychlost exponenciálního poklesu kmitů přechodové charakteristiky $h(t)$, tj. rychlost exponenciálního přibližování přechodové charakteristiky $h(t)$ k ustálené hodnotě $h(\infty)$ [viz vztah (5.39) a obr. 5.23].

Význam stupně stability α je názorně ukázán na proporcionálním členu se setrvačností 1. řádu (obr. 5.24a) a 2. řádu (obr. 5.24b). Z obou obrázků je zřejmé, že čím je stupeň stability α větší, tím kratší je doba regulace t_r.

Relativní tlumení ξ_0 určuje velikost relativního překmitu κ (obr. 5.23). Konstantní hodnotě relativního tlumení ξ_0 odpovídají dvě polopřímky, které svírají se zápornou reálnou poloosou úhel φ (komplexní kořeny vždy vystupují v komplexně sdružených dvojicích).

Je tedy zřejmé, že na základě požadavků na kvalitu regulace, vyjádřenou maximální přípustnou dobou regulace t_r a maximálním přípustným relativním překmitem κ, lze vymezit v levé polorovině komplexní proměnné s přípustnou oblast, ve které musí ležet všechny póly regulačního obvodu, viz obr. 5.25. Póly regulačního obvodu, které leží v přípustné oblasti nejblíže její hranice, se nazývají ***dominantní póly*** (někdy se za dominantní póly považují ty, které leží nejblíže imaginární osy). Předpokládá se, že póly v přípustné oblasti ležící daleko od její hranice mají na vlastnosti regulačního obvodu zanedbatelný vliv.

Hranice přípustné oblasti na obr. 5.25 jsou určeny vztahy

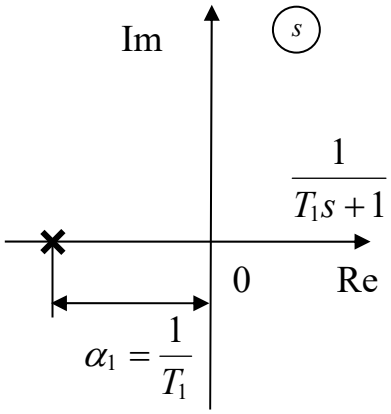
$$\alpha_w \geq (3 \div 5)\frac{1}{t_r}, \tag{5.40}$$

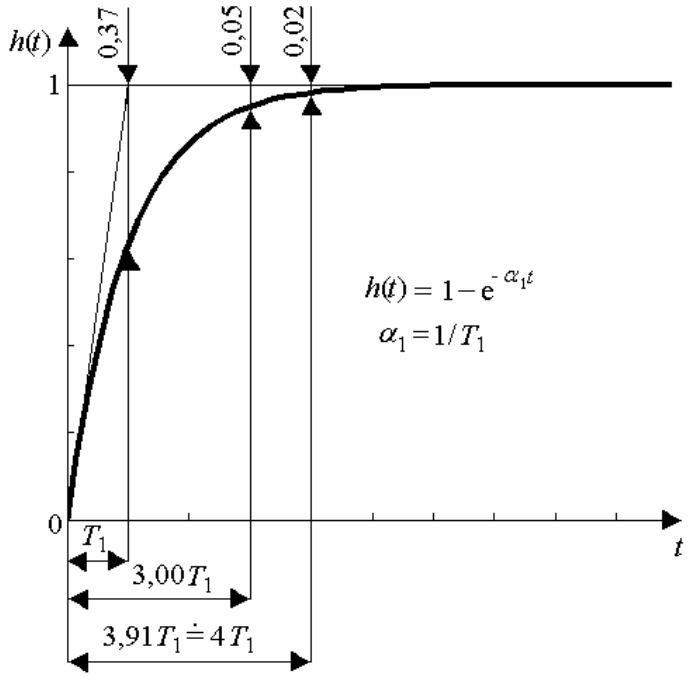
$$\varphi_w \leq 66° (1{,}15 \text{ rad}). \tag{5.41}$$

Ve vztahu (5.40) je menší číslo uvažováno v případě jednoho dominantního reálného pólu a větší v případě dominantního dvojnásobného reálného pólu. Druhý vztah (5.41) vychází z předpokladu maximálního 25% přípustného relativního překmitu, tj. (viz příklad 5.1)

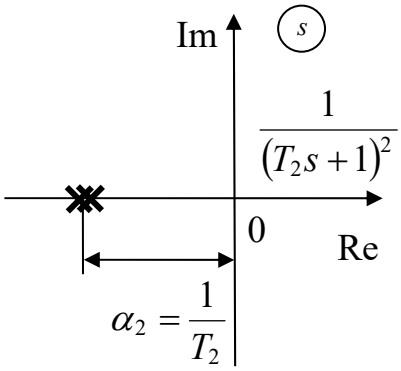
$$\kappa \leq 0{,}25 \;\Rightarrow\; \xi_0 \geq 0{,}404 \;\Rightarrow\; \varphi_w \leq 66°.$$

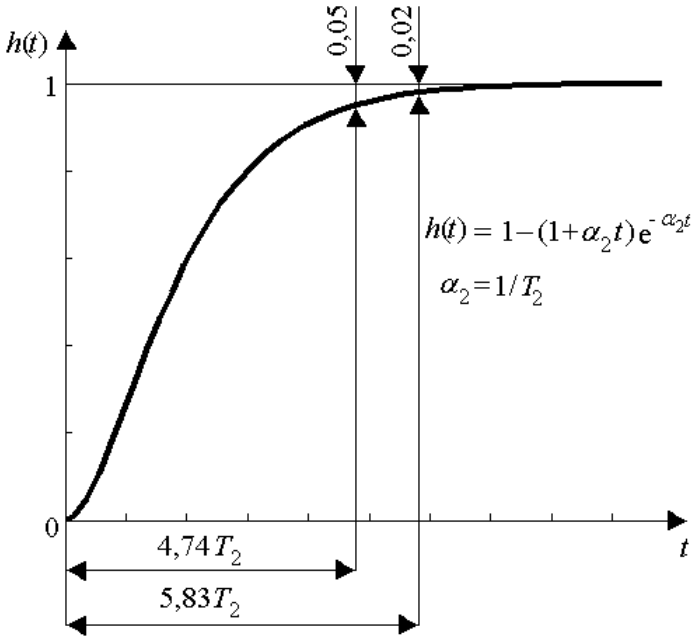
a)



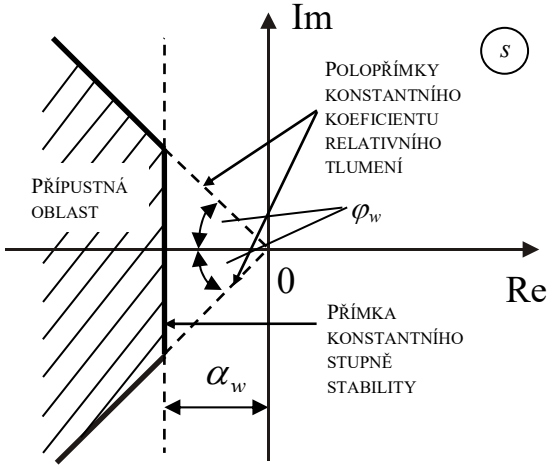


b)





Obr. 5.24 – Vliv tlumení na přechodovou charakteristiku a dobu regulace u nekmitavého proporcionálního členu se setrvačností: a) 1. řádu, b) 2. řádu



Obr. 5.25 – Vymezení přípustné oblasti pro póly regulačního obvodu

Pokud je požadována jiná hodnota relativního překmitu κ, pak na základě vztahů z příkladu 5.1 se snadno určí odpovídající hodnota úhlu φ_w.

Doposud byl uvažován pouze vliv dominantních pólů regulačního obvodu na jeho dynamické vlastnosti. V případě, že uvažovaný přenos v čitateli obsahuje mnohočlen, pak jeho kořeny, tj. nuly přenosu, mohou někdy rovněž významným způsobem ovlivnit výslednou dynamiku regulačního obvodu. Např. je uvažován přenos řízení regulačního obvodu ve tvaru

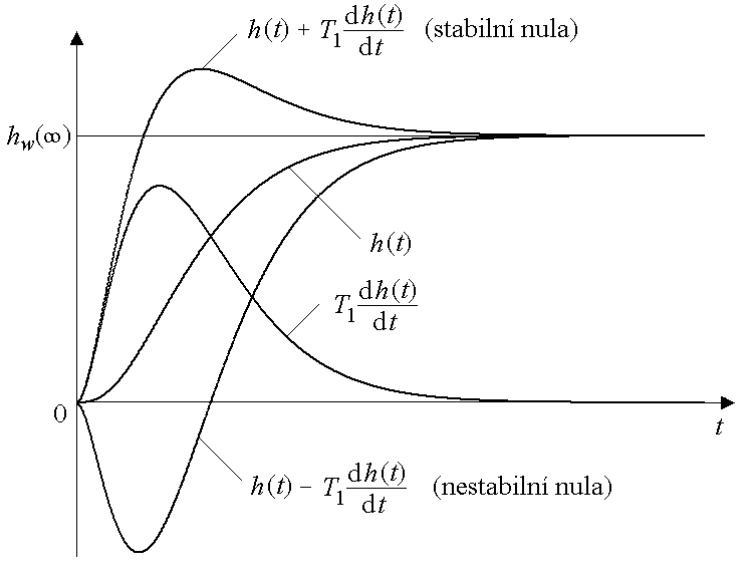
$$G_{wy}(s) = \frac{1 \pm T_1 s}{N(s)}, \quad s^0 = \mp \frac{1}{T_1}, \tag{5.42}$$

kde s^0 je nula přenosu řízení, $N(s)$ – charakteristický mnohočlen regulačního obvodu se stabilními póly.

Přechodová funkce regulačního obvodu $h_w(t)$ je dána vztahem

$$h_w(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{G_{wy}(s)}{s}\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{sN(s)}\right\} \pm T_1\,\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{N(s)}\right\} = h(t) \pm T_1 \frac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{5.43}$$

Je zřejmé, že přechodová funkce regulačního obvodu $h_w(t)$ se skládá ze dvou složek, přičemž druhá složka je derivací první složky násobená časovou konstantou T_1 s uvažováním příslušného znaménka, viz obr. 5.26. Z obr. 5.26 vyplývá, že stabilní nula $s^0 = -\frac{1}{T_1}$ může mít na přechodovou charakteristiku kladný vliv, protože urychluje přechodný proces. Při veliké hodnotě časové konstanty T_1 může ale způsobit nežádoucí překmit. Nestabilní nula $s^0 = \frac{1}{T_1}$ způsobuje neminimálněfázovost přenosu řízení $G_{wy}(s)$ (viz podkap. 3.2). Její vliv je vždy negativní, zpomaluje přechodný proces a při veliké hodnotě časové konstanty T_1 může vzniknout podkmit.



Obr. 5.26 – Vliv stabilní a nestabilní nuly na přechodovou charakteristiku regulačního obvodu

Stupeň astatismu regulačního obvodu q lze snadno určit z přenosu řízení ve tvaru

$$G_{wy}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},\ n \geq m, \tag{5.44a}$$

protože platí

$$\begin{aligned} &b_0 \neq a_0 && \Rightarrow && q = 0, \\ &b_0 = a_0,\ b_1 \neq a_1 && \Rightarrow && q = 1, \\ &b_0 = a_0,\ b_1 = a_1,\ b_2 \neq a_2 && \Rightarrow && q = 2, \\ &\text{atd.} \end{aligned} \tag{5.44b}$$

Vyplývá to z definice stupně astatismu q, který je dán počtem integračních členů otevřeného regulačního obvodu, tzn. že ve jmenovateli přenosu otevřeného regulačního obvodu $G_o(s)$ lze vytknout s^q. Pak za předpokladu jednotkové zpětné vazby lze psát ($n \geq m$)

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^q (s^{n-q} + a_{n-1}s^{n-q-1} + \ldots + a_{q+1}s + a_q)} \Rightarrow \\ G_{wy}(s) &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_{q-1}s^{q-1} + \ldots + b_1 s + b_0}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že z důvodu strukturální nestability (viz příklad 5.2) musí platit $m \geq q - 1 \Rightarrow q \leq m + 1$.

Příklad 5.5

V příkladu 5.3 pro přenos řízení ve tvaru

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1} \quad ,$$

bylo určeno optimální relativní tlumení ξ_w^* z hlediska minimálních hodnot integrálních kritérií I_{IE}, I_{ISE} a I_{ITAE}, tj.

$$I_{IE} \to \min \Rightarrow \xi_w^* = 1 \qquad \Rightarrow \; T_w = 2T_1,$$

$$I_{ISE} \to \min \Rightarrow \xi_w^* = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \; T_w = T_1,$$

$$I_{ITAE} \to \min \Rightarrow \xi_w^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \; \Rightarrow \; T_w = \sqrt{2}T_1.$$

Pro tyto tři případy je třeba určit rozmístění pólů regulačního obvodu.

Řešení:

Charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(s) = T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1 = T_w^2 (s^2 + \frac{2\xi_w}{T_w} s + \frac{1}{T_w^2})$$

má dva póly

$$s_{1,2} = -\frac{\xi_w}{T_w} \pm \mathrm{j}\frac{1}{T_w}\sqrt{1-\xi_w^2} \; .$$

Po dosazení do posledního vztahu optimálního relativního tlumení ξ_w a odpovídající časové konstanty regulačního obvodu T_w se dostane:

a) lineární regulační plocha

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2T_1}, \quad \varphi_w = 0,$$

b) kvadratická regulační plocha

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2T_1}, \qquad \varphi_w = \frac{\pi}{3} \; (60°),$$

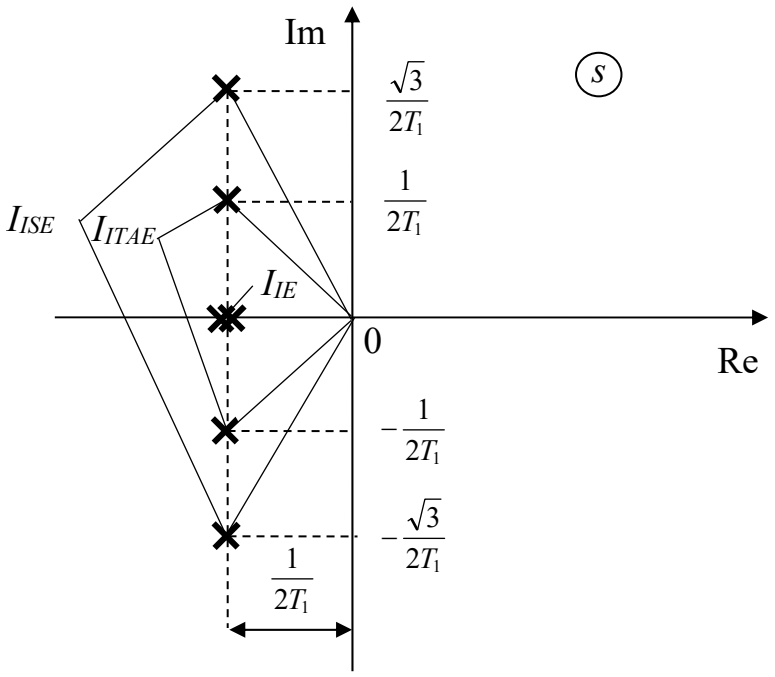
c) kritérium ITAE

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2T_1}, \qquad \varphi_w = \frac{\pi}{4} \; (45°).$$

Rozmístění pólů regulačního obvodu je na obr. 5.27.

Je zřejmé, že pro všechny tři uvedené případy je stupeň stability (absolutní tlumení) stejný

$$\alpha_w = \frac{1}{2T_1}.$$



Obr. 5.27 – Rozmístění pólů regulačního obvodu – příklad 5.5

5.2 Seřizování regulátorů

Syntéza regulačního obvodu patří k nejdůležitějším činnostem při návrhu regulačního obvodu. Skládá se z volby vhodného typu regulátoru a jeho následného seřízení z hlediska zadaných požadavků na kvalitu regulace.

Vznik trvalých regulačních odchylek je většinou nežádoucí, a proto se volí takový regulátor, aby stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 1$. Vyšší stupeň astatismu q zaručuje sice nulovost trvalých regulačních odchylek vyvolaných i jinými skokovými změnami než změnami polohy, ale současně způsobuje náchylnost regulačního obvodu k nestabilitě a podstatným způsobem znesnadňuje jeho seřízení. Stupeň astatismu $q = 0$ lze použít pouze u velmi jednoduchých regulačních obvodů s nízkými požadavky na kvalitu regulace. V případě regulace soustav s dopravním zpožděním by byly trvalé regulační odchylky nepřípustně veliké. Regulátor rovněž nesmí způsobit strukturální nestabilitu. Všeobecně platí, že regulátor obsahující více složek zajistí vyšší kvalitu regulace.

Úkolem regulátoru je zajistit splnění cíle regulace (4.2) [nebo (4.8)] při požadované kvalitě. Jak bylo ukázáno v podkap. 4.1, lze toho dosáhnout, pokud budou splněny podmínky (4.15), příp. (4.16), samozřejmě při zaručení stability regulačního obvodu. Právě volbou vhodného typu regulátoru a jeho odpovídajícím seřízením lze všechny tato podmínky splnit.

Velmi důležité jsou podmínky (4.15), příp. (4.16), protože jejich splnění zaručuje nízkou hodnotu funkce citlivosti $S(j\omega)$ [viz (5.27)], a tedy malý vliv relativních změn vlastností jak regulátoru, tak především regulované soustavy na relativní změnu regulované veličiny při konstantní hodnotě žádané veličiny w.

Je to velmi důležité, protože vlastnosti regulované soustavy nemusí být vždy dobře známé a také se mohou v průběhu regulace měnit.

Pro jednoduchou představu je možné uvažovat ustálený stav. Tak např. pro

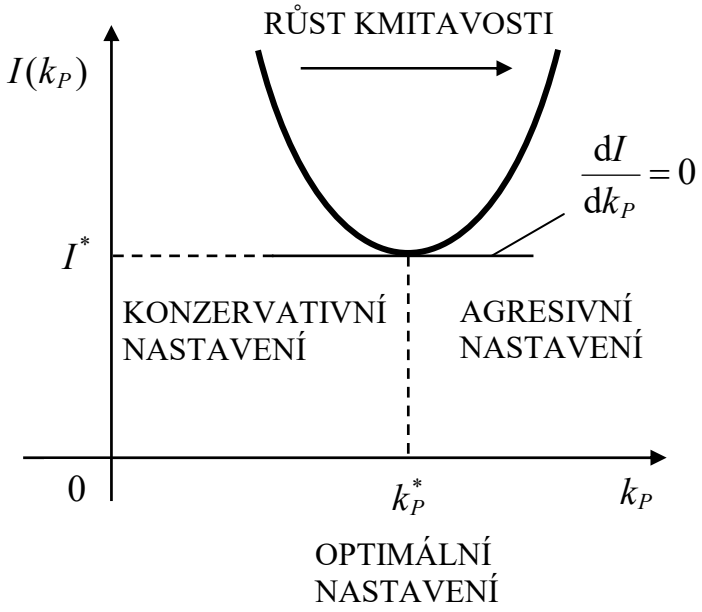
$$\lim_{\omega\to 0}\left|G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)\right| = 100$$

se relativní změna koeficientu přenosu regulované soustavy o 0,1 (tj. o 10 %) na relativní změně regulované veličiny projeví pouze o 0,001 (tj. 0,1 %), což je v podstatě zanedbatelné. Je zřejmé, že v tomto případě stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 0$. Pro $q \geq 1$ by samozřejmě relativní změna výstupní veličiny v ustáleném stavu byla nulová, protože

$$\lim_{\omega\to 0}\left|G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)\right| = \infty .$$

Nízká hodnota funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ je důležitá rovněž z hlediska regulátoru, protože nastavení vypočtených hodnot jeho stavitelných parametrů lze provést vždy jen s určitou přesností. Týká se to především pneumatických regulátorů.

Také je třeba si uvědomit, že u „hladkého“ extrému (tj. maxima nebo minima) nevelké změny parametrů, na kterých závisí, mají nevelký vliv na jeho optimální hodnotu (gradient u hladkého extrému je nulový), viz obr. 5.28. Na tomto obrázku je ukázána závislost zvoleného ukazatele (kritéria) kvality I např. na zesílení regulátoru k_P. Proto je vhodné hodnoty stavitelných parametrů regulátoru určovat pro daný ukazatel kvality optimalizací.



Obr. 5.28 – Závislost ukazatele kvality I na zesílení regulátoru k_P

Ze všech těchto důvodů vyplývá, že volbě a seřízení regulátoru pro danou „nominální“ (tj. zadanou, identifikovanou atd.) regulovanou soustavu je třeba věnovat náležitou pozornost.

Metody seřizování konvenčních regulátorů mohou být experimentální, analytické a kombinované, tj. analyticko – experimentální.

Experimentální metody „pokus – omyl“

Mezi základní experimentální metody seřizování regulátorů patří metody „pokus – omyl“. Takové metody jsou v praxi často používané, protože pracují se skutečným uzavřeným regulačním obvodem, a tedy nevyžadují v podstatě žádné znalosti o vlastnostech regulované soustavy. Aplikují se na existující regulační obvody, které je nutno doladit nebo seřídit po rekonstrukci nebo opravě.

Z mnoha existujících metod „pokus – omyl“ bude uvedena pouze jedna metoda, která je jednoduchá a velmi účinná.

Postup:

1. U regulačního obvodu se zkontroluje celé zapojení a ověří se funkčnost všech jeho členů.
2. Nastaví se požadovaná hodnota žádané veličiny w a v ručním režimu se nastaví $y \approx w$, vyřadí se integrační složka ($T_I \rightarrow \infty$) a derivační složka ($T_D \rightarrow 0$), zesílení regulátoru k_P se sníží a regulátor se přepne do automatického režimu.
3. Zesílení regulátoru k_P se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny w se dostane požadovaný průběh regulované veličiny y (v případě proporcionální regulované soustavy zůstane trvalá regulační odchylka – nevadí).
4. Zesílení regulátoru k_P se sníží na ¾ předchozí hodnoty a pomalu se začne snižovat integrační časová konstanta T_I a to tak dlouho až je odstraněna případná trvalá regulační odchylka a získá se při skokové změně polohy žádané veličiny w požadovaný průběh regulované veličiny y. Je vhodné, aby tento průběh byl mezní nekmitavý.
5. Konečný požadovaný průběh regulované veličiny y se získá doladěním zesílení regulátoru k_P.
6. V případě použití derivační složky se derivační časová konstanta T_D nastaví na počáteční hodnotu 1/10 T_I. Pokud se nepříznivě projeví šumy nebo akční veličina u bude příliš aktivní, pak použití derivační složky není vhodné a znovu se vyřadí. Pokud dojde ke zlepšení regulačního procesu, hodnota derivační časové konstanty T_D se zvýší až na hodnotu 1/4 T_I, zesílení regulátoru k_P se zvýší asi o 1/4 předchozí hodnoty (tj. hodnoty získané v bodě 5) a hodnota integrační časové konstanty T_I se sníží asi o 1/3 předchozí hodnoty (tj. hodnoty získané v bodě 4).

Uvedený postup umožňuje experimentálně seřídit regulační obvod na požadovaný průběh regulované veličiny y z hlediska skokových změn polohy žádané veličiny w a poruchové veličiny v působící na výstupu regulované soustavy.

Zieglerovy – Nicholsovy experimentální metody

Zieglerovy – Nicholsovy metody patří mezi klasické metody experimentálního seřizování konvenčních regulátorů. Jsou vhodné pro úvodní

seřízení regulátorů, protože dávají většinou veliký překmit v rozmezí od 10 % do 60 %, v průměru pro různé regulované soustavy asi 25 %, viz obr. 5.29.

U těchto metod u regulátoru PID je zajímavý konstantní poměr

$$\frac{T_D^*}{T_I^*} = \frac{1}{4}. \tag{5.46}$$

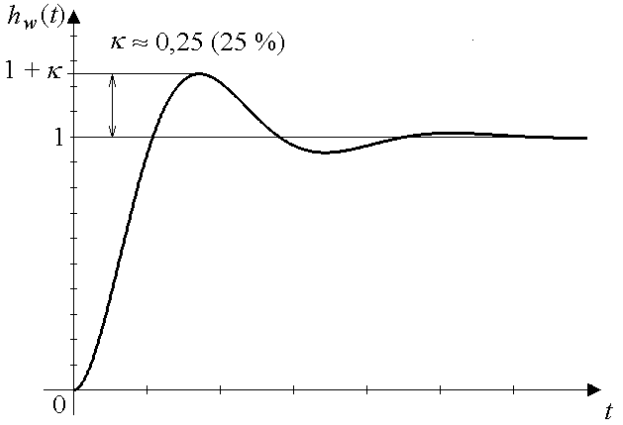
Seřízení Zieglerovými – Nicholsovými experimentálními metodami bývá vhodné pro stabilizující regulaci v případě působení poruchové veličiny v na vstupu regulované soustavy.

Dále budou uvedeny dvě původní Zieglerovy – Nicholsovy metody a jedna modifikace, která z nich vychází.

Metoda přechodové charakteristiky

Metoda přechodové charakteristiky (metoda otevřeného regulačního obvodu) vychází z přechodové charakteristiky proporcionální regulované soustavy, ze které se v souladu s obr. 4.18 určí doba průtahu T_u, doba náběhu T_n a koeficient přenosu k_1.

Hodnoty stavitelných parametrů pro zvolený typ regulátoru jsou uvedeny v tab. 5.2.



Obr. 5.29 – „Průměrná“ přechodová charakteristika regulačního obvodu seřízeného Zieglerovými – Nicholsovými experimentálními metodami

Tab. 5.2 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro Zieglerovu – Nicholsovu metodu přechodové charakteristiky

Regulátor	k_P^*	T_I^*	T_D^*
P	$\frac{T_n}{k_1 T_u}$	–	–
PI	$0{,}9\frac{T_n}{k_1 T_u}$	$3{,}33T_u$	–
PID	$1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u}$	$2T_u$	$0{,}5T_u$

Destabilizující vliv integrační složky u regulátoru PI se projevil snížením zesílení k_P^*, oproti regulátoru P a stabilizující vliv derivační složky zvýšením zesílení k_P^* (porovnej s tab. 5.3).

Zajímavý je tvar přenosu regulátoru PID seřízeného metodou přechodové charakteristiky

$$G_R(s) = k_P^*(1 + \frac{1}{T_I^* s} + T_D^* s) = 1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u}(1 + \frac{1}{2T_u s} + \frac{T_u}{2}s) = 0{,}6\frac{T_n}{k_1 T_u^2}\frac{(T_u s + 1)^2}{s}. \quad (5.47)$$

Postup:

1. Z přechodové charakteristiky nekmitavé proporcionální regulované soustavy se určí doba průtahu T_u, doba náběhu T_n a koeficient přenosu k_1 (viz podkap. 4.2, obr. 4.18).
2. Z tab. 5.2 se pro zvolený typ regulátoru vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 5.6

Z přechodové charakteristiky nekmitavé proporcionální regulované soustavy s přenosem (časová konstanta je v min)

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

byly získány identifikací parametry: $T_u = 3{,}2$ min, $T_n = 14{,}8$ min a $k_1 = 2$.

Zieglerovou – Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky je třeba seřídit regulační obvod pro regulátory P, PI a PID.

Řešení:

Na základě tab. 5.2 lze psát

P: $k_P^* = \frac{T_n}{k_1 T_u} = \frac{14{,}8}{2 \cdot 3{,}2} \doteq 2{,}31;$

PI: $k_P^* = 0{,}9\frac{T_n}{k_1 T_u} = 0{,}9\frac{14{,}8}{2 \cdot 3{,}2} \doteq 2{,}08;$

$T_I^* = 3{,}33 T_u = 3{,}33 \cdot 3{,}2 \doteq 10{,}66\,\text{min};$

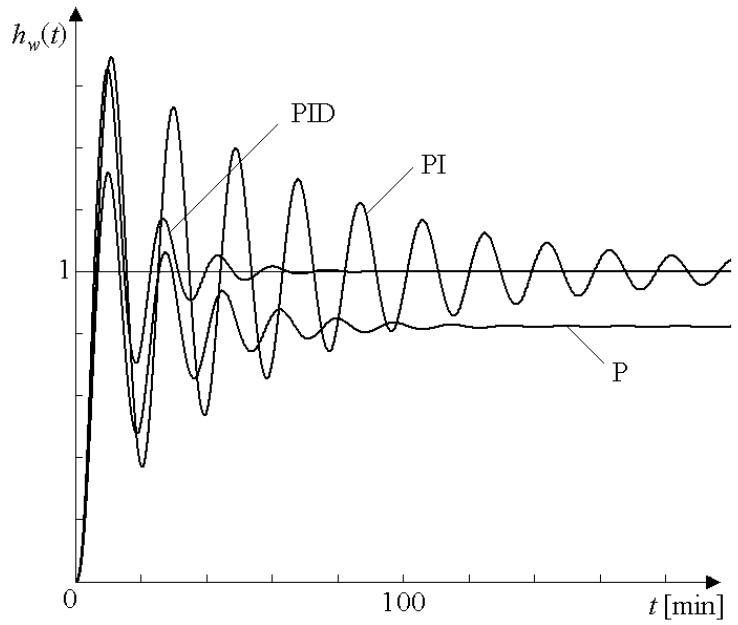
PID: $k_P^* = 1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u} = 1{,}2\frac{14{,}8}{2 \cdot 3{,}2} \doteq 2{,}78;$

$T_I^* = 2T_u = 2 \cdot 3{,}2 = 6{,}4\,\text{min};$

$T_D^* = 0{,}5 T_u = 0{,}5 \cdot 3{,}2 = 1{,}6\,\text{min}.$

Přechodové charakteristiky regulačního obvodu jsou na obr. 5.30. Je zřejmé, že překmit i kmitavost jsou dosti veliké a navíc v případě použití regulátoru P zůstala v regulačním obvodu poměrně vysoká trvalá regulační odchylka [viz (5.3)]

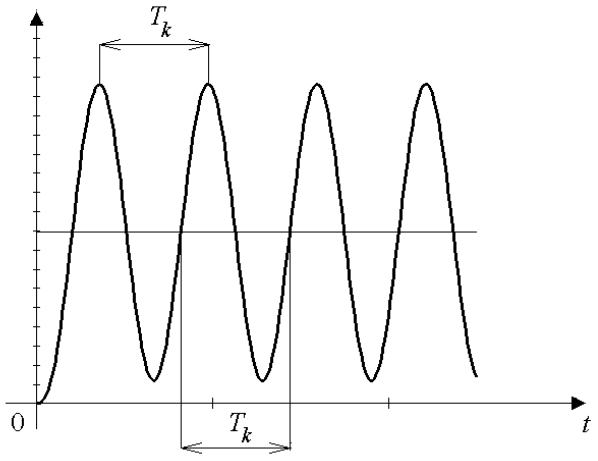
$$e_w(\infty) = \lim_{s\to 0}[sE_w(s)] = \lim_{s\to 0}[sG_{we}(s)W(s)] = \frac{1}{1+k_P^* k_1} \doteq 0{,}18\,.$$



Obr. 5.30 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného Zieglerovou – Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky – příklad 5.6

Metoda kritických parametrů

Metoda kritických parametrů (metoda uzavřeného regulačního obvodu) vychází ze skutečného regulačního obvodu, který se při vyřazené integrační činnosti ($T_I \to \infty$) a derivační činnosti ($T_D \to 0$) zvyšováním zesílení regulátoru k_P přivede na kmitavou mez stability. Pak z periodického průběhu libovolné veličiny regulačního obvodu se odečte kritická perioda T_k a z odpovídajícího nastavení regulátoru – kritické zesílení k_{Pk}, viz obr. 5.31.



Obr. 5.31 – Určené kritické periody T_k

Hodnoty stavitelných parametrů zvoleného regulátoru se určí na základě tab. 5.3

Tab. 5.3 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro Zieglerovu – Nicholsovu metodu kritických parametrů

Regulátor	k_P^*	T_I^*	T_D^*
P	$0{,}5k_{Pk}$	–	–
PI	$0{,}45k_{Pk}$	$0{,}83T_k$	–
PID	$0{,}6k_{Pk}$	$0{,}5T_k$	$0{,}125T_k$

Přenos regulátoru PID seřízeného metodou kritických parametrů má tvar

$$G_R(s) = k_P^*(1+\frac{1}{T_I^* s}+T_D^* s) = 0{,}6k_{Pk}(1+\frac{1}{0{,}5T_k s}+0{,}125T_k s)$$
$$= 1{,}2\frac{k_{Pk}}{T_k}\frac{(\frac{T_k}{4}s+1)^2}{s}\,. \qquad (5.48)$$

Ze srovnání vztahů (5.47) a (5.48) vyplývá, že

$$k_{Pk} = 2\frac{T_n}{k_1 T_u}, \qquad T_k = 4T_u\,. \qquad (5.49)$$

Vztahy (5.49) lze pro $T_u < T_n$ použít pro přibližné určení kritických parametrů k_{Pk} a T_k.

Z prvního vztahu (5.49) a tab. 5.3 vyplývá, že obě Zieglerovy – Nicholsovy metody v případě použití regulátoru P mají amplitudovou bezpečnost $m_A = 2$, tzn. že při dvojnásobném zvýšení zesílení regulátoru k_P se regulační obvod dostane na kmitavou mez stability.

Metoda kritických parametrů je použitelná i pro regulátory typu I. V tomto případě se regulační obvod přivede na kmitavou mez stability vhodným snížením integrační časové konstanty T_I. Při vystoupení kmitavé meze stability se z nastavení regulátoru odečte kritická hodnota integrační časové konstanty T_{Ik} a pak pro seřízení se použije hodnota

$$T_I^* = 2T_{Ik}\,. \qquad (5.50)$$

I v tomto případě je amplitudová bezpečnost $m_A = 2$.

Pokud je požadován nekmitavý regulační pochod, pak se volí

$$T_I^* = (4 \div 6)T_{Ik} \qquad (5.51)$$

s amplitudovou bezpečností $m_A = 4 \div 6$.

Zieglerova – Nicholsova metoda kritických parametrů je výhodná především tím, že nepředpokládá žádnou znalost vlastností regulované soustavy a že pracuje s reálnou soustavou i regulátorem. Její zásadní vadou je, že musí přivést regulační obvod na mez kmitavé stability, tj. musí ho rozkmitat, co většina

reálných soustav nedovoluje a dále, že se mohou výraznějším způsobem projevit jejich nelineární vlastnosti.

V případě znalosti matematického modelu regulované soustavy kritické parametry k_{Pk} a T_k, příp. T_{Ik} je možné získat analyticky. Pokud regulovaná soustava neobsahuje dopravní zpoždění, je výhodné použití Michajlovova kritéria stability (viz podkap. 4.3).

Postup:

1. a 2. Stejný postup jako u experimentální metody „pokus – omyl".
3. Zesílení regulátoru k_P se postupně zvyšuje tak dlouho, až při malé změně žádané veličiny w v regulačním obvodu vystoupí kmity se stejnou amplitudou, co odpovídá kmitavé mezi stability.
4. Z periodického průběhu libovolné veličiny regulačního obvodu se určí kritická perioda T_k a z nastavení regulátoru – kritické zesílení k_{Pk}.
5. Pro zvolený typ regulátoru se z tab. 5.3 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 5.7

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_3 s + 1)^3}$$

je třeba Zieglerovou – Nicholsovou metodou kritických parametrů seřídit regulační obvod pro regulátory P, PI a PID.

Řešení:

Regulovaná soustava je zadaná obecně, a proto kritické parametry budou určeny analyticky pomocí Michajlovova kritéria stability.

Pro proporcionální složku regulátoru z přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(s) = \frac{k_1 k_P}{(T_3 s + 1)^3} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}$$

se získá charakteristický mnohočlen

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = T_3^3 s^3 + 3T_3^2 s^2 + 3T_3 s + 1 + k_1 k_P,$$

ze kterého po dosazení $s = \mathrm{j}\omega$ se obdrží Michajlovova funkce

$$N(\mathrm{j}\omega) = N_P(\omega) + \mathrm{j} N_Q(\omega) = 1 + k_1 k_P - 3T_3^2 \omega^2 + \mathrm{j}\omega T_3 (3 - T_3^2 \omega^2).$$

Regulační obvod je na kmitavé mezi stability, když Michajlovova funkce (charakteristika) prochází počátkem, tj.

$$\left.\begin{aligned} N_P(\omega)=0 &\Rightarrow 1+k_1k_P-3T_3^2\omega^2=0 \\ N_Q(\omega)=0 &\Rightarrow \omega T_3(3-T_3^2\omega^2)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_{Pk} &= \frac{8}{k_1}, \\ \omega_k &= \frac{\sqrt{3}}{T_3} \Rightarrow T_k = \frac{2\pi T_3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Na základě tab. 5.3 se dostane

P: $k_P^* = 0{,}5k_{Pk} = \frac{4}{k_1}$;

PI: $k_P^* = 0{,}45k_{Pk} = \frac{3{,}6}{k_1}$,

$T_I^* = 0{,}83T_k \doteq 3{,}01T_3$;

PID: $k_P^* = 0{,}6k_{Pk} = \frac{4{,}8}{k_1}$,

$T_I^* = 0{,}5T_k \doteq 1{,}81T_3$,

$T_D^* = 0{,}125T_k \doteq 0{,}45T_3$.

Pro číselné hodnoty z příkladu 5.6, tj. $k_1 = 2$ a $T_3 = 4$ min se dostane

P: $k_P^* = 0{,}5k_{Pk} = 2$;

PI: $k_P^* \doteq 1{,}8$,

$T_I^* \doteq 12{,}04\,\text{min}$;

PID: $k_P^* = 2{,}4$,

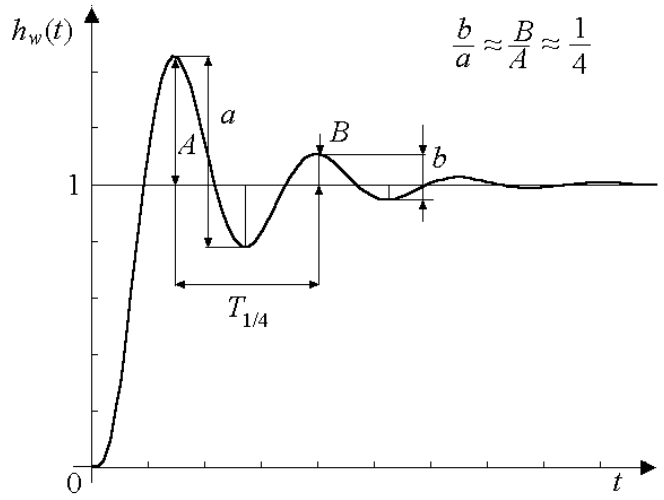
$T_I^* \doteq 7{,}24\,\text{min}$,

$T_D^* \doteq 1{,}81\,\text{min}$.

Ze srovnání těchto hodnot vypočtených metodou kritických parametrů s odpovídajícími hodnotami vypočtených v příkladě 5.6 metodou přechodové charakteristiky vyplývá, že metoda přechodové charakteristiky dává vyšší hodnotu zesílení regulátoru k_P a nižší hodnoty časových konstant T_I a T_D než metoda kritických parametrů. Tzn. že metoda přechodové charakteristiky dává obecně vyšší překmity (seřízení je agresivnější).

Metoda čtvrtinového tlumení

Metoda čtvrtinového tlumení je modifikací Zieglerovy – Nicholsovy metody kritických parametrů. Na rozdíl od této metody nepředpokládá rozkmitání regulačního obvodu, což umožňuje pracovat v lineární oblasti a použití u většího množství regulovaných soustav.



Obr. 5.32 – Seřízení regulačního obvodu metodou čtvrtinového tlumení

Tab. 5.4 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro metodu čtvrtinového tlumení

Regulátor	k_P^*	T_I^*	T_D^*
P	$k_{P1/4}$	–	–
PI	$0{,}9k_{P1/4}$	$T_{1/4}$	–
PID	$1{,}2k_{P1/4}$	$0{,}6T_{1/4}$	$0{,}15T_{1/4}$

Postup:

1. a 2. Stejný postup jako u experimentální metody „pokus – omyl“.
3. Zesílení regulátoru k_P se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny w se obdrží přechodová charakteristika regulačního obvodu $h_w(t)$ taková, aby podíl dvou po sobě následujících amplitud byl roven ¼ (tj. útlum = 4), viz obr. 5.32.
4. Z přechodové charakteristiky se odečte doba kmitu $T_{1/4}$ a z nastavení regulátoru jeho zesílení $k_{P1/4}$.
5. Pro zvolený typ regulátoru se z tab. 5.4 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

„Univerzální“ experimentální metoda

Je to metoda rozpracovaná v bývalém SSSR pro regulované soustavy s přenosy

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{5.52}$$

a

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{5.53}$$

Tab. 5.5 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro „univerzální“ experimentální metodu – přenos (5.52)

$\frac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$		Regulační pochod				
		Nejrychlejší odezva bez překmitu		Nejrychlejší odezva s překmitem 20 %		Minimální kvadratická regulační plocha ISE
Regulátor typ		Seřízení z hlediska				
		žádané veličiny w	poruchové veličiny v	žádané veličiny w	poruchové veličiny v	poruchové veličiny v
P	k_P^*	$0{,}3\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}3\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_d}$	–
PI	k_P^*	$0{,}35\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$\frac{T_1}{k_1 T_d}$
	T_I^*	$1{,}17T_1$	$0{,}8T_d + 0{,}5T_1$	T_1	$T_d + 0{,}3T_1$	$T_d + 0{,}35T_1$
PID	k_P^*	$0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}95\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$0{,}95\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$1{,}2\frac{T_1}{k_1 T_d}$	$1{,}4\frac{T_1}{k_1 T_d}$
	T_I^*	T_1	$2{,}4T_d$	$1{,}36T_1$	$2T_d$	$1{,}3T_d$
	T_D^*	$0{,}5T_d$	$0{,}4T_d$	$0{,}64T_d$	$0{,}4T_d$	$0{,}5T_d$

Tab. 5.6 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro „univerzální“ experimentální metodu – přenos (5.53)

$\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$		Regulační pochod				
		Nejrychlejší odezva bez překmitu		Nejrychlejší odezva s překmitem 20 %		Minimální kvadratická regulační plocha ISE
Regulátor typ		Seřízení z hlediska				
		žádané veličiny w	poruchové veličiny v	žádané veličiny w	poruchové veličiny v	poruchové veličiny v
P	k_P^*	$0{,}37\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}37\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$	–
PI	k_P^*	$0{,}37\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}46\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$	$\frac{1}{k_1 T_d}$
	T_I^*	∞	$5{,}75T_d$	∞	$3T_d$	$4{,}3T_d$
PID	k_P^*	$0{,}65\frac{1}{k_1 T_d}$	$0{,}65\frac{1}{k_1 T_d}$	$1{,}1\frac{1}{k_1 T_d}$	$1{,}1\frac{1}{k_1 T_d}$	$1{,}36\frac{1}{k_1 T_d}$
	T_I^*	∞	$5T_d$	∞	$2T_d$	$1{,}6T_d$
	T_D^*	$0{,}4T_d$	$0{,}23T_d$	$0{,}53T_d$	$0{,}37T_d$	$0{,}5T_d$

která umožňuje seřídit konvenční regulátory jak z hlediska žádané veličiny *w*, tak i poruchové veličiny *v* působící na vstupu regulované soustavy, přičemž kritériem kvality regulace může být nejrychlejší odezva bez překmitu, nejrychlejší odezva s relativním překmitem κ = 0,2 (20 %) a minimální kvadratická regulační plocha. Za nekmitavý regulační pochod se považuje takový, u kterého je maximální relativní překmit od 0,02 (2 %) do 0,05 (5 %).

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na jeden ze tvarů (5.52), nebo (5.53) některým z postupů uvedených v podkap. 4.2.
2. Podle požadavků na kvalitu regulace se zvolí regulátor a druh regulačního pochodu (bez překmitu, s relativním překmitem κ = 0,2, s minimální hodnotou integrálního kritéria ISE) a pro daný účel (seřízení z hlediska žádané veličiny *w*, nebo poruchové veličiny *v* působící na vstupu regulované soustavy) se na základě tab. 5.5 pro přenos (5.52) a tab. 5.6 pro přenos (5.53) vypočtou jeho stavitelné parametry.

Příklad 5.8

Pro regulovanou soustavu s přenosem (viz příklad 5.6 a 5.7)

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

je třeba „univerzální“ experimentální metodou seřídit regulátor PI (časová konstanta je v min).

Řešení:

Přenos regulované soustavy $G_S(s)$ nemá požadovaný tvar (5.52), a proto v souladu se schématem (4.55) a tab. 4.3 lze psát (i = 3, k_1 = 2, T_3 = 4 min, T_{d3} = 0 min)

$$\frac{T_1}{T_3} = 1{,}980 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 1{,}98 \cdot 4 = 7{,}92 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d3}}{T_3} = 1{,}232 \Rightarrow \quad T_{d1} = 1{,}232 \cdot 4 + 0 \doteq 4{,}93 \text{ min},$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3} \approx \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1}s} = \frac{2}{7{,}92s+1} \mathrm{e}^{-4{,}93s}.$$

Seřízení regulátoru PI z hlediska žádané veličiny *w* (tab. 5.5)

a) bez překmitu (0 %)

$$k_P^* = 0{,}35 \frac{T_1}{k_1 T_{d1}} = 0{,}35 \frac{7{,}92}{2 \cdot 4{,}93} \doteq 0{,}28;$$

$$T_I^* = 1{,}17 T_1 = 1{,}17 \cdot 7{,}92 \doteq 9{,}27 \text{ min};$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$k_P^* = 0{,}6 \frac{T_1}{k_1 T_{d1}} = 0{,}6 \frac{7{,}92}{2 \cdot 4{,}93} \doteq 0{,}48;$$

$T_I^* = T_1 = 7{,}92\,\text{min}.$

Seřízení regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny v působící na vstupu regulované soustavy (tab. 5.5)

a) bez překmitu (0 %)

$$k_P^* = 0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} = 0{,}6\frac{7{,}92}{2\cdot 4{,}93} \doteq 0{,}48;$$

$$T_I^* = 0{,}8T_{d1} + 0{,}5T_1 = 0{,}8\cdot 4{,}93 + 0{,}5\cdot 7{,}92 \doteq 7{,}90\,\text{min};$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$k_P^* = 0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} = 0{,}7\frac{7{,}92}{2\cdot 4{,}93} \doteq 0{,}56;$$

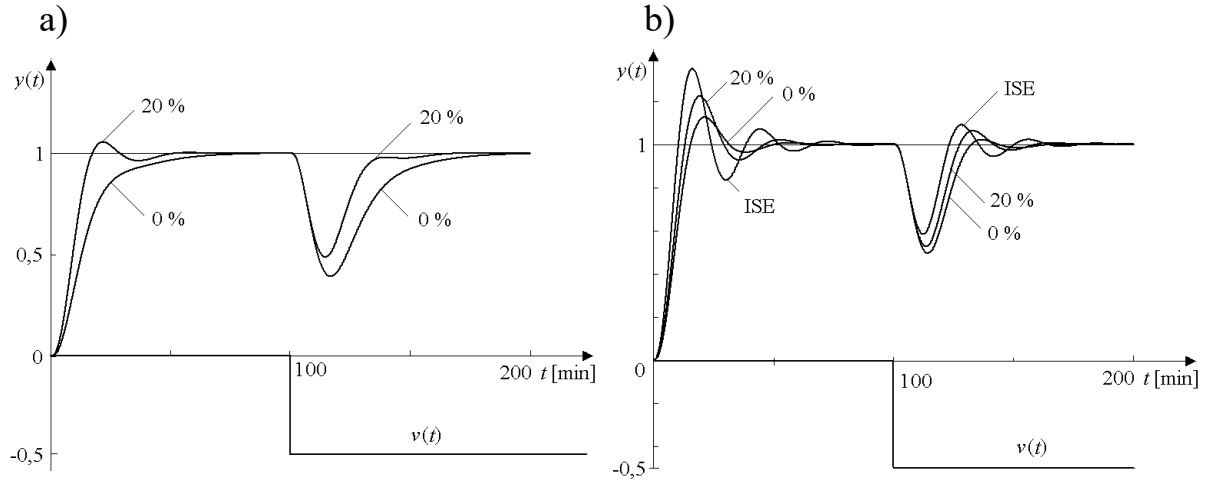
$$T_I^* = T_{d1} + 0{,}3T_1 = 4{,}93 + 0{,}3\cdot 7{,}92 \doteq 7{,}31\,\text{min};$$

c) min ISE

$$k_P^* = \frac{T_1}{k_1 T_{d1}} = \frac{7{,}92}{2\cdot 4{,}93} \doteq 0{,}80;$$

$$T_I^* = T_{d1} + 0{,}35T_1 = 4{,}93 + 0{,}35\cdot 7{,}92 \doteq 7{,}70\,\text{min}.$$

Na obr. 5.33a jsou ukázány odezvy regulačního obvodu seřízeného z hlediska žádané veličiny w a na obr. 5.33b z hlediska poruchové veličiny v působící na vstupu regulované soustavy. Byla uvažována skoková změna polohy poruchové veličiny v o hodnotě – 0,5.



Obr. 5.33 – Odezvy regulačního obvodu s regulátorem PI seřízeným „univerzální“ experimentální metodou z hlediska: a) žádané veličiny w, b) poruchové veličiny v působící na vstupu regulované soustavy – příklad 5.8

Z obou obrázků je zřejmé, že uvedená metoda seřizování dává přijatelné výsledky i při velmi hrubé aproximaci přenosu regulované soustavy.

Metoda násobného dominantního pólu – MNDP

Metoda násobného dominantního pólu je jednoduchá analytická metoda umožňující seřídit konvenční regulátory tak, aby byl zajištěn jeden dominantní reálný pól (samozřejmě stabilní) s maximální možnou násobností. O zbývajících

pólech a případných nulách se předpokládá, že jsou nedominantní a že jejich vliv na výslednou dynamiku regulačního obvodu lze zanedbat.

Pro zvolený nebo doporučený regulátor s p stavitelnými parametry řešením soustavy $p + 1$ rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^j N(s)}{\mathrm{d}s^j} = 0, \qquad j = 0,1,\ldots, p, \tag{5.54}$$

kde $N(s)$ je charakteristický mnohočlen, resp kvazimnohočlen regulačního obvodu, se získá $(p + 1)$-násobný dominantní pól a hodnoty p stavitelných parametrů daného regulátoru. Pro konvenční regulátory P a I je $p = 1$, PD a PI je $p = 2$ a PID je $p = 3$.

a) Regulované soustavy se setrvačností vyššího řádu bez dopravního zpoždění

Pro proporcionální regulovanou soustavu se setrvačností vyššího řádu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_i s + 1)^i} \tag{5.55}$$

se předpokládá použití regulátorů s integrační složkou (I, PI, PID) a pro integrační regulovanou soustavu se setrvačností vyššího řádu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_i s + 1)^i} \tag{5.56}$$

se předpokládá použití regulátorů bez integrační složky (P, PD).

Např. pro regulátor PI s přenosem

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}, \quad k_P = r_0, \quad T_I = \frac{r_0}{r_{-1}}$$

a regulovanou soustavu s přenosem (5.55) lze psát

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_1(r_0 s + r_{-1})}{s(T_i s + 1)^i} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \Rightarrow$$

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = s(T_i s + 1)^i + k_1(r_0 s + r_{-1}).$$

Řešením soustavy 3 rovnic ($p = 2$)

$$N(s) = 0 \;\Rightarrow\; s(T_i s + 1)^i + k_1(r_0 s + r_{-1}) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}N(s)}{\mathrm{d}s} = 0 \;\Rightarrow\; iT_i s(T_i s + 1)^{i-1} + (T_i s + 1)^i + k_1 r_0 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 N(s)}{\mathrm{d}s^2} = 0 \;\Rightarrow\; i(i-1)T_i^2 s(T_i s + 1)^{i-2} + 2iT_i(T_i s + 1)^{i-1} = 0$$

se pro $i \geq 2$ dostane

$$s_3^* = -\frac{2}{T_i(i+1)},$$

$$r_0^* = k_P^* = \frac{1}{k_1}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1},$$

$$r_{-1}^* = \frac{4i}{k_1 T_i (i+1)^2}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1} \Rightarrow T_I^* = \frac{r_0^*}{r_{-1}^*} = \frac{T_i(i+1)^2}{4i}.$$

Je zřejmé, že tento případ je ekvivalentní použití regulátoru PD s přenosem

$$G_R(s) = k_P\left(1 + T_D s\right) = r_0 + r_1 s, \quad k_P = r_0, \quad T_D = \frac{r_1}{r_0}$$

pro integrační regulovanou soustavu s přenosem (5.56), pokud bude uvažováno $r_1 = r_0$ a $r_0 = r_{-1}$. Pak se obdrží

$$r_0^* = k_P^* = \frac{4i}{k_1 T_i (i+1)^2}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1},$$

$$r_1^* = \frac{1}{k_1}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1} \Rightarrow T_D^* = \frac{r_1^*}{r_0^*} = \frac{T_i(i+1)^2}{4i}.$$

Tab. 5.7 – Metoda násobného dominantního pólu – hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro regulované soustavy se setrvačností vyššího řádu

Regulovaná soustava	Regulátor				
	Typ	k_P^*	T_I^*	T_D^*	Poznámka
$\frac{k_1}{(T_i s+1)^i}$	I	–	$k_1 T_i (i+1)\left(\frac{i+1}{i}\right)^i$	–	$i \geq 1$
	PI	$\frac{1}{k_1}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1}$	$\frac{T_i(i+1)^2}{4i}$	–	$i \geq 2$
	PID	$\frac{5i-4}{k_1(i+1)}\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^{i-2}$	$\frac{2T_i(5i-4)(i+1)^2}{27i(i-1)}$	$\frac{T_i(i+1)i}{2(5i-4)}$	$i \geq 3$
$\frac{k_1}{s(T_i s+1)^i}$	P	$\frac{1}{k_1 T_i (i+1)}\left(\frac{i}{i+1}\right)^i$	–	–	$i \geq 1$
	PD	$\frac{4i}{k_1 T_i (i+1)^2}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1}$	–	$\frac{T_i(i+1)^2}{4i}$	$i \geq 2$

Podobným způsobem byly získány i zbývající řádky v tab. 5.7. Metoda násobného dominantního pólu u regulačního obvodu zajišťuje stupeň astatismu $q = 1$.

Zajímavý je u regulátoru PID poměr

$$\frac{T_D^*}{T_I^*} = \frac{27i^2(i-1)}{4(5i-4)^2(i+1)}, \tag{5.57}$$

pro který pro $3 \le i < \infty$ platí nerovnost

$$\frac{3^5}{2^3 11^2} \doteq 0{,}251 < \frac{T_D^*}{T_I^*} < 0{,}27\,. \tag{5.58}$$

Tento poměr je přibližně v souladu s hodnotou doporučenou pro seřízení Zieglerovými – Nicholsovými experimentálními metodami.

Postup:

Podle tvaru přenosu regulované soustavy a požadavku na kvalitu regulace se zvolí vhodný regulátor a na základě tab. 5.7 se určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

b) Regulované soustavy se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním

Pro proporcionální regulovanou soustavu se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{5.59}$$

se předpokládá použití regulátorů s integrační složkou (I, PI, PID) a pro integrační regulovanou soustavu se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{5.60}$$

se předpokládá použití regulátorů bez integrační složky (P, PD).

Např. pro regulátor PI s přenosem

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$$

a regulovanou soustavu s přenosem (5.59) lze psát

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_1(r_0 s + r_{-1})}{s(T_1 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{k_1(r_0 s + r_{-1})}{s(T_1 s + 1)\mathrm{e}^{T_d s}} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \Rightarrow$$

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = s(T_1 s + 1)\mathrm{e}^{T_d s} + k_1(r_0 s + r_{-1}).$$

Protože obdržený výraz obsahuje exponenciální funkci komplexní proměnné s (dopravní zpoždění), je to charakteristický kvazimnohočlen daného regulačního obvodu.

Řešením soustavy 3 rovnic ($p = 2$)

$$N(s) = 0 \;\Rightarrow\; s(T_1 s + 1)\mathrm{e}^{T_d s} + k_1(r_0 s + r_{-1}) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,N(s)}{\mathrm{d}\,s} = 0 \;\Rightarrow\; [T_d T_1 s^2 + (2T_1 + T_d)s + 1]\mathrm{e}^{T_d s} + k_1 r_0 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,N(s)}{\mathrm{d}\,s^2} = 0 \;\Rightarrow\; T_d^2 T_1 s^2 + (4T_d T_1 + T_d^2)s + 2T_d + 2T_1 = 0$$

se dostane

$$s_3^* = -\frac{2}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{2}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}} < 0,$$

$$r_0^* = k_P^* = -\frac{1}{k_1}[T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1]\mathrm{e}^{T_d s_3^*},$$

$$r_{-1}^* = \frac{1}{k_1}(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d)s_3^{*2}\mathrm{e}^{T_d s_3^*} \;\Rightarrow\; T_I^* = \frac{r_0^*}{r_{-1}^*} = -\frac{T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1}{(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d)s_3^{*2}}.$$

Při výpočtu trojnásobného dominantního pólu s_3^* je nutno před diskriminantem uvažovat znaménko +, protože jinak by daný pól nebyl dominantní. Lze rovněž ukázat, že hodnoty stavitelných parametrů k_P^* a T_I^* jsou kladné.

Je zřejmé, že tento případ je ekvivalentní použití regulátoru PD s přenosem

$$G_R(s) = k_P(1 + T_D s) = r_0 + r_1 s$$

pro integrační regulovanou soustavu s přenosem (5.60), pokud bude uvažováno $r_1 = r_0$ a $r_0 = r_{-1}$. Pak se obdrží

$$r_0^* = k_P^* = \frac{1}{k_1}(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d)s_3^{*2}\mathrm{e}^{T_d s_3^*},$$

$$r_1^* = -\frac{1}{k_1}[T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1]\mathrm{e}^{T_d s_3^*} \;\Rightarrow$$

$$T_D^* = \frac{r_1^*}{r_0^*} = -\frac{T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1}{(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d)s_3^{*2}}.$$

Podobným způsobem byly získány i zbývající řádky v tab. 5.8 a tab. 5.9. I v tomto případě je zajištěn stupeň astatismu $q = 1$.

Při použití regulátorů PI nebo PID mohou stabilní nuly v čitateli přenosu řízení způsobit nežádoucí překmit. Pro regulátor PI je překmit prakticky nulový pro $T_d > 0{,}7T_1$ a pro regulátor PID pro $T_d > 1{,}4T_1$. V případě nesplnění těchto nerovností je třeba integrační časovou konstantu T_I určit na základě vztahu $T_I^* = T_1$ pro regulátor PI a $T_I^* = 1{,}2T_1$ pro regulátor PID, případně je třeba

regulátory doladit změnou integrační časové konstanty T_I (ne změnou zesílení k_P).

Vztahy v tab. 5.8 a 5.9 vypadají nepříjemně, ale je třeba si uvědomit, že regulátory se neseřizují často a že výpočty s kalkulátorem dnes nečiní žádné problémy.

Tab. 5.8 – Metoda násobného dominantního pólu – hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro proporcionální regulované soustavy se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním ($q = 1$)

Regulátor		Regulovaná soustava $\frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$
I	s_2^*	$-\frac{1}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{1}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}}$
	T_I^*	$-\frac{k_1}{(T_1 s_2^* + 1) s_2^* \mathrm{e}^{T_d s_2^*}}$
PI	s_3^*	$-\frac{2}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{2}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}}$
	k_P^*	$-\frac{1}{k_1}\left[T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d) s_3^* + 1\right] \mathrm{e}^{T_d s_3^*}$
	T_I^*	$-\frac{T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d) s_3^* + 1}{(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d) s_3^{*2}}$
PID	s_4^*	$-\frac{3}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{3}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}}$
	k_P^*	$\frac{1}{k_1}\left[T_d^2 T_1 s_4^{*3} + (3T_d T_1 + T_d^2) s_4^{*2} + T_d s_4^* - 1\right] \mathrm{e}^{T_d s_4^*}$
	T_I^*	$-2\frac{T_d^2 T_1 s_4^{*3} + (3T_d T_1 + T_d^2) s_4^{*2} + T_d s_4^* - 1}{(T_d^2 T_1 s_4^* + 2T_d T_1 + T_d^2) s_4^{*3}}$
	T_D^*	$-\frac{1}{2}\frac{T_d^2 T_1 s_4^{*2} + (4T_d T_1 + T_d^2) s_4^* + 2T_d + 2T_1}{T_d^2 T_1 s_4^{*3} + (3T_d T_1 + T_d^2) s_4^{*2} + T_d s_4^* - 1}$

Metoda dává velmi dobré výsledky i při hrubé aproximaci přenosů regulovaných soustav.

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na tvar v souladu s tab. 5.8, příp. tab. 5.9 a pro zvolený regulátor se vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.
2. Pokud regulační pochod vykazuje nevhodný překmit, pak je třeba upravit integrační časovou konstantu T_I (neměnit zesílení regulátoru k_P).

Tab. 5.9 – Metoda násobného dominantního pólu – hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro integrační regulované soustavy se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním ($q = 1$)

Regulátor		Regulovaná soustava $\frac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$
P	s_2^*	$-\frac{1}{T_d}-\frac{1}{2T_1}+\sqrt{\frac{1}{T_d^2}+\frac{1}{4T_1^2}}$
	k_P^*	$-\frac{1}{k_1}(T_1 s_2^*+1)s_2^*\mathrm{e}^{T_d s_2^*}$
PD	s_3^*	$-\frac{2}{T_d}-\frac{1}{2T_1}+\sqrt{\frac{2}{T_d^2}+\frac{1}{4T_1^2}}$
	k_P^*	$\frac{1}{k_1}(T_d T_1 s_3^*+T_1+T_d)s_3^{*2}\mathrm{e}^{T_d s_3^*}$
	T_D^*	$-\frac{T_d T_1 s_3^{*2}+(2T_1+T_d)s_3^*+1}{(T_d T_1 s_3^*+T_1+T_d)s_3^{*2}}$

c) Integrační regulované soustavy s dopravním zpožděním

Předchozí postupy nepředpokládaly pro integrační regulované soustavy použití regulátorů s integrační složkou, a proto při působení skokové poruchy na vstupu regulované soustavy v regulačním obvodu zůstane trvalá regulační odchylka. Tento nedostatek lze snadno odstranit použitím regulátorů s integrační složkou. Nelze použít regulátor I, protože by došlo ke strukturální nestabilitě.

Předpokládá se, že integrační regulovaná soustava má přenos ve tvaru

$$G_S(s)=\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{5.61}$$

na který mohou být snadno převedeny přenosy

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d' s} \tag{5.62}$$

pro

$$T_d = T_d' + \sum_{i=1}^{n} T_i \,. \tag{5.63}$$

Např. pro regulátor PI s přenosem

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$$

a regulovanou soustavu s přenosem (5.61) lze psát

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_1(r_0 s + r_{-1})}{s^2}\mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{k_1(r_0 s + r_{-1})}{s^2 \mathrm{e}^{T_d s}} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \Rightarrow$$

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = s^2 \mathrm{e}^{T_d s} + k_1(r_0 s + r_{-1}). \tag{5.64}$$

V souladu s (5.54) pro $p = 2$ a charakteristický kvazimnohočlen (5.64) se dostane

$$N(s) = 0 \;\Rightarrow\; s^2 \mathrm{e}^{T_d s} + k_1(r_0 s + r_{-1}) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,N(s)}{\mathrm{d}\,s} = 0 \;\Rightarrow\; s(T_d s + 2)\mathrm{e}^{T_d s} + k_1 r_0 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,N(s)}{\mathrm{d}\,s^2} = 0 \;\Rightarrow\; T_d^2 s^2 + 4T_d s + 2 = 0.$$

Tab. 5.10 – Metoda násobného dominantního pólu – hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro integrační regulované soustavy s dopravním zpožděním ($q = 2$)

Regulátor		Regulovaná soustava $\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$
PI	k_P^*	$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{k_1 T_d}\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \doteq 0{,}461\frac{1}{k_1 T_d}$
	T_I^*	$(3+2\sqrt{2})T_d \doteq 5{,}828T_d$
PID	k_P^*	$\frac{6(2\sqrt{3}-3)}{k_1 T_d}\mathrm{e}^{\sqrt{3}-3} \doteq 0{,}784\frac{1}{k_1 T_d}$
	T_I^*	$(2+\sqrt{3})T_d \doteq 3{,}732T_d$
	T_D^*	$\frac{3+\sqrt{3}}{18}T_d \doteq 0{,}263T_d$

Nejdříve se z poslední rovnice určí trojnásobný dominantní pól (z důvodu dominantnosti je třeba před diskriminantem uvažovat znaménko +)

$$s_3^* = -\frac{2-\sqrt{2}}{T_d}$$

a pak postupně hodnoty stavitelných parametrů regulátoru

$$r_0^* = k_P^* = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{k_1 T_d}\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \doteq 0{,}461\frac{1}{k_1 T_d},$$

$$r_{-1}^* = \frac{2(5\sqrt{2}-7)}{k_1 T_d^2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \Rightarrow\ T_I^* = \frac{r_0^*}{r_{-1}^*} = (3+2\sqrt{2})T_d \doteq 5{,}828T_d.$$

Podobným způsobem byly získány i zbývající řádky v tab. 5.10.

Regulační obvod se stupněm astatismu q = 2 a konvenčním regulátorem (s jedním stupněm volnosti) nelze seřídit na regulační pochod bez překmitu, tj. přechodová charakteristika regulačního obvodu má vždy překmit. Vyplývá to z následujících úvah.

Pro q = 2 přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(s) = \frac{M_o(s)}{s^2 N_o'(s)},$$

kde $M_o(s)$ a $N_o'(s)$ jsou mnohočleny nebo kvazimnohočleny.

Obraz regulační odchylky způsobený žádanou veličinou $W(s)$ je dán vztahem

$$E_w(s) = G_{we}(s)W(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}W(s) = \frac{s^2 N_o'(s)}{s^2 N_o'(s)+M_o(s)}W(s).$$

Pro skokovou změnu žádané veličiny

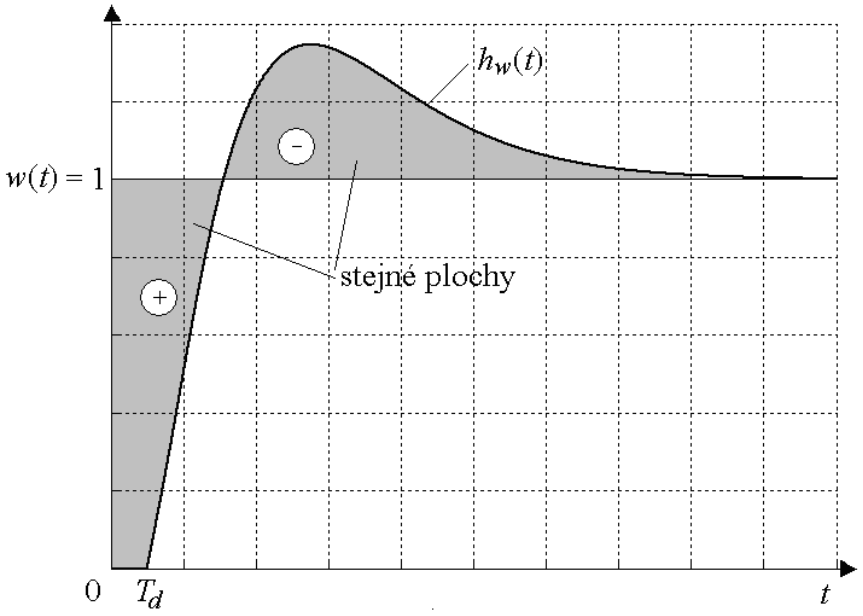
$$w(t) = \eta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, W(s) = \frac{1}{s}.$$

se dostane

$$E_w(s) = \frac{sN_o'(s)}{s^2 N_o'(s)+M_o(s)}.$$

V souladu se vztahem (5.7) platí

$$\int_0^\infty e_w(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} E_w(s) = \lim_{s\to 0}\frac{sN_o'(s)}{s^2 N_o'(s)+M_o(s)} = 0.$$



Obr. 5.34 – Přechodová charakteristika regulačního obvodu se stupněm astatismu $q = 2$

Geometrická interpretace tohoto výsledku je, že součet ploch nad a pod polopřímkou $w(t) = 1$ musí být roven 0, viz obr. 5.34.

Pokud je překmit nepřípustný, příp. je příliš veliký, lze použít vhodný regulátor se dvěma stupni volnosti, viz vztahy (4.33) a (4.38).

Např. při seřízení regulátoru PI metodou násobného dominantního pólu podle tab. 5.10, přenos řízení regulačního obvodu bude mít tvar

$$G'_{wy}(s) = \frac{k_1 k_P^*(T_I^* s + 1)}{T_I^* s^2 + k_1 k_P^*(T_I^* s + 1)\mathrm{e}^{-T_d s}}\mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{T_I^* s + 1}{\left(\frac{1}{|s_3^*|}s + 1\right)^3}\mathrm{e}^{-T_d s}.$$

Pokud se použije regulátor PI se dvěma stupni volnosti (4.38) se vstupním filtrem (4.39)

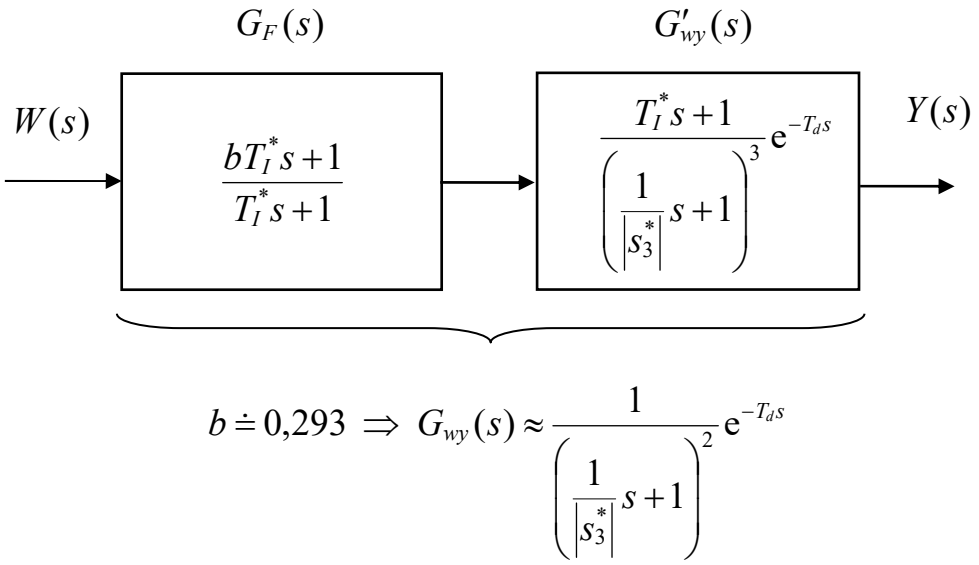
$$G_F(s) = \frac{bT_I^* s + 1}{T_I^* s + 1},$$

pak v souladu s obr. 4.6 a obr. 5.35 lze psát

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = G_F(s)G'_{wy}(s) \approx \frac{bT_I^* s + 1}{\left(\frac{1}{|s_3^*|}s + 1\right)^3}\mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{5.65}$$

Váhu žádané veličiny b u proporcionální složky je možné volit tak, aby dvojčlen v čitateli přenosu řízení (5.65) kompenzoval jeden dvojčlen ve jmenovateli, tj.

$$bT_I^* s + 1 = \frac{1}{\left|s_3^*\right|} s + 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{\left|s_3^*\right| T_I^*} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}293\,. \tag{5.66}$$



Obr. 5.35 – Kompenzace čitatele a jednoho dvojčlenu jmenovatele přenosu řízení pomocí vstupního filtru při použití regulátoru PI se dvěma stupni volnosti

Použitím regulátoru PID se dvěma stupni volnosti (4.33) lze vhodnou volbou vah žádané veličiny u proporcionální složky *b* a derivační složky *c* kompenzovat dva dvojčleny. Tyto váhy se získají podobným způsobem jako váha *b* u PI regulátoru

$$b = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}423; \qquad c = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}634\,. \tag{5.67}$$

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na tvar v souladu s tab. 5.10 a pro zvolený regulátor se vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.
2. Pokud je překmit nepřípustný, příp. příliš veliký a lze použít regulátor se dvěma stupni volnosti, pak pro regulátor se dvěma stupni volnosti seřízený podle tab. 5.10 se určí odpovídající váhy žádané veličiny podle vztahu (5.66), příp. (5.67).

Příklad 5.9

Pro regulovanou soustavu s přenosem (viz příklady 5.6 – 5.8)

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

je třeba metodou násobného dominantního pólu seřídit regulátor I, PI a PID (časová konstanta je v min).

Řešení:

Pro regulovanou soustavu platí: $i = 3$, $k_1 = 2$, $T_3 = 4$ min.

Na základě tab. 5.7 se dostane

I: $$T_I^* = k_1 T_3 (i+1)\left(\frac{i+1}{i}\right)^i = 2 \cdot 4 \cdot 4\left(\frac{3+1}{3}\right)^3 \doteq 75{,}85\,\text{min};$$

PI: $$k_P^* = \frac{1}{k_1}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{i-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3+1}\right)^2 \doteq 0{,}13;$$

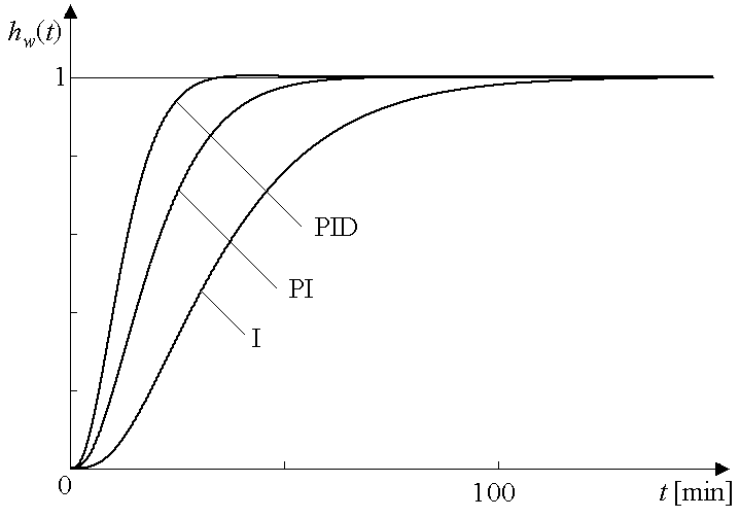
$$T_I^* = \frac{T_3 (i+1)^2}{4i} = \frac{4(3+1)^2}{4 \cdot 3} = 5{,}33\,\text{min};$$

PID: $$k_P^* = \frac{5i-4}{k_1 (i+1)}\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^{i-2} = \frac{5 \cdot 3 - 4}{2(3+1)}\left(\frac{3-2}{3+1}\right)^{3-2} \doteq 0{,}34;$$

$$T_I^* = \frac{2T_3 (5i-4)(i+1)^2}{27i(i-1)} = \frac{2.4(5 \cdot 3 - 4)(3+1)^2}{27 \cdot 3(3-1)} \doteq 8{,}69\,\text{min};$$

$$T_D^* = \frac{T_3 (i+1)i}{2(5i-4)} = \frac{4(3+1)3}{2(5 \cdot 3 - 4)} \doteq 2{,}18\,\text{min}.$$

Přechodové charakteristiky regulačního obvodu pro všechny tři regulátory jsou na obr. 5.36. Je vidět, že jsou nekmitavé, ale jsou poměrně pomalé.



Obr. 5.36 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného metodou násobného dominantního pólu – příklad 5.9

Příklad 5.10

Pro regulovanou soustavu z příkladu 4.7 s přenosem

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\,\mathrm{e}^{-s}$$

je třeba seřídit regulátor PI metodou násobného dominantního pólu podle tab. 5.8 (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

Řešení:

V příkladě 4.7 bylo na základě „pravidla poloviny“ provedena úprava přenosu regulované soustavy na požadovaný tvar, tj.

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\mathrm{e}^{-s} \approx \frac{1}{11s+1}\mathrm{e}^{-10s}.$$

Z tab. 5.8 pro $k_1 = 1$, $T_1 = 11$ s a $T_d = 10$ s se dostane

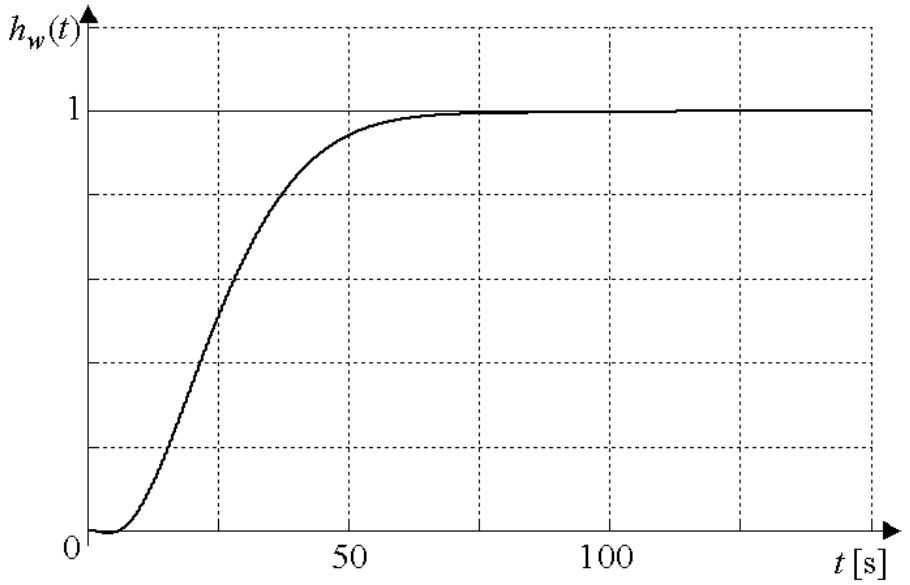
$$s_3^* = -\frac{2}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{2}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}} = -\frac{2}{10} - \frac{1}{2\cdot 11} + \sqrt{\frac{2}{10^2} + \frac{1}{4\cdot 11^2}} \doteq -0{,}097\,\mathrm{s}^{-1};$$

$$r_0^* = k_P^* = -\frac{1}{k_1}[T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1]\mathrm{e}^{T_d s_3^*} =$$

$$= -\frac{1}{1}[10\cdot 11\cdot(-0{,}097)^2 + (2\cdot 11 + 10)\cdot(-0{,}097) + 1]\mathrm{e}^{10\cdot(-0{,}097)} \doteq 0{,}405;$$

$$T_I^* = -\frac{T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1}{(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d)s_3^{*2}} =$$

$$= -\frac{10\cdot 11\cdot(-0{,}097)^2 + (2\cdot 11 + 10)\cdot(-0{,}097) + 1}{[10\cdot 11\cdot(-0{,}097) + 11 + 10)\cdot(-0{,}097)^2} \doteq 11{,}000\ \mathrm{s}.$$



Obr. 5.37 – Přechodová charakteristika regulačního obvodu seřízeného metodou násobného dominantního pólu – příklad 5.10

Z průběhu přechodové charakteristiky na obr. 5.37 je zřejmé, že i při velmi hrubé aproximaci přenosu regulované soustavy je regulační pochod velmi dobrý.

Příklad 5.11

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{0{,}02}{s(6s+1)(3s+1)(s+1)^2}\,\mathrm{e}^{-2s}$$

je třeba seřídit regulátor PI se dvěma stupni volnosti na přibližně mezní aperiodický regulační pochod (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

Řešení:

Pro použití metody násobného dominantního pólu je třeba přenos regulované soustavy upravit na tvar (5.61). V souladu se vztahy (5.62) a (5.63) lze pro $k_1 = 0{,}02\ \mathrm{s}^{-1}$, $T_1 = 6$ s, $T_2 = 3$ s, $T_3 = T_4 = 1$ s a $T_d' = 2$ s psát

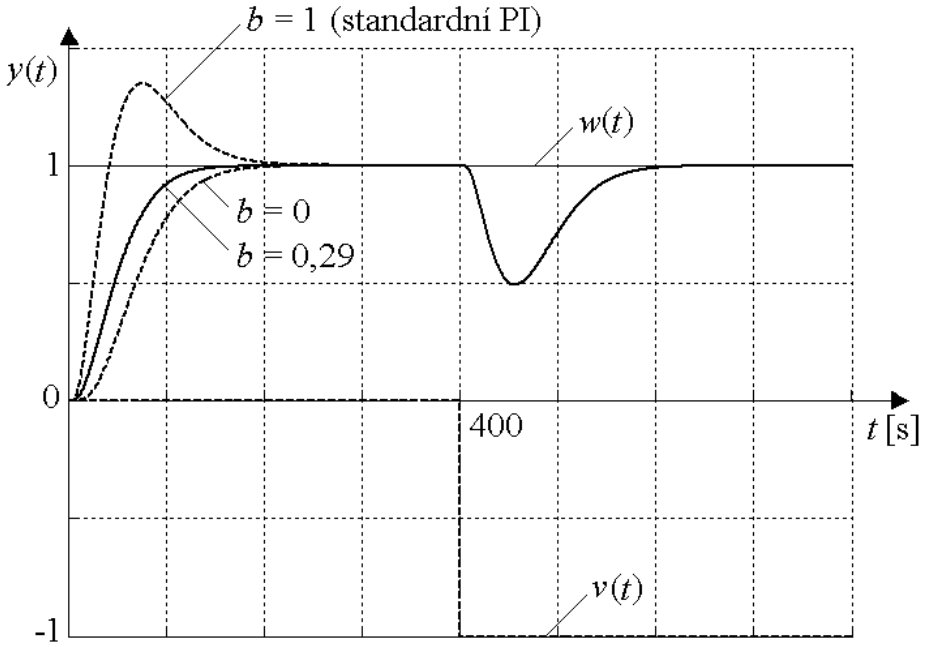
$$T_d = T_d' + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 13 \text{ s},$$

$$G_S(s) = \frac{0{,}02}{s(6s+1)(3s+1)(s+1)^2}\,\mathrm{e}^{-2s} \approx \frac{0{,}02}{s}\,\mathrm{e}^{-13s}.$$

Na základě tab. 5.10 se pro regulátor PI dostane

$$k_P^* \doteq 0{,}461\frac{1}{k_1 T_d} = \frac{0{,}461}{0{,}02 \cdot 13} \doteq 1{,}77;$$

$$T_I^* \doteq 5{,}828 T_d = 5{,}828 \cdot 13 \doteq 75{,}76 \text{ s}.$$



Obr. 5.38 – Odezvy regulačního obvodu s regulátorem PI se dvěma stupni volnosti pro různé hodnoty váhy b – příklad 5.11

Váha žádané veličiny u proporcionální složky je dána vztahem (5.66), tj. $b \doteq 0{,}29$.

Odezvy regulačního obvodu na jednotkové skokové změny žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy jsou na obr. 5.38 pro různé hodnoty váhy žádané veličiny u proporcionální složky b.

Případ $b = 1$ odpovídá standardnímu regulátoru PI, případ $b = 0$ je v praxi nejčastěji používán a případ $b = 0{,}29$ je optimální pro přibližně mezní aperiodický průběh. Žádaná veličina začne působit v okamžiku $t = 0$ s, tj. $w(t) = \eta(t)$ a poruchová veličina v okamžiku $t = 400$ s, tj. $v(t) = -\eta(t - 400)$.

Z odezev na obr. 5.38 je zřejmé, že regulátor PI se dvěma stupni volnosti seřízený metodou násobného dominantního pólu dává velmi kvalitní výsledky.

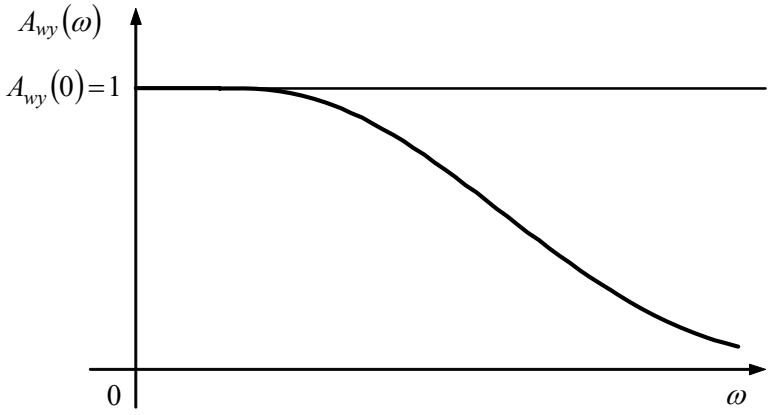
Metoda optimálního modulu a symetrického optima

a) Metoda optimálního modulu - MOM

Mezi analytické metody seřizování regulátorů patří metoda (kritérium) optimálního modulu. Vychází z požadavku na přenos řízení, resp. modul kmitočtového přenosu řízení [viz (4.6)]

$$G_{wy}(s) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow A_{wy}(\omega) \to 1. \tag{5.68}$$

Předpokládá se, že požadovaný průběh $A_{wy}(\omega)$ by měl být monotónně klesající funkcí v souladu s obr. 5.39.



Obr. 5.39 – Požadovaný průběh modulu kmitočtového přenosu řízení pro metodu optimálního modulu

Je zřejmé, že platí

$$A_{wy}(\omega) \to 1 \Leftrightarrow A_{wy}^2(\omega) \to 1. \tag{5.69}$$

Je to důležité, protože s druhou mocninou se lépe pracuje a navíc platí

$$(\alpha + \mathrm{j}\omega)(\alpha - \mathrm{j}\omega) = \alpha^2 + \omega^2 = |\alpha + \mathrm{j}\omega|^2, \tag{5.70}$$

a proto pro přenos řízení ve tvaru

$$G_{wy}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m \tag{5.71}$$

lze psát

$$A_{wy}^2(\omega) = G_{wy}(\mathrm{j}\omega)G_{wy}(-\mathrm{j}\omega) = \frac{B_m\omega^{2m} + B_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \ldots + B_1\omega^2 + B_0}{A_n\omega^{2n} + A_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \ldots + A_1\omega^2 + A_0}, \tag{5.72}$$

kde

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0^2 & B_0 &= b_0^2 \\
A_1 &= a_1^2 - 2a_0a_2 & B_1 &= b_1^2 - 2b_0b_2 \\
A_2 &= a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4 & B_2 &= b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4 \\
&\vdots & &\vdots \\
A_i &= a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j a_{i-j}a_{i+j} & B_i &= b_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j b_{i-j}b_{i+j} \\
&\vdots & &\vdots \\
A_{n-1} &= a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n & B_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_{m-2}b_m \\
A_n &= a_n^2 & B_m &= b_m^2
\end{aligned} \tag{5.73}$$

pokud by platilo

$$\frac{B_0}{A_0} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} = \cdots = \frac{B_i}{A_i} = \cdots \tag{5.74}$$

a stupeň čitatele m by byl shodný se stupněm jmenovatele n přenosu řízení (5.71), pak kvadrát modulu $A_{wy}^2(\omega)$, a tedy i modul $A_{wy}(\omega)$, by byl nezávislý na úhlovém kmitočtu ω. Z hlediska fyzikální realizace v technické praxi vždy platí $n > m$, a proto nezávislosti na úhlovém kmitočtu ω nelze dosáhnout. Regulační pochod bude vyhovující, bude-li $A_{wy}^2(\omega)$ s rostoucím úhlovým kmitočtem ω monotónně klesat, tj.

$$A_{wy}^2(0) = \frac{B_0}{A_0} \geq \frac{B_i}{A_i}. \tag{5.75}$$

Při použití metody optimálního modulu se prakticky postupuje tak, že podmínky (5.75) jsou uvažovány v počtu rovném počtu stavitelných parametrů regulátoru p, tj.

$$A_iB_0 = A_0B_i, \qquad i = 1,2,\ldots,p. \tag{5.76}$$

Pro regulační obvod se stupněm astatismu $q = 1$ ($b_0 = a_0 \Leftrightarrow B_0 = A_0$) se vychází ze vztahů

$$A_i = B_i, \qquad i = 1,2,\ldots,p. \tag{5.77}$$

Protože podmínky (5.76), příp. (5.77) nemusí uvažovat všechny koeficienty charakteristického polynomu

$$N(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0 \tag{5.78}$$

vystupujícího ve jmenovateli přenosu (5.71), metoda optimálního modulu obecně nezaručuje stabilitu, a tedy nemusí zajistit ani požadovanou kvalitu

regulace. Tzn. že obecně při použití metody optimálního modulu je třeba kontrolovat stabilitu a nejlépe simulačně ověřit kvalitu regulace.

Má-li přenos regulované soustavy $G_S(s)$ některý ze tvarů uvedených v tab. 5.11, pak použitím doporučených regulátorů a odpovídajících hodnot stavitelných parametrů ($T = 0$) se obdrží tzv. ***standardní tvar*** přenosu řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}, \qquad \xi_w = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad T_w = \sqrt{2} T_i, \tag{5.79}$$

kde pro řádek 1 a 2 v tab. 5.11 $i = 1$, pro řádek 3 a 4 $i = 2$ a pro řádek 5 $i = 3$.

V tomto případě není třeba kontrolovat stabilitu regulačního obvodu, protože tvar (5.79) je rovněž standardní tvar kritéria ITAE [viz (5.15) a obr. 5.12].

Při seřizování regulátorů podle tab. 5.11 byla použita tzv. ***kompenzace časových konstant***, která spočívá ve vzájemném vykrácení jednoho nebo dvou stabilních dvojčlenů regulované soustavy jedním dvojčlenem u regulátorů PI a PD nebo dvěma dvojčleny u regulátoru PID. Dojde tím ke zjednodušení dynamiky regulačního obvodu, ale současně může dojít k pomalejším odezvám, protože stabilní nuly čitatele přenosu řízení $G_{wy}(s)$ mohou regulační pochod urychlit (viz obr. 5.26).

Tab. 5.11 může být použita jak pro analogové regulátory ($T = 0$), tak i pro číslicové regulátory ($T > 0$), viz podkap. 5.3.

Tab. 5.11 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro metodu optimálního modulu

Regulovaná soustava		Regulátor < analogový $T = 0$; číslicový $T > 0$			
		Typ	k_P^*	T_I^*	T_D^*
1	$\frac{k_1}{T_1 s + 1}$	I	–	$2k_1(T_1 - 0{,}5T)$	–
2	$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}$	P	$\frac{1}{2k_1 T_1}$	–	–
3	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2$	PI	$\frac{T_I^*}{2k_1 T_2}$	$T_1 - 0{,}5T$	–
4	$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2$	PD	$\frac{1}{2k_1(T_2 + 0{,}5T)}$	–	$T_1 - 0{,}5T$
5	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2 \geq T_3$	PID	$\frac{T_I^*}{2k_1(T_3 + 0{,}5T)}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$

Metoda optimálního modulu se používá pro $q \leq 1$ především při regulaci elektrických pohonů, kde se malé časové konstanty (elektrické) zastupují náhradní součtovou časovou konstantou, viz podkapitola 4.2.

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na vhodný tvar podle tab. 5.11 a pro doporučený regulátor se vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.
2. Pokud přenos regulované soustavy nejde upravit na některý z tvarů uvedených v tab. 5.11 nebo se chce použít jiný než doporučený regulátor, pak pro určení hodnot p stavitelných parametrů zvoleného regulátoru se pro $q = 0$ použijí vztahy (5.76) a pro $q = 1$ (5.77). Možné je rovněž použití kompenzace časových konstant.
3. V případě jiného tvaru přenosu řízení než standardního tvaru pro metodu optimálního modulu (5.79) je nutno zkontrolovat stabilitu (pokud regulační obvod je nestabilní, metoda optimálního modulu nemůže být použita) a nejlépe simulačně ověřit získanou kvalitu regulace.

b) Metoda symetrického optima - MSO

Metoda symetrického optima je vhodná pro seřizování regulačních obvodů se stupněm astatismu $q \geq 2$, a především v případě působení poruch před regulovanou soustavou. Zde se předpokládá $q = 2$ a přenos řízení regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI ve standardním tvaru

$$G'_{wy}(s) = \frac{4T_i s + 1}{8T_i^3 s^3 + 8T_i^2 s^2 + 4T_i s + 1} = \frac{4T_i s + 1}{(2T_i s + 1)(4T_i^2 s^2 + 2T_i s + 1)}, \tag{5.80}$$

kde $i = 1, 2$ v souladu s odpovídajícím řádkem v tab. 5.12.

Pro výpočet hodnot stavitelných parametrů je třeba řešit soustavu dvou rovnic [viz (5.73)]

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^2 - 2a_0a_2 &= 0 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 &= 0 \end{aligned}. \tag{5.81}$$

Např. pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \tag{5.82}$$

je třeba zvolit regulátor PI (aby $q = 2$) s přenosem

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right). \tag{5.83}$$

Z přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$G_R(s)G_S(s) = \frac{k_1 k_P (T_I s + 1)}{T_I s^2 (T_1 s + 1)}$$

se získá přenos uzavřeného regulačního obvodu (přenos řízení)

$$G'_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{k_1 k_P T_I s + k_1 k_P}{T_1 T_I\, s^3 + T_I\, s^2 + k_1 k_P T_I s + k_1 k_P}, \tag{5.84}$$

ze kterého je zřejmé, že $q = 2$ (poslední dva koeficienty v čitateli a jmenovateli jsou shodné, viz (5.44).

Pro $a_0 = k_1 k_P$, $a_1 = k_1 k_P T_I$, $a_2 = T_I$ a $a_3 = T_1 T_I$ po dosazení do (5.81) se dostane (viz řádek 1 v tab. 5.12 pro $T = 0$)

$$\left.\begin{aligned} (k_1 k_P T_I)^2 - 2 k_1 k_P T_I &= 0 \\ T_I^2 - 2 k_1 k_P T_1 T_I^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_P^* &= \frac{1}{2 k_1 T_1} \\ T_I^* &= 4 T_1 \end{aligned}. \tag{5.85}$$

Je zřejmé, že po dosazení (5.85) do (5.84) se pro $i = 1$ dostane standardní tvar přenosu (5.80).

Podobným způsobem se pro $T_1 >> T_2$ získá řádek 2 v tab. 5.12 pro $T = 0$, protože lze psát

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{\frac{k_1}{T_1}}{(s+\frac{1}{T_1})(T_2 s+1)} \approx \frac{\frac{k_1}{T_1}}{s(T_2 s+1)}. \tag{5.86}$$

Tab. 5.12 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI pro metodu symetrického optima

Regulovaná soustava		Regulátor PI $<$ analogový $T = 0$, číslicový $T > 0$		
		k_P^*	T_I^*	Filtr
1	$\frac{k_1}{s(T_1 s+1)}$	$\frac{4}{k_1(8T_1+3T)}$	$4T_1 - 0{,}5T$	$\frac{1}{4T_1 s+1}$
2	$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ $T_1 >> T_2$	$\frac{4T_1}{k_1(8T_2+3T)}$	$4T_2 - 0{,}5T$	$\frac{1}{4T_2 s+1}$

Protože v čitateli přenosu řízení (5.80) vystupuje stabilní nula a navíc $q = 2$ (viz obr. 5.34), vzniká v regulačním obvodě poměrně veliký překmit okolo 43 %. Veliký překmit může být podstatně snížen na hodnotu okolo 8 % použitím vstupního filtru

$$G_F(s) = \frac{1}{4T_i s+1}, \tag{5.87}$$

který v případě použití regulátoru PI se dvěma stupni volnosti (4.38) lze realizovat volbou váhy žádané veličiny u proporcionální složky $b = 0$, viz vztah (4.39) pro $T_I = 4T_i$.

Metoda symetrického optima, podobně jako metoda optimálního modulu, se převážně používá u elektrických pohonů, kde se místo vstupního filtru nebo regulátoru PI se dvěma stupni volnosti používá omezení rychlosti nárůstu žádané veličiny.

Pro $T > 0$ lze tab. 5.12 použít pro číslicové regulátory PI (PS).

Postup:

1. Přenos regulované soustavy musí mít tvar uvedený v tab. 5.12, jinak je ho třeba na tento tvar upravit, např. postupem dle podkap. 4.2.
2. Na základě tab. 5.12 se určí hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI a v případě použití regulátoru PI se dvěma stupni volnosti se volí $b = 0$.

Příklad 5.12

Metodou optimálního modulu je třeba seřídit regulátor PI pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \; T_1 \geq T_2$$

s použitím kompenzace a bez kompenzace.

Řešení:

Pro regulátor PI s přenosem

$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_P(T_I s + 1)}{T_I s}$$

přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_P k_1 (T_I s + 1)}{T_I s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

ze kterého vyplývá, že stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 1$.

a) Seřízení s kompenzací

Pro $T_I^* = T_1$ dojde ke vzájemnému zkrácení stabilních dvojčlenů $T_1 s + 1$ a přenos otevřeného regulačního obvodu se podstatně zjednoduší

$$G_o(s) = \frac{k_P k_1}{T_1 s(T_2 s + 1)}.$$

Přenos řízení má tvar

$$G_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{k_P k_1}{T_1 T_2 s^2 + T_1 s + k_P k_1},$$

kde $a_0 = b_0 = k_P k_1$, $a_1 = T_1$, $a_2 = T_1 T_2$.

Ze vztahů (5.73) a (5.77) pro $p = 1$ se dostane

$$A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 = T_1^2 - 2k_Pk_1T_1T_2\,,$$
$$B_1 = 0,$$
$$A_1 = 0 \Rightarrow T_1^2 - 2k_Pk_1T_1T_2 = 0 \Rightarrow k_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_2}.$$

Hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI jsou

$$k_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_2},\quad T_I^* = T_1\,.$$

Stejné hodnoty by byly získány přímo z tab. 5.11 pro $T = 0$ (řádek 3).

Po dosazení těchto hodnot do přenosu řízení se po úpravě dostane

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{2T_2^2s^2 + 2T_2s + 1} = \frac{1}{T_w^2s^2 + 2\xi_wT_ws + 1},$$

kde

$$\xi_w = \frac{1}{\sqrt{2}},\qquad T_w = \sqrt{2}T_2\,.$$

Je zřejmé, že byl získán standardní tvar přenosu pro metodu optimálního modulu, viz (5.79), a proto kontrola stability regulačního obvodu je zbytečná.

b) Seřízení bez kompenzace

Bez kompenzace bude mít přenos řízení tvar

$$G_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{k_Pk_1T_Is + k_Pk_1}{T_1T_2T_Is^3 + (T_1 + T_2)T_Is^2 + (1 + k_Pk_1)T_Is + k_Pk_1},$$

kde $a_0 = b_0 = k_Pk_1$, $a_1 = (1 + k_Pk_1)T_I$, $a_2 = (T_1 + T_2)T_I$, $a_3 = T_1T_2T_I$, $b_1 = k_Pk_1T_I$.

Ze vztahů (5.73) a (5.77) pro $p = 2$ se dostane

$$A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 = (1 + k_Pk_1)^2T_I^2 - 2k_Pk_1(T_1 + T_2)T_I\,,$$
$$A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 = (T_1 + T_2)^2T_I^2 - 2(1 + k_Pk_1)T_1T_2T_I^2\,,$$
$$B_1 = b_1^2 = (k_Pk_1T_I)^2,$$
$$B_2 = 0,$$
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &(1 + k_Pk_1)^2T_I^2 - 2k_Pk_1(T_1 + T_2)T_I = (k_Pk_1T_I)^2 \\ &(T_1 + T_2)^2T_I^2 - 2(1 + k_Pk_1)T_1T_2T_I^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_P^* = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2k_1T_1T_2},\ T_I^* = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{T_1^2 + T_1T_2 + T_2^2}.$$

Protože přenos řízení $G_{wy}(s)$ nemá standardní tvar pro metodu optimálního modulu (5.79), proto je třeba zkontrolovat stabilitu regulačního obvodu. Vzhledem k tomu, že pro hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI byly obdrženy poměrně složité výrazy, kontrola stability bude nejdříve provedena

obecně a získané hodnoty stavitelných parametrů regulátoru budou dosazeny až do výsledného vztahu.

Charakteristický mnohočlen regulačního obvodu $N(s)$ je dán jmenovatelem přenosu řízení $G_{wy}(s)$, tj.

$$N(s) = T_1 T_2 T_I s^3 + (T_1 + T_2) T_I s^2 + (1 + k_P k_1) T_I s + k_P k_1 .$$

Pro $k_P > 0$ a $T_I > 0$ všechny jeho koeficienty budou kladné. Hurwitzova matice má tvar

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc:c} (T_1 + T_2) T_I & k_P k_1 & 0 \\ T_1 T_2 T_I & (1 + k_P k_1) T_I & 0 \\ \hdashline 0 & (T_1 + T_2) T_I & k_P k_1 \end{array}\right].$$

Stačí ověřit kladnost Hurwitzova subdeterminantu

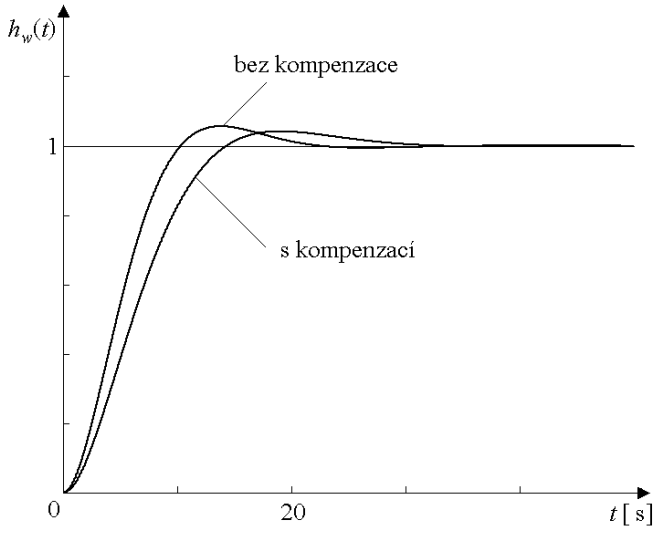
$$H_2 = \begin{vmatrix} (T_1 + T_2) T_I & k_P k_1 \\ T_1 T_2 T_I & (1 + k_P k_1) T_I \end{vmatrix} = (1 + k_P k_1)(T_1 + T_2) T_I^2 - k_P k_1 T_1 T_2 T_I > 0 \Rightarrow$$

$$T_I > \frac{k_P k_1 T_1 T_2}{(1 + k_P k_1)(T_1 + T_2)}.$$

Nyní se dosadí vypočtené hodnoty stavitelných parametrů regulátoru a po úpravě se dostane

$$T_1^4 + 3T_1^3 T_2 + 5T_1^2 T_2^2 + 3T_1 T_2^3 + T_2^4 > 0 ,$$

tj. daný regulační obvod seřízený metodou optimálního modulu bez použití kompenzace je stabilní.



Obr. 5.40 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného metodou optimálního modulu s použitím a bez použití kompenzace – příklad 5.12

Přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného metodou optimálního modulu s použitím a bez použití kompenzace jsou na obr. 5.40.

Hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI pro číselné hodnoty parametrů regulované soustavy $k_1 = 2$, $T_1 = 4$ s a $T_2 = 3$ s byly určeny na základě již dříve získaných vztahů

a) s kompenzací

$$k_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_2} = \frac{4}{2 \cdot 2 \cdot 3} \doteq 0{,}33,$$

$$T_I^* = T_1 = 4 \text{ s};$$

b) bez kompenzace

$$k_P^* = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2k_1T_1T_2} = \frac{4^2 + 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} \doteq 0{,}52,$$

$$T_I^* = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{T_1^2 + T_1T_2 + T_2^2} = \frac{(4^2 + 3^2)(4 + 3)}{4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2} \doteq 4{,}73 \text{ s}.$$

Z průběhu přechodových charakteristik na obr. 5.40 vyplývá, že přechodová charakteristika získaná seřízením metodou optimálního modulu bez použití kompenzace je značně rychlejší s něco větším překmitem. Je to způsobeno stabilní nulou v čitateli přenosu řízení (viz obr. 5.26). Přesto z důvodu složitějších výpočtů a případné nutnosti kontroly stability technici dávají přednost kompenzaci, tj. používají přímo tab. 5.11.

Příklad 5.13

Metodou symetrického optima je třeba seřídit regulátor PI pro regulovanou soustavu s přenosem (časová konstanta je v sekundách)

$$G_S(s) = \frac{1}{s(10s + 1)}.$$

Řešení:

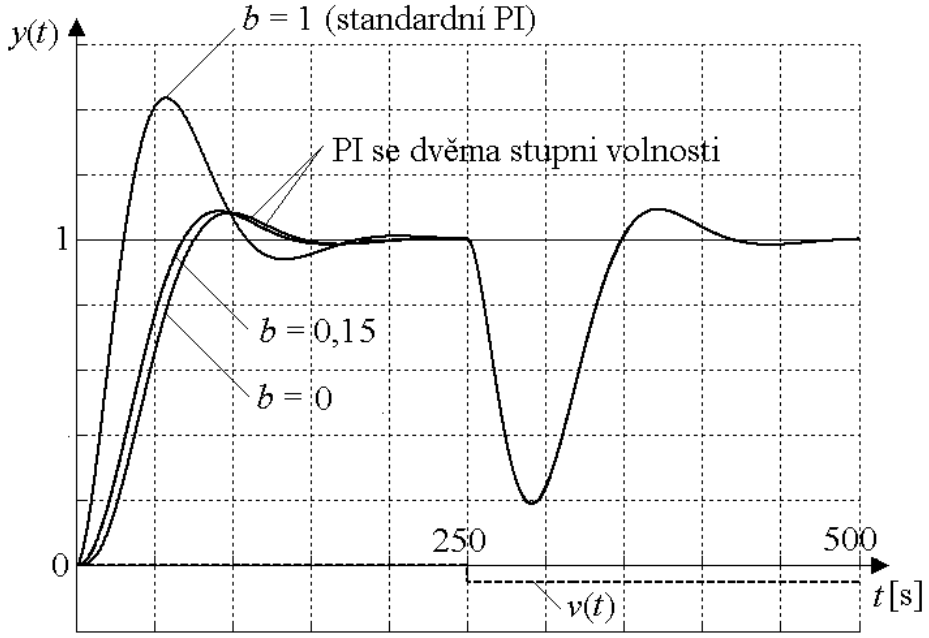
Pro $k_1 = 1$ a $T_1 = 10$ s se v souladu s tab. 5.12 ($T = 0$) dostane

$$k_P^* = \frac{1}{2k_1T_1} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 10} = 0{,}05,$$

$$T_I^* = 4T_1 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ s}.$$

Odezvy regulačního obvodu seřízeného metodou symetrického optima na skokovou změnu žádané veličiny $w(t) = \eta(t)$ a poruchové veličiny $v(t) = -0{,}05\eta(t - 250)$ jsou na obr. 5.41 V případě $b = 0$ jde o regulátor PI se dvěma stupni volnosti (se vstupní filtrací) a v případě $b = 1$ jde o standardní regulátor PI (bez vstupní filtrace).

Z průběhu odezev na obr. 5.41 je zřejmé, že použitím regulátoru PI se dvěma stupni volnosti pro $b = 0{,}15$ (případně se vstupním filtrem) došlo k podstatnému snížení překmitu a k rychlejší odezvě.



Obr. 5.41 – Odezvy regulačního obvodu pro regulátor PI se dvěma stupni volnosti seřízený metodou symetrického optima – příklad 5.13

Metoda požadovaného modelu - MPM

Metoda požadovaného modelu (dříve též nazývaná metoda inverze dynamiky) je analyticko – experimentální metoda seřizování konvenčních regulátorů, která vychází z požadovaného modelu uzavřeného regulačního obvodu, tj. z požadovaného přenosu řízení ve tvaru

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{a}{s + a\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\,\mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{5.88}$$

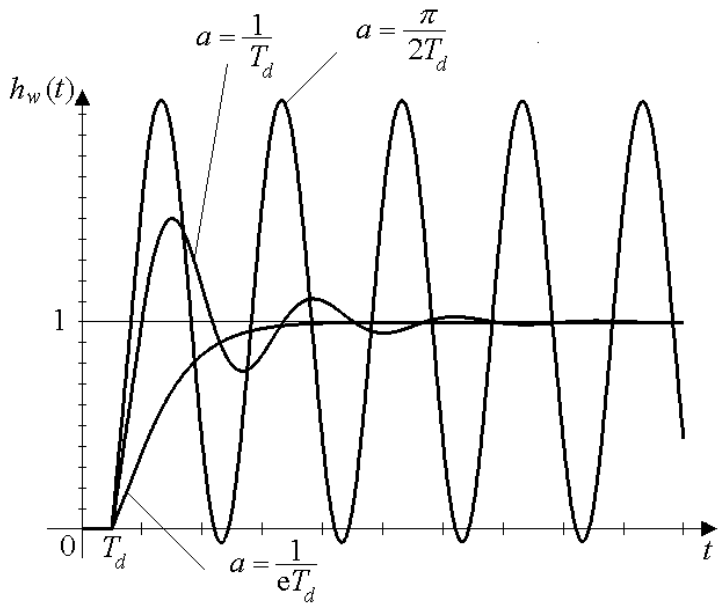
kde a je zesílení otevřeného regulačního obvodu.

Je to metoda velmi jednoduchá, která využívá kompenzaci časových konstant, zajišťuje stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 1$ (tj. nulové trvalé regulační odchylky způsobené skokovými změnami polohy žádané veličiny w a poruchové veličiny v působící na výstupu regulované soustavy) a odpovídající volbou zesílení otevřeného regulačního obvodu a umožňuje dosáhnout požadovaného relativního překmitu κ v rozmezí od 0 do 0,5 (50 %).

Závislost relativního překmitu κ na zesílení otevřeného regulačního obvodu a názorně ukazuje obr. 5.42.

Zesílení otevřeného regulačního obvodu a lze získat analyticky pro nekmitavý regulační pochod ($a = \frac{1}{\mathrm{e}\,T_d}$) a pro kmitavou mez stability ($a = \frac{\pi}{2T_d}$), pro jiné hodnoty relativního překmitu κ byla simulačně určena jeho závislost na dopravním zpoždění T_d (viz tab. 5.13)

$$a = \frac{1}{\beta T_d}. \tag{5.89}$$



Obr. 5.42 – Vliv zesílení otevřeného regulačního obvodu a na průběh přechodových charakteristik regulačního obvodu

Tab. 5.13 – Závislost koeficientů α a β na relativním překmitu κ

κ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
α	1,282	0,984	0,884	0,832	0,763	0,697	0,669	0,640	0,618	0,599	0,577
β	2,718	1,944	1,720	1,561	1,437	1,337	1,248	1,172	1,104	1,045	0,992

Regulované soustavy vhodné pro použití metody požadovaného modelu jsou uvedeny v tab. 5.14 spolu s doporučenými regulátory a hodnotami jejich stavitelných parametrů.

Přenos doporučeného regulátoru $G_R(s)$ pro některou z regulovaných soustav s přenosem $G_S(s)$ se pro požadovaný přenos řízení (5.88) získá ze vztahu pro přímou syntézu

$$G_{wy}(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \Rightarrow G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)} \frac{G_{wy}(s)}{1 - G_{wy}(s)}. \tag{5.90}$$

Např. pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$$

se po dosazení do (5.90), uvažování (5.88) a úpravě dostane (viz řádek 2 v tab. 5.14 pro $T = 0$)

$$G_R(s)=\frac{T_1 s+1}{k_1\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\,\frac{\dfrac{a}{s+a\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\,\mathrm{e}^{-T_d s}}{1-\dfrac{a}{s+a\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\,\mathrm{e}^{-T_d s}}=\frac{a(T_1 s+1)}{k_1 s}=k_P^*\left(1+\frac{1}{T_I^* s}\right),$$

kde

$$k_P^*=\frac{aT_I^*}{k_1},\quad T_I^*=T_1,$$

příp. po uvažování (5.89)

$$k_P^*=\frac{T_I^*}{k_1\beta T_d},\ T_I^*=T_1.$$

Podobným způsobem byly pro $T = 0$ získány i zbývající řádky v tab. 5.14. Tabulky 5.13 a 5.14 mohou být pro $T > 0$ použity i pro číslicové regulátory, viz podkap. 5.3.

Pro regulační obvod s analogovým regulátorem seřízeným metodou požadovaného modelu byly vypočteny hodnoty nejdůležitějších ukazatelů kvality (viz podkap. 5.1) a jsou uvedeny v tab. 5.15.

Tab. 5.14 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátoru pro metodu požadovaného modelu

Regulovaná soustava		Regulátor	< analogový $T=0$ číslicový $T>0$		
		Typ	k_P^*	T_I^*	T_D^*
1	$\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$	P	$\frac{1}{(\alpha T+\beta T_d)k_1}$	–	–
2	$\frac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$	PI	$\frac{T_I^*}{(\alpha T+\beta T_d)k_1}$	$T_1-\frac{T}{2}$	–
3	$\frac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$	PD	$\frac{1}{(\alpha T+\beta T_d)k_1}$	–	$T_1-\frac{T}{2}$
4	$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ $T_1\geq T_2$	PID	$\frac{T_I^*}{(\alpha T+\beta T_d)k_1}$	T_1+T_2-T	$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}-\frac{T}{4}$
5	$\frac{k_1}{T_0^2 s^2+2\xi_0 T_0 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ $0{,}5<\xi_0\leq 1$	PID	$\frac{T_I^*}{(\alpha T+\beta T_d)k_1}$	$2\xi_0 T_0-T$	$\frac{T_0}{2\xi_0}-\frac{T}{4}$

Z tab. 5.15 vyplývá, že pro regulační obvody s analogovými regulátory seřízenými metodou požadovaného modelu pro relativní překmit $\kappa \leq 0{,}2$ (20 %) budou hodnoty všech nejdůležitějších ukazatelů kvality vyhovovat doporučením

uvedených v podkap. 5.1. Proto při použití metody požadovaného modelu a $\kappa \leq 0{,}2$ lze očekávat kromě požadované kvality regulace i vysokou robustnost regulačního obvodu.

Tab. 5.15 – Hodnoty nejdůležitějších ukazatelů kvality pro seřízení regulačního obvodu metodou požadovaného modelu

κ	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\omega_R T_d$	0	0,3	0,7	0,8	0,95	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3
$A_{wy}(\omega_R)$	1	1,00	1,06	1,14	1,25	1,37	1,51	1,68	1,88	2,10	2,37
$L_{wy}(\omega_R)$ [dB]	0	0,02	0,47	1,15	1,92	2,72	3,59	4,50	5,47	6,46	7,51
M_S	1,4	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,3	2,5	2,67	2,9	3,2
γ [°]	69	60	57	53	50	47	44	41	38	35	32
m_A	4,3	3,0	2,7	2,5	2,3	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6	1,6
m_L [dB]	12,6	9,7	8,6	7,8	7,1	6,4	5,85	5,3	4,8	4,3	3,9

Z tab. 5.15 vyplývá ještě jeden důležitý závěr. Protože součin rezonančního úhlového kmitočtu ω_R a dopravního zpoždění T_d je pro daný relativní překmit κ konstantní, proto dopravní zpoždění výrazným způsobem omezuje rozsah pracovních úhlových kmitočtů.

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na vhodný tvar podle tab. 5.14.
2. Pro požadovaný relativní překmit κ se z tab. 5.13 určí koeficient β a pak z tab. 5.14 doporučený regulátor a pro $T = 0$ hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 5.14

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{2}{4s+1}\mathrm{e}^{-6s}$$

je třeba metodou požadovaného modelu seřídit regulátory PI a PID tak, aby relativní překmit $\kappa = 0{,}1$ (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v min).

Řešení:

a) Regulátor PI

Pro regulátor PI regulovaná soustava má požadovaný tvar (řádek 2 v tab. 5.14): $k_1 = 2$, $T_1 = 4$ min a $T_d = T_{d1} = 6$ min, a proto v souladu s tab. 5.13 a 5.14 lze psát ($T = 0$)

$$T_I^* = T_1 = 4 \text{ min},$$

$$k_P^* = \frac{T_I^*}{k_1 \beta T_d} = \frac{4}{2 \cdot 1{,}72 \cdot 6} \doteq 0{,}19.$$

b) Regulátor PID

Přenos regulované soustavy je třeba upravit v souladu s řádkem 4 v tab. 5.14, proto se použije tab. 4.3, tj.

$$\frac{T_2}{T_1} = 0{,}638 \Rightarrow T_2 = 0{,}638 \cdot 4 \doteq 2{,}55 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d2} - T_{d1}}{T_1} = -0{,}352 \Rightarrow T_{d2} = 6 - 0{,}352 \cdot 4 \doteq 4{,}59 \text{ min},$$

$$G_S(s) = \frac{2}{4s+1}\mathrm{e}^{-6s} \approx \frac{2}{(2{,}55s+1)^2}\mathrm{e}^{-4{,}59s}.$$

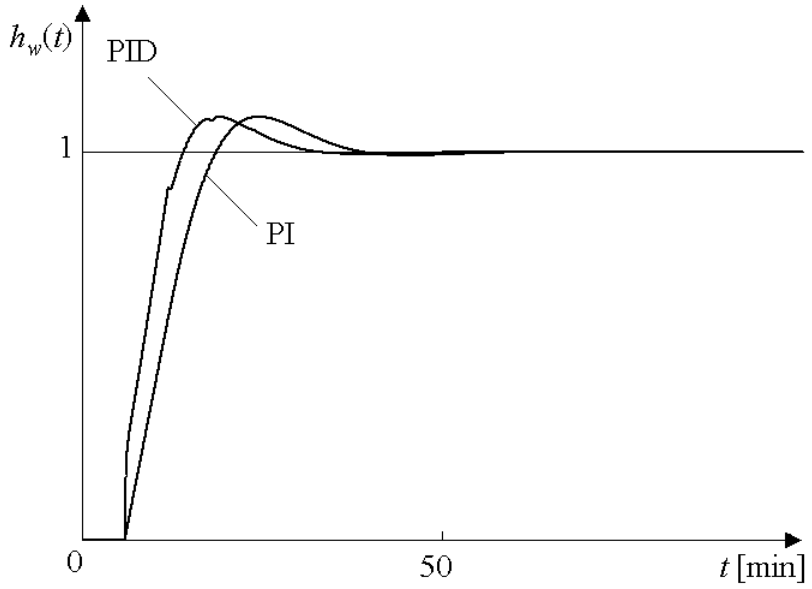
Nyní již lze pro $\kappa = 0{,}1$ v souladu s tab. 5.13 a 5.14 psát ($T = 0$, $T_1 = T_2$, $T_d = T_{d2}$)

$$T_I^* = 2T_2 = 2 \cdot 2{,}55 \doteq 5{,}1 \text{ min},$$

$$T_D^* = \frac{T_2}{2} = \frac{2{,}55}{2} \doteq 1{,}28 \text{ min},$$

$$k_P^* = \frac{T_I^*}{k_1 \beta T_d} = \frac{5{,}1}{2 \cdot 1{,}72 \cdot 4{,}59} \doteq 0{,}32.$$

Získané přechodové charakteristiky regulačního obvodu jsou na obr. 5.43.



Obr. 5.43 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného metodou požadovaného modelu – příklad 5.14

Příklad 5.15

Pro regulovanou soustavu s přenosem (viz příklad 5.9)

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

je třeba metodou požadovaného modelu (MPM) seřídit regulátory PI a PID na nekmitavý regulační pochod (časová konstanta je v min).

Řešení:

Přenos regulované soustavy nemá vhodný tvar pro seřízení metodou požadovaného modelu, a proto je ho třeba vhodně upravit. V souladu se schématem (4.55) a tab. 4.3 lze psát ($i = 3$, $k_1 = 2$, $T_3 = 4$ min, $T_{d3} = 0$)

a)

$$\frac{T_1}{T_3} = 1{,}98 \Rightarrow T_1 = 1{,}98 \cdot 4 \doteq 7{,}92 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d3}}{T_3} = 1{,}232 \Rightarrow T_{d1} = 1{,}232 \cdot 4 + 0 \doteq 4{,}93 \text{ min},$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3} \approx \frac{2}{7{,}92s+1} \mathrm{e}^{-4{,}93s}.$$

b)

$$\frac{T_2}{T_3} = 1{,}263 \Rightarrow T_2 = 1{,}263 \cdot 4 \doteq 5{,}05 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d2} - T_{d3}}{T_3} = 0{,}535 \Rightarrow T_{d2} = 0{,}535 \cdot 4 + 0 = 2{,}14 \text{ min},$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3} \approx \frac{2}{(5{,}05s+1)^2} \mathrm{e}^{-2{,}14s}.$$

a) Regulátor PI

Pro $\kappa = 0$ a $T = 0$ z tab. 5.13 a 5.14 se dostane ($k_1 = 2$, $T_1 = 7{,}92$ min a $T_{d1} = T_d = 4{,}93$ min)

$$T_I^* = T_1 = 7{,}92 \text{ min},$$

$$k_P^* = \frac{T_I^*}{k_1 \beta T_d} = \frac{7{,}92}{2 \cdot 2{,}718 \cdot 4{,}93} \doteq 0{,}30.$$

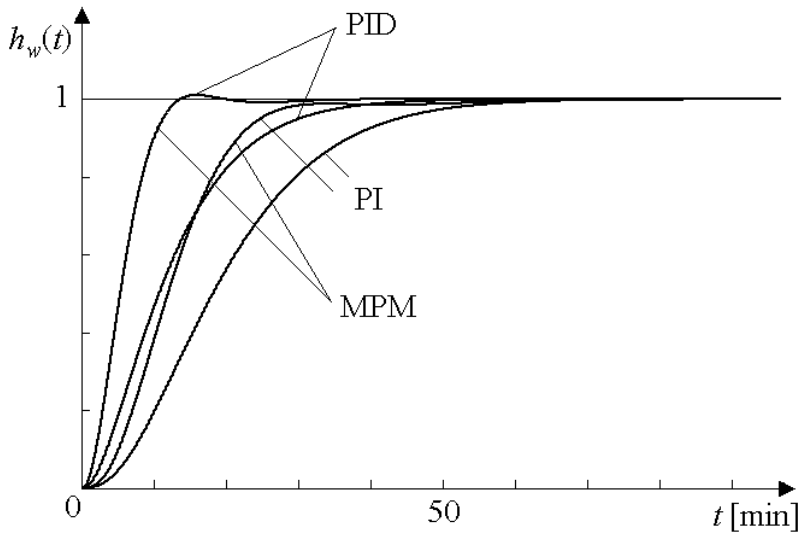
b) Regulátor PID

Pro $\kappa = 0$ a $T = 0$ z tab. 5.13 a 5.14 ($T_1 = T_2$) se dostane ($k_1 = 2$, $T_2 = 5{,}05$ min a $T_{d2} = T_d = 2{,}14$min)

$$T_I^* = 2T_2 = 2 \cdot 5{,}05 \doteq 10{,}10 \text{ min},$$

$$T_D^* = \frac{T_2}{2} = \frac{5{,}05}{2} \doteq 2{,}53 \text{ min},$$

$$k_P^* = \frac{T_I^*}{k_1 \beta T_d} = \frac{10{,}1}{2 \cdot 2{,}718 \cdot 2{,}14} \doteq 0{,}87.$$



Obr. 5.44 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného metodou požadovaného modelu (MPM) a metodou násobného dominantního pólu – příklad 5.15

Získané přechodové charakteristiky regulačního obvodu (MPM) jsou na obr. 5.44. Pro srovnání jsou tam uvedeny rovněž přechodové charakteristiky regulačního obvodu seřízeného metodou násobného dominantního pólu z příkladu 5.9. Je zřejmé, že metoda požadovaného modelu zajišťuje podstatně vyšší kvalitu regulace než metoda násobného dominantního pólu i když v případě použití regulátoru PID vznikl překmit (menší než 2 %).

Je třeba vzít v úvahu, že pro použití metody požadovaného modelu přenos regulované soustavy byl poměrně hrubě aproximován.

Metoda SIMC

Metoda SIMC vychází z regulace s interním modelem (IMC). Její autor Skogestad zkratku SIMC doporučuje chápat jako „SIMple Control“ nebo „Skogestad IMC“.

Pro návrh regulátoru lze použít vztah pro přímou syntézu [viz (5.90)]

$$G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)} \frac{G_{wy}(s)}{1 - G_{wy}(s)} \tag{5.91}$$

za předpokladu, že přenos řízení regulačního obvodu má tvar

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{5.92}$$

kde T_w je časová konstanta regulačního obvodu.

Např. pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$$

se dostane

$$G_R(s) = \frac{T_1 s + 1}{k_1} \frac{1}{T_w s + 1 - \mathrm{e}^{-T_d s}}. \tag{5.93}$$

Tab. 5.16 – Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů pro metodu SIMC

Regulovaná soustava		Regulátor				Poznámka
		Typ	k_P^*	T_I^*	T_D^*	
1	$k_1 \mathrm{e}^{-T_d s}$	I	–	$2k_1 T_d$	–	–
2	$\frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$	PI	$\frac{T_1}{2k_1 T_d}$	T_1	–	$T_1 \le 8T_d$
3			$\frac{T_1}{2k_1 T_d}$	$8T_d$	–	$T_1 > 8T_d$
4	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s}$ $T_1 \ge T_2$	PID$_i$	$\frac{T_1}{2k_1 T_d}$	T_1	T_2	$T_1 \le 8T_d$
5			$\frac{T_1}{2k_1 T_d}$	$8T_d$	T_2	$T_1 > 8T_d$
6		PID	$\frac{T_1 + T_2}{2k_1 T_d}$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$	$T_1 \le 8T_d$
7			$\frac{T_1 (T_2 + 8T_d)}{16k_1 T_d^2}$	$T_2 + 8T_d$	$\frac{8T_2 T_d}{T_2 + 8T_d}$	$T_1 > 8T_d$
8	$\frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}$	PI	$\frac{1}{2k_1 T_d}$	$8T_d$	–	–
9	$\frac{k_1}{s(T_2 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s}$	PID$_i$	$\frac{1}{2k_1 T_d}$	$8T_d$	T_2	–
10		PID	$\frac{T_2 + 8T_d}{16k_1 T_d^2}$	$T_2 + 8T_d$	$\frac{8T_2 T_d}{T_2 + 8T_d}$	–
11	$\frac{k_1}{s^2} \mathrm{e}^{-T_d s}$	PID$_i$	$\frac{1}{16k_1 T_d^2}$	$8T_d$	$8T_d$	–
12		PID	$\frac{1}{8k_1 T_d^2}$	$16T_d$	$4T_d$	–

Použitím aproximace

$$\mathrm{e}^{-T_d s} \approx 1 - T_d s$$

se ze vztahu (5.93) obdrží přenos regulátoru PI

$$G_R(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right), \quad k_P = \frac{T_1}{k_1 (T_w + T_d)}, \quad T_I = T_1.$$

Volbou časové konstanty T_w lze získat různě rychlé odezvy. Nejčastěji je doporučováno volit $T_w = T_d$ a integrační časovou konstantu T_I určit na základě vztahu

$$T_I = \min(T_1,\, 8T_d)\,.$$

Pak hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI jsou dány (viz řádky 2 a 3 v tab. 5.16)

$$k_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_d}, \quad \begin{array}{ll} T_I^* = T_1 & \text{pro } T_1 \le 8T_d \\ T_I^* = 8T_d & \text{pro } T_1 > 8T_d \end{array}.$$

Podobným způsobem byly získány i zbývající řádky v tab. 5.16

Případy v řádcích 2, 4 a 6 v tab. 5.16 jsou shodné s metodou požadovaného modelu pro relativní překmit $\kappa \approx 0{,}05$ (5 %).

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se libovolnou metodou upraví na vhodný tvar z tab. 5.16.
2. Pro doporučený regulátor se určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 5.16

Pro regulovanou soustavu z příkladu 4.7 s přenosem

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\mathrm{e}^{-s}$$

je třeba seřídit regulátory PI a PID metodou SIMC (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

Řešení:

V příkladě 4.7 byl přenos regulované soustavy upraven na základě „pravidla poloviny“ na tvary

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\mathrm{e}^{-s} \approx \frac{1}{11s+1}\mathrm{e}^{-10s}$$

a

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(8s+1)(6s+1)(4s+1)}\mathrm{e}^{-s} \approx \frac{1}{(8s+1)^2}\mathrm{e}^{-5s}\,.$$

Regulátor PI ($k_1 = 1$, $T_1 = 11$ s, $T_d = 10$ s)

Protože $T_1 = 11 < 8T_d = 80$, použije se řádek 2 v tab. 5.16

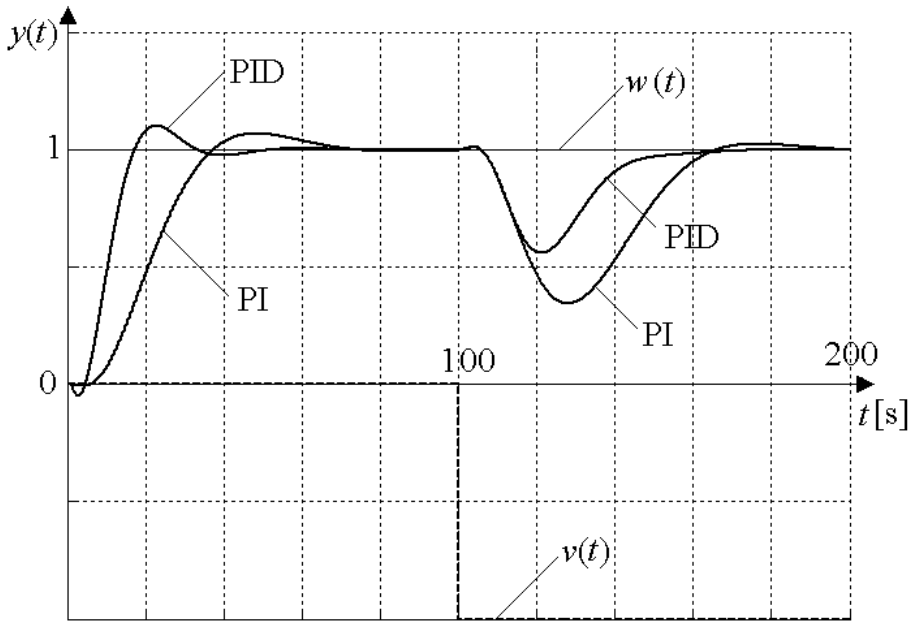
$$k_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_d} = \frac{11}{2\cdot 1\cdot 10} = 0{,}55; \qquad T_I^* = T_1 = 11 \text{ s}.$$

Regulátor PID ($k_1 = 1$, $T_1 = T_2 = 8$ s, $T_d = 5$ s)

Protože $T_1 = 8 < 8T_d = 40$, použije se řádek 6 v tab. 5.16

$$k_P^* = \frac{T_1 + T_2}{2k_1 T_d} = \frac{8+8}{2 \cdot 1 \cdot 5} \doteq 1{,}6; \qquad T_I^* = T_1 + T_2 = 8 + 8 = 16 \text{ s};$$

$$T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = \frac{8 \cdot 8}{8+8} = 4 \text{ s}.$$



Obr. 5.45 – Odezvy regulačního obvodu seřízeného metodou SIMC na skokové změny žádané a poruchové veličiny – příklad 5.16

Odezvy na jednotkovou skokovou změnu žádané veličiny $w(t) = \eta(t)$ a poruchové veličiny $v(t) = -\eta(t - 100)$ jsou ukázány na obr. 5.45. Z jejich průběhů je zřejmé, že metoda SIMC dává i při velmi hrubé aproximaci přenosů regulovaných soustav velmi dobré výsledky.

5.3 Číslicová regulace

S rozvojem číslicové techniky a současně s poklesem její ceny se i v regulaci stále častěji používají i číslicové regulátory, které v diskrétní formě realizují stejné algoritmy jako odpovídající analogové regulátory. **Vzhledem k předpokládané zanedbatelně malé kvantizační chybě pojmy číslicový** (diskrétní v úrovni i čase) **a diskrétní** (spojitý v úrovni a diskrétní v čase) **nebudou rozlišovány**. Např. analogovému regulátoru typu PID odpovídá číslicový (diskrétní) regulátor typu PSD (proporcionálně sumačně diferenční)

$$u(kT) = k_P\left\{e(kT) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(iT) + \frac{T_D}{T}\{e(kT) - e[(k-1)T]\}\right\} =$$
$$= \underbrace{K_P e(kT)}_{P} + \underbrace{K_S \sum_{i=0}^{k} e(iT)}_{S} + \underbrace{K_D\{e(kT) - e[(k-1)T]\}}_{D}, \tag{5.94}$$

$k = 0,1,2,\ldots,$

kde K_P je váha proporcionální složky, K_S – váha sumační složky, K_D – váha diferenční složky, T – vzorkovací perioda, kT – diskrétní čas.

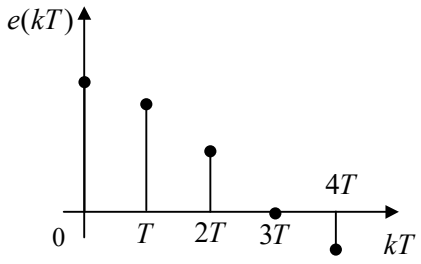
Pro stavitelné parametry číslicového regulátoru PSD (5.94) platí

$$K_P = k_P, \qquad K_S = k_P \frac{T}{T_I}, \; K_D = k_P \frac{T_D}{T}, \tag{5.95}$$

resp.

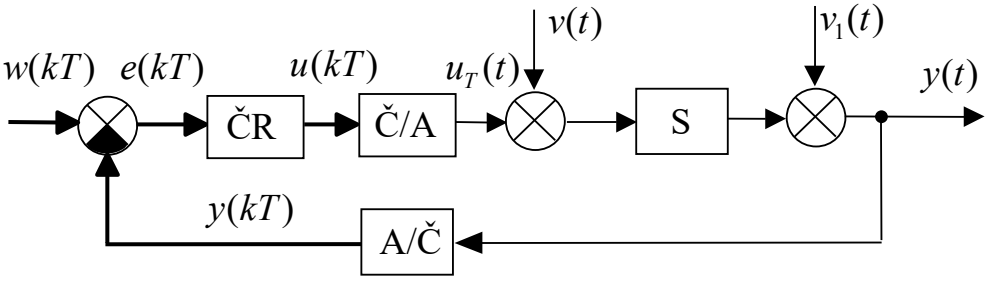
$$k_P = K_P, \qquad T_I = \frac{K_P}{K_S}T, \quad T_D = \frac{K_D}{K_P}T. \tag{5.96}$$

Je zřejmé, že u číslicových regulátorů vystupuje další stavitelný parametr – ***vzorkovací perioda*** T, jejíž správná volba je velmi důležitá z hlediska kvality regulace. Protože vzorkovací perioda T zvyšuje vliv sumační činnosti (sumační činnost destabilizuje regulační pochod) a snižuje vliv diferenční činnosti (diferenční činnost stabilizuje regulační pochod), její vliv na kvalitu regulace je vždy negativní. Vyplývá to rovněž z toho, že mezi okamžiky vzorkování $kT \le t < (k+1)T$ číslicový regulátor nemá informaci o okamžité hodnotě regulační odchylky $e(t)$, viz obr. 5.46.

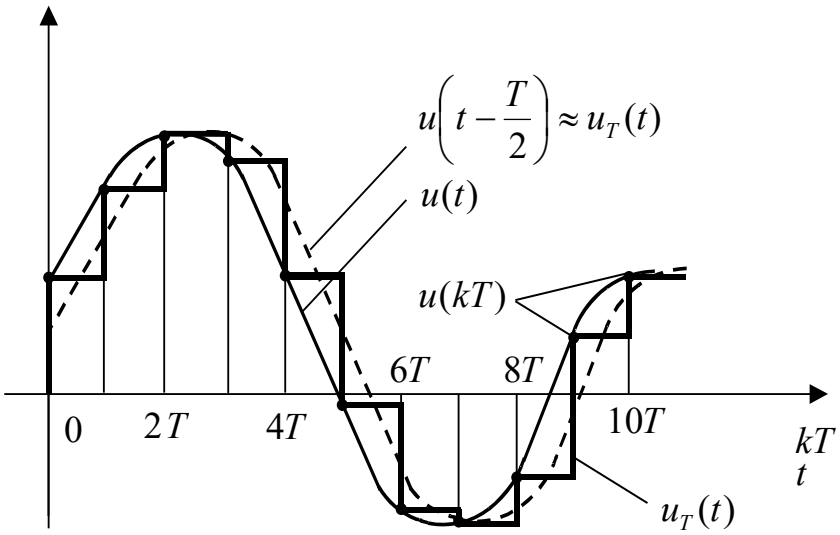


Obr. 5.46 – Průběh regulační odchylky v regulačním obvodu s číslicovým regulátorem

Převedení spojité (analogové) veličiny na veličinu diskrétní (v čase) provádí ***analogově – číslicový převodník*** (A/Č převodník), který je nejčastěji zapojen ve zpětné vazbě, jako na obr. 5.47. Výstupní veličinou číslicového regulátoru (ČR) je diskrétní akční veličina $u(kT)$, kterou ***číslicově – analogový převodník*** (Č/A převodník) převádí na spojitou v čase, tzv. ***tvarovanou veličinu*** $u_T(t)$ mající nejčastěji schodovitý průběh (obr. 5.48).



Obr. 5.47 – Blokové schéma regulačního obvodu s číslicovým regulátorem



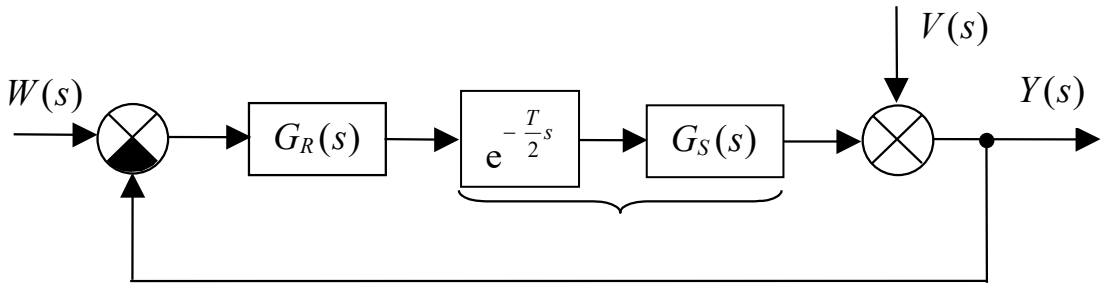
Obr. 5.48 – Průběhy akčních veličin v regulačním obvodu s číslicovým regulátorem

Z obr. 5.48 vyplývá, že tvarovaná akční veličina $u_T(t)$ pro malou hodnotu vzorkovací periody T může být nahrazena spojitou akční veličinou $u(t)$ zpožděnou o polovinu vzorkovací periody, tj. $u(t - T/2)$ a že tato náhrada je tím lepší, čím menší je vzorkovací perioda. Proto pro přibližnou analýzu a syntézu regulačního obvodu s číslicovým regulátorem může být použito náhradní blokové schéma v souladu s obr. 5.49. Číslicový regulátor se nahradí analogovým regulátorem odpovídajícího typu a člen dopravního zpoždění se přiřadí k regulované soustavě. Pokud se pro analýzu nebo syntézu použijí metody, které jsou nevhodné pro dopravní zpoždění, je nutno použít některou z aproximací

$$\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} \approx \frac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}, \tag{5.97}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} \approx \frac{1}{1+\frac{T}{2}s}\,. \tag{5.98}$$

Přesnější aproximace se nepoužívají a získané výsledky je třeba vždy interpretovat s vědomím, že jde o přibližný přístup.



Obr. 5.49 – Náhradní blokové schéma regulačního obvodu s číslicovým regulátorem

Číslicový regulátor typu PSD patří k nejsložitějším konvenčním regulátorům. V praxi se používají i jednodušší typy:

číslicový regulátor PS (proporcionálně sumační)

$$u(kT) = k_P\left[e(kT) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(iT)\right], \tag{5.99}$$

číslicový regulátor PD (proporcionálně diferenční)

$$u(kT) = k_P\left\{e(kT) + \frac{T_D}{T}\left\{e(kT) - e[(k-1)T]\right\}\right\}, \tag{5.100}$$

číslicový regulátor S (sumační)

$$u(kT) = \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(iT)\,, \tag{5.101}$$

číslicový regulátor P (proporcionální)

$$u(kT) = k_P e(kT)\,. \tag{5.102}$$

Někdy, především v zahraniční literatuře, typy číslicových regulátorů se označují stejně jako u analogových regulátorů, ale vždy se tam vyskytuje slovo „číslicový“ (např. číslicový regulátor PI atd.). Často rovněž sumační činnost je realizována jinou než zpětnou obdélníkovou metodou (např. lichoběžníkovou metodou) a index *i* v sumaci začíná od 1 a ne od 0.

Při vhodně zvolené hodnotě vzorkovací periody T jsou tyto rozdíly zanedbatelné a navíc výrobce často ani neuvádí způsob realizace sumace.

U číslicové regulace veličina vstupující do diferenční složky musí být vždy vhodně filtrována.

Číslicové regulátory, podobně jako analogové regulátory [viz vztahy (4.33), (4.38) a (4.40)], mohou být rovněž konstruovány se dvěma stupni volnosti.

Pro volbu vzorkovací periody T neexistují jednoznačná pravidla a doporučení. Pro orientační hrubou volbu lze použít následující doporučení.

Vzorkovací perioda *T*	**Proces**
(10 ÷ 500) μs	přesné řízení a modelování, elektrické systémy, energetické systémy, přesné řídicí roboty
(0,5 ÷ 20) ms	stabilizace výkonových systémů, letové simulátory, trenažéry
(10 ÷ 100) ms	zpracování obrazů, virtuální realita, umělé vidění
(0,5 ÷ 1) s	monitorování a řízení objektů, chemické procesy, elektrárny
(1 ÷ 3) s	regulace průtoků
(1 ÷ 5) s	regulace tlaku
(5 ÷ 10) s	regulace hladiny
(10 ÷ 20) s	regulace teploty

Přesnější určení hodnoty vzorkovací periody T vychází ze znalosti průběhu přechodové charakteristiky regulované soustavy, příp. vlastností uzavřeného regulačního obvodu. Např. pro nekmitavou proporcionální regulovanou soustavu se doporučuje

$$T = \left(\frac{1}{15} \div \frac{1}{6}\right) t_{0,95}, \tag{5.103}$$

kde $t_{0,95}$ je doba, za kterou přechodová charakteristika regulované soustavy dosáhne 95 % ustálené hodnoty.

Pro regulovanou soustavu s dominantním dopravním zpožděním T_d se doporučuje použití vztahu

$$T = \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{3}\right) T_d . \tag{5.104}$$

U číslicových regulátorů obsahujících diferenční složku vzorkovací perioda T by měla splňovat podmínku

$$T = (0{,}1 \div 0{,}5) T_D . \tag{5.105}$$

Některé metody seřizování jsou zpracovány i pro číslicové regulátory (viz např. tab. 5.11 ÷ 5.14), a proto mohou být použity přímo.

Příklad 5.17

U regulačního obvodu s číslicovým regulátorem (obr. 5.47) a regulovanou soustavou s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$$

je třeba:

- zvolit nejjednodušší číslicový regulátor, který zajistí nulovou trvalou regulační odchylku pro skokovou změnu polohy žádané i poruchové veličiny;
- zvolený číslicový regulátor seřídit tak, aby relativní překmit regulované veličiny byl okolo 5 %.

Řešení:

Protože poruchová veličina *v* působí na výstupu regulované soustavy, trvalá regulační odchylka pro skokovou změnu polohy jak žádané *w*, tak i poruchové *v* veličiny bude nulová, když stupeň astatismu $q \geq 1$. Z tohoto důvodu číslicový regulátor musí obsahovat sumační složku, jako např. S, PS, PSD, a z nich nejjednodušší je sumační regulátor S vyjádřený vztahem (5.101).

Požadovaný překmit okolo 5 % dává metoda optimálního modulu, a proto pro přibližné seřízení bude také použita.

V souladu s obr. 5.49 pro analogový regulátor typu I s přenosem

$$G_R(s) = \frac{1}{T_I s}$$

lze psát

$$G_o(s) = G_R(s)\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}\, G_S(s) = \frac{k_1}{T_I s(T_1 s + 1)}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}.$$

a) Pro aproximaci (5.97) se dostane

$$G_o(s) \approx \frac{k_1\left(1 - \frac{T}{4}s\right)}{T_I s(T_1 s + 1)\left(1 + \frac{T}{4}s\right)} \quad \Rightarrow$$

$$G_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \approx \frac{\overbrace{-k_1\frac{T}{4}}^{b_1}s + \overbrace{k_1}^{b_0}}{\underbrace{T_I T_1 \frac{T}{4}}_{a_3}s^3 + \underbrace{T_I\left(T_1 + \frac{T}{4}\right)}_{a_2}s^2 + \underbrace{\left(T_I - k_1\frac{T}{4}\right)}_{a_1}s + \underbrace{k_1}_{a_0}}.$$

Je třeba určit hodnotu jednoho stavitelného parametru T_I, tj. $p = 1$, stupeň astatismu regulačního obvodu $q = 1$, a proto na základě vztahů (5.73) a (5.77) se obdrží

$$A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 = \left(T_I - k_1\frac{T}{4}\right)^2 - 2k_1T_I\left(T_1 + \frac{T}{4}\right),$$

$$B_1 = b_1^2 = k_1^2\frac{T^2}{16},$$

$$A_1 = B_1 \qquad \Rightarrow \qquad T_I^* = 2k_1\left(T_1 + \frac{T}{2}\right).$$

Protože přenos řízení $G_{wy}(s)$ nemá standardní tvar (5.79), je třeba zkontrolovat stabilitu. Na základě Hurwitzova kritéria stability ($n = 3$) lze psát

$$a_i > 0 \text{ pro } i = 0 \div 3 \Rightarrow T_I > k_1\frac{T}{4},$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_I\left(T_1 + \frac{T}{4}\right) & k_1 \\ T_IT_1\frac{T}{4} & T_I - k_1\frac{T}{4} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow T_I > \frac{k_1T\left(T_1 + \frac{T}{8}\right)}{2\left(T_1 + \frac{T}{4}\right)}.$$

Snadno lze ověřit, že T_I^* vyhovuje oběma podmínkám stability.

b) Pro aproximaci (5.98) se dostane

$$G_o(s) \approx \frac{k_1}{T_Is(T_1s+1)\left(\frac{T}{2}s+1\right)} \qquad \Rightarrow$$

$$G_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} \approx \frac{\overbrace{k_1}^{b_0}}{\underbrace{T_IT_1\frac{T}{2}}_{a_3}s^3 + \underbrace{T_I\left(T_1+\frac{T}{2}\right)}_{a_2}s^2 + \overbrace{T_I}^{a_1}s + \overbrace{k_1}^{a_0}}.$$

Ze stejných důvodů jako v případě a) se na základě vztahů (5.73) a (5.77) obdrží

$$A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 = T_I^2 - 2k_1T_I\left(T_1 + \frac{T}{2}\right), \qquad B_1 = 0,$$

$$A_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_I^* = 2k_1\left(T_1 + \frac{T}{2}\right).$$

Je zajímavé, že i když přenos řízení $G_{wy}(s)$ je jiný, hodnota T_I^* byla získána stejná jako v předchozím případě. Snadno lze ověřit, že i v tomto případě regulační obvod pro určené T_I^* bude stabilní.

Pro regulační obvod s analogovým regulátorem typu I (viz obr. 5.50), tj. pro $T = 0$ se dostane

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_1}{T_I s(T_1 s + 1)} \qquad \Rightarrow$$

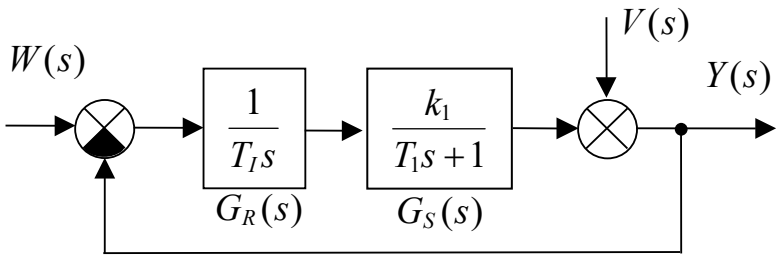
$$G_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\overbrace{k_1}^{b_0}}{\underbrace{T_I T_1}_{a_2} s^2 + \underbrace{T_I}_{a_1} s + \underbrace{k_1}_{a_0}}.$$

Pro $p = 1$ na základě vztahů se obdrží (viz také tab. 5.11)

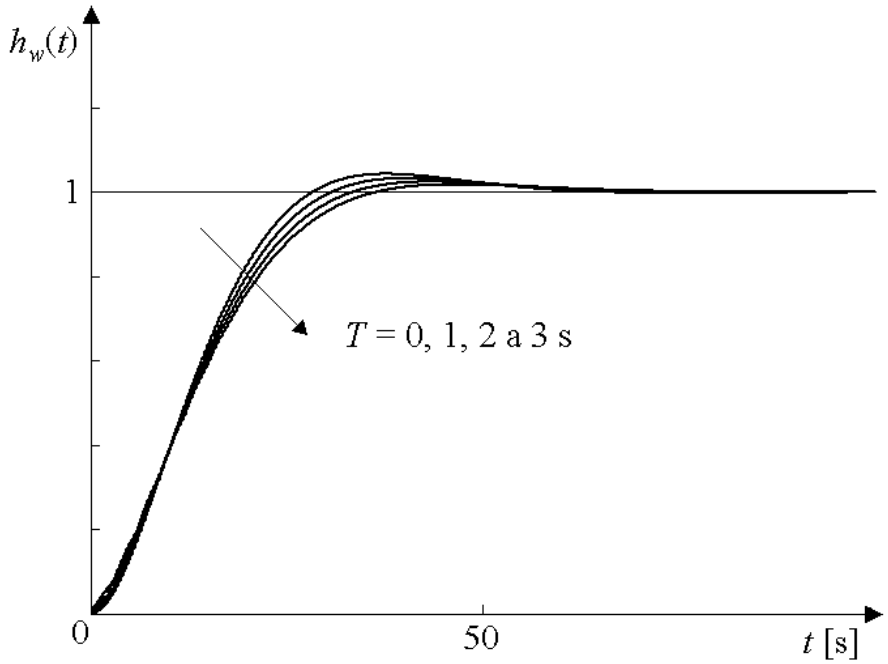
$$A_1 = a_1^2 - 2a_0 a_2 = T_I^2 - 2k_1 T_I T_1, \;\; B_1 = 0,$$

$$A_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_I^* = 2k_1 T_1 .$$

Na obr. 5.51 jsou vykresleny přechodové charakteristiky pro $k_1 = 1$, $T_1 = 6$ s a $T = 0$, 1, 2 a 3 s.



Obr. 5.50 – Regulační obvod s analogovým regulátorem z příkladu 5.17



Obr. 5.51 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu z příkladu 5.17

Pro seřízení dané regulované soustavy metodou optimálního modulu mohla být použita tab. 5.11, řádek 1. V tomto případě se přímo dostane

$$T_I^* = 2k_1(T_1 - 0{,}5T)$$

což je na první pohled diametrálně odlišný výsledek. Je třeba si však uvědomit, že už vlastní metoda optimálního modulu je metodou přibližnou, která se snaží zajistit konstantní, pokud možno jednotkový, modul kmitočtového přenosu řízení. Za „optimální“ z hlediska metody optimálního modulu lze považovat hodnotu $T_I^* = 2k_1T_1$, získanou pro analogový regulátor typu PI (protože v případě použití číslicového regulátoru a stejné metody seřízení vždy dojde k poklesu kvality regulace). Je tedy zřejmé, že jak seřízení získané v tomto příkladě, tak i doporučované tab. 5.11 se od „optimální“ hodnoty liší o k_1T.

Příklad 5.18

Metodou požadovaného modelu je třeba seřídit číslicový regulátor typu PS pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_3 s + 1)^3} \mathrm{e}^{-T_{d3}s}$$

tak, aby relativní překmit regulované veličiny pro skokovou změnu polohy žádané veličiny byl okolo 0, 5 a 10 % (T_3 = 2 s, T_{d3} = 4 s, k_1 = 1).

Řešení:

Protože přenos regulované soustavy neodpovídá svým tvarem přenosu vhodném pro použití číslicového regulátoru PS, viz řádek 2 v tab. 5.14, proto je ho třeba upravit.

Na základě tab. 4.3 lze psát (i = 3)

$$\frac{T_1}{T_3} = 1{,}980 \Rightarrow T_1 = 1{,}98T_3 = 3{,}96\,\mathrm{s},$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d3}}{T_3} = 1{,}232 \Rightarrow T_{d1} = 1{,}232T_3 + T_{d3} = 6{,}464\,\mathrm{s},$$

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_3 s + 1)^3} \mathrm{e}^{-T_{d3}s} \approx \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1}s} = \frac{1}{3{,}96s + 1} \mathrm{e}^{-6{,}464s}.$$

Protože regulovaná soustava obsahuje dominantní dopravní zpoždění, tj. T_{d1} = 6,464 > T_1 = 3,96, proto volbu vzorkovací periody lze provést pomocí vztahu (5.104). Zvolí-li se T = 1,5 s, je zřejmé, že tato hodnota vyhovuje nejenom vztahu (5.104), ale i (5.103).

Z tab. 5.13 a 5.14 se obdrží

$$T_I^* = T_1 - 0{,}5T = 3{,}21\ s,$$

$$\kappa = 0:\ \alpha = 1{,}280;\ \ \beta = 2{,}718$$

$$k_P^* = \frac{T_I^*}{(\alpha T + \beta T_d)k_1} \doteq 0{,}16;$$

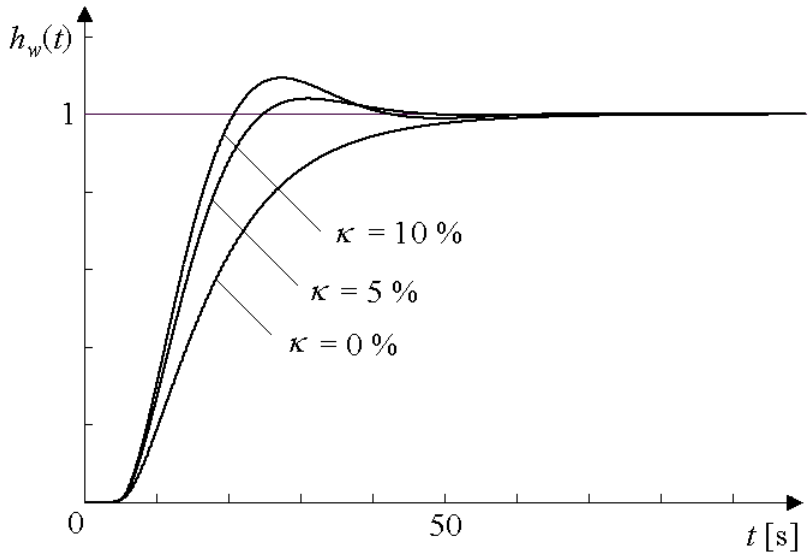
$$\kappa = 0{,}05:\ \alpha = 0{,}984;\ \ \beta = 1{,}944$$

$$k_P^* \doteq 0{,}23;$$

$$\kappa = 0{,}1:\ \alpha = 0{,}884;\ \ \beta = 1{,}720$$

$$k_P^* \doteq 0{,}26.$$

Odpovídající přechodové charakteristiky jsou na obr. 5.52.

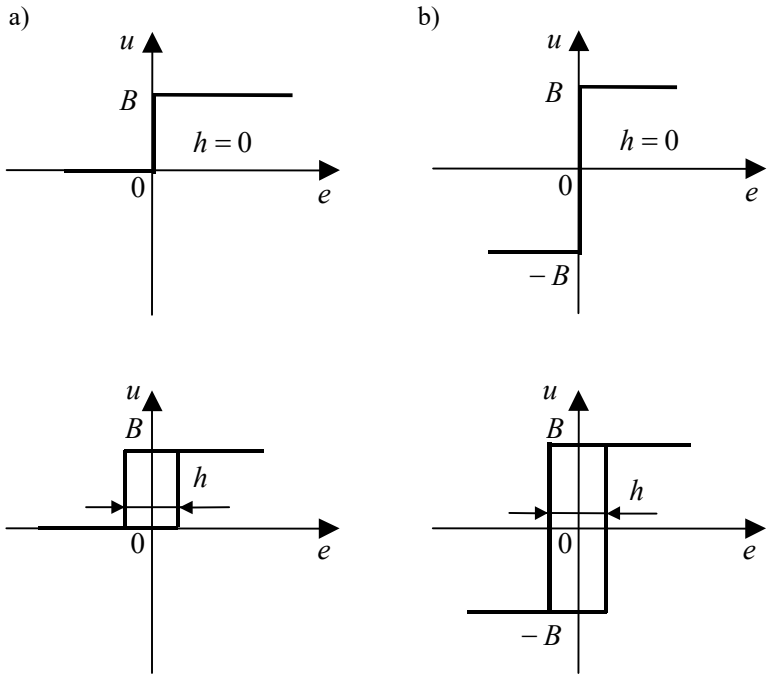


Obr. 5.52 – Přechodové charakteristiky regulačního obvodu s číslicovým regulátorem PS – příklad 5.18

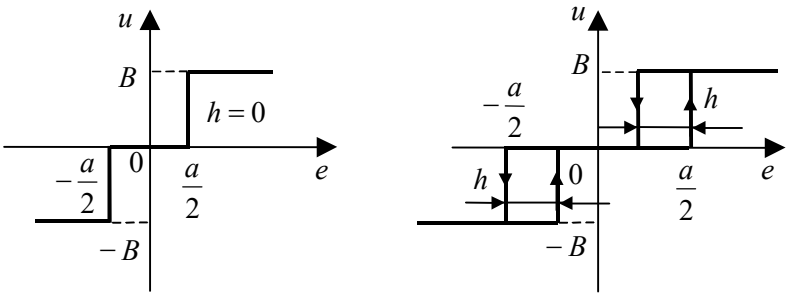
6 Dvou- a třípolohová regulace

Dvou- a ***třípolohová*** (reléová) ***regulace*** patří mezi nejjednodušší druhy nespojitého zpětnovazebního řízení (jde o nespojitost v úrovni). Speciálně s dvoupolohovou regulací je možné se setkat v každé domácnosti. Nejčastěji jde např. o regulaci teploty vzduchu v místnosti, chladničce, mrazničce, elektrické troubě, dále o regulaci teploty a výšky hladiny vody v automatické pračce, atd. Asi nejběžnější je dvoupolohová regulace teploty žehlicího tělesa žehličky. V tomto případě dvoupolohový regulátor plní i úlohu měřicího členu.

Hlavním důvodem používání dvou- a třípolohové regulace je velmi nízká cena a poměrně vysoká spolehlivost jak vlastního regulátoru, tak i akčního členu.

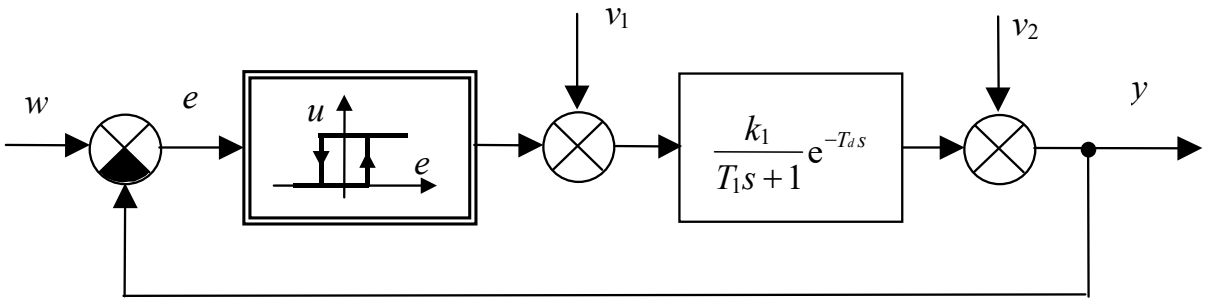


Obr. 6.1 – Charakteristiky dvoupolohového regulátoru: a) nesymetrického bez hystereze ($h = 0$) a s hysterezí ($h > 0$), b) symetrického bez hystereze ($h = 0$) a s hysterezí ($h > 0$)

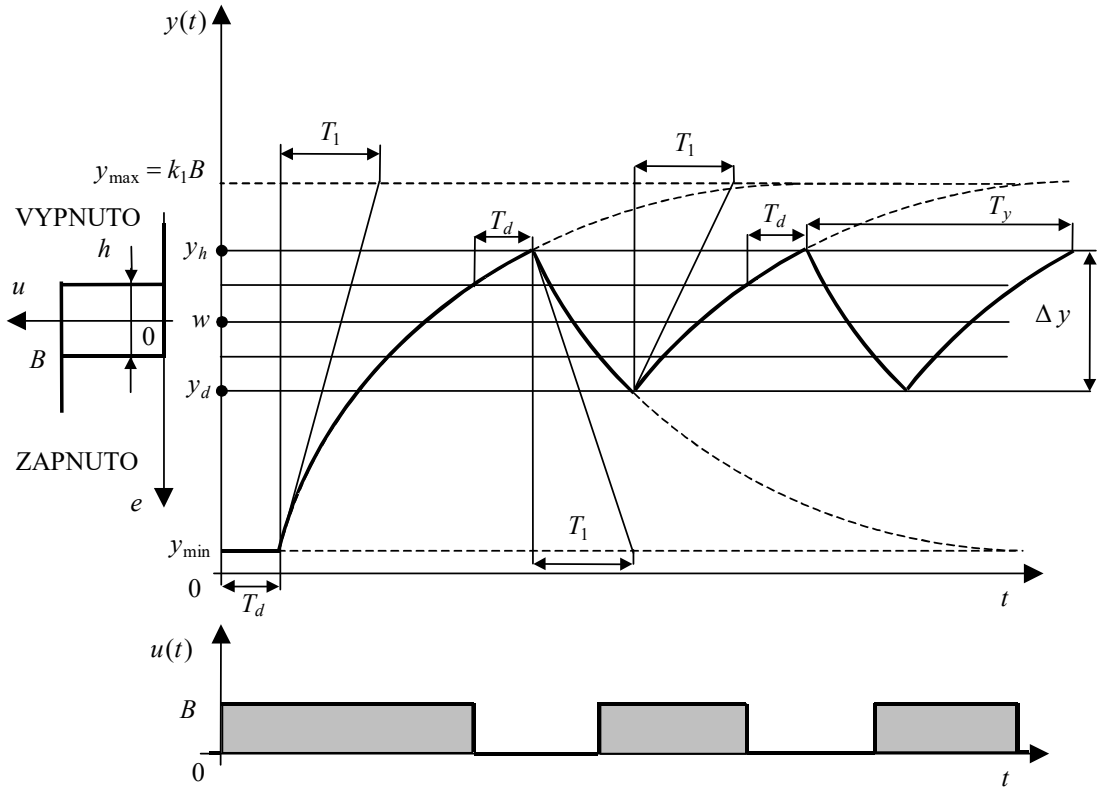


Obr. 6.2 – Charakteristiky symetrického třípolohového regulátoru bez hystereze ($h = 0$) a s hysterezí ($h > 0$)

Dvou- a třípolohové regulátory jsou silně nelineární. Jejich charakteristiky jsou reléové a jsou na obr. 6.1 a 6.2, kde B je amplituda, h – šířka hystereze, a – necitlivost. Pokud charakteristika regulátoru je bez hystereze (tj. bez paměti), jde o jeho statickou charakteristiku. V případě charakteristiky s hysterezí (tj. s pamětí), přesně vzato nejde o statickou charakteristiku (proto se také hovoří pouze o charakteristikách).



Obr. 6.3 – Blokové schéma obvodu dvoupolohové regulace



Obr. 6.4 – Průběh regulované $y(t)$ a akční veličiny $u(t)$ v obvodu dvoupolohové regulace

Dvoupolohové regulátory s charakteristikami na obr. 6.1a nejčastěji pracují v režimu „zapnuto – vypnuto“ (např. zapnutý ohřev – vypnutý ohřev) a na obr. 6.1b pracují v režimu „zapnuto plus – zapnuto minus“ (např. zapnutý ohřev – zapnuté chlazení). Třípolohové regulátory s charakteristikami na obr. 6.2 jsou rozšířením dvoupolohových symetrických regulátorů na obr. 6.1b o třetí polohu „vypnuto“. Pracují nejčastěji v režimu „zapnuto plus – vypnuto – zapnuto minus“ (např. zapnutý ohřev – vypnutý ohřev i chlazení – zapnuté chlazení).

Typický obvod dvoupolohové regulace je na obr. 6.3. Protože v jeho blokovém schématu vystupují jak originály veličin, tak i jejich obrazy, proto se veličiny nejčastěji označují malými písmeny bez uvedení nezávislých proměnných. Jeho činnost je velmi jednoduchá. Předpokládá se, že počáteční hodnota regulované veličiny $y(0) = y_{min}$. Protože $e(0) > h/2$, akční veličina $u(t) =$

B (stav: zapnuto – ON) a počáteční průběh regulované veličiny $y(t)$ je dán vztahem (obr. 6.4)

$$y(t) = y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min})\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-T_d}{T_1}}\right)\eta(t - T_d), \qquad t \geq 0\,. \tag{6.1}$$

Po dosažení hodnoty $y(t) = w + \frac{h}{2}$, akční veličina $u(t) = 0$ (stav: vypnuto – OFF), regulovaná veličina $y(t)$ nejdříve po dobu dopravního zpoždění T_d roste a pak klesá až dosáhne hodnoty $y(t) = w - \frac{h}{2}$, akční veličina $u(t) = B$ (stav: zapnuto – ON), dále pak klesá po dobu dopravního zpoždění T_d a pak znovu roste. Celý regulační proces se periodicky opakuje. Protože obvod dvoupolohové regulace je silně nelineární, analytický popis průběhu regulované veličiny $y(t)$ je poměrně složitý a nepřehledný. Naproti tomu grafická konstrukce regulačního procesu je velmi jednoduchá a vyplývá přímo z obr. 6.4.

Správně navržený obvod dvoupolohové regulace je takový, kde hodnota žádané veličiny je přibližně rovna

$$w \approx \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}\,. \tag{6.2}$$

V případě rovnosti jde o 100 % nadbytku výkonu akčního členu a střední hodnota regulované veličiny $y_{\text{stř}} = w$. Při větším nadbytku výkonu $y_{\text{stř}} > w$ a při menším $y_{\text{stř}} < w$.

Působí-li na obvod dvoupolohové regulace (obr. 6.3) poruchové veličiny $v_1(t)$ a $v_2(t)$ a např. způsobí pokles regulované veličiny $y(t)$ pod hodnotu $w - \frac{h}{2}$, akční veličina $u(t) = B$ (stav: zapnuto – ON), regulovaná veličina $y(t)$ po době rovné dopravnímu zpoždění T_d začne stoupat a zase vznikne periodický regulační proces.

Je tedy zřejmé, že pokud vznikne regulační odchylka $e(t)$ [přičemž nezáleží na tom, zda vznikla změnou žádané veličiny $w(t)$ nebo působením poruchových veličin $v_1(t)$ a $v_2(t)$ nebo změnou vlastností regulované soustavy], pak se ji snaží dvoupolohový regulátor odstranit vždy maximálním akčním zásahem, tj. $u_{\max} = B$, příp. $u_{\min} = 0$. Proto **pokud dvoupolohová regulace je použitelná, je vysoce robustní**.

O použitelnosti dvoupolohové regulace rozhoduje její kvalita, daná především ***šířkou pásma kmitání*** Δy regulované veličiny, která může být určena na základě vztahů (viz obr. 6.4)

$$y_h = w + \frac{h}{2} + \left(y_{\max} - w - \frac{h}{2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}}\right) = y_{\max} - \left(y_{\max} - w - \frac{h}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}},$$

$$y_d = w - \frac{h}{2} - \left(w - \frac{h}{2} - y_{\min} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}} \right) = y_{\min} + \left(w - \frac{h}{2} - y_{\min} \right) \mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}},$$

$$\Delta y = y_h - y_d = (y_{\max} - y_{\min}) \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}} \right) + h\,\mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}}. \tag{6.3}$$

Použije-li se aproximace

$$\mathrm{e}^{-\frac{T_d}{T_1}} \approx 1 - \frac{T_d}{T_1} \qquad \text{a} \qquad -h\frac{T_d}{T_1} \approx 0,$$

poslední vztah se podstatně zjednoduší

$$\Delta y \approx (y_{\max} - y_{\min}) \frac{T_d}{T_1} + h. \tag{6.4}$$

Ze vztahu (6.4) je zřejmé, že na šířku pásma kmitání Δy má negativní vliv jak hystereze h, tak i dopravní zpoždění T_d. Dopravní zpoždění T_d lze někdy snížit vhodným umístěním měřicího členu, ale většinou je dáno vlastnostmi regulované soustavy.

Dopravní zpoždění T_d je největším nepřítelem dvoupolohové regulace (vůbec regulace), a proto se vyžaduje splnění podmínky

$$\frac{T_d}{T_1} < 0{,}2, \tag{6.5a}$$

resp. (obr. 4.18a)

$$\frac{T_u}{T_n} < 0{,}2. \tag{6.5b}$$

Proto, pokud není dosaženo požadované kvality regulace ani při $h = 0$, nelze jednoduchý dvoupolohový regulátor použít.

Z praktického hlediska veliký význam má rovněž ***perioda kmitů*** T_y, protože její převrácená hodnota

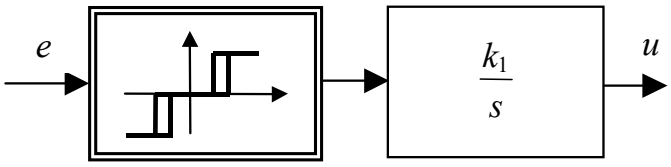
$$f_y = \frac{1}{T_y} \tag{6.6}$$

vyjadřuje ***četnost spínání*** (tj. počet zapnutí nebo vypnutí) za odpovídající časovou jednotku. Četnost spínání f_y má přímý vliv na životnost regulátoru, příp. akčního členu. Z obr. 6.4 vyplývá, že perioda kmitů T_y bude tím větší, čím větší bude dopravní zpoždění T_d a hystereze h. Je tedy zřejmé, že požadavky na minimální šířku pásma kmitání Δy a maximální periodu kmitů T_y jsou vzájemně protichůdné, a proto je třeba volit kompromisní řešení.

U elektronických dvoupolohových regulátorů se perioda kmitů T_y zvyšuje nastavitelnou časovou prodlevou.

Je tedy zřejmé, že všechny výše uvedené úvahy se týkají i symetrického dvoupolohového regulátoru (obr. 6.1b) pro $y_{\min} = -k_1 B$.

Symetrický dvoupolohový regulátor (obr. 6.1b) se někdy používá společně s integračním členem (nejčastěji je jím elektrický motor). Nevýhodou je neustálé přepínání, a proto je vhodnější použití třípolohového regulátoru (obr. 6.2), jak je ukázáno na obr. 6.5. Takové zapojení se používá pro nastavení akčního členu (nejčastěji ventilu).



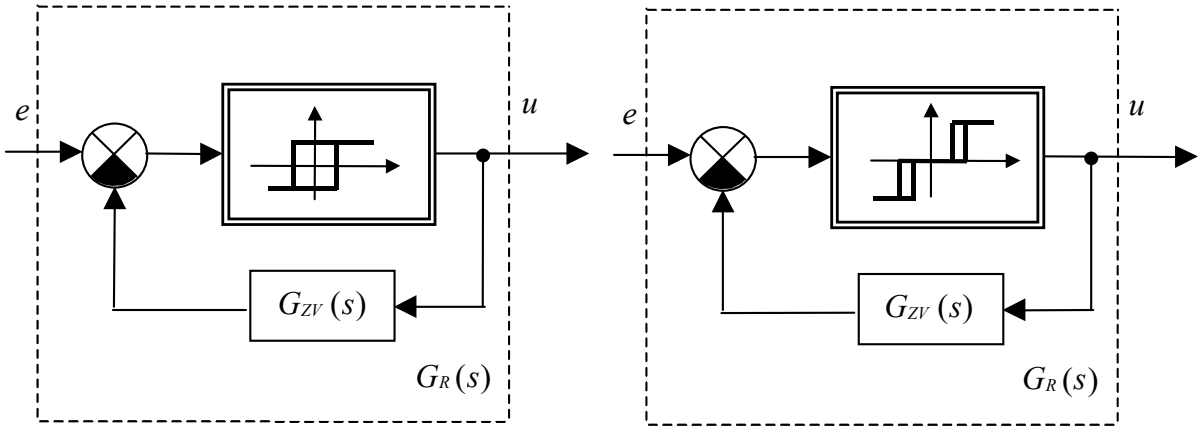
Obr. 6.5 – Třípolohový regulátor s integračním členem

Velikou šířku pásma kmitání Δy lze u dvou- a třípolohové regulace snížit pomocí záporné dynamické zpětné vazby, viz obr. 6.6. U obou zapojení na obr. 6.6 lze dvou- a třípolohový regulátor zastoupit přibližně zesílením $k_n \to \infty$ a pak platí

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \approx \frac{k_n}{1 + k_n G_{ZV}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{k_n} + G_{ZV}(s)},$$

$$k_n \to \infty \Rightarrow G_R(s) \approx \frac{1}{G_{ZV}(s)}, \tag{6.7}$$

kde $G_{ZV}(s)$ je přenos dynamické zpětné vazby.



Obr. 6.6 – Dvou- a třípolohový regulátor s dynamickou zpětnou vazbou

Je zřejmé, že dvou- a třípolohový regulátor s dynamickou zpětnou vazbou přibližně realizuje inverzi zpětné vazby, tj. (6.7).

Např. pro

$$G_{ZV}(s) = \frac{k_{ZV}}{T_{ZV} s + 1}$$

se obdrží regulátor přibližně realizující činnost PD

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \approx \frac{1}{G_{ZV}(s)} = k_P(1 + T_D s),$$
$$k_P \approx \frac{1}{k_{ZV}}, \quad T_D \approx T_{ZV}. \tag{6.8}$$

Pro

$$G_{ZV}(s) = \frac{k_{ZV} s}{T_{ZV} s + 1},$$

se získá přibližná činnost PI regulátoru, tj.

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \approx k_P(1 + \frac{1}{T_I s}),$$
$$k_P \approx \frac{T_{ZV}}{k_{ZV}}, \quad T_I \approx T_{ZV}. \tag{6.9}$$

Podobně pro

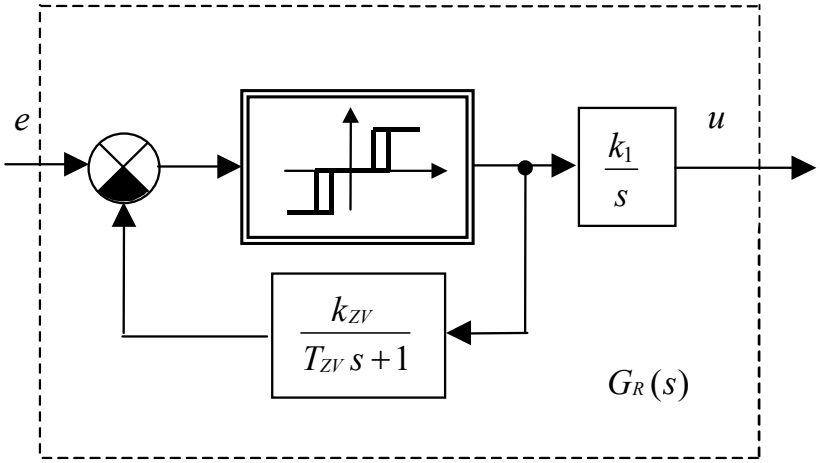
$$G_{ZV}(s) = \frac{k_{ZV} s}{(T_{ZV1} s + 1)(T_{ZV2} s + 1)}, \quad T_{ZV1} > T_{ZV2}$$

je přibližně realizován regulátor typu PID s interakcí [viz vztah (4.24)]

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \approx k'_P(1 + \frac{1}{T'_I s})(1 + T'_D s),$$
$$k'_P \approx \frac{T_{ZV1}}{k_{ZV}}, \quad T'_I \approx T_{ZV1}, \quad T'_D \approx T_{ZV2}. \tag{6.10}$$

Použije-li se zapojení podle obr. 6.7, získá se tzv. ***krokový regulátor*** PI s přenosem

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \approx k_P(1 + \frac{1}{T_I s}),$$
$$k_P \approx \frac{k_1}{k_{ZV}} T_{ZV}, \quad T_I \approx T_{ZV}. \tag{6.11}$$



Obr. 6.7 – Blokové schéma krokového regulátoru PI

7 Závěr

V učebním textu jsou uvedeny a vysvětleny nejdůležitější pojmy z oblasti základů teorie automatické regulace, které by měl znát každý absolvent studijních oborů zabývajících se automatizací.

Text je rozdělen do šesti kapitol, ve kterých je čtenář postupně seznámen s Laplaceovou transformací, matematickými modely regulovaných soustav, regulátory, základními vlastnostmi regulačních obvodů, posuzováním kvality regulace, návrhem a seřízením analogových regulátorů. Poslední část textu je věnována stručné informaci o číslicové regulaci a dvou- a třípolohové regulaci.

Teorie je uváděna pouze v nezbytné míře a je doplněna názornými, plně řešenými příklady.

Při zpracování učebnice byla použita celá řada nejrůznějších informačních zdrojů od internetových až po tištěné publikace, v tom také vlastní publikace, z nichž jsou uvedeny v seznamu použité literatury pouze nejdůležitější. Učebnice obsahuje také původní přístupy a zkušenosti autorů.

Pro důkladnější studium a rozšíření znalostí je možno použít doporučenou literaturu.

8 Rejstřík

A

absolutní regulační plocha, 147
aditivní neurčitost, 160
akční veličina, 13, 14
akční člen, 15
algebra blokových schémat, 61
algoritmus regulace, 15
amplituda (modul) kmitočtového přenosu, 39
amplitudofázová kmitočtová charakteristika, 41
amplitudová kmitočtová charakteristika, 41
amplitudové rezonanční převýšení, 157
amplitudová bezpečnost (bezpečnost v amplitudě), 119
analogově – číslicový převodník, 217
analytická identifikace, 98
antiwindup, 88
aperiodický člen 2. řádu, 54
automatická regulace, 12
automatické řízení, 13

C

cíl regulace, 14, 77
cíl řízení, 12
citlivost, 159

Č

časová konstanta, 53
četnost spínání, 229
činitel interakce, 83
číslicová regulace, 216
číslicový (diskrétní) regulátor typu PSD, 216, 217
číslicově – analogový převodník, 217
člen dopravního zpoždění, 54
člen s minimální fází, 55
člen s neminimální fází, 55

D

derivační člen bez setrvačnosti, 56
derivační člen se setrvačností 1. řádu, 57
derivační členy, 56
derivačního členu *r*-tého řádu se setrvačností *n*-tého řádu, 57
diferenciální rovnice, 37
diferenciální rovnice homogenní, 31
Diracův jednotkový impuls, 24
doba regulace, 144
doba náběhu, 98
doba průtahu, 98
doba přechodu, 98
dominantní póly, 167
doplňková (komplementární) funkce citlivosti, 158
dosazovací metoda, 30
dvou- a třípolohová (reléová) regulace, 225

E

experimentální metody „pokus – omyl“, 174
experimentální identifikace, 98

F

fáze (argument) kmitočtového přenosu, 39
fázová kmitočtová charakteristika, 41
fázovací člen, 55
fázová bezpečnost (bezpečnost ve fázi), 119
funkce citlivosti, 158
fyzikální realizovatelnost, 37

H

Heavisideův jednotkový skok, 22
homogenní diferenciální rovnice, 31
Hurwitzovo kritérium stability, 113

Ch

charakteristická rovnice, 32
charakteristická rovnice regulačního obvodu, 109
charakteristický kvazimnohočlen regulačního obvodu, 112
charakteristický mnohočlen, 32, 39
charakteristický mnohočlen regulačního obvodu, 109

I

identifikace, 98
impulsní (impulsová, váhová) funkce, 42
impulsní charakteristika, 42
integrační a derivační časová konstanta, 80
integrační člen bez setrvačnosti, 57
integrační člen *q*-tého řádu se setrvačností *n*-tého řádu, 58
integrační člen se setrvačností 1. řádu, 58
integrační členy, 57
integrální kritéria, 145

K

kanonický tvar řízení, 45
kmitavá mez stability, 113
kmitavý člen 2. řádu, 54
kmitočtový (frekvenční) přenos, 39
koeficient přenosu, 53
kompenzace, 138, 200
konzervativního členu 2. řádu, 54
korespondence, 22
kritérium ITAE, 148
kritická integrační časová konstanta regulátoru, 115
kritické zesílení regulátoru, 115
kritický úhlový kmitočet, 115
kritický bod, 117
krokový regulátor, 231
kruhové kritérium, 121
kvadratická regulační plocha, 147
kvalita regulace, 140

L

Laplaceova transformace, 20
Lineardovo – Chipartovo kritérium, 113
linearizace, 68
lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, 37
lineární matematické modely, 36
lineární regulační plocha, 145
lineární stacionární dynamické členy, 36
logaritmická amplitudová kmitočtová charakteristika, 41
logaritmická fázová kmitočtová charakteristika, 41

M

matematické modely, 36
maximum modulu funkce citlivosti, 160
metoda čtvrtinového tlumení, 180
metoda kritických parametrů, 177
metoda násobného dominantního pólu – MNDP, 184
metoda neurčitých koeficientů, 30
metoda optimálního modulu – MOM, 198
metoda požadovaného modelu – MPM, 207
metoda přechodové charakteristiky, 175
metoda SIMC, 213
metoda symetrického optima – MSO, 201
mez stability, 113
mezní (hraniční) úhlový kmitočet, 157
mezní aperiodický členu 2. řádu, 54
měřicí člen, 15

Michajlovova funkce, 114
Michajlovova charakteristika, 114
Michajlovovo kritérium stability, 114
multiplikativní neurčitost, 160

N

nástavný člen, 15
necitlivost, 159
nekmitavá mez stability, 113
nepřímý regulátor, 14
nuly, 39
nutná a postačující podmínka (asymptotické) stability, 32
nutná podmínka stability, 113
Nyquistova charakteristika (křivka), 121
Nyquistovo kritérium stability, 116

O

obraz, 21
odchylkový přenos poruchy, 78
odchylkový přenos řízení, 78
originál, 21
ovládání, 13

P

Padého rozvoj, 55
paralelní zapojení bloků, 62
parciální (částečné) zlomky, 28
pásmo proporcionality, 79
podmíněná stabilita, 118
podmínka fyzikální realizovatelnosti, 38
póly, 28, 39
poruchy, 12
poruchová veličina, 16
pozorovatelnost, 44
pracovní bod, 68
pravidlo poloviny, 104
princip příčinnosti, 37
proporcionální člen bez setrvačnosti, 53
proporcionální člen se setrvačností 1. řádu, 53
proporcionální člen se setrvačností 2. řádu, 53
proporcionální členy, 52
proporcionální člen se setrvačností *n*-tého řádu, 54
prostor obrazů, 20
prostor originálů, 20
přechodná část odezvy, 111
přechodová funkce, 43
přechodová charakteristika, 43
přenos, 38
přenos otevřeného regulačního obvodu, 109
přenos poruchy, 77
přenos řízení, 77
přímý regulátor, 15

R

regulace, 13
regulační obvod, 13, 76
regulační odchylka, 14
regulační plocha, 145
regulátor, 13, 76, 79
regulátory se dvěma stupni volnosti, 85
regulovaná soustava, 13, 97
regulovaná veličina, 14
relativní překmit (přeregulování), 144
relativní stupeň, 37
relativní tlumení, 53, 167
relativní tolerance regulace, 145
rezonanční úhlový kmitočet, 157
robustnost, 160
rovnice statické charakteristiky, 38
rozklad na parciální zlomky, 29
rychlost odezvy, 145
ryzí racionální lomené funkce, 28

Ř

řád diferenciální rovnice, 31
řešení lineárních diferenciálních rovnic, 30

řiditelnost, 44
řízený podsystém (prvek), 12
řízení, 12

S

sektorová nelinearita, 121
sériové zapojení bloků, 62
seřizování regulátorů, 172
setrvačné časové konstanty, 58
stabilita, 32
stabilita (lineárního) regulačního obvodu, 109
stacionární, 36
standardní tvary, 148, 200
statická charakteristika, 37
stavitelné parametry regulátoru, 80
stavový model, 44
stavová rovnice, 44
stavové (vnitřní) veličiny, 44
stav řízeného podsystému, 12
Strejcova metoda identifikace, 99
struktura regulačního obvodu, 12
strukturálně nestabilní, 152
stupeň astatismu regulačního obvodu, 117, 170
stupeň stability (absolutní tlumení), 167
syntéza regulačního obvodu, 140
systém ovládání, 12
systém regulace, 12
systém řízení, 12

Š

šířka pásma kmitání, 228

T

Taylorův rozvoj, 55
teorie automatické regulace, 13
teorie automatického řízení, 13
teorie řízení, 12
t-invariantní, 36
tolerance regulace, 145
tvarovaná veličina, 217
typ regulačního obvodu, 117

U

úhlový kmitočet, 39
úhlový kmitočet minus π, 118
úhlový kmitočet netlumených kmitů, 167
úhlový kmitočet řezu (průchodu), 118
úhlový kmitočet tlumených kmitů, 167
univerzální experimentální metoda, 181
úprava přenosů regulovaných soustav, 102
ustálená část odezvy, 111
ústřední člen, 15

V

váhy proporcionální, integrační a derivační složky regulátoru, 79
vnější popisy, 45
vnitřní filtr, 84
vnitřní popisy, 45
vstupní funkce, 31
vstupní filtr, 85
výsledek řízení, 12
výstupní funkce, 31
výstupní rovnice, 44
vzorkovací perioda, 217

W

windup, 86

Z

zesílení regulátoru, 79
Zieglerovy – Nicholsovy experimentální metody, 174
zpětná vazba, 12
zpětnovazební zapojení bloků, 63

Ž

žádaná veličina, 14

9 Literatura

ALEXÍK, M. – JURÍČEK, J. – MIČEK, J. *Základy automatického riadenia.* Vydavateľstvo ŽU v Žiline, Žilina 1998

ÅSTRÖM, K. – HÄGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning.* Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC 1995

ÅSTRÖM, K. – HÄGGLUND, T. *Advanced PID Control.* Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC 2006

BALÁTĚ, J. *Automatické řízení (2. vydání)*. Nakladatelství BEN – Technická literatura, Praha 2005

BOBÁL, V. – VAŠEK, V. *Teorie automatického řízení I.* Ediční středisko VUT v Brně, Brno 1989

ČERMÁK, T. *Elektrické regulační pohony.* Fakulta strojní a elektrotechnická VŠB v Ostravě, Ostrava 1986

DORF, R.C. – BISHOP, R. *Modern Control Systems (9th ed.).* Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2001

FARANA, R. – SMUTNÝ, L. – VÍTEČEK, A. – VÍTEČKOVÁ, M. *Zpracování závěrečných prací z oblasti automatizace a informatiky*. Fakulta strojní VŠB-TU Ostrava, Ostrava 2004

FRANKLIN, G. F. – POWELL, J. D. – EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Sysrems (4th ed.).* Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2002

HARSÁNYI, L. – MURGAŠ, J. – ROSINOVÁ, D. – KOZÁKOVÁ, A. *Teória automatického riadenia*. Vydavateľstvo STU v Bratislave, Bratislava 1998

HEGER, M. Výuka teorie automatického a optimálního řízení. *Sborník semináře 40 let katedry automatizace na FMMI VŠB-TU Ostrava*, Ostrava, září 2001, str. 16-17

HEGER, M. Využití simulačních modelů pro optimální nastavení regulačních okruhů ohřívacích pecí. *Vědecká konference se zahraniční účastí*, *sekce ASŘ-TP*, Ostrava - Podolánky, září 1990, str. 36-41

HLAVA, J. *Prostředky automatického řízení II.* Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2000

HUBA, M. *Nelineárne systémy.* Vydavateľstvo STU v Bratislave, Bratislava 2003

HUDZOVIČ, P. – KOZÁKOVÁ, A. A contribution to the synthesis of PIcontrollers. *Medzinárodná konferenci SSKI Kybernetika a informatika*. Piešťany, Slovak Republic, 5.-6. apríl 2001. str. 31 – 34

HYNIOVÁ, K. *Řídicí technika*. Skripta FE ČVUT v Praze, Praha 2006

KALAŠ, V. – JURIŠICA, L. – ŽALMAN, M. *Technická kybernetika.* ALFA – SNTL, Bratislava – Praha 1978

KOZÁK, Š. *MATLAB – SIMULINK II.* Vydavateľstvo STU v Bratislave, Bratislava 1999

KROKAVEC, D. – FILASOVÁ, A. *Diskrétne systémy*. Elfa, Košice, 2006

LANDAU, I.D. – ZITO, G. *Digital Control Systems. Design, Identification and Implementation.* Springer-Verlag, London 2006

LEWINE, W.S. (Editor) *The Control Handbook.* CRC Press, Boca Raton, Florida 1996

MIKLEŠ, J. – FIKAR, M. *Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov 2*. Vydavateľstvo STU v Bratislavě, Bratislava 2004

NEVŘIVA, P. *Analýza signálů a soustav*. Nakladatelství BEN – Technická literatura, Praha 2000

NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů*. Montanex, Ostrava 1999

O'DWYER, A. *Handbook of PI and PID Controllers Tuning Rules (2nd ed.).* Imperial College Press, World Scientific, London 2006

OGUNNAIKE, B.A. – RAY, W.H. *Process Dynamics, Modeling and Control.* Oxford University Press, New York – Oxford 1994

OLEHLA, M. – NĚMEČEK, S. *Základy aplikované kybernetiky.* Fakulta strojní TU v Liberci, Liberec 2002

PROKOP, R. – MATUŠŮ, R. – PROKOPOVÁ, Z. *Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy*. FAI UTB ve Zlíně, Zlín 2006

ROUBAL, J. ET AL. *Moderní teorie řízení. Cvičení*. Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2005

SCHLEGEL, M. *Průmyslové PID regulátory: teorie pro praxi*. Studijní text ke kurzu v rámci veletrhu Pragoregula 2001. Praha 2001, 26 str.

SKOGESTAD, S. Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tuning. *Modeling, Identification and Control,* Vol. 25, No. 2, 2004, pp. 52-120

ŠULC, B. – VÍTEČKOVÁ, M. *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2004

ŠVARC, I. – ŠEDA, M. – VÍTEČKOVÁ, M. *Automatické řízení*. Akademické nakladatelství CERM, VUT v Brně, Brno 2007

VESELÝ, V. – HARSÁNYI, L. *Robustné riadene dynamických systémov* Vydavateľstvo STU v Bratislave, Bratislava 2007

VESELÝ, V. A KOL. *Navrhovanie a projektovanie ASR TP.* Vydavateľstvo Alfa, Bratislava 1992

VÍTEČKOVÁ, M. *Seřízení regulátorů metodou inverze dynamiky*. Fakulta strojní VŠB – TU Ostrava, Ostrava 1998 (dotisk v r. 2000)

VÍTEČKOVÁ, M. *Slovníky L- a Z-transformace s řešenými příklady.* Fakulta strojní VŠB – TU Ostrava, Ostrava 2005

VÍTEČKOVÁ, M. Jednoduché seřízení regulátorů metodou SIMC. *AT&P journal PLUS* 2/2006, str. 50-54

VÍTEČKOVÁ, M. – VÍTEČEK, A. *Anglicko-český slovník základních pojmů z oblasti automatického řízení*. 2. rozšířené vydání. Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava, Ostrava 2009

ZÍTEK, P. *Matematické metody automatického řízení*. Fakulta strojní ČVUT v Praze, Praha 1990

ZÍTEK, P. *Základy automatického řízení*. Fakulta strojní ČVUT v Praze, Praha 1993

Přílohy

1 Definiční vztahy a základní vlastnosti Laplaceovy transformace

	Definiční vzorce
1	$X(s)=\mathrm{L}\{x(t)\}=\int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$
2	$x(t)=\mathrm{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$
	Linearita
3	$\mathrm{L}\{a_1x_1(t)\pm a_2x_2(t)\}=a_1X_1(s)\pm a_2X_2(s)$
	Podobnost obrazů
4	$\mathrm{L}\{ax(at)\}=X\left(\frac{s}{a}\right),\ a>0$
	Konvoluce v časové oblasti
5	$\mathrm{L}\left\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\}=\mathrm{L}\left\{\int_0^t x_2(t-\tau)x_1(\tau)d\tau\right\}=X_1(s)X_2(s)=X_2(s)X_1(s)$
	Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)
6	$\mathrm{L}\{x(t-a)\}=\mathrm{e}^{-as}\,X(s),\ a\geq 0$
	Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)
7	$\mathrm{L}\{x(t+a)\}=\mathrm{e}^{as}\left[X(s)-\int_0^a x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right],\ a\geq 0$
	Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti
8	$\mathrm{L}\left\{x(t)\mathrm{e}^{\mp at}\right\}=X(s\pm a)$
	Derivace v časové oblasti
9	Derivace 1.řádu $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sX(s)-x(0)$
10	Derivace *n*-tého řádu $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}=s^nX(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}\frac{\mathrm{d}^{i-1}x(0)}{\mathrm{d}t^{i-1}}$
	Derivace v oblasti komplexní proměnné
11	$\mathrm{L}\{tx(t)\}=-\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$
	Integrál v časové oblasti
12	$\mathrm{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\frac{1}{s}X(s)$

	Hodnota integrálu
13	$\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} X(s)$
14	$\int_0^\infty t x(t)\,\mathrm{d}t = -\lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{d}\,X(s)}{\mathrm{d}\,s}$
	Obraz periodické funkce
15	$\mathrm{L}\{x(t)+x(t-a)+x(t-2a)+\ldots\} = X(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-as}}$ $\quad a$ – perioda, $a>0$
	Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
16	$x(0) = \lim_{t\to 0_+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
	Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
17	$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$
	Operace podle nezávislého parametru
18	$\mathrm{L}\{x(t,a)\} = X(s,a)$
19	$\mathrm{L}\{\lim_{a\to a_0} x(t,a)\} = \lim_{a\to a_0} X(s,a)$
20	$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial x(t,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial X(s,a)}{\partial a}$
21	$\mathrm{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(t,a)\,\mathrm{d}a\right\} = \int_{a_1}^{a_2} X(s,a)\,\mathrm{d}a$
	Zpětná transformace pomocí reziduí
22	$x(t) = \sum_i \operatorname{res}_{s=s_i}\left[X(s)\mathrm{e}^{st}\right] = \sum_i \left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\frac{\mathrm{d}^{r_i-1}}{\mathrm{d}\,s^{r_i-1}}\left[(s-s_i)^{r_i}X(s)\mathrm{e}^{st}\right]\right\}$ r_i – násobnost i-tého pólu obrazu $n = \sum_i r_i$ – stupeň mnohočlenu ve jmenovateli obrazu

2 Slovník Laplaceovy transformace

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
1	s	$\dot{\delta}(t)$
2	1	$\delta(t)$
3	$\frac{1}{s}$	$\eta(t)$
4	$\frac{1}{s^n}, \quad n=1,2,\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
5	$\dfrac{s}{T_1 s+1}$	$\alpha_1\left[\delta(t)-\alpha_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\right], \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
6	$\dfrac{1}{T_1 s+1}$	$\alpha_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
7	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)}$	$1-\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
8	$\dfrac{1}{s^2(T_1 s+1)}$	$\dfrac{1}{\alpha_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-1\right)+t, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
9	$\dfrac{b_1 s+1}{s(T_1 s+1)}$	$1+(\alpha_1 b_1-1)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
10	$\dfrac{b_1 s+1}{s^2(T_1 s+1)}$	$C_1\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\right)+t, \quad C_1=b_1-\dfrac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
11	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)^2}$	$\alpha_1^2(1-\alpha_1 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
12	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)^2}$	$\alpha_1^2 t\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
13	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)^2}$	$1-(1+\alpha_1 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
14	$\dfrac{1}{s^2(T_1 s+1)^2}$	$t-\dfrac{2}{\alpha_1}+\left(\dfrac{2}{\alpha_1}+t\right)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
15	$\dfrac{b_1 s+1}{(T_1 s+1)^2}$	$\alpha_1^2\left[b_1+(1-\alpha_1 b_1)t\right]\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
16	$\dfrac{b_1 s+1}{s(T_1 s+1)^2}$	$1-\left[1+\alpha_1(1-\alpha_1 b_1)t\right]\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
17	$\dfrac{b_1 s+1}{s^2(T_1 s+1)^2}$	$t+C_1-(C_1-C_2 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}$ $C_1=b_1-\dfrac{2}{\alpha_1}, \quad C_2=1-\alpha_1 b_1, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
18	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)^n}, \quad n=2,3,\ldots$	$\alpha_1^n \dfrac{t^{n-2}}{(n-1)!}(n-1-\alpha_1 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
19	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)^n}, \quad n=1,2,\ldots$	$\alpha_1^n \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
20	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)^n}, \quad n=1,2,\ldots$	$1-\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_1^i \dfrac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
21	$\dfrac{1}{s^2(T_1 s+1)^n}, \quad n=1,2,\ldots$	$t-\dfrac{n}{\alpha_1}+\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_1^{i-1}(n-i)\dfrac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
22	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$C_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t} - C_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$ $C_1 = \dfrac{1}{T_1(T_2 - T_1)},\ C_2 = \dfrac{1}{T_2(T_2 - T_1)}$
23	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$C_1\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1 t} - \mathrm{e}^{-\alpha_2 t}\right),\ C_1 = \dfrac{1}{T_1 - T_2},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$
24	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t} - C_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$ $C_1 = \dfrac{T_1}{T_2 - T_1},\ C_2 = \dfrac{T_2}{T_2 - T_1}$
25	$\dfrac{1}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$t - C_0 + C_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t} - C_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ C_0 = T_1 + T_2$ $C_1 = \dfrac{T_1^2}{T_1 - T_2},\ C_2 = \dfrac{T_2^2}{T_1 - T_2},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$
26	$\dfrac{b_1 s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$C_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t} - C_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$ $C_1 = \dfrac{T_1 - b_1}{T_1(T_1 - T_2)},\ C_2 = \dfrac{T_2 - b_1}{T_2(T_1 - T_2)}$
27	$\dfrac{b_1 s+1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$ $C_1 = \dfrac{b_1 - T_1}{T_1 - T_2},\ C_2 = \dfrac{T_2 - b_1}{T_1 - T_2}$
28	$\dfrac{b_1 s+1}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 \neq T_2$	$t + C_0 + C_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ C_0 = -T_1 - T_2 + b_1$ $C_1 = \dfrac{(b_1 - T_1)T_1}{T_2 - T_1},\ C_2 = \dfrac{(T_2 - b_1)T_2}{T_2 - T_1},\ \alpha_1 = \dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$
29	$\dfrac{s}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n = 2,3,\ldots,\ T_i - \text{různé}$	$-\sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ C_i = \dfrac{T_i^{n-3}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i - T_k)},\ \alpha_i = \dfrac{1}{T_i}$
30	$\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n = 2,3,\ldots,\ T_i - \text{různé}$	$\sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ C_i = \dfrac{T_i^{n-2}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i - T_k)},\ \alpha_i = \dfrac{1}{T_i}$
31	$\dfrac{1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n = 2,3,\ldots,\ T_i - \text{různé}$	$1 - \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ C_i = \dfrac{T_i^{n-1}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i - T_k)},\ \alpha_i = \dfrac{1}{T_i}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
32	$\dfrac{1}{s^2\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$, $n=2,3,\ldots$, T_i – různé	$t-C_0+\sum_{i=1}^{n}C_i\,\mathrm{e}^{-\alpha_i t}$, $\alpha_i=\dfrac{1}{T_i}$, $C_i=\dfrac{T_i^n}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i-T_k)}$, $C_0=\sum_{i=1}^{n}T_i$
33	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
34	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
35	$\dfrac{s}{T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1}$, $0\le\xi_0<1$	$-C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t-\varphi)$, $C_1=\dfrac{1}{\omega T_0^3}$, $\gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\gamma}$
36	$\dfrac{1}{T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1}$, $0\le\xi_0<1$	$C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t$, $C_1=\dfrac{1}{\omega T_0^2}$, $\gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$
37	$\dfrac{1}{s(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1)}$, $0\le\xi_0<1$	$1-C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)$, $C_1=\dfrac{1}{\omega T_0}$, $\gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\gamma}$
38	$\dfrac{1}{s^2(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1)}$, $0\le\xi_0<1$	$t-C_0+C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+2\varphi)$, $C_0=2\xi_0T_0^2$, $C_1=\dfrac{1}{\omega}$, $\gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\gamma}$
39	$\dfrac{b_1s+1}{T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1}$, $0\le\xi_0<1$	$C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)$, $C_1=\dfrac{1}{\omega T_0^3}\sqrt{(1-2b_1\gamma)T_0^2+b_1^2}$, $\gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega b_1}{1-\gamma b_1}$
40	$\dfrac{b_1s+1}{s(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1)}$, $0\le\xi_0<1$	$1+C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t-\varphi)$, $C_1=\dfrac{1}{\omega T_0^2}\sqrt{(1-2b_1\gamma)T_0^2+b_1^2}$, $\gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega T_0^2}{b_1-\gamma T_0^2}$

b_1, b_2 – reálné konstanty, $T_i>0$, $i=0,1,\ldots$

Číslo skladové:	**2314**	**300**
Určeno pro posluchače:	2., 3. r. Bc. FS, 1., 2. r. Ing. FS	
Autor:	prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc. prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.	
Katedra, institut:	automatizační techniky a řízení	**352**
Název:	**Základy automatické regulace**	
Místo, rok vydání:	Ostrava, 2023, 3. dotisk 2. vydání	
Počet stran:	244	
Vydala:	VŠB - Technická univerzita Ostrava 17. listopadu 15/2172 708 00 Ostrava-Poruba	
Tisk:	Ediční středisko VŠB-TUO	
Náklad:	150 ks	
Tématická skupina:	17	

ISBN 978-80-248-1924-2

Vítečková, M., Víteček, A.: Základy automatické regulace

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní



ZÁKLADY AUTOMATICKÉ REGULACE

Miluše Vítečková

Antonín Víteček

Ostrava 2023