VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Fakulta strojní



OPTIMÁLNÍ SYSTÉMY ŘÍZENÍ

Antonín Víteček

Miluše Vítečková

Ostrava 2018

OBSAH

Úvod **4**

Seznam základního značení **5**

1 Úvod do optimalizace **8**

1.1 Základní pojmy a definice 8

1.2 Spojitý dynamický systém 16

1.3 Úloha optimálního řízení 28

2 Metoda agregace stavových proměnných **43**

2.1 Modely standardních nelineárních podsystémů 43

2.2 Návrh řízení metodou agregace 56

2.3 Návrh robustního řízení 68

3 Dynamické programování **78**

3.1 Bellmanův princip optimality 78

3.2 Kvadraticky optimální řízení 89

4 Pontrjaginův princip minima **109**

4.1 Formulace Pontrjaginova principu minima 109

4.2 Základní úlohy 115

4.3 Reléové řízení 126

5 Variační počet **132**

5.1 Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice 132

5.2 Úlohy variačního počtu s omezením 141

5.3 Úloha variačního počtu jako úloha optimálního řízení 151

6 Závěr **155**

7 Literatura **156**

ÚVOD

Skripta „Optimální systémy řízení“ jsou určena pro posluchače 5. ročníku oboru „Automatické řízení a inženýrská informatika“ na Fakultě strojní pro předmět „Optimalizace systémů“, ale jejich pojetí umožňuje je využít i na ostatních fakultách VŠB-TU Ostrava.

Metody dynamické optimalizace dovolují dosáhnout vysoké kvality řízení při minimálních nárocích na zdroje. Rovněž současný stav výpočetní a automatizační techniky umožňuje využít nejnovějších výsledků teorie automatického řízení a dynamické optimalizace jak ve stadiu návrhu, tak i při praktické realizaci moderních systémů řízení. Proto dynamické optimalizaci je třeba věnovat náležitou pozornost, i když je teoreticky náročnější než statická optimalizace.

Cílem skript je dát posluchačům základní matematický nástroj, který jim umožní na jedné straně proniknout do obtížného studia teorie dynamické optimalizace a na druhé straně hlouběji studovat problematiku optimálního řízení ve speciálních monografiích.

Při studiu se předpokládá znalost statické optimalizace v rozsahu skript „Teorie řízení. Statická optimalizace“ (Kusyn, Víteček & Smutný 1986, 1988). Ve skriptech jsou odvozeny všechny důležité vztahy potřebné pro řešení jednodušších úloh dynamické optimalizace. Podrobně řešené příklady ilustrují použití uváděné teorie, případně ji vhodně doplňují.

SEZNAM ZÁKLADNÍHO ZNAČENÍ

a, a_i - konstanty

$\boldsymbol{A}$ - stavová matice systému

b, b_i - konstanty

$\boldsymbol{B}$ - stavová matice řízení

c, c_i, c_{ij} - konstanty

$\boldsymbol{C}$ - výstupní matice systému

df - definitnost

$\boldsymbol{D}$ - výstupní matice řízení, agregační matice

$\boldsymbol{D_z}$ - základní agregační matice

$\boldsymbol{e}$ - vektor regulační odchylky

f - obecně nelineární funkce

f_0 - integrand v účelovém funkcionálu

$\boldsymbol{f}$ - vektorová obecně nelineární funkce, pravá strana stavové rovnice

F - funkce koncových parametrů

$\boldsymbol{g}$ - funkce omezení

G - přenos

$\boldsymbol{G}$ - matice ve stavové rovnici u nelineárních dynamických systémů

$\boldsymbol{h}$ - vektorová obecně nelineární funkce, pravá strana výstupní rovnice

H - Hamiltonova funkce

$\mathbf{I}$ - jednotková matice

J - účelový funkcionál

k_P - zesílení regulátoru

$\boldsymbol{K}$ - symetrická matice v Bellmanově funkci

L - Lagrangeova funkce

m - dimenze vektoru výstupních proměnných, dimenze vektoru řídicích proměnných (u metody agregace), dimenze vektoru sdružených proměnných, konstanta

m_a - omezení zrychlení

m_v - omezení rychlosti

n - dimenze vektoru stavových proměnných, řád dynamického systému

n_j - dílčí řád

p - Lagrangeův součinitel

$\boldsymbol{p}$ - vektor sdružených proměnných (kovektor stavu), vektor Lagrangeových součinitelů

r - dimenze vektoru řídicích proměnných (obecně), konstanta

$\boldsymbol{r}$ - vektor váhových koeficientů, vektorová funkce v účelovém funkcionálu u reléového řízení

$\boldsymbol{R}$ - symetrická matice v účelovém funkcionálu

q, q_i - konstanty

$\boldsymbol{q}$ - vektor původních (výchozích) stavových proměnných

$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_0$ - symetrické matice v účelovém funkcionálu

s - konstanta, komplexní proměnná v L-transformaci

$\boldsymbol{s}$ - vektor agregovaných proměnných

$\boldsymbol{S}$ - symetrická matice v účelovém funkcionálu

t - čas

t_N - koncový časový okamžik (koncový čas)

t_0 - počáteční časový okamžik (počáteční čas)

T - symbol transpozice, časová konstanta

T_j - kladné váhy, časové konstanty

$\boldsymbol{T}$ - diagonální matice časových konstant

T_D - derivační časová konstanta

$\boldsymbol{u}$ - vektor řídicích proměnných (řízení)

$\boldsymbol{u}^{sl}$ - vektor klouzavého řízení

$\boldsymbol{u}^{sat}$ - vektor řízení s nasycením

$\boldsymbol{u}^{\times}$ - vektor řízení s vysokým zesílením

$\boldsymbol{v}$ - vektor poruchových veličin (poruchy)

V - Bellmanova funkce

$\boldsymbol{w}$ - vektor žádaných veličin

$\boldsymbol{x}$ - vektor stavových proměnných (stav)

$\boldsymbol{x}_N$ - koncový stav (konec)

$\boldsymbol{x}_0$ - počáteční stav (počátek)

$\boldsymbol{x}_r$ - rovnovážný stav

$\boldsymbol{x}^w$	-	vektor požadovaných stavových proměnných (požadovaný stav)
$\boldsymbol{y}$	-	vektor výstupních proměnných (výstup)
.	-	(tečka) totální derivace podle času
*	-	(hvězdička) optimální
dim	-	dimenze vektoru nebo typ matice
det	-	determinant
diag	-	diagonální
konst	-	konstantní
max	-	maximální, maximum
min	-	minimální, minimum
sign	-	znaménková funkce signum
rank	-	hodnost
sat	-	funkce nasycení

1 ÚVOD DO OPTIMALIZACE

Uvedeme si základní pojmy z matematiky a teorie optimalizace, které budeme v dalších kapitolách používat (Athans & Falb 1966; Intriligator 1971; Noskievič 1999; Švarc 1986; Víteček 1992; Zítek, Hofreiter & Hlava 1999).

1.1 Základní pojmy a definice

Euklidovský n-rozměrný prostor (prostor dimenze *n*)

$$R^n = R \times R \times \ldots \times R \tag{1.1}$$

je množinou všech uspořádaných *n*-tic reálných čísel $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zvaných ***body***, které ztotožňujeme s ***vektory*** (obr. 1.1)

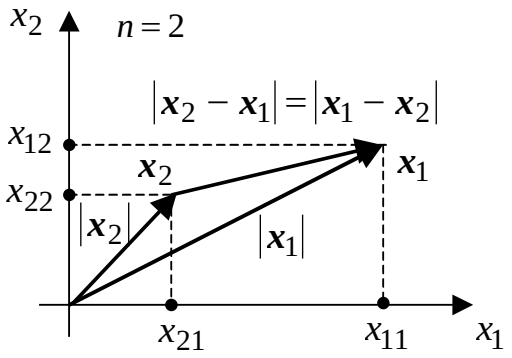
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \tag{1.2}$$

kde T je symbol transpozice.

Všechny vektory budeme považovat za sloupcové. V prostoru R^n je definována ***euklidovská metrika*** (vzdálenost)

$$|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - x_{1i})^2}, \tag{1.3}$$

viz obr. 1.1.



Obr. 1.1. Geometrická interpretace euklidovské metriky

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$ je definován

$$\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \,. \tag{1.4}$$

První parciální derivaci skalární funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.5}$$

budeme zapisovat ve tvaru

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

kde grad je ***gradient***, ∇ - ***Hamiltonův operátor nabla***.

Druhá parciální derivace skalární funkce (1.5) vytváří matici

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

kde $\boldsymbol{H}$ je ***Hessova matice***. Její determinant se nazývá ***hessián***.

Totální (exaktní) první derivaci skalární funkce $f[\boldsymbol{x}(t), t]$ podle parametru t (v našem případě času) budeme označovat tečkou a platí pro ni

$$\frac{df(\boldsymbol{x},t)}{dt} = \dot{f}(\boldsymbol{x},t) = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}. \tag{1.8}$$

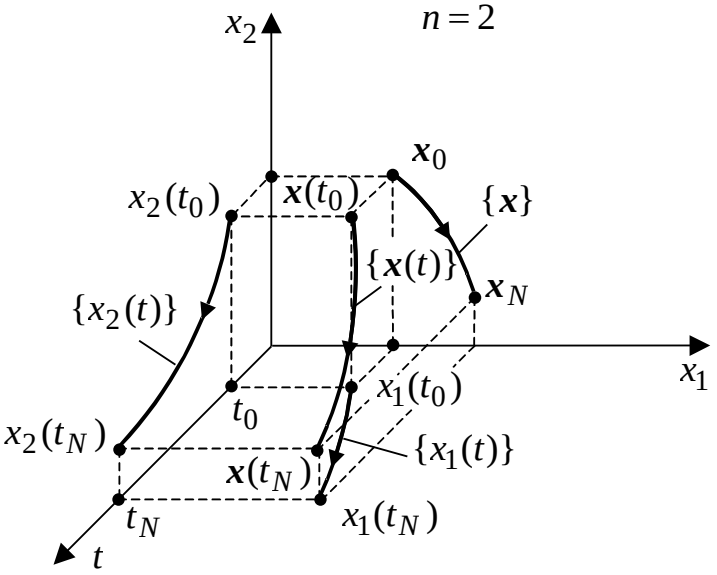
První parciální derivace vektorové funkce

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

je dána maticí

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \\ \left[\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \\ \vdots \\ \left[\frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Uvažujme za nezávislý parametr t spojitý čas, pak časová vektorová funkce $\boldsymbol{x}(t)$ pro $t \in \langle t_0, t_N \rangle$ v ***rozšířeném prostoru*** $R^n \times \langle t_0, t_N \rangle$ vytvoří ***rozšířenou trajektorii*** $\{\boldsymbol{x}(t)\}$, popřípadě v prostoru R^n ***trajektorii*** $\{\boldsymbol{x}\}$ (obr. 1.2). Trajektorie je tedy časový průběh funkce na daném časovém intervalu. Zobrazení $\{J(\boldsymbol{x})\}$ průběhů (trajektorií) funkce $\{\boldsymbol{x}\}$ na reálnou osu se nazývá ***funkcionál*** (obr. 1.3b), na rozdíl od funkce $f(\boldsymbol{x})$, což je zobrazení bodů $\boldsymbol{x}$ na reálnou osu (obr. 1.3a).



Obr. 1.2. Geometrická interpretace trajektorie

Otevřenou množinu

$$O(\boldsymbol{x}_1) = \{\boldsymbol{x} : 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1| < \delta\} \tag{1.11}$$

pro libovolné malé kladné číslo δ nazýváme ***okolím bodu*** $\boldsymbol{x}_1$.

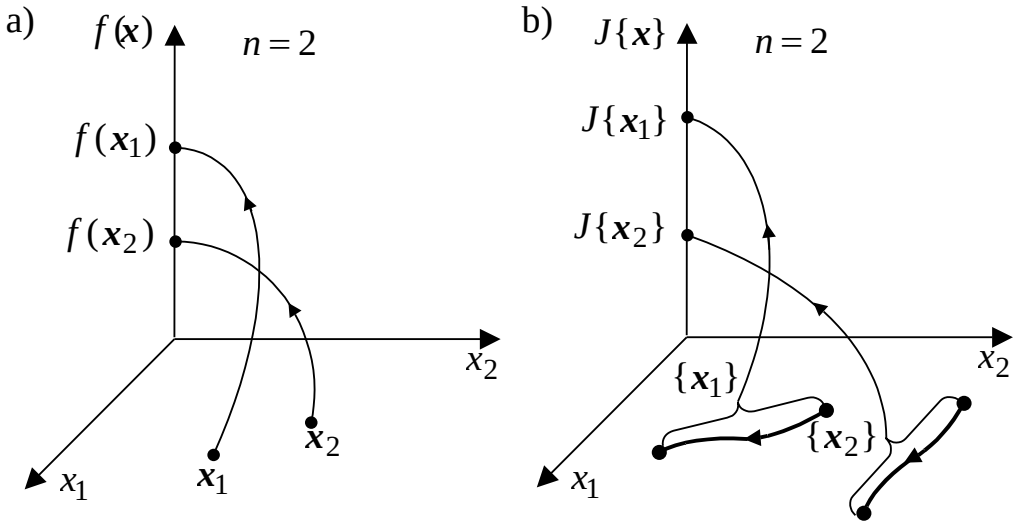
Otevřenou množinu pro $t \in \langle t_0, t_N \rangle$

$$O^0(\boldsymbol{x}_1) = \{\{\boldsymbol{x}(t)\} : 0 < |\{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_1(t)\}| < \delta\} \tag{1.12}$$

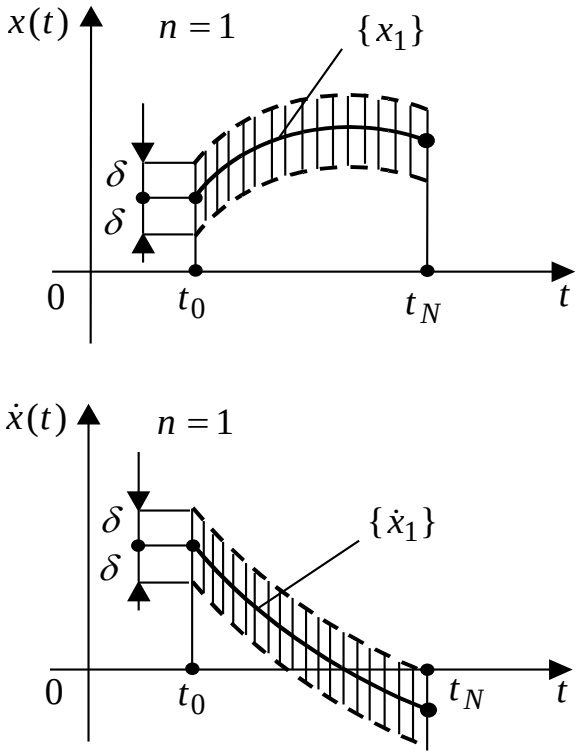
nazýváme ***okolím nultého řádu*** trajektorie $\{\boldsymbol{x}_1\}$ a otevřenou množinu

$$O^1(\boldsymbol{x}_1) = \left\{\{\boldsymbol{x}(t)\} : 0 < \left|\{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_1(t)\}\right| < \delta, 0 < \left|\{\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\}\right| < \delta\right\} \tag{1.13}$$

okolím prvního řádu trajektorie $\{\boldsymbol{x}_1\}$ (obr. 1.4).



Obr. 1.3. Geometrická interpretace: funkce – (a), funkcionálu – (b)



Obr. 1.4. Geometrická interpretace okolí prvního řádu trajektorie $\{\boldsymbol{x}_1\}$

Je zřejmé, že okolí vymezuje množinu bodů, popřípadě trajektorií blízkých ve smyslu definované vzdálenosti (obr. 1.5).

Podobným způsobem lze definovat i okolí vyššího řádu.

Funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ ***lokální*** (relativní) ***minimum***, když existuje takové okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$, pro které platí

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}^*) \,. \tag{1.14}$$

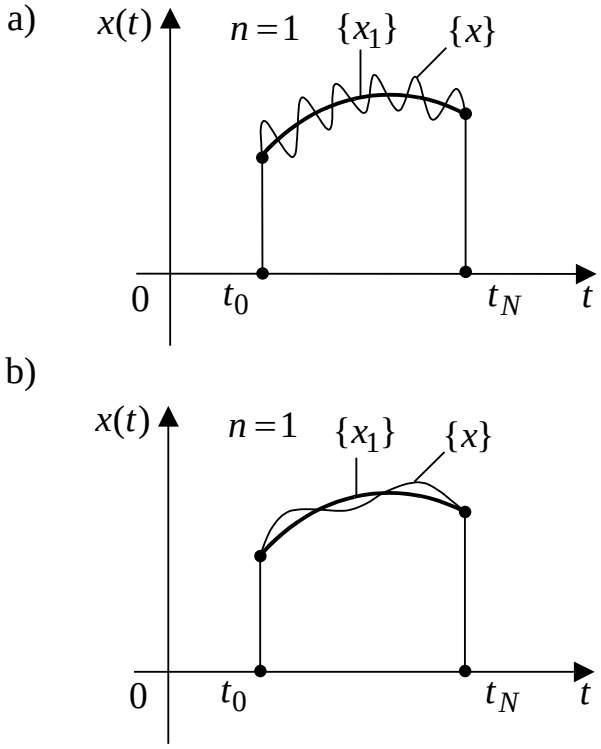
Je-li nerovnost (1.14) splněna pro body $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$

$$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}^*) \tag{1.15}$$

jako ostrá, tj.

$$f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}), \tag{1.16}$$

pak jde o ***ostré lokální minimum***.

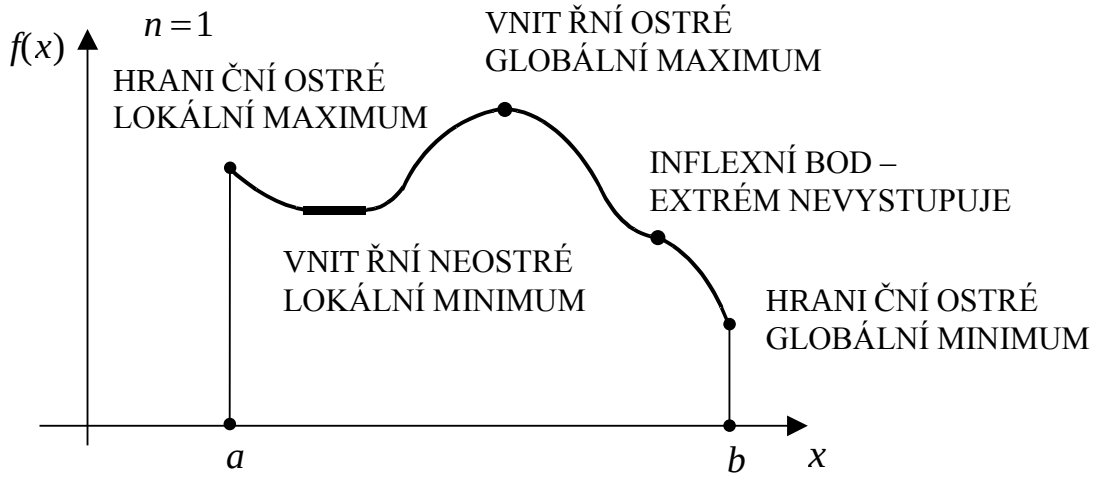


Obr. 1.5. Trajektorie $\{\boldsymbol{x}\}$ blízká k trajektorii $\{\boldsymbol{x}_1\}$ ve smyslu vzdálenosti: nultého řádu – (a), prvního řádu – (b)

Platí-li neostrá nerovnost (1.14), popřípadě ostrá nerovnost (1.16) nejenom pro okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$, ale pro všechny přípustné body $\boldsymbol{x}$, pak funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ ***globální*** (absolutní), popřípadě ***ostré globální minimum***. Ostré globální minimum je vždy jednoznačné. Je zřejmé, že každé globální minimum je zároveň lokálním minimem.

Zaměníme-li ve vztazích (1.14) a (1.16) znaky nerovností na opačné, dostaneme vztahy definující odpovídající druh maxima (obr. 1.6). Společný název pro minimum a maximum je ***extrém***. Body $\boldsymbol{x}^*$, ve kterých funkce $f(\boldsymbol{x})$ má extrém, tj. nabývá minimální nebo maximální hodnoty, se nazývají

extremální body. Ve vnitřních extremálních bodech $\boldsymbol{x}^*$ má funkce $f(\boldsymbol{x})$ ***vnitřní*** (volný, nevázaný, nepodmíněný) ***extrém*** a v hraničních extremálních bodech ***hraniční*** (vázaný, podmíněný) ***extrém***.



Obr. 1. 6. Geometrická interpretace různých druhů extrémů funkce

Úlohu minimalizace funkce $f(\boldsymbol{x})$ na nějaké zadané množině přípustných řešení zapisujeme v některém z tvarů:

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min, \tag{1.17a}$$

$$f^* = \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}), \tag{1.17b}$$

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}). \tag{1.17c}$$

Většinou jde o úlohu na globální minimum a současné určení $\boldsymbol{x}^*$ a $f^* = f(\boldsymbol{x}^*)$.

Úlohu minimalizace (1.17) funkce $f(\boldsymbol{x})$ můžeme snadno převést na úlohu maximalizace funkce $-f(\boldsymbol{x})$ a naopak, protože platí (obr. 1.7)

$$-f(\boldsymbol{x}) \to \max, \tag{1.18a}$$

$$-f^* = \max_{\boldsymbol{x}}[-f(\boldsymbol{x})], \tag{1.18b}$$

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\max_{\boldsymbol{x}}[-f(\boldsymbol{x})]. \tag{1.18c}$$

Funkce $f(\boldsymbol{x})$ vyjadřuje ***kritérium optimality***, a proto se nazývá ***kriteriální*** nebo ***účelová funkce***.

Různé druhy extrémů lze definovat i pro funkcionály. Funkcionál $J\{\boldsymbol{x}\}$ má na trajektorii $\{\boldsymbol{x}^*\}$ ***silné,*** resp. ***slabé lokální minimum***, když existuje takové okolí nultého, resp. prvního řádu trajektorie $\{\boldsymbol{x}^*\}$, pro které platí:

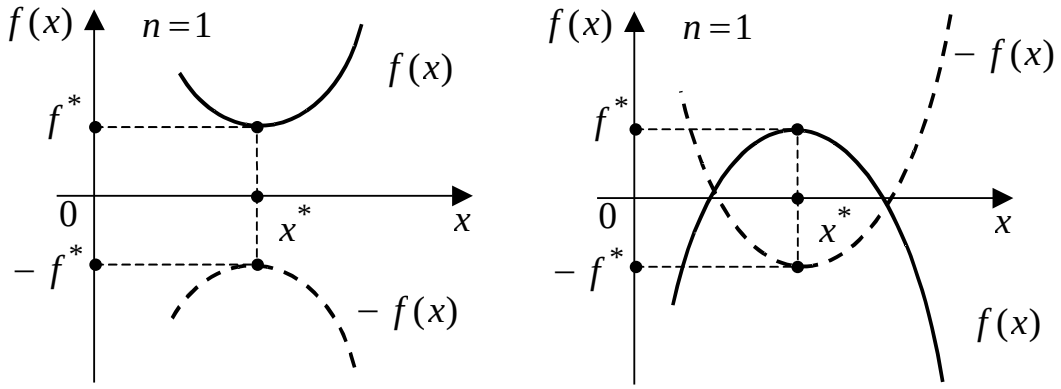
silné lokální minimum $J\{\boldsymbol{x}^*\} \le J\{\boldsymbol{x}\}$ pro $\{\boldsymbol{x}\} \in O^0\{\boldsymbol{x}^*\}$, (1.19)

slabé lokální minimum $J\{\boldsymbol{x}^*\} \le J\{\boldsymbol{x}\}$ pro $\{\boldsymbol{x}\} \in O^1\{\boldsymbol{x}^*\}$. (1.20)

Bude-li nerovnost (1.19), resp. (1.20) splněna pro trajektorie rozdílné od $\{\boldsymbol{x}^*\}$, ale z příslušného okolí jako ostrá, tj.

$J\{\boldsymbol{x}^*\} < J\{\boldsymbol{x}\}$, (1.21)

pak jde o ***ostré silné***, resp. ***ostré slabé lokální minimum***.



Obr. 1.7. Převedení úlohy: minimalizace na maximalizaci – (a), maximalizace na minimalizaci – (b)

Je zřejmé, že každé silné lokální minimum je současně slabým lokálním minimem.

Platí-li neostré nerovnosti (1.19) a (1.20), resp. ostrá nerovnost (1.21) nejenom pro okolí trajektorie $\{\boldsymbol{x}^*\}$, ale pro všechny přípustné trajektorie $\{\boldsymbol{x}\}$, pak funkcionál $J\{\boldsymbol{x}\}$ má na trajektorii $\{\boldsymbol{x}^*\}$ ***globální***, resp. ***ostré globální minimum***. Ostré globální minimum je jednoznačné. Každé globální minimum je současně lokálním minimem.

Zaměníme-li ve vztazích (1.19) – (1.21) znaky nerovností na opačné, pak všechny úvahy se týkají odpovídajících druhů maxim.

Úlohu minimalizace funkcionálu $J\{\boldsymbol{x}\}$ na nějaké zadané množině přípustných řešení zapisujeme, podobně jako úlohu minimalizace funkce [viz (1.17)], v některém z tvarů:

$J(\boldsymbol{x}) \to \min$, (1.22a)

$J^* = \min_{\{\boldsymbol{x}\}} J\{\boldsymbol{x}\}$, (1.22b)

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\{\boldsymbol{x}\}} J\{\boldsymbol{x}\} \tag{1.22c}$$

a jde většinou o současné určení $\{\boldsymbol{x}^*\}$ a $J^* = J\{\boldsymbol{x}^*\}$. Rovněž úlohu minimalizace (1.22) funkcionálu $J\{\boldsymbol{x}\}$ můžeme převést na úlohu maximalizace funkcionálu $-J\{\boldsymbol{x}\}$ a naopak, protože platí

$$-J(\boldsymbol{x}) \to \max, \tag{1.23a}$$

$$-J^* = \max_{\{\boldsymbol{x}\}} [-J\{\boldsymbol{x}\}], \tag{1.23b}$$

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\max_{\{\boldsymbol{x}\}} [-J\{\boldsymbol{x}\}]. \tag{1.23c}$$

Protože funkcionál $J\{\boldsymbol{x}\}$ vyjadřuje také ***kritérium optimality***, proto se nazývá ***kriteriální*** nebo ***účelový funkcionál***.

Při určování extrémů funkcí $f(\boldsymbol{x})$ nebo funkcionálů $J\{\boldsymbol{x}\}$, tj. při řešení ***optimalizačních úloh***, budeme používat tři druhy podmínek, které lze pomocí logických symbolů: $\Rightarrow$ - implikace, $\Leftrightarrow$ - ekvivalence a non - negace, zapsat v některém z tvarů:

a) ***Nutné podm*inky** (NP) existence extrému (E)

$$(\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{NP}) \Leftrightarrow (\text{non NP} \Rightarrow \text{non E}). \tag{1.24}$$

b) ***Postačující podmínky*** (PP) existence extrému (E)

$$(\mathrm{PP} \Rightarrow \mathrm{E}) \Leftrightarrow (\text{non E} \Rightarrow \text{non PP}). \tag{1.25}$$

c) ***Nutné a postačující podmínky*** (NPP) existence extrému (E)

$$(\mathrm{NPP} \Leftrightarrow \mathrm{E}) \Leftrightarrow (\text{non NPP} \Leftrightarrow \text{non E}). \tag{1.26}$$

Nutné a postačující podmínky (NPP) mají ve většině prakticky užitečných případů velmi složitý tvar, a proto jejich ověřování bývá značně složitější než řešení vlastní optimalizační úlohy. Postačující podmínky (PP) bývají zase velmi přísné, takže nepostihují většinu takových prakticky důležitých případů, kdy daný extrém vystupuje, ale postačující podmínky splněny nejsou. Proto pro technickou praxi největší význam mají nutné podmínky (NP), které se využívají ve tvaru

$$\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{NP}, \tag{1.27}$$

tzn.: *„**Vyplývá-li z vlastní nebo fyzikální podstaty optimalizační úlohy, že existuje extrém požadovaného druhu a zároveň nutným podmínkám vyhovuje jediné řešení, pak toto řešení je jednoznačné a optimální**.“*

Je rovněž zřejmé, že nutné podmínky pro slabý lokální extrém jsou současně nutnými podmínkami pro silný lokální i ostrý globální extrém.

Při určování extrémů funkcí obvykle hovoříme o ***statické optimalizaci*** nebo o ***matematickém programování*** a při určování extrémů funkcionálů o ***dynamické optimalizaci***, protože v těchto optimalizačních úlohách jako základní nezávisle proměnná nejčastěji vystupuje čas.

1.2 Spojitý dynamický systém

Matematický model ***spojitého dynamického systému ve stavovém vyjádření*** má tvar

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t], \tag{1.28a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t], \tag{1.28b}$$

kde $\boldsymbol{x}$ je ***vektor stavových proměnných - stav*** dimenze n, $\boldsymbol{u}$ ***- vektor řídicích proměnných - řízení*** dimenze r, $\boldsymbol{y}$ ***- vektor výstupních proměnných - výstup*** dimenze m, $\boldsymbol{f}$ ***- vektorová stavová funkce*** dimenze n, $\boldsymbol{h}$ ***- vektorová výstupní funkce*** dimenze m.

Diferenciální rovnice (1.28a) se nazývá ***stavová*** a vyjadřuje ***dynamiku*** daného systému. V případě, že její levá strana bude identicky rovna nule, pak systém bude ***statický***. Rovnice (1.28b) je ***výstupní*** a na dynamiku systému nemá vliv. Protože výstup $\boldsymbol{y}$ závisí jednoznačně na stavu $\boldsymbol{x}$ a řízení $\boldsymbol{u}$, proto se při studiu dynamických systémů výstupní rovnice (1.28b) většinou neuvažuje.

Dělení spojitých dynamických systémů je na obr. 1.8. Místo pojmů ***stacionární*** a ***nestacionární*** se rovněž často používají pojmy ***t-invariantní*** a ***t-variantní***.

Důležitou vlastností matematického modelu dynamického systému je ***fyzikální realizovatelnost***, která spočívá v tom, že tento model popisuje nějaký reálný systém. Rozeznáváme ***slabou*** a ***silnou podmínku fyzikální realizovatelnosti***. U dynamických systémů na obr. 1.8 za předpokladu, že funkce $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{h}$ jsou diferencovatelné, je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti tehdy, když ve funkci $\boldsymbol{h}$ nevystupuje řízení $\boldsymbol{u}$, jinak je splněna pouze slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti.

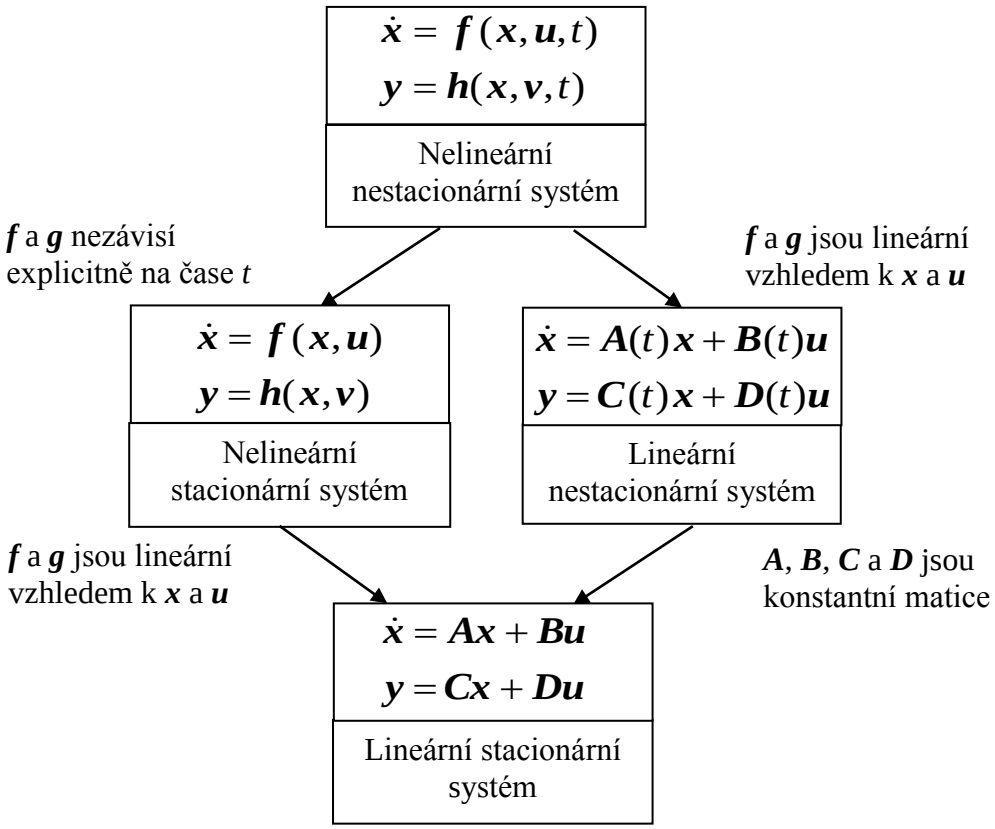
Dynamický systém (1.28) [viz rovněž obr. 1.8] se nazývá ***řízený*** na rozdíl od ***neřízeného*** systému, kdy řízení $\boldsymbol{u}$ na dynamický systém nepůsobí. Je-li neřízený dynamický systém navíc stacionární, pak je ***autonomní*** a je popsán stavovou rovnicí

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]. \tag{1.29}$$

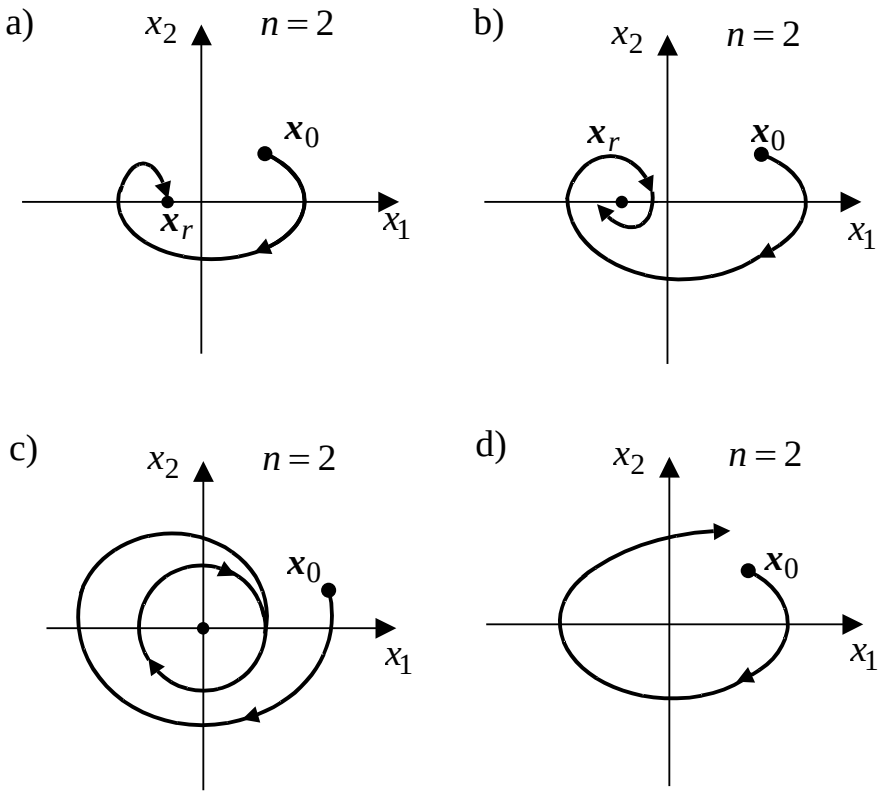
Je-li t_0 ***počáteční časový okamžik*** a $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ ***počáteční stav***, pak tzv. ***zastupující bod*** $\boldsymbol{x}(t)$ pro $t \in \langle t_0, t_N \rangle$ vytvoří ve ***stavovém prostoru stavovou trajektorii*** $\{\boldsymbol{x}\}$, resp. v ***rozšířeném stavovém prostoru rozšířenou stavovou trajektorii*** $\{\boldsymbol{x}(t)\}$, která končí v ***koncovém stavu*** (konci) $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}(t_N)$, viz obr.

1.2. Podle tvaru a průběhu stavové trajektorie lze určit všechny důležité vlastnosti dynamického systému. Každému počátečnímu stavu $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ autonomního dynamického systému pro $t \in \langle t_0, \infty)$ odpovídá určitá stavová trajektorie, která může:

- končit v bodech, ve kterých všechny derivace $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$ jsou nulové, jsou to tzv. ***rovnovážné stavy*** (obr. 1.9a);
- zůstat v dostatečné blízkosti rovnovážného stavu (obr. 1.9b);
- přejít v uzavřenou křivku, tzv. ***mezní cyklus*** (obr. 1.9c);
- neustále se vzdalovat (obr. 1.9d).



Obr. 1.8. Dělení spojitých dynamických systémů



Obr. 1.9. Stavová trajektorie autonomního dynamického systému: končí v rovnovážném stavu – (a), zůstane v blízkosti rovnovážného stavu – (b), přejde v mezní cyklus – (c), neustále se vzdaluje – (d)

Pro $t \to \infty$ první tři případy popisují ***ustálené stavy***. V případě rovnovážného stavu jde o ***klidový stav***. V případě mezního cyklu o ***periodický stav***. Autonomní nelineární dynamický systém (1.29) má tolik rovnovážných stavů $\boldsymbol{x}_r$, kolik řešení má rovnice

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{0}. \tag{1.30}$$

Rovnovážné stavy mohou obecně tvořit i celou souvislou oblast. Autonomní lineární dynamický systém

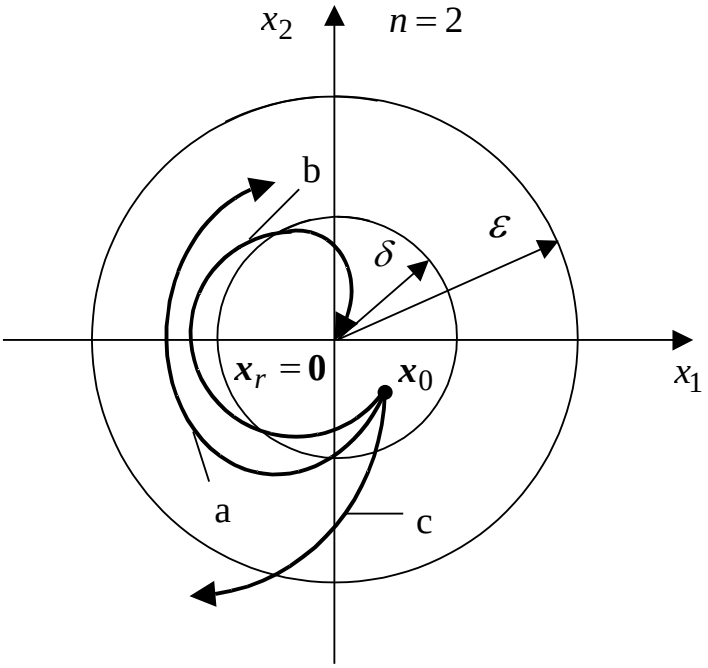
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.31}$$

má jediný rovnovážný stav

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}, \tag{1.32}$$

kterým je počátek souřadnic ve stavovém prostoru R^n dimenze *n*.

Nejdůležitější vlastností autonomního dynamického systému a jemu odpovídajících rovnovážných stavů $\boldsymbol{x}_r$ je ***stabilita***. Z mnoha různých definicí stability si uvedeme z praktického hlediska nejdůležitější – definici ***ve smyslu Ljapunova***, viz obr. 1.10 (Shinners 1992, Zítek 1990).



Obr. 1.10. Autonomní dynamický systém je ve smyslu Ljapunova: stabilní – (a), asymptoticky stabilní – (b), nestabilní – (c)

Stabilita

Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_r$ autonomního dynamického systému je stabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže pro každé reálné $\varepsilon > 0$ existuje takové reálné číslo $\delta(\varepsilon) > 0$, že pro každé $t > t_0$ platí

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_r| < \varepsilon \,. \tag{1.33}$$

Podle této definice nemusí stavová trajektorie pro $t \to \infty$ dosáhnout rovnovážného stavu, ale musí setrvávat v jeho dostatečné blízkosti.

Asymptotická stabilita

Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_r$ autonomního dynamického systému je asymptoticky stabilní, je-li stabilní ve smyslu Ljapunova a navíc platí

$$\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_r| = 0 \,. \tag{1.34}$$

Vidíme, že při asymptotické stabilitě stavová trajektorie musí pro $t \to \infty$ dosáhnout rovnovážného stavu.

Nestabilita

Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_r$ autonomního dynamického systému je nestabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže pro určité reálné $\varepsilon > 0$ a každé $\delta > 0$ existuje takový časový okamžik $t_1 > t_0$, že platí

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x}_r| > \varepsilon\,. \tag{1.35}$$

Uvedenou definici stability lze rovněž použít pro rovnovážné stavy tvořící celou souvislou oblast. Pro omezenou hodnotu $\delta(\varepsilon)$ hovoříme o ***lokální stabilitě*** (resp. ***lokální asymptotické stabilitě***) a pro neomezenou hodnotu $\delta(\varepsilon)$ o ***globální stabilitě*** (resp. ***globální asymptotické stabilitě***). U autonomního lineárního dynamického systému jde vždy o globální stabilitu (resp. globální asymptotickou stabilitu) jediného rovnovážného stavu. V případě jediného globálně (asymptoticky) stabilního rovnovážného stavu, lze hovořit o (asymptoticky) stabilním dynamickém systému.

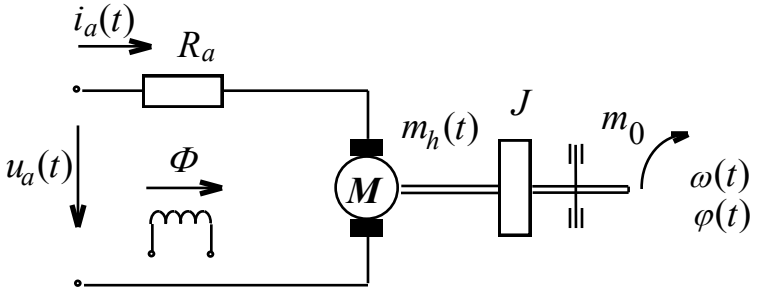
Stavové proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze definovat nekonečně mnoha různými způsoby. V případě, že vyhovují vztahům

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \end{aligned} \tag{1.36}$$

nazývají se také ***fázové proměnné***. U fyzikálně realizovatelných autonomních dynamických systémů fázové proměnné musí vyhovovat určitým podmínkám. Např. pro $n = 2$, tj. ve stavové (fázové) rovině, stavová (fázová) trajektorie má vždy následující orientaci: v horní polorovině zleva napravo, v dolní polorovině zprava nalevo a dále stavová trajektorie mimo rovnovážné stavy prochází z jedné poloroviny do druhé pod pravým úhlem.

Příklad 1.1

Určíme matematický model stejnosměrného motoru (obr. 1.11) řízeného proudem kotvy, resp. napětím kotvy za předpokladu, že celková indukčnost kotvy je zanedbatelně malá a že buzení a zatížení je konstantní (Víteček 1992).



Obr. 1.11. Náhradní schéma stejnosměrného motoru s konstantním buzením z příkladu 1.1

Význam označení na obr. 1.11: u_a – napětí kotvy [V], i_a – proud kotvy [A], R_a – celkový odpor kotvy [Ω], m_h – hnací moment [N.m], m_0 – konstantní zatěžný

moment [N.m], J – celkový hmotný moment setrvačnosti [kg.m^2], Φ – konstantní magnetický tok [Wb], ω – úhlová rychlost [rad.s^{-1}], φ – úhlová výchylka (natočení) [rad], ***M*** – stejnosměrný motor.

Řešení:

a) Stejnosměrný motor řízený proudem kotvy

V souladu s obr. 1.11 můžeme psát

$$J\dot{\omega}(t) = m_h(t) - m_0,$$
$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t),$$
$$m_h(t) = k_a i_a(t),$$

kde k_a je konstanta úměrnosti [N.m.A^{-1}].

Třetí rovnici dosadíme do první a po úpravě dostaneme

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t),$$
$$\dot{\omega}(t) = \frac{k_a}{J} i_a(t) - \frac{1}{J} m_0.$$

Zavedeme stavové proměnné a řízení, např. pomocí vztahů (vzhledem k tomu, že zátěžný moment je konstantní, můžeme ho zahrnout do řízení)

$$x_1(t) = \varphi(t),$$
$$x_2(t) = \omega(t),$$
$$u(t) = i_a(t) - \frac{1}{k_a} m_0$$

a obdržíme stavový matematický model stejnosměrného motoru řízeného proudem kotvy

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= b u(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.37a)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \varphi(t) = x_1(t), \\ y_2(t) &= \omega(t) = x_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.37b)$$

kde

$$b = \frac{k_a}{J}.$$

Stejnosměrný motor řízený proudem kotvy má vlastnosti integračního členu 1. řádu, je-li výstupem úhlová rychlost, resp. integračního členu 2. řádu, je-li výstupem úhlová výchylka.

b) Stejnosměrný motor řízený napětím kotvy

V tomto případě musíme navíc uvažovat rovnici

$$R_a i_a(t) = u_a(t) - k_u \omega(t)$$

a pak dostaneme

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t),$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{k_a k_u}{J R_a}\omega(t) + \frac{k_a}{J R_a} u_a(t) - \frac{1}{J} m_0 , \qquad (*)$$

kde k_u je konstanta úměrnosti [V.rad^{-1}.s].

Stavové proměnné a řízení můžeme zavést podobným způsobem jako v předchozím případě, tj.:

$$x_1(t) = \varphi(t),$$
$$x_2(t) = \omega(t),$$
$$u(t) = u_a(t) - \frac{R_a}{k_a} m_0 .$$

Stavový model pak bude mít tvar

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -a x_2 + b u(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.38a)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \varphi(t) = x_1(t), \\ y_2(t) &= \omega(t) = x_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.38b)$$

kde

$$a = \frac{k_a k_u}{J R_a} = b k_u ,$$

$$b = \frac{k_a}{J R_a} = \frac{a}{k_u}.$$

Vidíme, že stejnosměrný motor řízený napětím kotvy má vlastnosti proporcionálního členu se setrvačností 1. řádu, je-li výstupem úhlová rychlost, resp. integračního členu se setrvačností 1. řádu, je-li výstupem úhlová výchylka.

Tento způsob zavedení stavových proměnných je někdy nepoužitelný (viz kvadratická kritéria s nekonečným koncovým časem). Vhodnější je použití odchylek od požadovaných (ustálených, nominálních) hodnot. Např. druhou stavovou proměnnou a řízení zavedeme pomocí vztahů

$$x_2(t) = \omega(t) - \omega_u \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \dot{\omega}(t),$$
$$u(t) = u_a(t) - u_{au} ,$$

kde ustálené hodnoty $\omega_u = \omega(\infty)$ a $u_{au} = u_a(\infty)$ získáme z rovnice $(*)$ pro $t \to \infty$, tj.

$$0 = -\frac{k_a k_u}{JR_a}\omega_u + \frac{k_a}{JR_a}u_{au} - \frac{1}{J}m_0 .$$

Stavový matematický model stejnosměrného motoru řízený napětím kotvy pak bude mít tvar

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -ax_2 + bu(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.38c)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \varphi(t) = x_1(t) + \omega_u t, \\ y_2(t) &= \omega(t) = x_2(t) + \omega_u . \end{aligned}\right\} \qquad (1.38d)$$

Vidíme, že v obou případech stavové rovnice (1.38a) a (1.38c) mají formálně stejný tvar, ale význam stavových proměnných a řízení je jiný. Na tuto velmi důležitou skutečnost je třeba pamatovat jak při interpretaci stavových proměnných a při formulaci úlohy optimálního řízení, tak především při realizaci vlastního optimálního řízení.

Příklad 1.2

U systému řízení (regulace) řídicí podsystém je popsán rovnicí (obr. 1.12)

$$u(t) = e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt}$$

a řízený podsystém

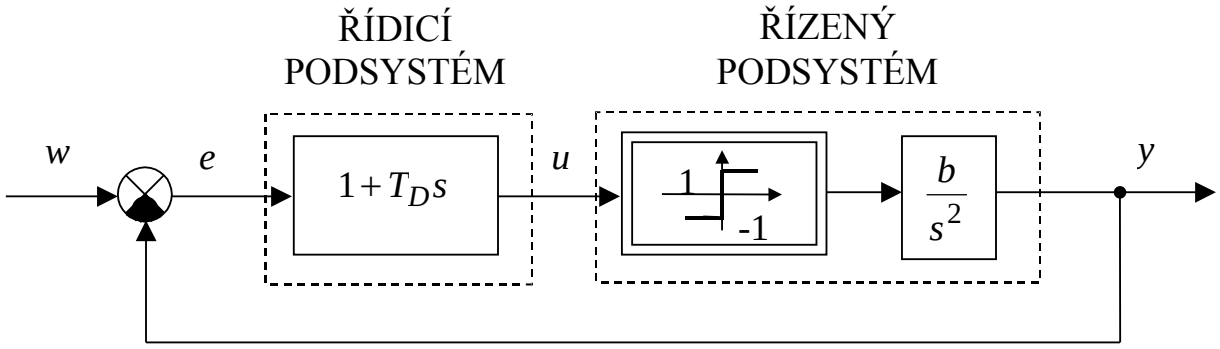
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = b \operatorname{sign} u(t), \qquad b > 0,$$

kde

$$\operatorname{sign} u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad u(t) > 0 \\ 0 & \text{pro} \quad u(t) = 0 \\ -1 & \text{pro} \quad u(t) < 0 \end{cases} .$$

Na základě průběhu stavové trajektorie je třeba určit optimální hodnotu derivační časové konstanty T_D^* a odpovídající minimální dobu regulace t_r^* při skokové změně polohy žádané veličiny

$$w(t) = w_0 \eta(t). \qquad (1.39)$$



Obr. 1.12. Strukturní blokové schéma systému řízení z příkladu 1.2

Řešení:

Nejdříve řízený a řídicí podsystém popíšeme stavově. Zvolíme např.

$$x_1(t) = y(t),$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

a dostaneme:

řídicí podsystém

$$u(t) = w(t) - x_1(t) + T_D\left[\dot{w}(t) - x_2(t)\right] \tag{1.40}$$

řízený podsystém

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= b\,\mathrm{sign}\,u(t), \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

$$y(t) = x_1(t)\,. \tag{1.42}$$

Vidíme, že řídicí podsystém je stacionární lineární a řízený podsystém je stacionární nelineární.

Protože pro $t > 0$ platí

$$w(t) = w_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{w}(t) = 0,$$

proto po dosazení (1.40) do (1.41) dostaneme stavovou rovnici uzavřeného systému řízení

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= b\,\mathrm{sign}\left[w_0 - x_1(t) - T_D x_2(t)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

Pro skokovou změnu polohy žádané veličiny (1.39) uzavřený systém řízení je autonomní. Lze tedy s výhodou pro analýzu a syntézu použít stavovou rovinu.

Rovnovážný stav určíme z rovnic

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ w_0 - x_1 - T_D x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= w_0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} .$$

Uzavřený systém řízení (1.43) má jediný rovnovážný stav

$$\boldsymbol{x}_r = [w_0, 0]^T . \tag{1.44}$$

Diferenciální rovnici stavové trajektorie získáme z (1.43) vydělením druhé rovnice první rovnicí

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b}{x_2} \operatorname{sign} u , \tag{1.45a}$$

$$u = w_0 - x_1 - T_D x_2 . \tag{1.45b}$$

Řešením diferenciální rovnice (1.45a) pro počáteční stav $x_1(0) = x_2(0) = 0$ dostaneme stavovou trajektorii. Změna jejího průběhu nastupuje na přepínací přímce, kterou pro $u = 0$ obdržíme z (1.45b)

$$x_2 = \frac{w_0}{T_D} - \frac{x_1}{T_D} . \tag{1.46}$$

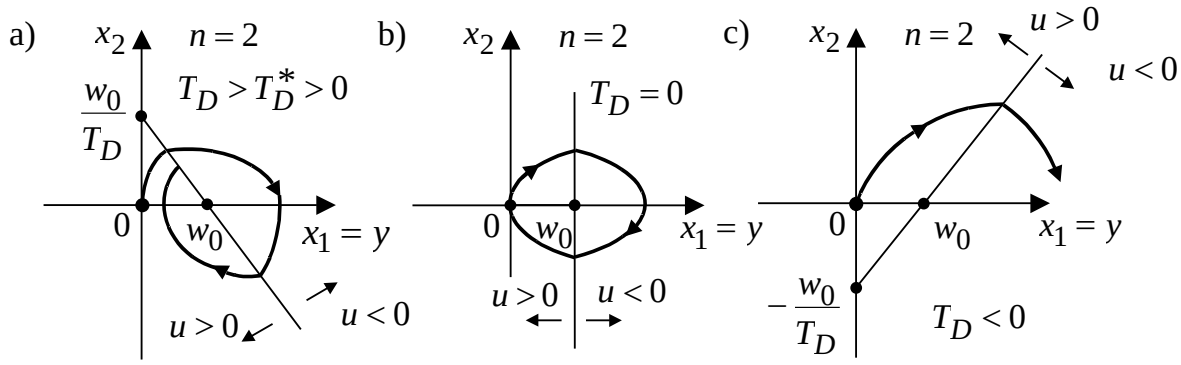
Z rovnic (1.45) dostaneme:

$$u > 0 \;\Rightarrow\quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b}{x_2},$$

$$x_2^2 = 2bx_1 + c_1 , \tag{1.47}$$

$$u < 0 \;\Rightarrow\quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{b}{x_2},$$

$$x_2^2 = -2bx_1 + c_2 . \tag{1.48}$$



Obr. 1.13. Průběh stavové trajektorie u systému řízení z příkladu 1.2: asymptoticky stabilního – (a), stabilního – (b), nestabilního - (c)

Vidíme, že stavová trajektorie se skládá z částí parabol daných rovnicemi (1.47) a (1.48), kde konstanty c_1 a c_2 se určí z podmínky spojitosti stavové trajektorie na přepínací přímce (1.46), viz obr. 1.13. Z obr. 1.13 vyplývá, že pro $T_D > 0$ rovnovážný stav (1.44), a tedy i systém řízení, je asymptoticky stabilní (obr. 1.13a), pro $T_D = 0$ stabilní (obr. 1.13b) a pro $T_D < 0$ nestabilní (obr. 1.13c). Protože uvedené závěry platí pro libovolný počáteční stav, jsou uvedené vlastnosti globální.

Z obr. 1.13a je zřejmé, že optimální průběh stavová trajektorie bude mít při takovém sklonu přepínací přímky, při kterém druhý parabolický úsek stavové trajektorie přejde do požadovaného stavu, tj. klidového rovnovážného stavu (1.44). V tom případě platí:

První úsek $$x_2^2 = 2bx_1, \tag{1.49}$$

Druhý úsek $$x_2^2 = -2bx_1 + 2bw_0, \tag{1.50}$$

$$x_2 = \frac{w_0}{T_D} - \frac{x_1}{T_D}.$$

Řešením těchto tří rovnic dostaneme optimální hodnotu derivační časové konstanty

$$T_D^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w_0}{b}}. \tag{1.51}$$

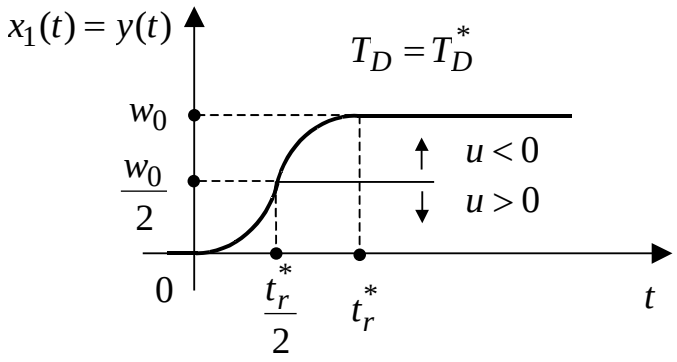
Je zřejmé, že přepnutí musí nastoupit pro $x_1 = \frac{w_0}{2}$. Určíme ještě minimální dobu regulace t_r^*. Na základě první rovnice v (1.43) můžeme psát

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \;\Rightarrow dt = \frac{dx_1}{x_2},$$

$$t_r = \int_0^{w_0} \frac{dx_1}{x_2}. \tag{1.52}$$

Po dosazení (1.49) a (1.50) do (1.52) dostaneme

$$t_r^* = \frac{1}{\sqrt{2b}}\left[\int_0^{\frac{w_0}{2}} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} + \int_{\frac{w_0}{2}}^{w_0} \frac{dx_1}{\sqrt{w_0 - x_1}}\right] = 2\sqrt{\frac{w_0}{b}}. \tag{1.53}$$



Obr. 1.14. Optimální průběh výstupní veličiny $y(t) = x_1(t)$ pro systém řízení z příkladu 1.2

V tomto případě optimální stavová trajektorie přejde do požadovaného klidového stavu (1.44) za minimální konečnou dobu (1.53) bez překmitu, viz obr. 1.14.

Optimální průběh výstupní veličiny $y(t) = x_1(t)$ lze snadno určit na základě vztahu (1.42) integrací z rovnic (1.43) a podmínek spojitosti při přepnutí. Přechodný proces se i v časové oblasti skládá ze dvou parabolických úseků

$$y(t) = x_1(t) = \begin{cases} \frac{b}{2}t^2 & \text{pro} \quad 0 \le t < \frac{t_r^*}{2} \\ -\frac{b}{2}t^2 + t\sqrt{w_0 b} & \text{pro} \quad \frac{t_r^*}{2} \le t < t_r^* \\ w_0 & \text{pro} \quad t_r^* \le t \end{cases} . \tag{1.54}$$

Bude-li sklon přepínací přímky

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{T_D} \tag{1.55}$$

stejný nebo menší než sklon tečny stavové trajektorie (pro druhý úsek)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{b}{x_2}, \tag{1.56}$$

vznikne ***klouzavý režim*** a stavová trajektorie (výstupní veličina) se bude exponenciálně (teoreticky nekonečně dlouho) s časovou konstantou T_D blížit k požadovanému stavu (1.44) (Slotine & Li 1991; Utkin 1992). Pro klouzavý režim z rovnic (1.55), (1.56) a podmínky symetrie vzhledem k požadovanému stavu (1.44) dostaneme

$$\begin{aligned} |x_2| &\le bT_D\,, \\ |x_1 - w_0| &\le bT_D^2\,. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Vejde-li stavová trajektorie z jakéhokoliv důvodu na přepínací přímku v oblasti (1.57), pak její další průběh je určen pouze přepínací přímkou (viz také 3.2.2).

Protože stavové proměnné vyhovují podmínkám pro fázové proměnné (1.36), proto stavové (fázové) trajektorie mají v horní polorovině orientaci zleva napravo, v dolní polorovině naopak a z jedné poloroviny do druhé poloroviny a naopak přecházejí kolmo na souřadnicovou osu x_1.

V případě, že bychom jako stavové proměnné volili

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) - w_0\,, \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t), \end{aligned} \tag{1.58}$$

pak rovnovážný stav (požadovaný stav) bude transformován do počátku souřadnic stavové roviny.

Z tohoto příkladu vyplývá, že průběh stavové trajektorie skutečně dává všechny důležité informace o vlastnostech autonomního dynamického systému.

1.3 Úloha optimálního řízení

Uvažujme dynamický systém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right] \tag{1.59}$$

s pevně daným počátečním časovým okamžikem t_0 a počátečním stavem $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$, kde $\boldsymbol{f}$ je spojitě diferencovatelná funkce podle svých $n + r + 1$ proměnných. Za ***přípustnou stavovou trajektorii*** $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ budeme považovat takovou spojitou vektorovou časovou funkci, jejíž hodnoty pro $t \in \langle t_0, t_N \rangle$ patří do ***množiny přípustných stavů*** *X*, tj.

$$\boldsymbol{x}(t) \in X \subset R^n \qquad \text{pro} \qquad t \in \langle t_0, t_N \rangle. \tag{1.60}$$

Podobně za ***přípustné řízení*** (u řízení většinou nebývá zvykem používat pojem trajektorie) $\{\boldsymbol{u}(t)\}$ budeme považovat takovou po částech spojitou vektorovou časovou funkci, jejíž hodnoty pro $t \in \langle t_0, t_N \rangle$ patří do ***množiny přípustných řízení*** *U*, tj.

$$\boldsymbol{u}(t) \in U \subset R^r \qquad \text{pro} \qquad t \in \langle t_0, t_N \rangle. \tag{1.61}$$

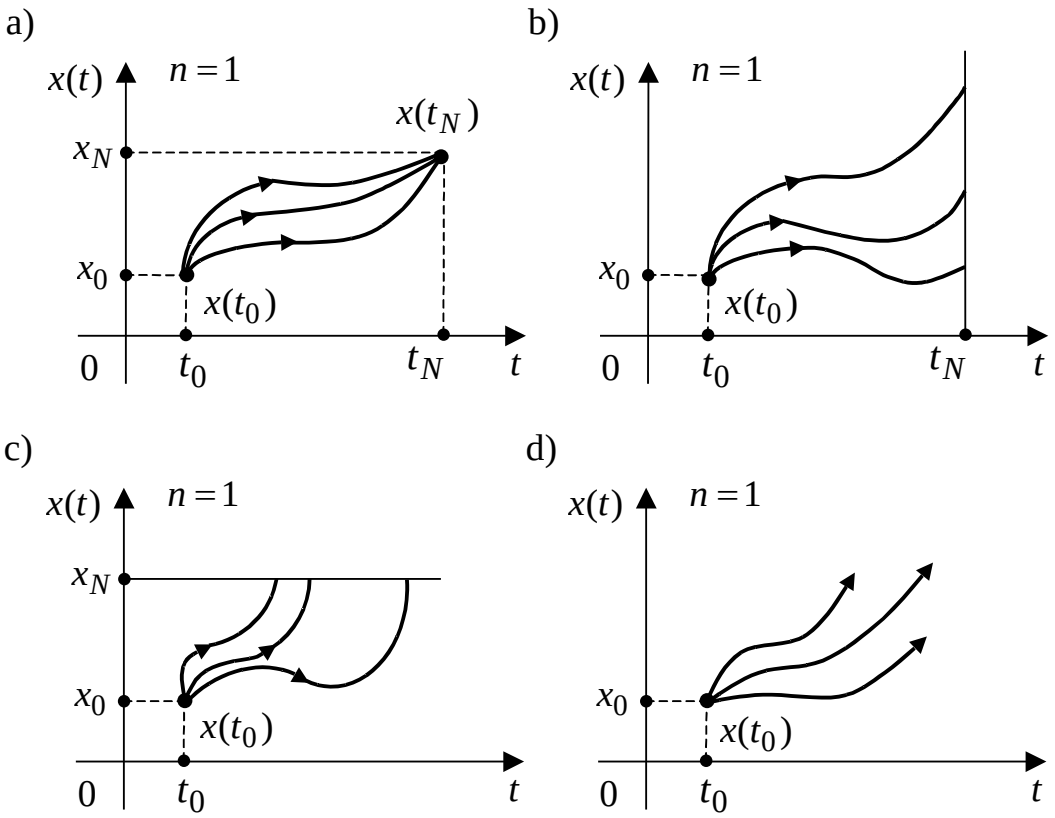
Geometricky řízení $\{\boldsymbol{u}(t)\}$ představuje křivku v prostoru R^r, přičemž tato křivka je spojitá všude mimo konečný počet bodů, ve kterých vystupuje nespojitost prvního druhu. Množiny *X* a *U* mohou být i celé odpovídající prostory, tj.

$$X = R^n, \tag{1.62}$$

$$U = R^r. \tag{1.63}$$

V tomto případě říkáme, že stav $\boldsymbol{x}(t)$ a řízení $\boldsymbol{u}(t)$ jsou ***bez omezení***. Pokud $X \subset R^n$ a $U \subset R^r$, předpokládá se, že obě tyto množiny jsou konvexní a kompaktní (uzavřené a omezené).

Pro daný počáteční stav $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ a přípustné řízení $\{\boldsymbol{u}(t)\}$ řešením stavové rovnice (1.59) dostaneme přípustnou stavovou trajektorii $\{\boldsymbol{x}(t)\}$. Libovolný stav $\boldsymbol{x}(t)$, kterého lze dosáhnout za konečnou dobu, se nazývá ***dosažitelný***. Je zřejmé, že pokud jde o ***koncové podmínky***, tzn. koncový časový okamžik t_N a koncový stav $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}(t_N)$, který musí být dosažitelný, může být dána jedna ze čtyř kombinací (obr. 1.15):



Obr. 1.15. Geometrická interpretace koncových podmínek: pevný čas i konec – (a), pevný čas a volný konec – (b), volný čas a pevný konec – (c), volný čas i konec – (d)

t_N - pevný, $\boldsymbol{x}_N$ - pevný, (1.64a)

t_N - pevný, $\boldsymbol{x}_N$ - volný, (1.64b)

t_N - volný, $\boldsymbol{x}_N$ - pevný, (1.64c)

t_N - volný, $\boldsymbol{x}_N$ - volný. (1.64d)

Hovoříme pak o ***pevném***, resp. ***volném čase*** a o ***pevném***, resp. ***volném konci***.

Koncový stav $\boldsymbol{x}_N$ a koncový časový okamžik t_N mohou být určeny rovněž pomocí tzv. ***cílové množiny*** *K*, tj.

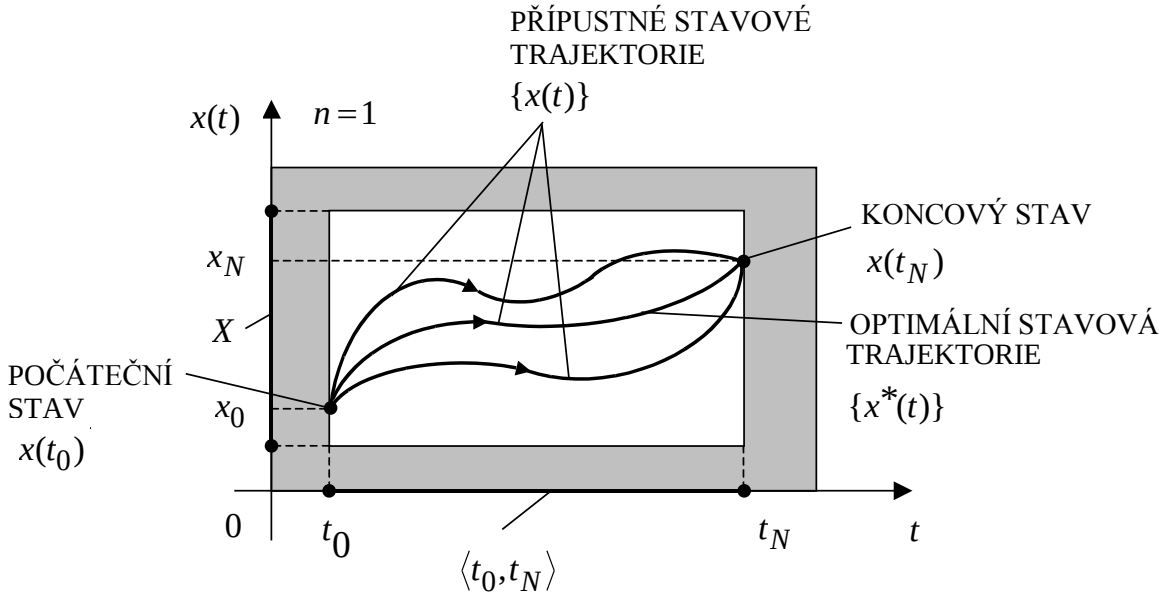
$$\left[\boldsymbol{x}(t),t\right]\in K\subset R^n\times\left\langle t_0,t_N\right\rangle \quad \text{pro} \quad t=t_N. \tag{1.65}$$

Je zřejmé, že pomocí cílové množiny (1.65) lze vyjádřit i předchozí případy (1.64).

Nyní již můžeme formulovat ***úlohu optimálního řízení***:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{účelový funkcionál} & J^*=\min\limits_{\{\boldsymbol{u}(t)\}} J\{\boldsymbol{u}(t)\}, \\ \text{omezení} & \left\{\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}\left[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t\right], \\ \left.\begin{array}{l} t_0 \\ \boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0) \end{array}\right\}\text{pevné} \\ \left[\boldsymbol{x}(t),t\right]\in K \quad \text{pro } t=t_N, \\ \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}(t)\in X \\ \boldsymbol{u}(t)\in U \end{array}\right\} \quad \text{pro } t\in\left\langle t_0,t_N\right\rangle. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{1.66}$$

Geometrická interpretace úlohy optimálního řízení s pevným časem i koncem je ukázána na obr. 1.16.



Obr. 1.16. Geometrická interpretace úlohy optimálního řízení s pevným časem i koncem

Úloha optimálního řízení (1.66) spočívá v tom, že ze všech přípustných stavových trajektorií $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ začínajících v počátečním časovém okamžiku t_0

v počátečním stavu $\boldsymbol{x}_0$ a končících v cílové množině K získaných přípustným řízením $\{\boldsymbol{u}(t)\}$ je třeba vybrat optimální stavovou trajektorii $\{\boldsymbol{x}^*(t)\}$ a jí příslušné optimální řízení $\{\boldsymbol{u}^*(t)\}$, pro které účelový funkcionál $J\{\boldsymbol{u}(t)\}$ nabývá globálního minima $J^* = J\{\boldsymbol{u}^*(t)\}$.

Účelový funkcionál $J\{\boldsymbol{u}(t)\}$ v úlohách optimálního řízení má nejčastěji jeden ze tří tvarů.

Bolzův tvar

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_N} f_0[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]dt + F(\boldsymbol{x}_N, t_N) \ , \tag{1.67}$$

kde f_0 je spojitě diferencovatelná funkce,

$F(\boldsymbol{x}_N, t_N) = F[\boldsymbol{x}(t), t] \Big|_{\substack{t=t_N \\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_N}}$ - spojitě diferencovatelná ***funkce koncových parametrů***.

Lagrangeův tvar

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_N} f_0[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]dt \ . \tag{1.68}$$

Mayerův tvar

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = F(\boldsymbol{x}_N, t_N) \ . \tag{1.69}$$

Všechny tyto tři tvary jsou vzájemně ekvivalentní. Tak např. Bolzův tvar (1.67) lze převést na Mayerův tvar (1.69) zavedením dodatečné stavové proměnné $x_{n+1}(t)$ následujícím způsobem:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = f_0[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t], \ \ x_{n+1}(t_0) = 0 . \tag{1.70}$$

Po dosazení (1.70) do (1.67) dostaneme

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = x_{n+1}(t_N) + F(\boldsymbol{x}_N, t_N) \ , \tag{1.71}$$

tj. Mayerův tvar účelového funkcionálu, protože závisí pouze na koncových parametrech.

Podobně Mayerův tvar (1.69) můžeme snadno převést na Lagrangeův tvar (1.68). Je-li funkce koncových parametrů F diferencovatelná, tj.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \dot{\boldsymbol{x}}, \tag{1.72}$$

pak lze psát

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_N} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} \right]^T \dot{\boldsymbol{x}} \right\} dt + F(\boldsymbol{x}_0, t_0) \ , \tag{1.73}$$

kde $F(\boldsymbol{x}_0, t_0) = F[\boldsymbol{x}(t), t]\big|_{\substack{t=t_0 \\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}}$ je konstantní hodnota funkce počátečních parametrů pro t_0 a $\boldsymbol{x}_0$.

Vidíme, že účelový funkcionál (1.73) má Lagrangeův tvar. Protože t_0 a $\boldsymbol{x}_0$ jsou pevně dány, funkce $F(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ má konstantní hodnotu, která nemá vliv na optimální řešení.

Rovněž Bolzův tvar (1.67) můžeme převést na Lagrangeův tvar (1.68). Uvažujme (1.72) a můžeme psát

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_N} \left\{ f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} \right]^T \dot{\boldsymbol{x}} \right\} dt + F(\boldsymbol{x}_0, t_0) \ . \tag{1.74}$$

Tedy skutečně všechny tři tvary jsou ekvivalentní, a proto při řešení konkrétních úloh optimálního řízení je třeba uvažovat ten tvar, který pro danou metodu řešení je nejvhodnější.

Funkce koncových parametrů F vystupující v účelových funkcionálech v Bolzově a Mayerově tvaru musí mít tvar odpovídající příslušné kombinaci (1.64), tj.

t_N - pevný, $\boldsymbol{x}_N$ - pevný $\Rightarrow$ $F = 0$, (1.75a)

t_N - pevný, $\boldsymbol{x}_N$ - volný $\Rightarrow$ $F = F(\boldsymbol{x}_N)$, (1.75b)

t_N - volný, $\boldsymbol{x}_N$ - pevný $\Rightarrow$ $F = F(t_N)$, (1.75c)

t_N - volný, $\boldsymbol{x}_N$ - volný $\Rightarrow$ $F = F(\boldsymbol{x}_N, t_N)$, (1.75d)

jinak by její použití nemělo smysl. Příklady použití některých z těchto kombinací budou uvedeny později.

Při řešení konkrétních úloh optimálního řízení se nejčastěji můžeme setkat s následujícími základními případy.

Časově optimální řízení

V tomto případě je třeba řízený podsystém převést ze zadaného počátečního stavu $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ do zadaného koncového stavu $\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N$ za nejkratší dobu. Účelový funkcionál má pak Mayerův tvar

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = t_N - t_0 , \tag{1.76a}$$

resp. ekvivalentní Lagrangeův tvar

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_N} dt\,. \tag{1.76b}$$

Integrand f_0 v účelovém funkcionálu (1.76b) je roven jedné. Je zřejmé, že v tomto případě koncový čas t_N musí být volný, protože by úloha časově optimálního řízení neměla smysl.

Energeticky optimální řízení

V tomto případě účelový funkcionál závisí pouze na řízení, tj.

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_N} \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)dt\,, \tag{1.77}$$

kde $\boldsymbol{R}$ je symetrická kladně definitní (nejčastěji diagonální) matice řádu *r*.

Název je odvozen z analogie s elektrickými obvody, kde energie spotřebovaná na rezistoru s odporem *R*, kterým protéká proud $i(t)$, resp. na kterém je napětí $u(t)$, za dobu $t_N - t_0$ je dána integrálem

$$\int_{t_0}^{t_N} Ri^2(t)dt = \int_{t_0}^{t_N} \frac{u^2(t)}{R}dt\,. \tag{1.78}$$

Řízení s minimální spotřebou paliva

Pokud řízení $u_j(t)$ je úměrné spotřebě *j*-tého paliva ($j = 1,2,\ldots,r$), pak účelový funkcionál může mít tvar

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_N} \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{u}(t)dt\,, \tag{1.79}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor kladných váhových koeficientů. Vektor řízení $\boldsymbol{u}(t)$ může mít složky brané jako absolutní hodnoty.

Programové řízení

Má-li skutečný stav $\boldsymbol{x}(t)$ v každém okamžiku *t* být roven (v ideálním případě) požadovanému stavu $\boldsymbol{x}^w(t)$, tj. aby skutečná stavová trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ byla dostatečně blízká k předem zadané požadované (např. zaprogramované) stavové trajektorii $\{\boldsymbol{x}^w(t)\}$, pak účelový funkcionál má nejčastěji tvar (viz rovněž kapitola 2)

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_N} \left[\boldsymbol{x}^w(t) - \boldsymbol{x}(t)\right]^T \boldsymbol{Q}\left[\boldsymbol{x}^w(t) - \boldsymbol{x}(t)\right] dt, \tag{1.80}$$

kde $\boldsymbol{Q}$ je symetrická kladně definitní nebo semidefinitní (nejčastěji diagonální) matice řádu n.

V případě, že

$$\boldsymbol{x}^w(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{pro} \qquad t \in \langle t_0, t_N \rangle, \tag{1.81}$$

účelový funkcionál (1.80) bude roven

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_N} \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)dt. \tag{1.82}$$

Kvadraticky optimální řízení

V tomto případě účelový funkcionál je dán kombinací funkcionálů (1.77) a (1.82)

$$J\{\boldsymbol{u}(t)\} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_N} \left[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right] dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t_N), \tag{1.83}$$

kde $\boldsymbol{S}$ je symetrická kladně definitní (nejčastěji diagonální) matice řádu n.

Je zřejmé, že pokud ve funkcionálu (1.83) vystupuje funkce koncových parametrů

$$F = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t_N), \tag{1.84}$$

pak koncový stav $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}(t_N)$ musí být volný. Cílem této funkce je dosáhnout

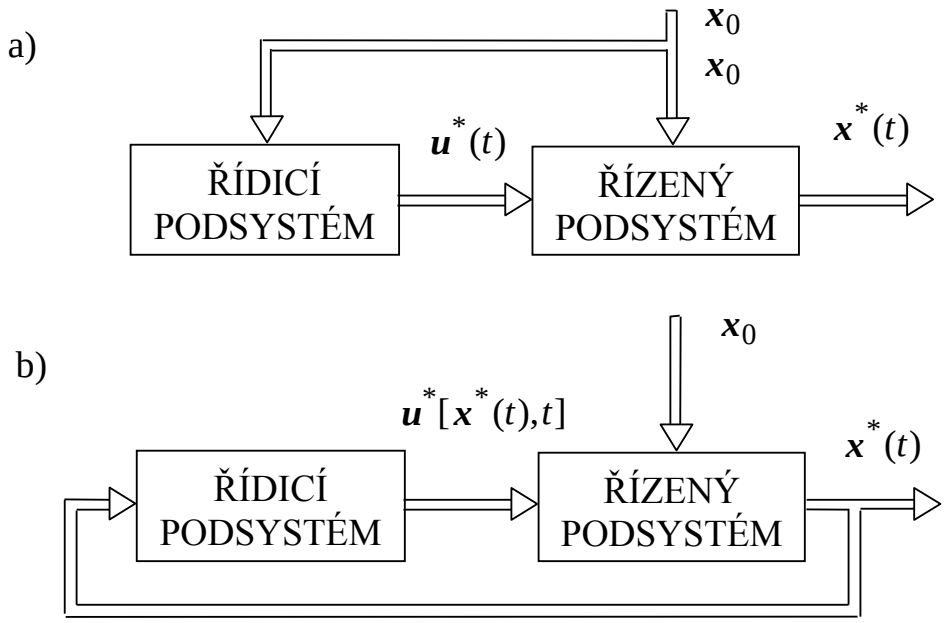
$$\boldsymbol{x}(t_N) \to \boldsymbol{0}. \tag{1.85}$$

Matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ mohou mít časově proměnné prvky. Množitel $\frac{1}{2}$ u funkcionálů (1.77), (1.80), (1.82) a (1.83) je použit z výpočetního důvodu. V případě $t_N \to \infty$ musí být zaručena konvergence příslušných funkcionálů, např. použitím odchylek od ustálených hodnot.

Optimální řízení $\{\boldsymbol{u}^*(t)\}$ může být generováno řídicím podsystémem v ***otevřené*** nebo ***uzavřené struktuře*** (obr. 1.17).

V prvním případě jde o ***otevřené*** (***přímé***) ***řízení*** neboli ***ovládání*** a je realizováno ***otevřeným systémem řízení*** zvaným také ***systémem ovládání*** (obr.

1.17a). Otevřené optimální řízení $\{\boldsymbol{u}^*(t)\}$ musí být plně určeno už v počátečním časovém okamžiku t_0. Při otevřeném řízení je nutná znalost přesného matematického modelu řízeného podsystému a počátečního stavu. Jakékoliv změny vlastností řízeného a řídicího podsystému se plně projeví na vlastnostech celého otevřeného systému řízení. Proto tento druh řízení je použitelný pouze u jednoduchých řízených podsystémů a při zanedbatelně malých poruchách.



Obr. 1.17. Optimální systém řízení: otevřený – (a), uzavřený – (b)

V druhém případě jde o ***uzavřené*** (***zpětnovazební***) ***řízení*** neboli ***regulaci***. Tento druh řízení je realizován ***zpětnovazebním systémem řízení*** zvaným též ***systémem regulace*** (obr. 1.17b). Zpětnovazební optimální řízení $\{\boldsymbol{u}^*(t)\}$ je určováno jako funkce okamžitého stavu a času, tj. $\{\boldsymbol{u}^*[\boldsymbol{x}^*(t),t]\}$. Na rozdíl od otevřeného řízení, kde celé řízení musí být určeno na začátku, při zpětnovazebním řízení je uvažována neustále nová informace o řízeném podsystému obsažená v aktuálním stavu. Změny vlastností řízeného i řídicího podsystému, neznalost přesného matematického modelu řízeného podsystému, případné působení poruch, to vše je vlivem záporné (stabilizující) zpětné vazby automaticky potlačováno, takže na vlastnostech celého zpětnovazebního systému řízení se podstatně neprojeví. Z tohoto důvodu určení optimálního zpětnovazebního řízení je pro praxi značně důležitější, ale také náročnější než určení optimálního otevřeného řízení. Problém určení optimálního zpětnovazebního řízení se také nazývá ***úlohou syntézy optimálního řízení*** nebo ***úlohou syntézy optimálního regulátoru***.

Pro řešení úloh optimálního řízení existuje celá řada metod, z nichž do nejdůležitějších patří:

- dynamické programování (Bellmanův princip optimality),

- Pontrjaginův princip minima (maxima),
- variační počet,
- metoda agregace stavových proměnných,
- metody funkcionální analýzy atd.

Úlohu syntézy optimálního řízení řeší přímo pouze dynamické programování a metoda agregace stavových proměnných.

Některé jednoduché úlohy optimálního řízení lze řešit bez znalosti uvedených metod.

Příklad 1.3

Pro řízený podsystém

$$\dot{x}(t) = bu(t),\ b > 0, \tag{1.86a}$$

$$|u(t)| \le u_m, \tag{1.86b}$$

počáteční stav $x(0) = 0$ a koncový stav $x(t_N) = w_0$ je třeba určit časově optimální řízení (Víteček 1992).

Řešení:

Je zřejmé, že řízený podsystém (1.86) dosáhne nejrychleji požadovaného koncového stavu $x_N = w_0$ při použití mezního řízení, tj.

$$u(t) = \pm u_m,$$

kterému odpovídá průběh stavové proměnné

$$x(t) = \pm bu_m t + c.$$

Pro $w_0 > 0$ a $x(0) = 0 \ \Rightarrow\ c = 0$ dostaneme optimální průběh stavové proměnné (obr. 1.18a)

$$x^*(t) = \begin{cases} bu_m t & \text{pro} \quad 0 \le t \le t^* = t_N, \\ w_0 & \text{pro} \quad t > t_N, \end{cases} \tag{1.87}$$

kde minimální doba t^*, za kterou bude dosaženo požadovaného stavu $x_N = w_0$, je dána vztahem

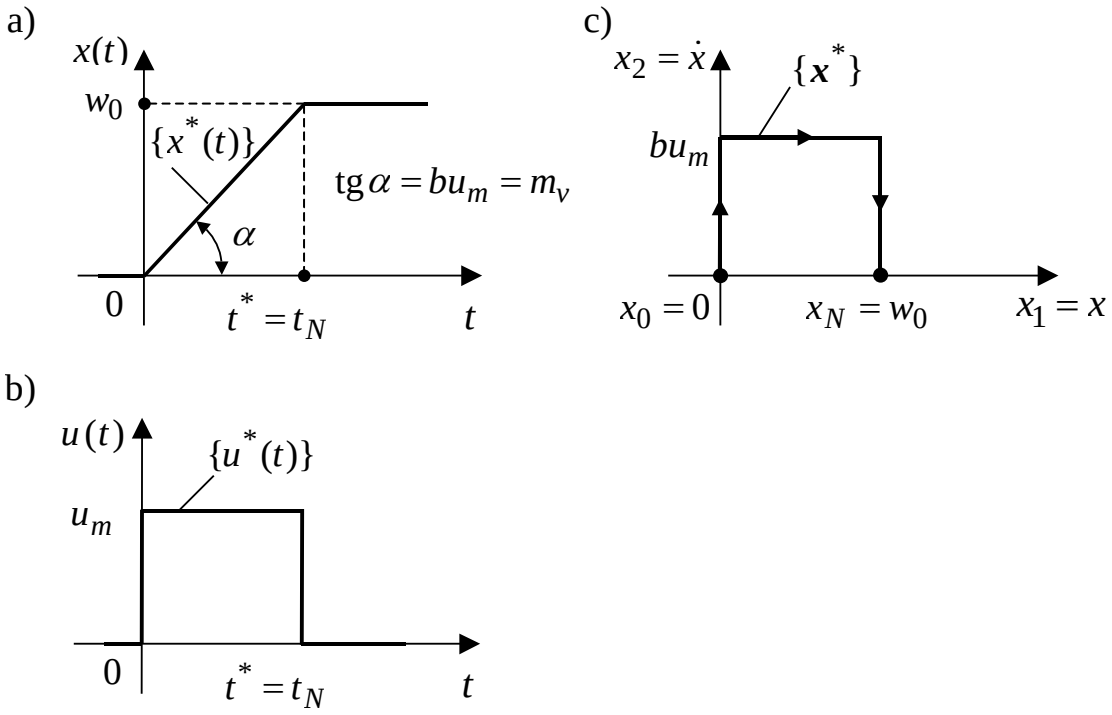
$$t^* = t_N = \frac{w_0}{bu_m}. \tag{1.88}$$

Optimální průběh řízení a stavové trajektorie je na obr. 1.18b a 1.18c.

V tomto příkladě jsme mohli rovněž vycházet z omezení rychlosti

$$|\dot{x}(t)| \le m_v = bu_m, \tag{1.89}$$

které v některých případech je bližší technické praxi. Typickými prvky s omezením rychlosti jsou např.: asynchronní motor, u kterého ustálená úhlová rychlost nemůže být vyšší než synchronní rychlost; hydromotor, jehož maximální rychlost je dána plně otevřeným šoupátkem atd.



Obr. 1.18. Příklad 1.3 – optimální průběh: stavové proměnné – (a), řízení (b), stavové trajektorie – (c)

Příklad 1.4

Řízený podsystém (viz příklad 1.1 a 1.2)

$$\ddot{y}(t) = bu(t), \;\; b > 0 \tag{1.90}$$

je třeba co nejrychleji převést z počátečních podmínek

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \tag{1.91a}$$

do koncových podmínek

$$y(t_N) = w_0, \qquad \dot{y}(t_N) = 0 \tag{1.91b}$$

za předpokladu omezení zrychlení

$$|\ddot{y}(t)| \le m_a \;. \tag{1.92}$$

Řešení:

Je to typická časově optimální úloha. Řízený podsystém (1.90) popíšeme stavově:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= bu(t), \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.93}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}, \tag{1.94a}$$

$$\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N = [w_0, 0]^T, \tag{1.94b}$$

$$|\dot{x}_2(t)| \le m_a \quad \Rightarrow \quad |u(t)| \le \frac{m_a}{b}. \tag{1.95}$$

Z podstaty úlohy vyplývá, že požadovaného stavu (1.94b) bude dosaženo nejrychleji, když proces bude sestávat ze dvou úseků. V prvním úseku $0 \le x_1 \le \frac{w_0}{2}$ se použije maximální zrychlení m_a a ve druhém úseku $\frac{w_0}{2} \le x_1 \le w_0$ maximální zpomalení $-m_a$ (obr. 1.19a, b, c). Pro první úsek platí (postupně integrujeme):

$$u(t) = \frac{m_a}{b} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = m_a,$$

$$\dot{y}(t) = x_2(t) = m_a t + c_{11},$$

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{2} m_a t^2 + c_{11} t + c_{21}.$$

Z nulových počátečních podmínek (1.91a), resp. (1.94a) dostaneme $c_{11} = c_{21} = 0$, tj.

$$\dot{y}(t) = x_2(t) = m_a t, \tag{1.96a}$$

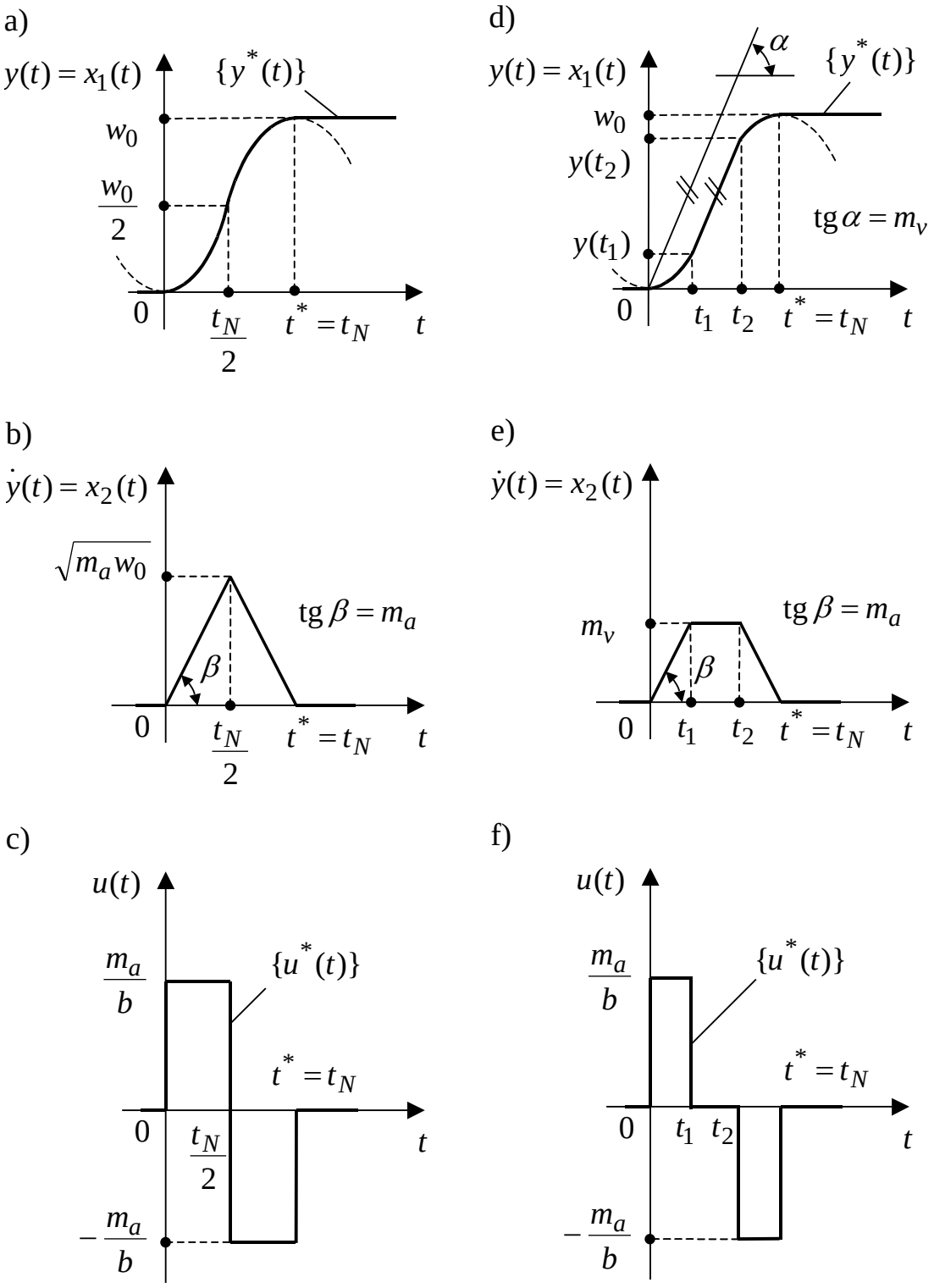
$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{2} m_a t^2. \tag{1.96b}$$

Pro druhý úsek platí:

$$u(t) = -\frac{m_a}{b} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -m_a,$$

$$\dot{y}(t) = x_2(t) = -m_a t + c_{12},$$

$$y(t) = x_1(t) = -\frac{1}{2} m_a t^2 + c_{12} t + c_{22}.$$



Obr. 1.19. Příklad 1.4 a 1.5 – optimální průběh: výstupní veličiny – (a), rychlosti výstupní veličiny –(b), řízení – (c), výstupní veličiny – (d), rychlosti výstupní veličiny –(e), řízení – (f)

Z koncových podmínek (1.91b), resp. (1.94b) a podmínky $x_1\left(\frac{t_N}{2}\right) = \frac{w_0}{2}$ dostaneme tři rovnice

$$0 = -m_a t_N + c_{12},$$

$$w_0 = -\frac{1}{2} m_a t_N^2 + c_{12} t_N + c_{22}.$$

$$\frac{w_0}{2} = -\frac{1}{2} m_a \frac{t_N^2}{4} + c_{12} \frac{t_N}{2} + c_{22},$$

ze kterých vypočteme neznámé integrační konstanty c_{12}, c_{22} a minimální dobu převodu $t^* = t_N$, tj.

$$c_{12} = 2\sqrt{m_a w_0},$$

$$c_{22} = -w_0,$$

$$t^* = t_N = 2\sqrt{\frac{w_0}{m_a}}. \tag{1.97}$$

Tzn., že druhý úsek bude popsán vztahy

$$\dot{y}(t) = x_2(t) = -m_a t + 2\sqrt{m_a w_0}, \tag{1.98a}$$

$$y(t) = x_1(t) = -\frac{1}{2} m_a t^2 + 2\sqrt{m_a w_0}\ t - w_0. \tag{1.98b}$$

Optimální průběh výstupní veličiny $\{y^*(t)\}$ se bude skládat ze dvou parabolických úseků daných výrazy (1.96b) a (1.98b), viz obr. 1.19a. Odpovídající průběhy rychlosti popisují vztahy (1.96a) a (1.98a). Eliminací času t z rovnic (1.96) dostaneme první úsek stavové trajektorie

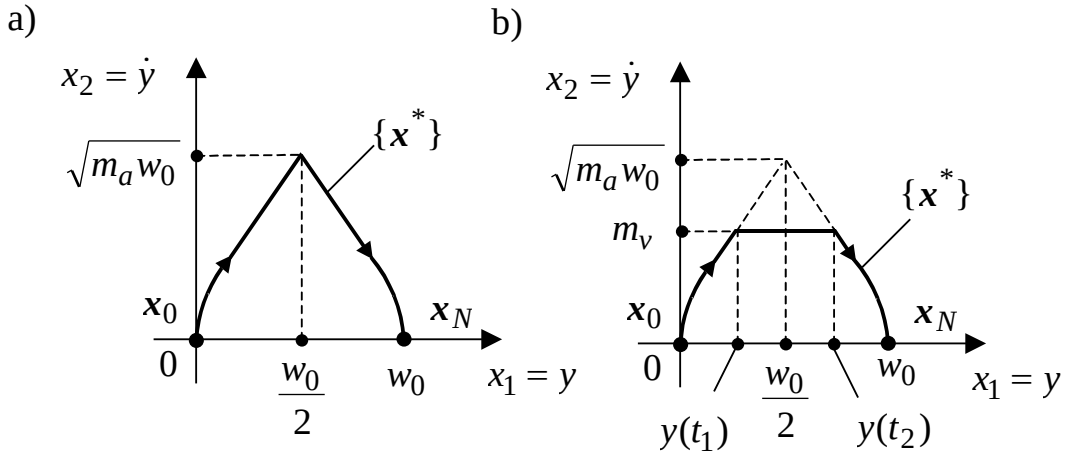
$$x_2^2 = 2 m_a x_1, \tag{1.99a}$$

a stejným postupem z rovnic (1.98) získáme druhý úsek stavové trajektorie

$$x_2^2 = 2 m_a (w_0 - x_1). \tag{1.99b}$$

Vidíme, že optimální stavová trajektorie $\{\boldsymbol{x}^*\}$ se skládá také ze dvou parabolických úseků (obr. 1.20a).

Zajímavé je srovnání tohoto příkladu s příkladem 1.2. Oba příklady jsou podobné (viz obr. 1.14), a proto také minimální doba musí být stejná, srov. vztahy (1.53) a (1.97) pro $b = m_a$. Realizace otevřeného optimálního řízení $\{u^*(t)\}$ v příkladě 1.4 vyžaduje přesnou znalost okamžiku $t = \frac{t_N}{2}$ přepnutí řízení z hodnoty $\frac{m_a}{b}$ na opačnou hodnotu $-\frac{m_a}{b}$ (obr. 1.19c), co je velkou nevýhodou.



Obr. 1.20. Optimální průběh stavové trajektorie: z příkladu 1.4 – (a), z příkladu 1.5 – (b)

V příkladu 1.2 je časově optimální řízení realizováno pomocí zpětné vazby, takže není nutné znát okamžik přepnutí. Protože však zpětná vazba je lineární, je třeba pro každou hodnotu žádané veličiny w_0 vypočítat optimální hodnotu derivační časové konstanty T_D^*, která určuje optimální sklon přepínací přímky, a tím také odpovídající okamžik přepnutí (obr. 1.13).

Příklad 1.5

Časově optimální úlohu z příkladu 1.4 vyřešíme za předpokladu omezení i rychlosti

$$|\dot{y}(t)| \le m_v . \tag{1.100}$$

Řešení:

V tomto případě průběh výstupní veličiny $y(t) = x_1(t)$ se bude skládat ze tří úseků: dvou parabolických a středního přímkového (obr. 1.19d). Protože poslední parabolický úsek je stejný v podstatě jako první úsek, proto vystačíme pouze s popisem počátečních dvou úseků. Na základě obr. 1.19d, e, f a vztahů (1.96) a (1.100) lze psát:

První úsek $[0 \le x_1 \le x_1(t_1),\ 0 \le x_2 \le x_2(t_1) = m_v]$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t) &= x_2(t) = m_a t \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{2} m_a t^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{m_v}{m_a}, \\ x_1(t_1) &= \frac{m_v^2}{2m_a}. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Druhý úsek $[x_1(t_1) = \dfrac{m_v^2}{2m_a} \le x_1 \le x_1(t_2),\ x_2(t_1) = x_2(t_2) = x_2 = m_v]$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t) &= x_2(t) = m_v \\ y(t) &= x_1(t) = m_v(t - t_1) + \frac{m_v^2}{2m_a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{w_0}{m_v} - \frac{m_v}{m_a}, \\ x_1(t_2) &= w_0 - \frac{m_v^2}{2m_a}. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Odpovídající průběh optimální stavové trajektorie $\{\boldsymbol{x}^*\}$ se získá snadno eliminací času t a je na obr. 1.20b. Minimální doba převodu $t^* = t_N$ bude

$$t^* = t_N = 2t_1 + (t_2 - t_1) = \frac{w_0}{m_v} + \frac{m_v}{m_a}. \tag{1.103}$$

Tento vztah platí za předpokladu, že omezení rychlosti (1.100) se uplatní (viz obr. 1.19b, e, obr. 1.20), tj. pro

$$m_v < \sqrt{m_a w_0}\,, \tag{1.104}$$

jinak platí vztah (1.97).

Vzájemně si odpovídající obrázky z příkladu 1.4 a 1.5 jsou speciálně ve stejném měřítku, aby bylo možné analyticky získané výsledky obou příkladů srovnat a správně interpretovat.

Realizace otevřeného optimálního řízení $\{\boldsymbol{u}^*(t)\}$ je v tomto příkladě značně obtížnější než v předchozím příkladě, protože je třeba znát velmi přesně předem časové okamžiky

$$t_1 = \frac{m_v}{m_a}$$

$$t_2 = \frac{w_0}{m_v}$$

$$t^* = t_N = t_1 + t_2 = \frac{m_v}{m_a} + \frac{w_0}{m_v},$$

viz obr. 1.19. Nedodržení těchto časových okamžiků způsobí nejenom prodloužení doby převodu, ale může způsobit i nedosažení požadovaného koncového stavu (1.94b). Tyto nevýhody odstraňuje zpětnovazební řízení.

2 METODA AGREGACE STAVOVÝCH PROMĚNNÝCH

V kapitole jsou uvedeny původní přístupy k návrhu programového řízení nelineárních podsystémů, které využívají metodu agregace stavových proměnných (Víteček 1991). Metoda agregace spočívá ve vhodné volbě agregovaných proměnných, která sníží počet původních stavových proměnných, a tím sníží i dimenzi vlastního problému návrhu řízení, což podstatným způsobem zjednoduší jeho řešení. Podrobný popis metody agregace stavových proměnných s plně řešenými příklady lze nalézt v (Zítek & Víteček 1999).

2.1 Modely standardních nelineárních podsystémů

Uvažujme poměrně obecný řízený nelineární dynamický podsystém, jehož matematický model má ve složkovém stavovém vyjádření tvar

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\,, & x_1(0) &= x_{10}\,,\\
\dot{x}_2 &= x_3\,, & x_2(0) &= x_{20}\,,\\
&\vdots & &\vdots\\
\dot{x}_{r_1} &= f_{r_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \sum_{j=1}^{m} g_{r_1 j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)u_j\,, & x_{r_1}(0) &= x_{r_1 0}\,,\\
\dot{x}_{r_1+1} &= x_{r_1+2}\,, & x_{r_1+1}(0) &= x_{r_1+1,0}\,,\\
\dot{x}_{r_1+2} &= x_{r_1+3}\,, & x_{r_1+2}(0) &= x_{r_1+2,0}\,,\\
&\vdots & &\vdots\\
\dot{x}_{r_2} &= f_{r_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \sum_{j=1}^{m} g_{r_2 j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)u_j\,, & x_{r_2}(0) &= x_{r_2 0}\,,\\
\dot{x}_{r_2+1} &= x_{r_2+2}\,, & x_{r_2+1}(0) &= x_{r_2+1,0}\,,\\
\dot{x}_{r_2+2} &= x_{r_2+3}\,, & x_{r_2+2}(0) &= x_{r_2+2,0}\,,\\
&\vdots & &\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)u_j\,, & x_n(0) &= x_{n0}\,,\\
r_j &= r_{j-1} + n_j\,,\ r_0 = 0,\ n = \sum_{j=1}^{m} n_j\,, \quad j = 1,2,\ldots,m.
\end{aligned}\right\} \quad (2.1a)
$$

Kompaktněji a přehledněji můžeme matematický model (2.1a) zapsat vektorově ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)u_j, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.1b}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.1c}$$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \ \dim \boldsymbol{x} = n; \qquad \boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T, \ \dim \boldsymbol{u} = m;$$

$$\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_p]^T, \ \dim \boldsymbol{v} = p;$$

$$\boldsymbol{f} = [x_2, \ldots, f_{r_1}, x_{r_1+2}, \ldots, f_{r_2}, x_{r_2+2}, \ldots, f_n]^T, \ \dim \boldsymbol{f} = n;$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{r_1 1} & g_{r_1 2} & \ldots & g_{r_1 m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{r_2 1} & g_{r_2 2} & \ldots & g_{r_2 m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & g_{n2} & \ldots & g_{nm} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_m], \quad \dim \boldsymbol{G} = (n,m);$$

$$\boldsymbol{g}_j = [0, \ldots, g_{r_1 j}, 0, \ldots, g_{r_2 j}, 0, \ldots, g_{nj}]^T, \ \dim \boldsymbol{g}_j = n,$$

kde $\boldsymbol{v}$ je vektor poruchových proměnných (poruchy), $\boldsymbol{f}$ - spojitá vektorová funkce, $\boldsymbol{G}$ - matice spojitých funkcí g_{ij}, $\boldsymbol{g}_j$ - spojitá vektorová funkce (sloupcové vektory matice $\boldsymbol{G}$), n - počet stavových proměnných (řád nelineárního podsystému), n_j - dílčí řád, m - počet řídicích proměnných, p - počet poruchových proměnných, dim - dimenze vektoru nebo typ matice.

V celém dalším textu 2. kapitoly se předpokládá $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$ a striktně se nerozlišuje mezi pojmy podsystém (systém) a model. Počet řídicích proměnných v této kapitole je označován písmenem m, protože se předpokládá, že je shodný s počtem výstupních proměnných $y_1 = x_1$, $y_2 = x_{r_1+1}, \ldots,$ $y_m = x_{r_{m-1}+1}$.

Nelineární podsystémy, jejichž matematické modely mají složkové stavové vyjádření (2.1a) jsou standardního tvaru (typu) nebo krátce standardní. V analogii s lineárními modely lze rovněž hovořit o nelineárním regulátorovém kanonickém tvaru (Kaczorek 1983).

Příklad 2.1

Je třeba rozhodnout, zda nelineární podsystém s matematickým modelem

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 x_2 + v + u_1 + \left(1 + x_1^2\right)u_2, & x_2(0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + x_3^3 + u_2, & x_3(0) &= x_{30} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

je standardní.

Řešení:

Ze srovnání matematického modelu (2.2) s modelem (2.1a) vyplývá, že daný nelineární podsystém je standardní, kde $n = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $m = 2$, $p = 1$ ($r_1 = 2$, $r_2 = n = 3$). Vektorové vyjádření (2.2) má tvar

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, v) + \boldsymbol{G}(x_1)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.3a}$$

kde

$$\boldsymbol{x} = \left[x_1, x_2, x_3\right]^T, \quad \boldsymbol{u} = \left[u_1, u_2\right]^T, \tag{2.3b}$$

$$\boldsymbol{f} = \left[x_2, x_1^2 x_2 + v, x_1 x_2 + x_3^3\right]^T, \tag{2.3c}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 + x_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3d}$$

Příklad 2.2

V koncentračním směšovači s neměnným průřezem a volným výtokem dochází k dokonalému mísení dvou roztoků stejné látky ale s rozdílnými koncentracemi (obr. 2.1). Koncentrační směšovač poskytuje roztok o požadované koncentraci a může být popsán bilančními rovnicemi (Kolomazník 1990; Víteček 1991)

$$S\frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) + q_2(t) - q(t), \tag{2.4a}$$

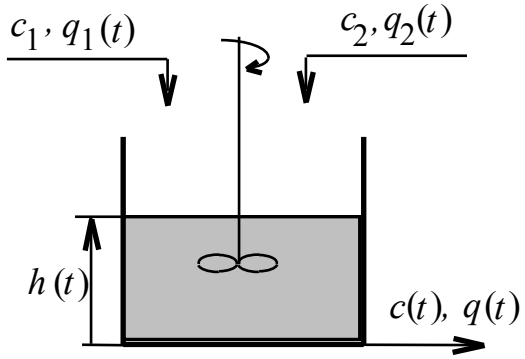
$$S\frac{d}{dt}\left[h(t)c(t)\right] = c_1 q_1(t) + c_2 q_2(t) - c(t)q(t), \tag{2.4b}$$

$$q(t) = a\sqrt{h(t)}, \tag{2.4c}$$

při fyzikálních omezeních

$$\left.\begin{aligned} &h(t), q_1(t), q_2(t) \geq 0, \\ &0 < c_1 \leq c(t) \leq c_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.4d}$$

kde c_1, c_2 jsou koncentrace dané látky přitékajících roztoků ($c_2 > c_1$) [kmol.m^{-3}], $c(t)$ - koncentrace dané látky výsledného roztoku [kmol.m^{-3}], $q_1(t)$, $q_2(t)$ - objemové přítoky roztoků [m^3.s^{-1}], $q(t)$ - objemový výtok výsledného roztoku [m^3.s^{-1}], S - průřez směšovače (plocha hladiny) [m^2], $h(t)$ - výška hladiny roztoku [m], a - známá konstanta [m$^{5/2}$.s^{-1}].



Obr. 2.1. Schéma koncentračního směšovače

Úkolem je vyjádřit matematický model koncentračního směšovače stavově a ověřit jeho standardnost.

Řešení:

Po úpravě rovnic (2.4a) a (2.4b) na kanonický tvar a po dosazení (2.4c) do (2.4a) dostaneme

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{S}\left[q_1(t) + q_2(t) - a\sqrt{h(t)}\right],$$

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{Sh(t)}\left\{\left[c_1 - c(t)\right]q_1(t) + \left[c_2 - c(t)\right]q_2(t)\right\}.$$

Použijeme-li označení

$$x_1 = h, \qquad x_2 = c, \qquad u_1 = q_1, \qquad u_2 = q_2, \tag{2.5}$$

obdržíme stavový model koncentračního směšovače s volným výtokem

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{a}{S}\sqrt{x_1} + \frac{1}{S}u_1 + \frac{1}{S}u_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{c_1 - x_2}{Sx_1}u_1 + \frac{c_2 - x_2}{Sx_1}u_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x_1) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{2.7a}$$

kde

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T, \qquad \boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T, \tag{2.7b}$$

$$\boldsymbol{f} = \left[-\frac{a}{S}\sqrt{x_1}, 0\right]^T, \tag{2.7c}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \\ \frac{c_1 - x_2}{Sx_1} & \frac{c_2 - x_2}{Sx_1} \end{bmatrix}, \tag{2.7d}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad c_1 \leq x_2 \leq c_2, \qquad \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}. \tag{2.7e}$$

Ze stavového modelu (2.6) je zřejmé, že koncentrační směšovač s volným výtokem je standardní nelineární podsystém, kde $n = m = 2$, $n_1 = n_2 = 1$ ($r_1 = 1$, $r_2 = n = 2$).

Příklad 2.3

Je uvažován koncentrační směšovač na obr. 2.1, kde výtok (odběr) výsledného roztoku $q(t)$ je náhodný. V tomto případě pro něj platí bilanční rovnice (2.4a), (2.4b) a fyzikální omezení

$$\left.\begin{aligned} &h(t), q_1(t), q_2(t), q(t) \geq 0, \\ &0 < c_1 \leq c(t) \leq c_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Matematický model koncentračního směšovače s náhodným výtokem je třeba vyjádřit stavově a zjistit, zda je standardní.

Řešení:

Podobnou úpravou, jako v předchozím příkladě 2.2, z rovnic (2.4a) a (2.4b) dostaneme

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{S}\left[q_1(t) + q_2(t) - q(t)\right],$$

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{Sh(t)}\left\{\left[c_1 - c(t)\right]q_1(t) + \left[c_2 - c(t)\right]q_2(t)\right\}.$$

Po použití označení

$$x_1 = h, \qquad x_2 = c, \qquad v = q, \qquad u_1 = q_1, \qquad u_2 = q_2 \tag{2.9}$$

získáme stavový model koncentračního směšovače s náhodným výtokem

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{S}v + \frac{1}{S}u_1 + \frac{1}{S}u_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{c_1 - x_2}{Sx_1}u_1 + \frac{c_2 - x_2}{Sx_1}u_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(v) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{2.11a}$$

$$\boldsymbol{x} = \left[x_1, x_2\right]^T, \qquad \boldsymbol{u} = \left[u_1, u_2\right]^T, \tag{2.11b}$$

$$\boldsymbol{f} = \left[-\frac{1}{S}v, 0\right]^T, \tag{2.11c}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S} & \dfrac{1}{S} \\ \dfrac{c_1 - x_2}{Sx_1} & \dfrac{c_2 - x_2}{Sx_1} \end{bmatrix}, \tag{2.11d}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad c_1 \leq x_2 \leq c_2, \qquad \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}, \qquad v \geq 0. \tag{2.11e}$$

Ze stavového modelu (2.10) je zřejmé, že koncentrační směšovač s náhodným výtokem představuje standardní nelineární podsystém, kde $n = m = 2$, $n_1 = n_2 = p = 1$ ($r_1 = 1$, $r_2 = n = 2$).

Příklad 2.4

Matematický model průmyslového robotu za předpokladu, že všechny pohony jsou realizovány pomocí stejnosměrných motorů s konstantním buzením (tento předpoklad není zásadní) a některých zjednodušení, může být vyjádřen ve tvaru (Spong & Vidyasagar 1989; Víteček aj. 1990)

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{q}(t)\right]\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right]\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{c}\left[\boldsymbol{q}(t)\right] = \boldsymbol{m}_p(t), \\ &\dim \boldsymbol{q} = \dim \boldsymbol{m}_p = \dim \boldsymbol{c} = m, \qquad \dim \boldsymbol{A} = \dim \boldsymbol{B} = (m, m), \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je symetrická kladně definitní matice setrvačností, $\boldsymbol{B}$ - čtvercová matice vyjadřující efekty viskózních, odstředivých a Coriolisových sil, $\boldsymbol{c}$ - vektor

tíhových efektů, $\boldsymbol{m}_p(t)$ - vektor řídicích veličin, $\boldsymbol{q}(t)$ - vektor zobecněných proměnných.

Matematický model průmyslového robotu (2.12) je třeba zapsat stavově a ověřit jeho standardnost.

Řešení:

Zvolíme stavové a řídicí proměnné na základě vztahů

$$\left.\begin{array}{lll} x_{2j-1} = q_j, & \boldsymbol{x}_1 = \left[x_1, x_3, \ldots, x_{2m-1}\right]^T, & \dim \boldsymbol{x}_1 = m, \\ x_{2j} = \dot{q}_j, & \boldsymbol{x}_2 = \left[x_2, x_4, \ldots, x_{2m}\right]^T, & \dim \boldsymbol{x}_2 = m, \\ & \boldsymbol{x} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^T, & \dim \boldsymbol{x} = n = 2m, \\ u_j = m_{pj}, & \boldsymbol{u} = \left[u_1, u_2, \ldots, u_m\right]^T, & \dim \boldsymbol{u} = m \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

a po úpravě dostaneme

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = -\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x}_1)\left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1)\right] + \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{u}. \tag{2.14}$$

Je zřejmé, že nyní již matematický model (2.14) můžeme vyjádřit v přehledné stavové formě

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_{2j-1} = x_{2j}, \\ \dot{x}_{2j} = f_{2j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{2j,j}(\boldsymbol{x}_1)u_j, \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{u}, \tag{2.16a}$$

kde

$$\boldsymbol{f} = \left[x_2, f_2, x_4, f_4, \ldots, x_n, f_n\right]^T, \qquad \dim \boldsymbol{f} = n; \tag{2.16b}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ g_{41} & g_{42} & \cdots & g_{4m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix}, \qquad \dim \boldsymbol{G} = (n, m). \tag{2.16c}$$

Srovnáme-li matematické modely (2.15) a (2.1a), je zřejmé, že matematický model průmyslového robotu (2.15), resp. (2.16) je standardní, kde $n = 2m$, $n_1 = n_2 = ... = n_m = 2$ ($r_1 = 2$, $r_2 = 4$,..., $r_m = 2m = n$).

Řiditelnost nelineárních i lineárních podsystémů může být definována různými způsoby (Kaczorek 1993). Dále budeme uvažovat běžnou definici řiditelnosti používanou pro lineární stacionární podsystémy, viz rovněž (Kubík aj. 1982; Takahashi, Rabins & Auslander 1972; Shinners 1992; Westphal 1995):

„Podsystém je řiditelný, existuje-li takové řízení $\boldsymbol{u}$*, které ho převede z libovolného počátečního stavu* $\boldsymbol{x}(t_0)$ *do libovolného koncového stavu* $\boldsymbol{x}(t_1)$ *za konečnou dobu* $t_1 - t_0$*.“*

Kontrola řiditelnosti u nelineárních podsystémů je velmi náročná a pracná (Isidori 1995; Vidyasagar 1993; Zboray & Ďurovský 1996). Pro standardní nelineární podsystémy podmínka řiditelnosti má velmi jednoduchý tvar (Zítek & Víteček 1999)

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = m, \tag{2.17}$$

kde rank znamená hodnost matice.

Lze to snadno ukázat. Standardní nelineární podsystém (2.1) se vyjádří ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n_1)} \\ x_{r_1+1}^{(n_2)} \\ \cdots \\ x_{r_{m-1}+1}^{(n_m)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{u}, \tag{2.18a}$$

$$\boldsymbol{f}_z = \boldsymbol{D}_z\boldsymbol{f}, \quad \dim \boldsymbol{f}_z = m; \quad \boldsymbol{G}_z = \boldsymbol{D}_z\boldsymbol{G}, \quad \dim \boldsymbol{G}_z = (m,m), \tag{2.18b}$$

kde $\boldsymbol{f}_z$ je agregovaný vektor $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{G}_z$ - agregovaná matice $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{D}_z$ - základní nezáporná agregační matice typu (m, n), jejíž prvky jsou dány vztahy

$$d_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad i = r_j \\ 0 & \text{pro} \quad i \neq r_j \end{cases}. \tag{2.19}$$

Agregovaný vektor $\boldsymbol{f}_z$ a agregovanou matici $\boldsymbol{G}_z$ lze obdržet přímo z vektoru $\boldsymbol{f}$ a matice $\boldsymbol{G}$ vynecháním těch složek, resp. řádků, které odpovídají nulovým řádkům v matici $\boldsymbol{G}$.

Je-li splněna podmínka (2.17), je zřejmé, že rovněž platí

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = \operatorname{rank}\boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = m, \tag{2.20}$$

a proto agregovaná matice $\boldsymbol{G}_z$ je v tomto případě regulární.

Vztah (2.20) je velmi užitečný, protože dovoluje zastoupit podmínku (2.17) jednodušší ekvivalentní podmínkou

$$\det \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \neq 0, \tag{2.21}$$

kde det je determinant matice.

Bude-li nyní použito řízení

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_z^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\left[\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{f}_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\right], \quad \boldsymbol{u}^0 = \left[u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0\right]^T, \quad \dim \boldsymbol{u}^0 = m, \tag{2.22}$$

pak v souladu s (2.18a) se dostane

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n_1)} \\ x_{r_1+1}^{(n_2)} \\ \vdots \\ x_{r_{m-1}+1}^{(n_m)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}^0. \tag{2.23}$$

Použitím řízení (2.22) u nelineárního nestacionárního podsystému (2.1) za předpokladu splnění podmínky (2.17), resp. (2.21) byl získán lineární stacionární podsystém skládající se z m autonomních podsystémů dílčích řádů n_j s novými vstupy u_j^0. Každý *j*-tý autonomní podsystém se skládá z řetězce n_j integrátorů, a proto je řiditelný (Zítek & Víteček 1999). Protože každý autonomní dílčí podsystém je řiditelný, proto je rovněž řiditelný celý lineární podsystém (2.23).

Je-li tedy u standardního nelineárního nestacionárního podsystému (2.1) splněna podmínka (2.17), resp. (2.21), pak ho můžeme vhodným řízením [např. (2.22)] transformovat na řiditelný lineární stacionární podsystém. Proto podmínka (2.17), resp. (2.21) je postačující podmínkou řiditelnosti původního standardního nelineárního podsystému (2.1).

Skutečnou řiditelnost konkrétního nelineárního podsystému mohou samozřejmě narušit různá fyzikální omezení jak na stavové, tak i řídicí proměnné.

Příklad 2.5

Je třeba ověřit řiditelnost nelineárních podsystémů z příkladů 2.1 - 2.4.

Řešení:

Příklad 2.1 - v souladu se vztahy (2.19) zvolíme základní agregační matici

$$\boldsymbol{D}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24a}$$

a ze (2.3d) dostaneme

$$\boldsymbol{D}_z\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_z = \begin{bmatrix} 1 & 1+x_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.24b}$$

Protože $\det\boldsymbol{G}_z \neq 0$ pro libovolné $\boldsymbol{x}$ a v, standardní nelineární podsystém (2.2) je globálně řiditelný.

Příklad 2.2 a 2.3 - v obou příkladech matice $\boldsymbol{G}$ jsou čtvercové a stejné, viz (2.7d) a (2.11d), a proto základní agregační matice je jednotková, tj. $\boldsymbol{D}_z = \mathbf{I}$. Lze tedy psát [viz (2.21)]

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x}) \qquad \Rightarrow \qquad \det\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{c_2 - c_1}{S^2 x_1} \tag{2.25}$$

a je zřejmé, že standardní nelineární podsystémy (2.6) a (2.10) jsou pro $x_1 \neq 0$ ($c_2 > c_1$) [resp. $x_1 > 0$ při respektování fyzikálních omezení (2.7e), příp. (2.11e)] řiditelné.

Příklad 2.4 - ze vztahu (2.14) vyplývá, že [viz (2.21)]

$$\boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x}_1), \tag{2.26}$$

tj. matice $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1)$ je regulární [$\det \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x}_1) \neq 0$], a proto standardní nelineární podsystém (2.15), resp. (2.16) je globálně řiditelný.

Matematické modely nelineárních podsystémů, které nemají standardní tvary, mohou být poměrně často na ně transformovány. Obecné postupy jsou velmi vysoce teoreticky i výpočetně náročné, a proto si uvedeme pouze jednodušší, ale z praktického hlediska významnější, postup exaktní transformace formou jednoho obecného příkladu, viz též příklad 2.10. Další příklady a postupy lze nalézt v (Zítek & Víteček 1999).

Příklad 2.6

Je dán matematický model nelineárního podsystému 5. řádu

$$\left.\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= f_1'(\boldsymbol{q}), & q_1(0) &= q_{10},\\
\dot{q}_2 &= f_2'(\boldsymbol{q}) + g_{21}'(\boldsymbol{q})u_1 + g_{22}'(\boldsymbol{q})u_2, & q_2(0) &= q_{20},\\
\dot{q}_3 &= f_3'(q_1, q_3, q_4), & q_3(0) &= q_{30},\\
\dot{q}_4 &= f_4'(\boldsymbol{q}), & q_4(0) &= q_{40},\\
\dot{q}_5 &= f_5'(\boldsymbol{q}) + g_{51}'(\boldsymbol{q})u_1 + g_{52}'(\boldsymbol{q})u_2, & q_5(0) &= q_{50}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

Matematický model (2.27) je třeba transformovat na standardní tvar.

Řešení:

Nejdříve matematický model (2.27) zapíšeme vektorově

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{g}_1'(\boldsymbol{q})u_1 + \boldsymbol{g}_2'(\boldsymbol{q})u_2, \quad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0, \qquad (2.28a)$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{q} &= [q_1, q_2, \ldots, q_5]^T, & \dim \boldsymbol{q} &= 5,\\
\boldsymbol{f}' &= [f_1', f_2', \ldots, f_5']^T, & \dim \boldsymbol{f}' &= 5,\\
\boldsymbol{g}_1' &= [0, g_{21}', 0, 0, g_{51}']^T, & \dim \boldsymbol{g}_1' &= 5,\\
\boldsymbol{g}_2' &= [0, g_{22}', 0, 0, g_{52}']^T, & \dim \boldsymbol{g}_2' &= 5,\\
\boldsymbol{u} &= [u_1, u_2]^T, & \dim \boldsymbol{u} &= 2.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.28b)$$

Nyní dílčí rovnice v (2.27), které nemají standardní tvar, derivujeme podle času (první a čtvrtou rovnici jedenkrát a třetí dvakrát)

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \left(\frac{\partial f_1'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial f_1'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \left(\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}_1' u_1 + \boldsymbol{g}_2' u_2\right),\\
\ddot{q}_4 &= \left(\frac{\partial f_4'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial f_4'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \left(\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}_1' u_1 + \boldsymbol{g}_2' u_2\right),\\
\ddot{q}_3 &= \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \dot{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{f}'.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

V poslední rovnici vektor $\dot{\boldsymbol{q}}$ mohl být zastoupen vektorem $\boldsymbol{f}'$, protože 2. a 5. složka vektoru $\dfrac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}$ je nulová. Poslední vztah derivujeme ještě jednou a po úpravě obdržíme

$$\ddot{q}_3 = \left[\boldsymbol{f}'^T \frac{\partial^2 f_3'}{\partial \boldsymbol{q}^2} + \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{f}'}{\partial \boldsymbol{q}} \right] \boldsymbol{f}' + \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{f}'}{\partial \boldsymbol{q}} \left(\boldsymbol{g}_1' u_1 + \boldsymbol{g}_2' u_2 \right). \tag{2.30}$$

Zvolíme nové stavové proměnné

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q_1, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{q}_1, \\ x_3 &= q_3, \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{q}_3, \\ x_5 &= \dot{x}_4 = \ddot{q}_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

a zbývající původní stavové proměnné q_2, q_4 a q_5 určíme z odpovídajících rovnic ve vztazích (2.27) a (2.29)

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= f_1'(x_1, q_2, x_3, q_4, q_5) \\ x_4 &= f_3'(x_1, x_3, q_4) \\ x_5 &= \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T \boldsymbol{f}' \Big|_{\substack{q_1 = x_1 \\ q_3 = x_3}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad q_2, q_4, q_5. \tag{2.32}$$

Nyní již dostaneme na základě (2.29) - (2.32) transformovaný matematický model ve standardním tvaru ($n = 5$, $m = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = n = 5$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\boldsymbol{x}) + g_{21}(\boldsymbol{x}) u_1 + g_{22}(\boldsymbol{x}) u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= f_5(\boldsymbol{x}) + g_{51}(\boldsymbol{x}) u_1 + g_{52}(\boldsymbol{x}) u_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.33a}$$

kde

$$
\left.
\begin{aligned}
&f_2(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_1'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{f}'\Big|_{\boldsymbol{x}}, \\
&g_{21}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_1'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{g}_1'\Big|_{\boldsymbol{x}}, \qquad g_{22}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_1'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{g}_2'\Big|_{\boldsymbol{x}}, \\
&f_5(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{f}'^T \frac{\partial^2 f_3'}{\partial \boldsymbol{q}^2} + \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{f}'}{\partial \boldsymbol{q}}\right]\boldsymbol{f}'\Big|_{\boldsymbol{x}}, \\
&g_{51}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{f}'}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{g}_1'\Big|_{\boldsymbol{x}}, \qquad g_{52}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{f}'}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{g}_2'\Big|_{\boldsymbol{x}},
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.33b)
$$

kde zápis $|_{\boldsymbol{x}}$ znamená, že všechny složky původního (výchozího) stavového vektoru $\boldsymbol{q}$ jsou zastoupeny složkami nového stavového vektoru $\boldsymbol{x}$.

Počáteční podmínky získáme z odpovídajících rovnic ve vztazích (2.27) a (2.29)

$$
\left.
\begin{aligned}
&x_1(0) = x_{10} = q_{10},\ x_2(0) = x_{20} = f_1'|_0,\ x_3(0) = x_{30} = q_{30}, \\
&x_4(0) = x_{40} = f_3'|_0,\ \ x_5(0) = x_{50} = \left(\frac{\partial f_3'}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{f}'|_0,
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.33c)
$$

kde zápis $|_0$ znamená, že všechny proměnné jsou zastoupeny svými počátečními hodnotami.

Vektorové vyjádření matematického modelu (2.33) je

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad (2.34a)$$

kde

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_5\right]^T,\ \dim \boldsymbol{x} = 5; \qquad \boldsymbol{u} = \left[u_1, u_2\right]^T,\ \dim \boldsymbol{u} = 2, \\
&\boldsymbol{f} = \left[x_2, f_2, x_4, x_5, f_5\right]^T,\ \dim \boldsymbol{f} = 5, \\
&\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{51} & g_{52} \end{bmatrix},\ \dim \boldsymbol{G} = (5,2).
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.34b)
$$

Podmínka řiditelnosti pro transformovaný nelineární podsystém (2.34), resp. (2.33) má tvar [viz (2.21)]

$$\det \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x}) = \det \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{51} & g_{52} \end{bmatrix} = g_{21}g_{52} - g_{22}g_{51} \neq 0. \tag{2.35}$$

V celé řadě prakticky důležitých případů transformace nestandardních matematických modelů nelineárních podsystémů na standardní tvary může být provedena jednoduchými postupy spočívajícími ve vhodné volbě stavových proměnných a v derivaci podle času nestandardních dílčích rovnic ve složkovém stavovém vyjádření. Každá nestandardní dílčí rovnice se derivuje podle času tolikrát, až se v nich objeví řízení. Pokud po tomto postupu matematický model nebude standardní, pak se je třeba obrátit na specializovanou literaturu, např. (Isidori 1995; Kaczorek 1983; Khalil 1996; Lin 1994; Vidyasagar 1993). Při ručních výpočtech je vhodné používat složkový zápis a při počítačových úpravách pomocí programů symbolické matematiky je výhodnější použití vektorů a matic.

2.2 Návrh řízení metodou agregace

Podkapitola se podrobně zabývá návrhem programového řízení metodou agregace stavových proměnných na základě minimalizace účelového funkcionálu (Víteček 1991; Zítek & Víteček 1999).

Programové řízení spočívá v rychlém a přesném sledování předem zadané požadované stavové trajektorie $\{\boldsymbol{x}^w(t)\}$ skutečnou stavovou trajektorií $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ řízeného nelineárního podsystému, tj. v minimalizaci v každém časovém okamžiku vektoru odchylek [viz rovněž (1.80)]

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}^w(t) - \boldsymbol{x}(t). \tag{2.36}$$

Proto pro globální hodnocení kvality programového řízení může být s výhodou použit kvadratický účelový funkcionál

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{e} + \dot{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{Q}_0 \dot{\boldsymbol{e}} \right) dt, \tag{2.37}$$

kde $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_0$ jsou symetrické kladně definitní, resp. kladně semidefinitní konstantní váhové matice řádu n.

Je zřejmé, že z důvodu existence funkcionálu (2.37) musí platit

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{2.38}$$

První výraz v integrandu účelového funkcionálu (2.37) zajišťuje blízkost stavových trajektorií $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ a $\{\boldsymbol{x}^w(t)\}$, druhý výraz zajišťuje dostatečnou blízkost i jejich změn v čase, tj. jejich derivací $\{\dot{\boldsymbol{x}}(t)\}$ a $\{\dot{\boldsymbol{x}}^w(t)\}$. Vzhledem k tomu, že ke každé časové změně stavu je potřeba určité energie na řízení, tento výraz nepřímo vyjadřuje i spotřebu energie.

Důležitost jednotlivých složek vektorů $\boldsymbol{e}$ a $\dot{\boldsymbol{e}}$ vyjadřují odpovídající prvky váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$.

Nyní již můžeme zformulovat úlohu optimálního programového řízení:

Pro standardní nelineární podsystém [viz (2.1)]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.39}$$

je třeba určit takové zpětnovazební řízení

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^w,\boldsymbol{v},t\right), \tag{2.40}$$

které minimalizuje kvadratický účelový funkcionál (2.37).

Za předpokladu, že u standardního nelineárního podsystému (2.39) je splněna podmínka řiditelnosti (2.17), resp. (2.21), danou úlohu optimálního programového řízení můžeme řešit poměrně snadno, zavedeme-li vektor agregované odchylky (Víteček 1991; Zítek & Víteček 1999).

$$\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}, \qquad \dim \boldsymbol{D} = (m,n), \qquad \operatorname{rank}\boldsymbol{D} = m, \tag{2.41}$$

kde $\boldsymbol{D}$ je nezáporná agregační matice [tato agregační matice je obecně jiná než základní agregační matice $\boldsymbol{D}_z$ daná vztahem (2.19)].

Nyní v kvadratickém účelovém funkcionálu (2.37) můžeme vektory $\boldsymbol{e}$ a $\dot{\boldsymbol{e}}$ dimenze n zastoupit odpovídajícími agregovanými vektory $\boldsymbol{s}$ a $\dot{\boldsymbol{s}}$ dimenze m, tj.

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} + \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}^2\dot{\boldsymbol{s}}\right)dt, \tag{2.42}$$

kde

$$\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}\left[T_1, T_2, \ldots, T_m\right] \tag{2.43}$$

je diagonální matice kladných časových konstant T_j řádu m.

Ze srovnání funkcionálů (2.37) a (2.42) vyplývají rovnosti

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{T}^2\boldsymbol{D} \tag{2.44}$$

a dále na základě vztahů (2.38) a (2.41) platí

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{s}(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{2.45}$$

Ze vztahů (2.44) je zřejmé, že pro dané matice $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{T}$ vždy existují odpovídající váhové matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$, a proto v tomto případě oba funkcionály (2.37) a (2.42) jsou vzájemně ekvivalentní. Pro dané matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$ oba funkcionály budou vzájemně ekvivalentní pouze za předpokladu existence rozkladů (2.44).

Jednoduchá struktura kvadratického účelového funkcionálu (2.42) umožňuje jeho přímou minimalizaci bez použití metod dynamické optimalizace.

Použijme pomocný kvadratický funkcionál

$$\int_0^\infty \left(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\right)^T \left(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\right) dt \ , \tag{2.46}$$

který nabývá svého ostrého globálního minima rovného 0 na časové vektorové funkci $\{\boldsymbol{s}^*(t)\}$, která je řešením lineární diferenciální rovnice

$$\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \tag{2.47a}$$

při počáteční podmínce [viz (2.41)]

$$\boldsymbol{s}(0) = \boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(0) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_0 . \tag{2.47b}$$

Řešení diferenciální rovnice (2.47) má jednoduchý tvar

$$\boldsymbol{s}^*(t) = \exp\left(-\boldsymbol{T}^{-1}t\right)\boldsymbol{s}_0 , \tag{2.48}$$

ze kterého vyplývá přímo interpretace diagonální matice (2.43) jako matice časových konstant.

Ukážeme, že kvadratický účelový funkcionál (2.42) nabývá svého ostrého globálního minima na stejné funkci $\{\boldsymbol{s}^*(t)\}$ jako pomocný kvadratický funkcionál (2.46), tj. na řešení (2.48) diferenciální rovnice (2.47).

Pomocný kvadratický funkcionál (2.46) upravíme

$$\int_0^\infty \left(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\right)^T \left(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\right) dt = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} + \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}^2\dot{\boldsymbol{s}}\right) dt + 2\int_0^\infty \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}}dt \tag{2.49}$$

a poslední výraz integrujeme metodou per partes s využitím koncových podmínek (2.45):

$$\int_0^\infty \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}}dt = \left[\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}dt = -\boldsymbol{s}_0^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0 - \int_0^\infty \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}}dt \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 2\int_0^{\infty} \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}}dt = -\boldsymbol{s}_0^T \boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0 . \tag{2.50}$$

Na základě vztahů (2.49) a (2.50) dostaneme velmi důležitou rovnost

$$\int_0^{\infty} \left(\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{s} + \dot{\boldsymbol{s}}^T \boldsymbol{T}^2 \dot{\boldsymbol{s}} \right) dt = \int_0^{\infty} \left(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s} \right)^T \left(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s} \right) dt + \boldsymbol{s}_0^T \boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0 . \tag{2.51}$$

Protože hodnota [viz (2.47b)]

$$J^* = \boldsymbol{s}_0^T \boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{e}_0^T \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_0 \tag{2.52}$$

je konstantní, z rovnosti (2.51) vyplývá, že kvadratický účelový funkcionál (2.42) nabývá svého ostrého globálního minima rovného hodnotě (2.52) na stejné funkci $\{\boldsymbol{s}^*(t)\}$ jako pomocný kvadratický funkcionál (2.46).

Je rovněž zřejmé, že pokud platí vztahy (2.44), je hodnota (2.52) současně i ostrým globálním minimem původního kvadratického účelového funkcionálu (2.37).

Diferenciální rovnice (2.47) popisuje vlastnosti optimálního uzavřeného systému řízení vzhledem k vektoru agregované odchylky ***s***. Po dosazení (2.41) do (2.47) a úpravě obdržíme agregovanou diferenciální rovnici optimálního uzavřeného systému řízení vyjádřenou vzhledem k vektoru odchylek ***e***, tj.

$$\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 , \tag{2.53}$$

kde v souladu s (2.36) a (2.39)

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{u}^* . \tag{2.54}$$

Ve vztazích (2.53) a (2.54) z důvodu větší přehlednosti nejsou hvězdičkami * označeny vektory ***e***, $\dot{\boldsymbol{e}}$ a ***x***, podobně jako vektory ***s*** a $\dot{\boldsymbol{s}}$ v rovnici (2.47a), i když jsou optimální.

Bude-li platit

$$\operatorname{rank}\left[\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \right] = m , \tag{2.55}$$

pak ze vztahů (2.53) a (2.54) můžeme již snadno určit optimální zpětnovazební řízení

$$\boldsymbol{u}^* = \left[\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \right]^{-1} \left\{ \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{D}\left[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \right] \right\} . \tag{2.56}$$

Ze vztahu (2.56) je zřejmé, že kromě zadané stavové trajektorie $\{\boldsymbol{x}^w(t)\}$ musíme rovněž znát i její derivaci $\{\dot{\boldsymbol{x}}^w(t)\}$.

Pokud budeme uvažovat $\dot{\boldsymbol{x}}^w(t)=\mathbf{0}$ (stabilizační řízení), pak úloha optimálního řízení spočívá v převedení daného nelineárního podsystému (2.39) z počátečního stavu $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ do zadaného koncového stavu $\boldsymbol{x}(\infty)=\boldsymbol{x}^w$ a setrvání v něm při minimální hodnotě kvadratického účelového funkcionálu (2.37). I v tomto případě minimální hodnota funkcionálu (2.37) je dána vztahem (2.52).

Optimální uzavřený systém řízení (2.53) můžeme vyjádřit v obvyklém tvaru (při uvažování rovnic $\dot{e}_i = e_{i+1}, i \neq r_j$)

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{e}(0)=\boldsymbol{e}_0, \tag{2.57}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je stavová matice dynamiky uzavřeného systému řízení řádu n.

Zvolíme-li prvky d_{ji} agregační matice $\boldsymbol{D}$ v souladu se vztahy [viz (2.1a)]

$$\left.\begin{aligned} &d_{ji}=0 \qquad \text{pro} \quad i \le r_{j-1} \qquad \text{nebo} \quad i > r_j, \\ &d_{ji}>0 \qquad \text{pro} \quad r_{j-1} < i \le r_j, \\ &d_{jr_j}=1, \end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

pak charakteristický mnohočlen optimálního uzavřeného systému řízení (2.57), resp. (2.53) bude

$$N^w(s)=\det(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})=\prod_{j=1}^{m} N_j^w(s), \tag{2.59a}$$

$$\begin{aligned} N_j^w(s) &= \left(d_{j,r_{j-1}+1}+d_{j,r_{j-1}+2}s+\cdots+d_{j,r_j-1}s^{n_j-2}+s^{n_j-1}\right)\left(\frac{1}{T_j}+s\right)= \\ &= \left(\frac{1}{T_j}+s\right)\sum_{p=r_{j-1}+1}^{r_j} d_{jp}s^{p-r_{j-1}-1}, \qquad d_{jr_j}=1, \end{aligned} \tag{2.59b}$$

kde s je komplexní proměnná v Laplaceově transformaci, N_j^w - charakteristický mnohočlen j-tého autonomního podsystému řízení řádu n_j.

Je tedy zřejmé, že v tomto případě optimální uzavřený systém řízení (2.53), resp. (2.57) je tvořen m autonomními lineárními podsystémy řízení, jejichž požadované dynamické vlastnosti můžeme snadno zajistit vhodnou volbou časových konstant T_j a koeficientů d_{ji} jejich charakteristických mnohočlenů (2.59b), tj. vhodnou volbou matic $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{D}$. Je to nesmírně důležité, protože požadované dynamické vlastnosti uzavřeného systému řízení (2.53), resp. (2.57), tj. požadovanou kvalitu programového řízení vyjádřenou minimální hodnotou kvadratického účelového funkcionálu (2.37) zaručíme bez nutnosti

předchozí znalosti váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$. Vidíme tedy, že kvadratický účelový funkcionál (2.37) má pouze pomocnou roli a že při jeho minimalizaci došlo ke zpětnovazební linearizaci typu „vstup - stav“. Tato linearizace spočívá v kompenzaci všech nelinearit včetně poruch a dodání takových lineárních výrazů, které zajistí požadované lineární vlastnosti uzavřeného systému řízení. Je zřejmé, že v případě nedostatečné znalosti matematického modelu řízeného nelineárního podsystému, resp. neměřitelnosti poruch, může dojít k nedokonalé kompenzaci a uzavřený systém řízení nemusí dosáhnout požadované kvality řízení a může být dokonce nestabilní.

Zvolíme-li agregační matici $\boldsymbol{D}$ v souladu se vztahy (2.58), což budeme vždy předpokládat, pak platí [viz (2.18b) a (2.19)]

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = \boldsymbol{D}_z\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \tag{2.60}$$

a optimální zpětnovazební řízení (2.56) můžeme zapsat také ve tvaru

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{G}_z^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\left\{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{D}\left[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\right]\right\}. \tag{2.61}$$

Protože zpětnovazební algoritmus řízení (2.56), resp. (2.61) vyžaduje znalost přesného matematického modelu řízeného nelineárního podsystému (2.39) včetně plné měřitelnosti poruch $\boldsymbol{v}$, je zřejmé, že tento algoritmus nedovede reagovat na nepřesnosti a změny ve vlastnostech řízeného nelineárního podsystému ani na neměřitelné poruchy, a proto je to nerobustní algoritmus řízení.

Příklad 2.7

Pro nelineární podsystém (2.2) [resp. (2.3)] z příkladu 2.1 je třeba metodou agregace navrhnout programové řízení na základě účelového funkcionálu, které zajistí sledování předem zadané požadované trajektorie $\{\boldsymbol{x}^w(t)\}$.

Řešení:

Protože daný nelineární podsystém je standardní a řiditelný (viz příklad 2.5) můžeme na základě vztahů (2.3), (2.24b), (2.43), (2.58) - (2.61) přímo psát

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{G}_z^{-1}(\boldsymbol{x})\left\{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{D}\left[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},v)\right]\right\}, \tag{2.62}$$

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\left[T_1, T_2\right], \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.63}$$

Zvolíme-li pro první autonomní podsystém řízení sledování s mezním aperiodickým průběhem, tj. $d_{11} = \dfrac{1}{T_1}$, pak po vzájemném dosazení a úpravě dostaneme optimální zpětnovazební řízení

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{bmatrix} 1 & -\left(1+x_1^2\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2^w + \dfrac{1}{T_1^2} e_1 + \dfrac{2}{T_1} e_2 - x_1^2 x_2 - v \\ \dot{x}_3^w + \dfrac{1}{T_2} e_3 - x_1 x_2 - x_3^3 \end{bmatrix}, \tag{2.64a}$$

které můžeme rovněž vyjádřit složkově

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= \dot{x}_2^w + \frac{1}{T_1^2} e_1 + \frac{2}{T_1} e_2 - x_1^2 x_2 - v - \left(1+x_1^2\right) \underbrace{\left(\dot{x}_3^w + \frac{1}{T_2} e_3 - x_1 x_2 - x_3^3 \right)}_{u_2^*}, \\ u_2^* &= \dot{x}_3^w + \frac{1}{T_2} e_3 - x_1 x_2 - x_3^3. \end{aligned}\right\} \tag{2.64b}$$

Optimální uzavřený systém řízení bude mít v souladu s (2.57) [resp. (2.53) po úpravě] tvar

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, && e_1(0) = e_{10}, \\ \dot{e}_2 &= -\frac{1}{T_1^2} e_1 - \frac{2}{T_1} e_2, && e_2(0) = e_{20}, \\ \dot{e}_3 &= -\frac{1}{T_2} e_3, && e_3(0) = e_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že charakteristický mnohočlen systému řízení (2.65) je [viz (2.59)]

$$\begin{aligned} N^w(s) &= N_1^w(s) N_2^w(s) = \left(\frac{1}{T_1} + s\right)\left(\frac{1}{T_1} + s\right)\left(\frac{1}{T_2} + s\right) = \\ &= \left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{2}{T_1} s + s^2\right)\left(\frac{1}{T_2} + s\right). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Příklad 2.8

Metodou agregace je třeba navrhnout stabilizační řízení na základě účelového funkcionálu pro nelineární podsystém z příkladu 2.3. Tzn. je třeba navrhnout taková řízení $u_1 = q_1$ a $u_2 = q_2$, která v koncentračním směšovači

zajistí převedení počáteční výšky hladiny roztoku $x_{10} = h_0 > 0$ na požadovanou výšku hladiny $x_1^w = h^w > 0$ a počáteční koncentraci roztoku $c_1 < x_{20} = c_0 < c_2$ na požadovanou koncentraci $c_1 < x_2^w = c^w < c_2$ a udržování výšky hladiny a koncentrace na těchto hodnotách při měřitelném náhodném odběru $v = q$.

Řešení:

Protože nelineární podsystém (2.11) je pro $x_1 > 0$ řiditelný [viz příklad 2.5, vztah (2.25)] a $n = m = 2$, proto platí

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_z = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x}). \tag{2.67}$$

V souladu se vztahy (2.11) a (2.61) pro $\dot{\boldsymbol{x}}^w = \mathbf{0}$ můžeme psát

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{G}_z^{-1}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}(v)\right], \qquad \boldsymbol{T} = \operatorname{diag}\left[T_1, T_2\right], \tag{2.68a}$$

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{S(c_2 - x_2)}{c_2 - c_1} & -\dfrac{Sx_1}{c_2 - c_1} \\ -\dfrac{S(c_1 - x_2)}{c_2 - c_1} & \dfrac{Sx_1}{c_2 - c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_1} e_1 + \dfrac{1}{S} v \\ \dfrac{1}{T_2} e_2 \end{bmatrix}. \tag{2.68b}$$

Zapíšeme-li řízení (2.68) složkově, dostaneme

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= \frac{S(c_2 - x_2)}{c_2 - c_1}\left(\frac{1}{T_1} e_1 + \frac{1}{S} v\right) - \frac{Sx_1}{c_2 - c_1}\frac{1}{T_2} e_2, \\ u_2^* &= -\frac{S(c_1 - x_2)}{c_2 - c_1}\left(\frac{1}{T_1} e_1 + \frac{1}{S} v\right) + \frac{Sx_1}{c_2 - c_1}\frac{1}{T_2} e_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

Optimální uzavřený systém řízení bude popsán diferenciálními rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} T_1\dot{x}_1 + x_1 &= x_1^w, \qquad x_{10} = h_0, \\ T_2\dot{x}_2 + x_2 &= x_2^w, \qquad x_{20} = c_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.70}$$

Časové konstanty T_1 a T_2 je třeba volit s ohledem na objem koncentračního směšovače a omezení řízení (akčních veličin).

Příklad 2.9

Pomocí metody agregace je třeba navrhnout programové řízení na základě účelového funkcionálu průmyslového robotu z příkladu 2.4 pro mezní aperiodické pohyby všech kinematických dvojic.

Řešení:

Matematický model (2.16) průmyslového robotu je standardní a řiditelný (viz příklady 2.4 a 2.5). Protože $r_j = 2j$, všechny dílčí podsystémy řízení budou 2. řádu, a proto požadavek mezního aperiodického pohybu kinematických dvojic znamená, že jejich charakteristické mnohočleny budou mít tvar [viz (2.58) a (2.59)]

$$N_j^w(s) = \left(\frac{1}{T_j} + s\right)\left(\frac{1}{T_j} + s\right) = \frac{1}{T_j^2} + \frac{2}{T_j}s + s^2 \ . \tag{2.71}$$

Lze tedy psát ($n = 2m$)

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\left[T_1, T_2, \ldots, T_m\right], \quad \dim \boldsymbol{T} = (m,m), \tag{2.72a}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \dim \boldsymbol{D} = (m,n). \tag{2.72b}$$

Optimální programové řízení v souladu se vztahy (2.61), (2.16), (2.26) a (2.72) má tvar

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1)\left\{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{D}\left[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right]\right\} \ . \tag{2.73}$$

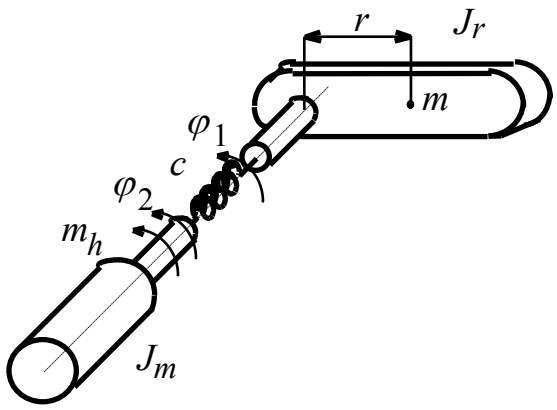
Optimální uzavřený systém řízení popisuje soustava m dílčích diferenciálních rovnic 2. řádu

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_{2j-1} &= e_{2j}, & e_{2j-1}(0) &= e_{2j-1,0}, \\ \dot{e}_{2j} &= -\frac{1}{T_j^2}e_{2j-1} - \frac{2}{T_j}e_{2j}, & e_{2j}(0) &= e_{2j,0}. \end{aligned}\right\} \tag{2.74}$$

Příklad 2.10

Matematický model ramena manipulátoru s pružným spojením v souladu s obr. 2.2 je dán vztahy (Zítek & Víteček 1999)

$$\left.\begin{aligned} J_r\ddot{\varphi}_1(t) + mgr\cos\varphi_1(t) + c\left[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right] &= 0, \\ J_m\ddot{\varphi}_2(t) - c\left[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right] &= m_h(t), \end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$



Obr. 2.2. Rameno manipulátoru s pružným spojením

kde φ_1 je úhel natočení ramena [rad], φ_2 - úhel natočení hřídele motoru [rad], J_r - hmotný moment setrvačnosti ramena [kg.m^2], J_m - celkový hmotný moment setrvačnosti motoru [kg.m^2], m - soustředěná hmotnost ramena [kg], r - poloha soustředěné hmotnosti ramena [m], c - torzní tuhost spojení [N.m.rad^{-1}], m_h - hnací moment [N.m], g - tíhové zrychlení [m.s^{-2}].

Pro rameno manipulátoru s pružným spojením je třeba metodou agregace navrhnout programové řízení na základě účelového funkcionálu.

Řešení:

Použijeme-li označení

$$\left.\begin{aligned} &q_1 = \varphi_1, && q_3 = \varphi_2, && u = m_h, \\ &q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1, && q_4 = \dot{q}_3 = \dot{\varphi}_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

dostaneme stavový model ramena manipulátoru s pružným spojením

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, & q_1(0) &= q_{10} = \varphi_{10}, \\ \dot{q}_2 &= -a_1 \cos q_1 - a_2(q_1 - q_3), & q_2(0) &= q_{20} = \dot{\varphi}_{10}, \\ \dot{q}_3 &= q_4, & q_3(0) &= q_{30} = \varphi_{20}, \\ \dot{q}_4 &= a_3(q_1 - q_3) + a_4 u, & q_4(0) &= q_{40} = \dot{\varphi}_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{2.77a}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{mgr}{J_r}, \quad a_2 = \frac{c}{J_r}, \\ a_3 &= \frac{c}{J_m}, \quad a_4 = \frac{1}{J_m}, \end{aligned}\right\} \tag{2.77b}$$

ze kterého vyplývá, že nemá standardní tvar.

Druhou dílčí rovnici v (2.77a) dvakrát derivujeme podle času, zvolíme nové stavové proměnné

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q_1, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{q}_1 = q_2, \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \dot{q}_2, \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \ddot{q}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.78}$$

a po zastoupení všech původních proměnných q_i novými proměnnými dostaneme po úpravě matematický model ramena manipulátoru s pružným spojením ve standardním tvaru ($n = 4$, $m = 1$, $n_1 = r_1 = n = 4$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= a_1\left(x_2^2 - a_3\right)\cos x_1 + a_1 x_3 \sin x_1 - \left(a_2 + a_3\right)x_2 + a_2 a_4 u_4 \end{aligned}\right\} \tag{2.79a}$$

při počátečních podmínkách

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} = q_{10}, \qquad x_2(0) = x_{20} = q_{20}, \\ x_3(0) &= x_{30} = -a_1 \cos q_{10} - a_2(q_{10} - q_{30}), \\ x_4(0) &= x_{40} = a_1 q_{20} \sin q_{10} - a_2(q_{20} - q_{40}). \end{aligned}\right\} \tag{2.79b}$$

Protože $\boldsymbol{g}_z = g_4 = a_2 a_4 \neq 0$, nelineární podsystém (2.79) je globálně řiditelný. Vyjádříme ho vektorově

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}u, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.80a}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \qquad \boldsymbol{g} = [0,0,0,g_4]^T, \\ \boldsymbol{f} &= [x_2, x_3, x_4, f_4]^T, \\ f_4 &= a_1\left(x_2^2 - a_3\right)\cos x_1 + a_1 x_3 \sin x_1 - \left(a_2 + a_3\right)x_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.80b}$$

Protože $m = 1$, matice $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{D}$ mají jednoduché tvary

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= T_1, \\ \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{d}^T = [d_1, d_2, d_3, 1] \end{aligned}\right\} \tag{2.81}$$

Hodnoty prvků d_j můžeme určit na základě požadovaných vlastností uzavřeného systému řízení, jehož charakteristický mnohočlen má v souladu s (2.59) tvar

$$N^w(s) = \left(d_1 + d_2 s + d_3 s^2 + s^3\right)\left(\frac{1}{T_1} + s\right). \tag{2.82}$$

Optimální zpětnovazební řízení dostaneme na základě vztahu (2.61)

$$u^* = \frac{1}{g_4}\left[\frac{1}{T_1}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{e} + \boldsymbol{d}^T\left(\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}\right)\right] \tag{2.83a}$$

a po rozepsání bude mít tvar

$$u^* = \frac{1}{a_2 a_4}\left[\dot{x}_4^w + \frac{d_1}{T_1}e_1 + \left(\frac{d_2}{T_1} + d_1\right)e_2 + \left(\frac{d_3}{T_1} + d_2\right)e_3 + \left(\frac{1}{T_1} + d_3\right)e_4 - f_4\right]. \tag{2.83b}$$

Pokud bude k dispozici pouze druhá derivace žádané trajektorie, tj. $\{x_1^w(t)\}$, $\{\dot{x}_1^w(t)\}$ a $\{\ddot{x}_1^w(t)\}$, pak řízení bude dáno vztahem

$$u^* = \frac{1}{a_2 a_4}\left[\frac{d_1}{T_1}e_1 + \left(\frac{d_2}{T_1} + d_1\right)e_2 + \left(\frac{d_3}{T_1} + d_2\right)e_3 - \left(\frac{1}{T_1} + d_3\right)x_4 - f_4\right] \tag{2.84}$$

a odpovídající uzavřený systém řízení bude popsán soustavou diferenciálních rovnic

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{e}_1 = e_2\,, && e_1(0) = e_{10}\,,\\
&\dot{e}_2 = e_3\,, && e_2(0) = e_{20}\,,\\
&\dot{x}_3 = x_4\,, && x_3(0) = x_{30}\,,\\
&\dot{x}_4 = \frac{d_1}{T_1}e_1 + \left(\frac{d_2}{T_1} + d_1\right)e_2 + \left(\frac{d_3}{T_1} + d_2\right)e_3 - \left(\frac{1}{T_1} + d_3\right)x_4\,, && x_4(0) = x_{40}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.85}$$

V této podkapitole je ukázáno, že vhodnou agregací stavových proměnných standardního nelineárního podsystému lze jejich počet snížit na počet řídicích proměnných, který většinou bývá podstatně nižší. Dojde tak ke zjednodušení návrhu programového řízení. Při návrhu řízení na základě účelového funkcionálu dochází ke zpětnovazební linearizaci, a proto uzavřený systém řízení je lineární. Umožňuje to jednoduše zajistit požadované vlastnosti uzavřeného systému řízení pomocí vhodné volby agregační matice ***D*** a diagonální matice časových konstant ***T*** bez nutnosti řešení optimalizační úlohy, tj. bez nutnosti minimalizace výchozího účelového funkcionálu. Uvedený přístup je velmi jednoduchý, inženýrský, a v případě standardních nelineárních podsystémů (tj. bez nutné transformace na standardní tvary) může být použit přímo bez hlubokých teoretických znalostí jak nelineárního, tak i optimálního řízení.

2.3 Návrh robustního řízení

V této podkapitole je ukázáno využití metody agregace stavových proměnných při návrhu robustního řízení (Zítek & Víteček 1999).

2.3.1 Řízení s vysokým zesílením

Algoritmy řízení uvedené v předchozí podkapitole 2.2 vyžadují znalost přesného matematického modelu řízeného nelineárního podsystému i na něj působících poruch. To způsobuje, že v reálných podmínkách, kdy vždy dochází ke změnám vlastností nelineárního podsystému a kdy poruchy nejsou vždy plně měřitelné, tyto algoritmy nemusí zaručovat dostatečnou kvalitu řízení a dokonce mohou způsobovat nestabilitu uzavřeného systému řízení. Tento z praktického hlediska velmi důležitý problém lze řešit např. průběžným výpočtem zpětnovazebního řízení.

Vyjděme ze vztahů (2.53) a (2.54). První z nich zapišme ve tvaru

$$\boldsymbol{m}^{w}\left(\boldsymbol{u}^{*}\right)=\boldsymbol{0}, \tag{2.86a}$$

kde

$$\boldsymbol{m}^{w}\left(\boldsymbol{u}^{*}\right)=\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}}\left(\boldsymbol{u}^{*}\right)+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}, \tag{2.86b}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}\left(\boldsymbol{u}^{*}\right)=\dot{\boldsymbol{x}}^{w}-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t\right)-\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t\right)\boldsymbol{u}^{*}. \tag{2.86c}$$

V předchozí podkapitole 2.2 rovnice (2.86a) byla řešena analyticky. Nyní ji vyřešíme iterační metodou pevného bodu (Chua & Lin 1975; Víteček 1991), tj.

$$\boldsymbol{u}_{k+1}=\boldsymbol{u}_{k}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{m}^{w}\left(\boldsymbol{u}_{k}\right);\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{2.87}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je vhodně zvolená regulární čtvercová matice řádu m, $\boldsymbol{u}_0$ - počáteční odhad řízení.

Za předpokladu, že matice $\boldsymbol{K}$ bude vhodně zvolena, vektory $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}^{w}$, $\boldsymbol{f}$ a matice $\boldsymbol{G}$ se během iteračního výpočtu budou měnit dostatečně pomalu, tj.

$$\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}^{w}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{G}\approx \text{konst}, \tag{2.88}$$

řešení (2.87) bude konvergovat k pevnému bodu $\boldsymbol{u}^{*}$, tj.

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_{k}=\boldsymbol{u}^{*}. \tag{2.89}$$

Zvolíme-li např.

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{J}^{-1}, \tag{2.90}$$

kde

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}_{k}\right)=\left.\frac{\partial \boldsymbol{m}^{w}\left(\boldsymbol{u}\right)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{k}} \tag{2.91}$$

je Jacobiova matice funkce $\boldsymbol{m}^w$, obdržíme známou Newtonovu-Raphsonovu iterační metodu řešení nelineárních rovnic (Chua & Lin 1975). Na základě vztahů (2.86b), (2.86c) a (2.90) lze psát

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}_k) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{G}_z = \boldsymbol{J}\,, \tag{2.92}$$

a proto po dosazení (2.92) při uvažování (2.90) do (2.87) dostaneme

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}^*\,, \tag{2.93}$$

tj. získáme optimální zpětnovazební řízení (2.61) v jednom iteračním kroku. Je to dáno lineární závislostí matematického modelu standardního nelineárního podsystému na řízení $\boldsymbol{u}$.

Je zřejmé, že pokud matice $\boldsymbol{K}$ nebude přesnou inverzí Jacobiovy matice (2.91), pak iterační proces může být nekonečný a dokonce může divergovat.

Určování zpětnovazebního řízení na základě rekurentní diferenční rovnice (2.87) není nejvhodnější, a proto tuto diferenční rovnici zastoupíme diferenciální rovnicí

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^w[\boldsymbol{u}(t)], \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0\,, \tag{2.94}$$

která má stejné ustálené řešení jako původní diferenční rovnice (2.87), tj.

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*\,, \tag{2.95}$$

kde

$$\boldsymbol{\Theta} = -\lambda\boldsymbol{K}, \qquad \lambda \to \infty\,. \tag{2.96}$$

Vyšetříme nyní stabilitu ustáleného řešení (2.95) na základě linearizované diferenciální rovnice (2.94) za předpokladu, že platí (2.88) (Vidyasagar 1993; Zítek 1990; Razím & Štecha 1997). Linearizaci provedeme v okolí ustáleného řešení $\boldsymbol{u}^*$, tj.

$$\frac{d\left[\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^*\right]}{dt} = \boldsymbol{J}_m\left(\boldsymbol{u}^*\right)\left[\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^*\right], \tag{2.97}$$

kde Jacobiova matice $\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{u}^*)$ je dána vztahem [viz (2.92)]

$$\boldsymbol{J}_m\left(\boldsymbol{u}^*\right)=\left.\frac{\partial\left[\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^w(\boldsymbol{u})\right]}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}^*}=-\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{G}_z=\boldsymbol{J}_m. \tag{2.98}$$

Protože se předpokládá splnění podmínek (2.88), asymptotická stabilita ustáleného řešení $\boldsymbol{u}^*$, a tedy i řešení původní diferenciální rovnice (2.94) bude zajištěna, budou-li kořeny charakteristického mnohočlenu linearizované diferenciální rovnice (2.97)

$$\det\left(s\mathbf{I}-\boldsymbol{J}_m\right)=\det\left(s\mathbf{I}+\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{G}_z\right) \tag{2.99}$$

mít záporné reálné části.

Zvolíme-li v (2.96) matici $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{G}_z^{-1}$ nebo $\boldsymbol{G}_z^T$, pak Jacobiova matice $\boldsymbol{J}_m$ bude symetrická [viz (2.98)], a proto nutnou a postačující podmínkou stability ustáleného řešení $\boldsymbol{u}^*$ v tomto případě je kladná definitnost matice $\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{G}_z$ (pro $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{G}_z^{-1}$ vždy splněno).

Je-li matice $\boldsymbol{G}_z$ diagonální

$$\boldsymbol{G}_z=\operatorname{diag}\left[g_1,g_2,\ldots,g_m\right], \tag{2.100}$$

pak je vhodné, aby matice $\boldsymbol{\Theta}$ byla rovněž diagonální, tj.

$$\boldsymbol{\Theta}=\operatorname{diag}\left[\Theta_1,\Theta_2,\ldots,\Theta_m\right]. \tag{2.101}$$

V tomto případě nutná a postačující podmínka stability je dána jednoduchými vztahy

$$\Theta_j g_j>0, \tag{2.102}$$

protože Jacobiova matice (2.98) je diagonální a kořeny charakteristického mnohočlenu (2.99) jsou

$$s_j=-\Theta_j g_j. \tag{2.103}$$

V obecném případě je třeba při ověřování stability řešení diferenciální rovnice (2.94) vycházet z charakteristického mnohočlenu (2.99) linearizované diferenciální rovnice (2.97).

Integrací diferenciální rovnice (2.94) dostaneme

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_0^t\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^w d\tau+\boldsymbol{u}_0, \tag{2.104}$$

resp. za předpokladu

$$\boldsymbol{\Theta}\approx\text{konst}, \tag{2.105}$$

tj. když se matice $\boldsymbol{\Theta}$ bude měnit během výpočtu dostatečně pomalu,

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\Theta} \int_0^t \boldsymbol{m}^w d\tau + \boldsymbol{u}_0 \,. \tag{2.106}$$

Doposud jsme předpokládali splnění podmínek (2.88) a (2.105). Ve skutečnosti tyto podmínky nemohou být striktně nikdy splněny. Mohou však být zajištěny přibližně za předpokladu, že výpočet optimálního zpětnovazebního řízení $\boldsymbol{u}^*$ bude podstatně rychlejší, než jsou časové změny výrazů (2.88) a (2.105). Znamená to, že výpočet musí proběhnout během takového časového intervalu, během kterého lze předpokládat přibližné splnění podmínek (2.88) a (2.105) a samozřejmě musí platit (2.95). Toho lze dosáhnout vhodnou volbou matice $\boldsymbol{\Theta}$, resp. matice $\boldsymbol{K}$ a volbou dostatečně vysoké hodnoty zesílení λ. I když výpočet optimálního řízení na základě vztahu (2.106) [případně (2.104) nebo diferenciální rovnice (2.94)] teoreticky bude optimální pro $t \to \infty$ [viz vztah (2.95)], budeme dále předpokládat, že jeho výpočet je dostatečně rychlý, a proto ho lze považovat za suboptimální zpětnovazební řízení a budeme ho označovat křížkem $\times$, tj.

$$\boldsymbol{u}^{\times} = \boldsymbol{\Theta} \int_0^t \boldsymbol{m}^w d\tau + \boldsymbol{u}_0 \,. \tag{2.107}$$

Ukazuje se, že velmi často matice $\boldsymbol{\Theta}$ může být konstantní a diagonální (Víteček 1991; Zítek & Víteček 1999), a proto se dále budeme zabývat především tímto případem. Důležité je, že v algoritmu řízení (2.107) jako integrand vystupuje požadovaný agregovaný (optimální) model uzavřeného systému řízení [tj. jeho levá strana, viz (2.86a) a (2.86b)] a dále, že v něm přímo nevystupuje model řízeného nelineárního podsystému (2.39), resp. (2.1). Proto řízení (2.107) lze považovat za robustní. Počáteční řízení $\boldsymbol{u}_0$ ve vztazích (2.94), (2.104), (2.106) a (2.107) můžeme určit odhadem z rovnovážného stavu, např. z agregovaného matematického modelu nelineárního podsystému (2.39) pro $t = 0$ a $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}_0, 0) + \boldsymbol{G}_z(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}_0, 0)\boldsymbol{u}_0 \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u}_0 = -\boldsymbol{G}_z^{-1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}_0, 0)\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}_0, 0) \tag{2.108}$$

a přesně ze vztahu (2.56), resp. (2.61). Pokud matematický model nelineárního podsystému není známý (částečná znalost modelu je nutná z důvodu volby řádu požadovaného modelu uzavřeného systému řízení a vhodné matice $\boldsymbol{\Theta}$ zajišťující stabilitu a rychlou konvergenci), odhad počátečního řízení $\boldsymbol{u}_0$ může být velmi hrubý, protože algoritmus řízení (2.107) má integrační charakter. Počáteční řízení $\boldsymbol{u}_0$ nemusíme vůbec uvažovat (tj. můžeme ho považovat za nulové), ale v tomto případě při jeho „startu“ musíme počítat s možnými velkými

a prudkými změnami řízení i dalších veličin, co z praktického hlediska může být nepřípustné.

Po dosazení (2.86b) do (2.107) a úpravě obdržíme robustní algoritmus řízení

$$\boldsymbol{u}^{\times} = \boldsymbol{\Theta}\left[\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}_0\right) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\int_0^t \boldsymbol{e}\, d\tau \right] + \boldsymbol{u}_0, \tag{2.109}$$

ze kterého je zřejmé, že se jedná o lineární řízení s vysokým zesílením.

I přes řadu výhodných vlastností, řízení (2.109) má jednu zásadní vadu, která spočívá v nutnosti příliš vysokých hodnot prvků $\left|\Theta_j\right|$ diagonální matice $\boldsymbol{\Theta}$, co může způsobit vystupování nepřípustně velikých hodnot řídicích proměnných $\left|u_j^{\times}\right|$, případně i nestability celého systému řízení. Nestabilita uzavřeného systému řízení může vystoupit především v těch případech, kdy rozdíly řádů skutečných dílčích podsystémů a jejich předpokládaných modelů jsou ≥ 1 (Zítek & Víteček 1999).

Robustní řízení s vysokým zesílením budeme také zapisovat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}^{\times} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}_0, \tag{2.110a}$$

$$\boldsymbol{m} = \int_0^t \boldsymbol{m}^{w}\, d\tau, \tag{2.110b}$$

který bude vhodný při následujících úpravách.

Příklad 2.11

Pro nelineární podsystém (2.3) z příkladu 2.1 (viz též příklad 2.7) je třeba navrhnout metodou agregace na základě účelového funkcionálu robustní programové řízení s vysokým zesílením.

Řešení:

Pro matice (2.63) z příkladu 2.7 na základě vztahů (2.110) pro konstantní diagonální matici $\boldsymbol{\Theta}$ po jednoduché úpravě dostaneme

$$\left.\begin{aligned} u_1^{\times} &= \Theta_1 m_1 + u_{10}, \\ u_2^{\times} &= \Theta_2 m_2 + u_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{2.111a}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{2}{T_1}(e_1 - e_{10}) + e_2 - e_{20} + \frac{1}{T_1^2}\int_0^t e_1 d\tau, \\ m_2 &= e_3 - e_{30} + \frac{1}{T_2}\int_0^t e_3 d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2.111b}$$

Na základě podmínek z příkladu 2.7 můžeme určit počáteční řízení $\boldsymbol{u}_0$ např. z rovnovážného stavu (2.108).

Pro $t = 0$, $x_{10}, x_{30} \neq 0$ a $x_{20} = 0$ ze vztahu (2.108) pro (2.3) dostaneme

$$\left.\begin{aligned} u_{10} &= -v_0 - \left(1 + x_{10}^2\right) u_{20}, \\ u_{20} &= -x_{30}^3. \end{aligned}\right\} \tag{2.112}$$

2.3.2 Řízení v klouzavém režimu

Řízení s vysokým zesílením je velmi robustní, ale současně má i některé nepříjemné vady. Kromě negativního vlivu na stabilitu uzavřeného systému řízení nesouladu mezi řády dílčích řízených podsystémů a jejich předpokládaných modelů nejsou uvažována omezení na hodnoty řídicích proměnných $u_j^{\times}$, co z praktického hlediska je nereálné. Tyto závažné nedostatky lze často úspěšně řešit uvažováním nekonečně vysokých hodnot

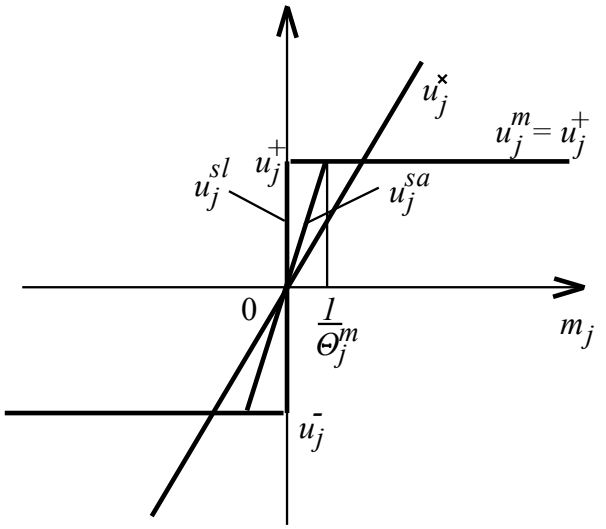
$$\left|\Theta_j\right| \to \infty, \tag{2.113}$$

horním u_j^+ a dolním u_j^- omezením hodnot *j*-té řídicí proměnné vyhovujícím podmínkám

$$u_j^- < u_j^* < u_j^+ \ , \tag{2.114}$$

kde u_j^* je odpovídající složka nerobustního řízení určeného na základě podkapitoly 2.2. Obdržíme tak řízení (bez počátečního řízení $\boldsymbol{u}_0$)

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \left[u_1^{sl}, u_2^{sl}, \ldots, u_m^{sl}\right]^T, \tag{2.115a}$$



Obr. 2.3. Přechod od řízení s vysokým zesílením $u_j^{\times}$ ke klouzavému řízení u_j^{sl} a k jeho spojité náhradě u_j^{sa}

jehož složky jsou dány vztahy (obr. 2.3)

$$u_j^{sl} = \begin{cases} u_j^+ & \text{pro} \quad m_j > 0 \\ u_j^- & \text{pro} \quad m_j < 0 \end{cases}. \tag{2.115b}$$

Řízení (2.115) je nespojité a pracuje v tzv. klouzavém režimu (módu), proto se také nazývá klouzavé řízení (Utkin 1992; Spong & Vidyasagar 1989; Slotine & Li 1991). V případě potřeby je třeba ve vztahu (2.115b) změnit nerovnosti na opačné.

Dále pro jednoduchost budeme předpokládat liché charakteristiky, tj.

$$\left|u_j^m\right| = \max\left(\left|u_j^+\right|, \left|u_j^-\right|\right), \tag{2.116}$$

pak klouzavé řízení můžeme zapsat ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{U}^m \mathbf{sign}(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{u}_0, \\ &\boldsymbol{U}^m = \operatorname{diag}\left[u_1^m, u_2^m, \ldots, u_m^m\right], \\ &\mathbf{sign}(\boldsymbol{m}) = \left[\operatorname{sign}(m_1), \operatorname{sign}(m_2), \ldots, \operatorname{sign}(m_m)\right]^T, \\ &\operatorname{sign}(m_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad m_j > 0 \\ -1 & \text{pro} \quad m_j < 0 \end{cases}. \end{aligned}\right\} \tag{2.117}$$

Ve vztahu (2.117) na klouzavé řízení je uvažováno počáteční řízení $\boldsymbol{u}_0$, které má však význam pouze pro udržení řízeného podsystému v rovnovážném stavu pro $t \le 0$.

Znaménka diagonálních prvků u_j^m matice $\boldsymbol{U}^m$ ve vztahu na klouzavé řízení (2.117) jsou stejná jako znaménka diagonálních prvků Θ_j matice $\boldsymbol{\Theta}$ ve vztahu na řízení s vysokým zesílením (2.110). Tyto prvky mohou být rovněž funkcí proměnných $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^w$, $\boldsymbol{v}$ a t při splnění podmínek (2.114) a (2.116). Je zřejmé, že v tomto případě se již ztrácí jednoduchost klouzavého řízení.

Podmínky pro existenci klouzavého režimu, tj. pro stabilní klouzavé řízení, mohou být zapsány v různých ekvivalentních tvarech (Spong & Vidyasagar 1989; Slotine & Li 1991; Lin 1994)

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(m_j^2\right)}{dt} \le -\eta_j \left|m_j\right| \ , \tag{2.118a}$$

$$m_j^w m_j \le -\eta_j \left|m_j\right| \ , \tag{2.118b}$$

$$m_j^w \operatorname{sign}\left(m_j\right) \le -\eta_j \ , \tag{2.118c}$$

kde η_j jsou kladná čísla.

Vlastní klouzavý režim je pak vyjádřen vztahem

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{0}, \tag{2.119}$$

resp. s ohledem na (2.110b)

$$\boldsymbol{m}^w = \boldsymbol{0}. \tag{2.120}$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že při stabilním klouzavém řízení je skutečně realizován požadovaný matematický model uzavřeného systému řízení v agregovaném tvaru [viz např. (2.86b)].

Klouzavé řízení (2.117) je nespojité, vysoce robustní a jednoduché, ale má velmi nepříjemnou vlastnost spočívající v „přílišné aktivitě“ řízení projevující se neustálým přepínáním mezi mezními hodnotami $\pm u_j^m$. Tuto vadu lze odstranit spojitou náhradou klouzavého řízení (viz obr. 2.3)

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}^{sa} = \boldsymbol{U}^m \operatorname{sat}\left(\boldsymbol{\Theta}^m \boldsymbol{m}\right) + \boldsymbol{u}_0, \\
&\boldsymbol{\Theta}^m = \operatorname{diag}\left[\Theta_1^m, \Theta_2^m, \ldots, \Theta_m^m\right], \\
&\operatorname{sat}\left(\boldsymbol{\Theta}^m \boldsymbol{m}\right) = \left[\operatorname{sat}\left(\Theta_1^m m_1\right), \operatorname{sat}\left(\Theta_2^m m_2\right), \ldots, \operatorname{sat}\left(\Theta_m^m m_m\right)\right]^T, \\
&\operatorname{sat}\left(\Theta_j^m m_j\right) = \begin{cases} \Theta_j^m m_j & \text{pro} \quad \left|\Theta_j^m m_j\right| \le 1 \\ \operatorname{sign}\left(\Theta_j^m m_j\right) & \text{pro} \quad \left|\Theta_j^m m_j\right| > 1 \end{cases},
\end{aligned}\right\} \tag{2.121}$$

kde sat je funkce nasycení, $\boldsymbol{\Theta}^m$ - kladná diagonální matice, jejíž prvky vyhovují podmínce

$$\Theta_j^m \geq \left|\Theta_j\right| . \tag{2.122}$$

Pokud matice nelineárního podsystému $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ je známá, je výhodné ji uvažovat ve vztazích na robustní řízení (2.117), resp. (2.121), tj.

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{G}_z^{-1}\boldsymbol{U}^m \mathbf{sign}(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{u}_0 , \tag{2.123}$$

resp.

$$\boldsymbol{u}^{sa} = \boldsymbol{G}_z^{-1}\boldsymbol{U}^m \mathbf{sat}\left(\boldsymbol{U}^m \boldsymbol{m}\right) + \boldsymbol{u}_0 , \tag{2.124}$$

protože v tomto případě prvky u_j^m diagonální matice $\boldsymbol{U}^m$ mohou být lépe přizpůsobeny konkrétním vlastnostem nelineárního podsystému. Totéž se samozřejmě týká i robustního řízení s vysokým zesílením v případě diagonální matice $\boldsymbol{\Theta}$.

Příklad 2.12

Pro nelineární podsystém (2.3) z příkladu 2.1 (viz též příklady 2.7 a 2.11) je třeba navrhnout metodou agregace na základě účelového funkcionálu klouzavé řízení.

Řešení:

V souladu s (2.117) můžeme přímo psát

$$\left.\begin{aligned} u_1^{sl} &= u_1^m \,\mathrm{sign}(m_1) + u_{10}, \\ u_2^{sl} &= u_2^m \,\mathrm{sign}(m_2) + u_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{2.125}$$

kde m_1 a m_2 jsou dány vztahy (2.111b), u_{10} a u_{20} vztahy (2.112).

Hodnoty u_1^m, u_2^m určíme na základě omezení řízení.

Pokud použijeme spojitou náhradu klouzavého řízení na základě vztahu (2.121), dostaneme

$$\left.\begin{aligned} u_1^{sa} &= u_1^m \,\mathrm{sat}\left(\Theta_1^m m_1\right) + u_{10}, \\ u_2^{sa} &= u_2^m \,\mathrm{sat}\left(\Theta_2^m m_2\right) + u_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{2.126}$$

kde hodnoty Θ_1^m a Θ_2^m určíme nejlépe na základě číslicové simulace (Zítek & Víteček 1999).

2.3.3 Kombinované řízení

Doposud bylo předpokládáno samostatné použití robustního řízení. Někdy může být výhodné použití robustního řízení v kombinaci s odpovídajícím nerobustním řízením. Např. na začátku procesu řízení vlastnosti nelineárního podsystému jsou známé, ale později může dojít k jejich změně způsobené měnícím se zatížením, opotřebením, stárnutím atd. Pak může být vhodné použití konvexní lineární kombinace

$$\boldsymbol{u}^c = \alpha \boldsymbol{u}^* + (1-\alpha)\boldsymbol{u}^r, \tag{2.127}$$

kde $\boldsymbol{u}^r$ je některé z robustních řízení [např. (2.110), (2.117), (2.121)] a α může být časovou funkcí

$$\alpha = \alpha(t) \in \langle 0,1 \rangle, \tag{2.128}$$

přičemž na začátku např. $\alpha(0) = 1$ a pro $t > 0$ monotónně klesá. V tomto případě bude rovněž zaručen „beznárazový start“ robustního algoritmu.

Častěji se můžeme setkat s případem, kdy jsou k dispozici pouze „nominální“ vlastnosti řízeného podsystému dané modelem (2.39), resp. (2.1), ale neznáme jeho skutečné vlastnosti. Pak je vhodné použití kombinovaného řízení ve tvaru

$$\boldsymbol{u}^c = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{G}_z^{-1}\boldsymbol{u}^r, \tag{2.129}$$

ve kterém nerobustní složka využije známé informace o vlastnostech daného podsystému a robustní složka (bez počátečního řízení $\boldsymbol{u}_0$) se „postará“ o neurčitosti v jeho chování a neměřitelné poruchy.

Vadou algoritmů nerobustního řízení je nutnost znalosti přesného matematického modelu řízeného nelineárního podsystému a plné měřitelnosti na něj působících poruch, co v technické praxi je spíše výjimkou. Tato vada se dá často odstranit průběžným výpočtem zpětnovazebního řízení. Získají se tak velmi robustní algoritmy s vysokým zesílením. Omezením hodnot řídicích proměnných a zvýšením zesílení se tyto algoritmy dají dále upravit na tvary vhodnější pro praktické použití. Nejlepších výsledků lze dosáhnout pomocí kombinovaného řízení, ve kterém nerobustní složka využívá informaci o vlastnostech nelineárního podsystému a působících poruchách a robustní složka zajišťuje dostatečnou kvalitu řízení i při neurčitostech ve vlastnostech nelineárního podsystému a neměřitelných poruchách.

3 DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Dynamické programování je velmi obecná metoda řešení nejrůznějších optimalizačních a rozhodovacích úloh (Bryson & Ho 1969; Górecki 1993; Hsu & Mayer 1967; Intriligator 1971; Kaczorek 1981; Kusyn, Víteček & Smutný 1988; Lewis & Syrmos 1995; Tou 1964; Víteček 1992). Vychází z ***Bellmanova principu optimality***, který představuje jednoduchou ***nutnou podmínku optimality***.

3.1 Bellmanův princip optimality

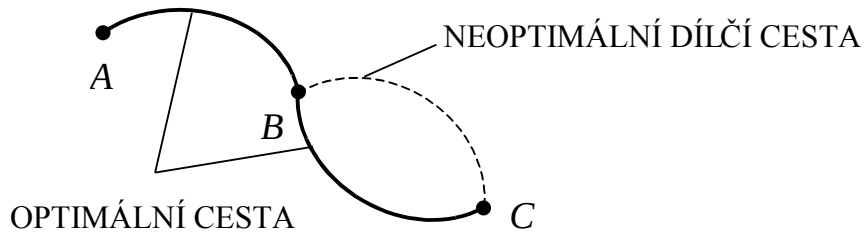
Bellmanův princip optimality (dále také jen princip optimality) bývá formulován v nejrůznějších tvarech. Vyjdeme z nejjednodušší formulace (obr. 3.1):

„***Je-li cesta z A do C optimální, pak každá dílčí cesta z B do C je rovněž optimální***."

Důkaz sporem je velmi jednoduchý. Kdyby existovala lepší dílčí cesta z B do C (např. na obr. 3.1 zaznačená čárkovaně), pak by nutně po ní vedla optimální cesta z A do C, ale to odporuje předpokladu.

Je zřejmé, že formulace principu optimality vyžaduje, aby optimální dílčí cesta z B do C nezávisela na dílčí cestě z A do B, ale pouze na B (tj. nezávisela na tom, jak bylo dosaženo B = „nezávislost na historii").

Značná obecnost Bellmanova principu optimality a velmi jednoduchý až triviální důkaz sporem způsobují, že celá řada autorů ho nepokládá za matematickou větu.



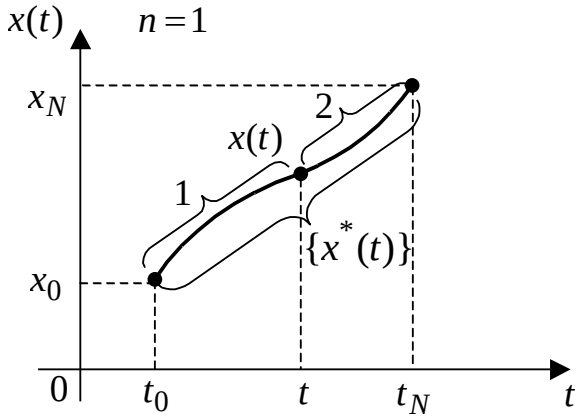
Obr. 3.1. Geometrická interpretace Bellmanova principu optimality

Pro řešení úloh optimálního řízení princip optimality zformulujeme ve vhodnějším tvaru (obr. 3.2):

„Optimální trajektorie má tu vlastnost, že bez ohledu na počáteční stav a předchozí řízení, další řízení musí zaručovat optimální trajektorii vzhledem ke stavu, který byl dosažen předchozím řízením."

Další častá formulace je:

„Optimální řízení nezávisí na „historii“ řízeného podsystému, ale je určeno pouze stavem v daném okamžiku.“



Obr. 3.2. Geometrická interpretace Bellmanova principu optimality v úlohách optimálního řízení

V souladu s principem optimality platí (obr. 3.2): Je-li celá trajektorie $\{x^*(t)\}$ optimální, pak dílčí trajektorie ② na intervalu $\langle t, t_N \rangle$ musí být optimální vzhledem k počátečnímu stavu $x(t)$, tj. druhá část optimální trajektorie ② musí být sama optimální trajektorií bez ohledu na první část optimální trajektorie ① , která končí ve stavu $x(t)$, jež je počátečním stavem pro druhou část optimální trajektorie ②.

Uvažujeme úlohu optimálního řízení v Bolzově tvaru:

$$\left.\begin{aligned}
&J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}(t)\}} \left\{ \int_{t_0}^{t_N} f_0[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]dt + F(\boldsymbol{x}_N, t_N) \right\}, \\
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t], \\
&\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné,} \\
&\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N, \qquad t_N \text{ i } \boldsymbol{x}_N \text{ obecně volné,} \\
&\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) \in X \subset R^n \\ \boldsymbol{u}(t) \in U \subset R^r \end{aligned}\right\} \text{ pro } t \in \langle t_0, t_N \rangle.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Předpokládejme, že úloha optimálního řízení (3.1) má řešení a definujme funkci

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \left[\int_{t}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \tau)\, d\tau + F(\boldsymbol{x}_N, t_N) \right]. \qquad (3.2)$$

Tato funkce se nazývá ***Bellmanova funkce*** (funkce optimálního chování) a je zřejmé, že závisí pouze na stavu $\boldsymbol{x}(t)$ a okamžiku t. Řízení $\{\boldsymbol{u}\}$ ve vztahu (3.2) je třeba uvažovat na intervalu $\langle t, t_N \rangle$ a musí vyhovovat podmínce $\boldsymbol{u}(t) \in U$.

Je-li $V(\boldsymbol{x}, t)$ Bellmanova funkce pro úlohu optimálního řízení při počátečním stavu $\boldsymbol{x}$ a počátečním okamžiku t, pak v souladu s principem optimality $V(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, t + \Delta t)$ je Bellmanova funkce při počátečním stavu $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ a počátečním okamžiku $t + \Delta t$.

Na základě aditivní vlastnosti integrálu

$$\int_t^{t_N} = \int_t^{t+\Delta t} + \int_{t+\Delta t}^{t_N} \tag{3.3}$$

lze pro malý časový přírůstek psát:

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \left[\int_t^{t+\Delta t} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \tau) d\tau + F(\boldsymbol{x}_N, t_N) \right],$$

$$V(\boldsymbol{x}, t) \approx \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \left[f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \Delta t + V(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, t + \Delta t) \right]. \tag{3.4}$$

Za předpokladu, že Bellmanova funkce je jednoznačná a spojitě diferencovatelná podle svých n+1 proměnných (tzn. je spojitá vzhledem ke změnám počátečních parametrů), lze ji rozložit v Taylorovu řadu

$$V(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = V(\boldsymbol{x}, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \Delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \ldots \tag{3.5}$$

Po dosazení (3.5) do (3.4) obdržíme vztah

$$V(\boldsymbol{x}, t) \approx \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \left[f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \Delta t + V(\boldsymbol{x}, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \Delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \ldots \right],$$

ze kterého po limitním přechodu $\Delta t \to dt$, $\Delta\boldsymbol{x} \to d\boldsymbol{x}$, při uvažování stavové rovnice a úpravě dostaneme ***Bellmanovu parciální diferenciální rovnici***

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \left[f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \right], \tag{3.6}$$

která musí vyhovovat okrajové podmínce

$$V(\boldsymbol{x}_N, t_N) = F(\boldsymbol{x}_N, t_N). \tag{3.7}$$

Parciální derivaci $\frac{\partial V}{\partial t}$ jsme mohli převést na levou stranu, protože nezávisí na řízení $\boldsymbol{u}(t)$.

Bellmanova parciální diferenciální rovnice (3.6) spolu s okrajovou podmínkou (3.7) představují ***nutné podmínky minima*** účelového funkcionálu úlohy optimálního řízení (3.1). Okrajovou podmínku (3.7) je třeba uvažovat v souladu s odpovídající kombinací koncových parametrů (1.75).

Pokud úloha optimálního řízení má řešení, pak vyřešením Bellmanovy parciální diferenciální rovnice při odpovídající okrajové podmínce získáme Bellmanovu funkci, jejíž hodnota pro počáteční stav $\boldsymbol{x}_0$ a počáteční okamžik t_0 je rovna minimální hodnotě účelového funkcionálu, tj.

$$J^* = J\{\boldsymbol{u}^*\} = V(\boldsymbol{x}_0, t_0)\ . \tag{3.8}$$

Optimální řízení pak určíme na základě Bellmanovy funkce ve tvaru zpětnovazebního řízení

$$\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{u}^*\left[\boldsymbol{x}^*(t), t\right]. \tag{3.9}$$

Vidíme, že dynamické programování řeší úlohu syntézy optimálního řízení (viz obr. 1.17).

Rozepíšeme-li skalární součin v (3.6), pak Bellmanova parciální diferenciální rovnice bude mít tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{\{\boldsymbol{u}\}}\left[f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \right]. \tag{3.10}$$

Bellmanova rovnice (3.6), resp. (3.10) je obecně velmi silně nelineární parciální diferenciální rovnice 1. řádu (silnou nelinearitu způsobuje především operátor min), jejíž analytické řešení je velmi obtížné a ve většině složitějších případů nemožné. K jejímu zjednodušení dochází, když pravá strana stavové rovnice $\boldsymbol{f}$, integrand f_0 a funkce koncových parametrů F nezávisí explicitně na čase t, koncový čas t_N je volný, resp. $t_N \to \infty$. V tomto případě jde o ***stacionární úlohu optimálního řízení*** a platí pro ni

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0\,. \tag{3.11}$$

Bellmanova parciální diferenciální rovnice má pak tvar

$$0 = \min_{\{\boldsymbol{u}\}}\left[f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \right]. \tag{3.12}$$

Její řešení většinou bývá snazší.

Příklad 3.1

Řízený podsystém

$$\dot{x}(t) = bu(t), \qquad b > 0 \tag{3.13}$$

je třeba převést z počátečního stavu $x(0) = x_0$ do koncového stavu $x(\infty) = x_N = 0$ tak, aby účelový funkcionál

$$J\{u(t)\} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[qx^2(t) + ru^2(t)\right]dt; \qquad q, r > 0 \tag{3.14}$$

měl nejmenší hodnotu (Víteček 1992).

Řešení:

Jde o stacionární úlohu optimálního řízení (řízený podsystém je stacionární, integrand nezávisí explicitně na čase a koncový čas je nekonečný), proto

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

a Bellmanova parciální diferenciální rovnice má tvar [viz (3.12)]

$$0 = \min_{\{u\}}\left[f_0(x,u) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u)\right],$$

kde

$$f_0(x,u) = \frac{1}{2}\left(qx^2 + ru^2\right),$$

$$f(x,u) = bu,$$

tj.

$$0 = \min_{\{u\}}\left[\frac{1}{2}\left(qx^2 + ru^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x} bu\right]. \tag{3.15}$$

Řízení u není omezeno [$u(t) \in R$ pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$], proto optimální řízení u^* lze určit snadno:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2}\left(qx^2 + ru^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x} bu\right] = ru + \frac{\partial V}{\partial x} b,$$

$$ru^* + \frac{\partial V}{\partial x} b = 0,$$

$$u^* = -\frac{b}{r}\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[\frac{1}{2}\left(qx^2 + ru^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x}bu\right]\Bigg|_{u=u^*} = r > 0 \Rightarrow \text{ostré globální minimum.}$$

Vypočtené optimální řízení (3.16) dosadíme do rovnice (3.15) a po úpravě dostaneme (dosazením optimálního řízení se odstraní operátor min před lomenou závorkou)

$$qx^{*2} - \frac{b^2}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \pm\frac{\sqrt{qr}}{b}x^*.$$

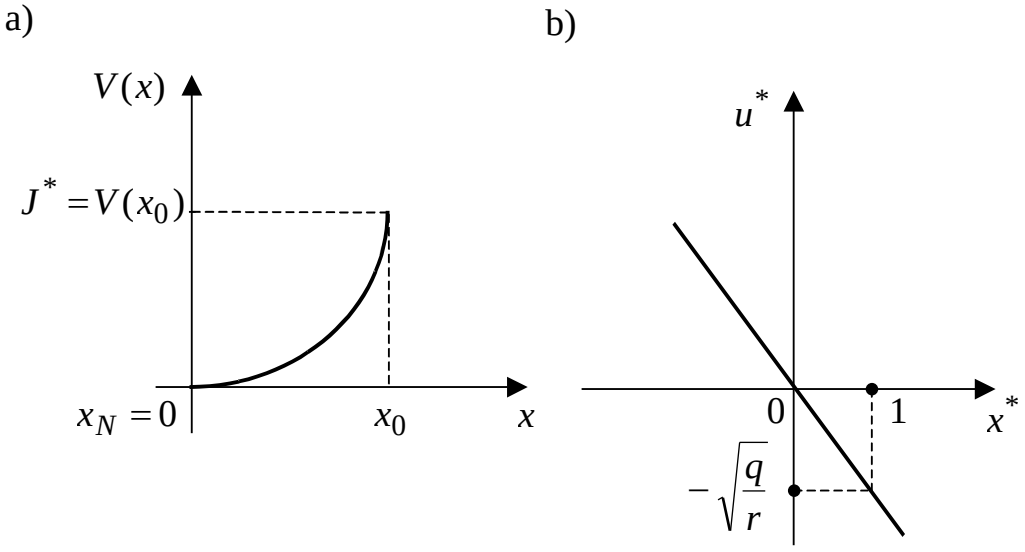
Protože $V = V(x) > 0$, parciální derivaci můžeme zastoupit obyčejnou derivací a musíme uvažovat znaménko plus, proto lze psát

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\sqrt{qr}}{b}x^*.$$

Integrací této diferenciální rovnice obdržíme [$F = 0 \Rightarrow V(x_N) = 0$]

$$\int_{V(x)}^{V(x_N)} dV = \frac{\sqrt{qr}}{b}\int_{x}^{x_N} x^* dx^*,$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{qr}}{b}x^2. \tag{3.17}$$



Obr. 3.3. Příklad 3.1 – průběh: Bellmanovy funkce – (a), závislosti řízení na stavu – (b)

Průběh Bellmanovy funkce (3.17) je na obr. 3.3a (pro určitost uvažujeme dále $x_0 > 0$). Optimální hodnotu účelového funkcionálu (3.14) získáme z Bellmanovy funkce pro počáteční stav, tj.

$$J^* = V(x_0) = \frac{x_0^2}{2b}\sqrt{qr}\,. \tag{3.18}$$

Ze vztahu (3.17) v souladu s (3.16) obdržíme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = -\sqrt{\frac{q}{r}}\; x^* \tag{3.19}$$

a po dosazení do rovnice (3.13) dostaneme diferenciální rovnici uzavřeného systému řízení

$$\dot{x}^*(t) + b\sqrt{\frac{q}{r}}\; x^* = 0, \tag{3.20}$$

jejíž řešení pro počáteční stav x_0 je

$$x^*(t) = x_0 e^{-b\sqrt{\frac{q}{r}}\,t}\,. \tag{3.21}$$

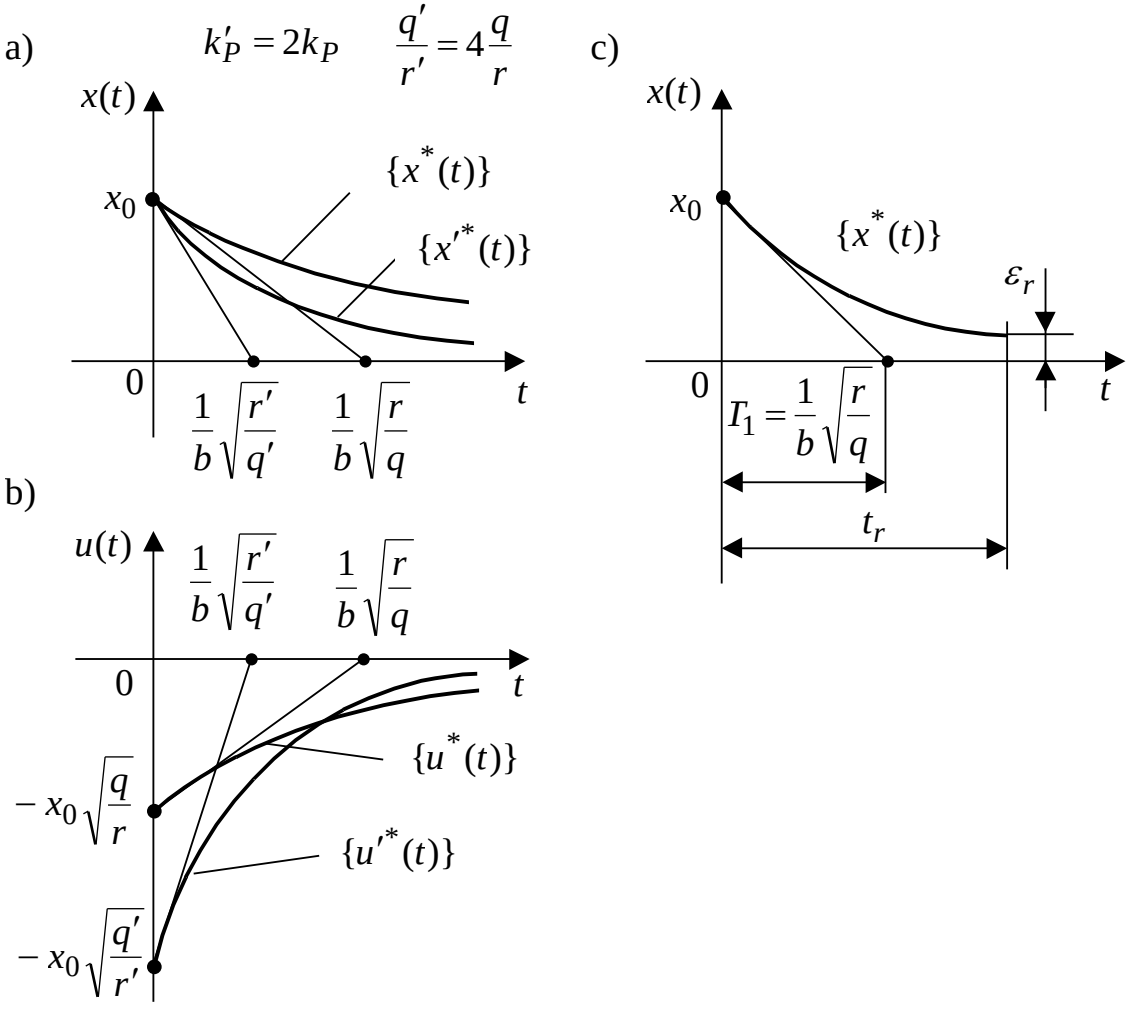
Optimální otevřené řízení získáme dosazením (3.21) do (3.19)

$$u^*(t) = -x_0\sqrt{\frac{q}{r}}\; e^{-b\sqrt{\frac{q}{r}}\,t}\,. \tag{3.22}$$

Ze vztahu (3.19) a také obr. 3.3b vyplývá, že řídicí podsystém má vlastnosti regulátoru typu P se zesílením

$$k_P^* = \sqrt{\frac{q}{r}}\,. \tag{3.23}$$

Optimální průběhy stavové proměnné a řízení pro různé hodnoty poměru $\frac{q}{r}$ jsou na obr. 3.4a, b. Vidíme, že tyto průběhy nezávisí na absolutních hodnotách váhových koeficientů *r* a *q*, ale pouze na jejich poměru $\frac{q}{r}$. Vhodnou volbou tohoto poměru, resp. zesílení (3.23) zajistíme odpovídající kompromis mezi požadavkem na minimalizaci stavu a minimalizaci řízení, a tak i požadovaný průběh $\{x^*(t)\}$.



Obr. 3.4. Příklad 3.1 - optimální průběh: stavové proměnné pro různé $\frac{q}{r}$ - (a), řízení pro různé $\frac{q}{r}$ - (b), stavové proměnné pro určení vhodného $\frac{q}{r}$ - (c)

Z obr. 3.4a, c vidíme, že i když požadovaný stav $x_N = 0$ bude dosažen teoreticky za nekonečně dlouhou dobu, pro praxi bude většinou vyhovovat reálný požadavek dosažení stavu $x_N = 0$ za určitou konečnou dobu t_r s předem zvolenou relativní přesností

$$\varepsilon_r = \frac{x(t_r)}{x_0}. \tag{3.24}$$

Na základě vztahů (3.24) a (3.21) lze psát

$$\varepsilon_r = e^{-b\sqrt{\frac{q}{r}}\ t_r},$$

$$\frac{q}{r} = \left(-\frac{\ln \varepsilon_r}{bt_r} \right)^2 . \tag{3.25}$$

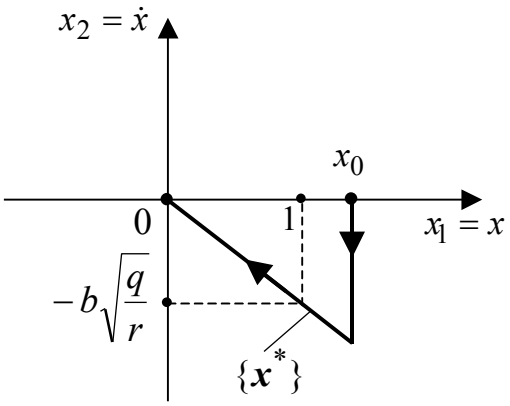
Můžeme rovněž zavést časovou konstantu (obr. 3.4c)

$$T_1 = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{r}{q}} . \tag{3.26}$$

Pro dvě nejčastěji užívané relativní přesnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r = 0{,}05\ (5\%) \ldots \frac{q}{r} \doteq \frac{8{,}97}{b^2 t_r^2} \ldots t_r \approx 3T_1 , \\ &\varepsilon_r = 0{,}02\ (2\%) \ldots \frac{q}{r} \doteq \frac{15{,}30}{b^2 t_r^2} \ldots t_r \approx 4T_1 . \end{aligned} \tag{3.27}$$

Optimální průběh stavové trajektorie $\{\boldsymbol{x}^*\}$ získáme snadno ze vztahu (3.20), viz obr. 3.5. Je zřejmé, že uzavřený systém řízení je globálně asymptoticky stabilní.



Obr. 3.5. Optimální průběh stavové trajektorie z příkladu 3.1

Při řešení této úlohy optimálního řízení můžeme postupovat i jiným způsobem – bez přímého výpočtu Bellmanovy funkce.

Ze vztahu (3.16) vypočteme

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{r}{b} u^*$$

a dosadíme do Bellmanovy parciální diferenciální rovnice (3.15), tj. eliminací výrazu $\frac{\partial V}{\partial x}$ obdržíme algebraickou rovnici

$$qx^{*2} - ru^{*2} = 0,$$

jejíž řešení je

$$u^* = \pm\sqrt{\frac{q}{r}}\; x^* .$$

Z důvodu stability uzavřeného systému řízení (zpětná vazba musí být záporná) musíme uvažovat znaménko minus a dostaneme tak stejný výsledek jako (3.19).

Rovněž optimální hodnotu účelového funkcionálu (3.14) lze určit na základě vztahů (3.21) a (3.22):

$$J^* = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(qx^{*2} + ru^{*2}\right)dt = qx_0^2 \int_0^\infty e^{-2b\sqrt{\frac{q}{r}}\,t}\,dt =$$

$$= -\frac{x_0^2}{2b}\sqrt{qr}\left[e^{-2b\sqrt{\frac{q}{r}}\;t}\right]_0^\infty = \frac{x_0^2}{2b}\sqrt{qr}\,.$$

Znovu jsme obdrželi hodnotu shodnou s předchozím výsledkem (3.18).

Pomocí dynamického programování jsme dostali optimální zpětnovazební řízení, tj. dynamické programování řeší přímo úlohu syntézy optimálního řízení. V zadání tohoto příkladu byl uvažován pevný koncový stav $x_N = 0$. Pevný koncový stav $x_N \neq 0$ nemohl být uvažován, protože pro $t_N \to \infty$ integrál

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(qx^2 + ru^2\right)dt$$

v účelovém funkcionálu (3.14) by nekonvergoval (měl by nekonečně velikou hodnotu). Pro $t_N \to \infty$ mohl být také uvažován volný koncový stav x_N, protože řešení úlohy optimálního řízení (pokud existuje – v našem případě ano) automaticky zaručuje $x(\infty) = x_N = 0$, tzn. tato úloha s nekonečným koncovým časem mohla být řešena jak s pevným nulovým koncovým stavem, tak s volným koncovým stavem. V obou případech obdržíme zcela stejné výsledky.

Na optimální uzavřený systém řízení v tomto příkladě lze pohlížet rovněž jako na regulační obvod (obr. 3.6) s regulátorem

$$G_R(s) = k_P^* = \sqrt{\frac{q}{r}}$$

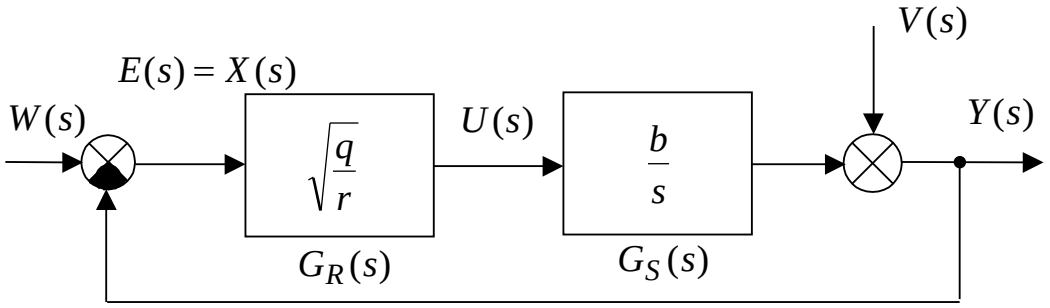
a regulovanou soustavou

$$G_S(s) = \frac{b}{s}$$

optimálně seřízený podle integrálního kvadratického kritéria

$$\int_0^{\infty}\left[qe^2(t)+ru^2(t)\right]dt \;\rightarrow\; \min \tag{3.28}$$

pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)=w_0\eta(t)$, resp. poruchové veličiny $v(t)=v_0\eta(t)$.



Obr. 3.6. Optimálně seřízený regulační obvod – příklad 3.1.

Dosadíme-li v Bellmanově parciální diferenciální rovnici (3.6) na pravé straně optimální řízení $\{\boldsymbol{u}^*\}$, dostaneme tzv. ***Hamiltonovu-Jacobiovu-Bellmanovu parciální diferenciální rovnici***

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=f_0\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t\right), \tag{3.29}$$

kde již nevystupuje silně nelineární operátor min (viz první postup v příkladě 3.1).

Při řešení úloh optimálního řízení je vhodné zavést ***Hamiltonovu funkci*** pomocí vztahu

$$H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right)=f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), \tag{3.30}$$

pak Bellmanova parciální diferenciální rovnice bude mít tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\min_{\{\boldsymbol{u}\}}H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right). \tag{3.31}$$

Označíme-li

$$H^*\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right)=H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right)=\min_{\{\boldsymbol{u}\}}H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right), \tag{3.32}$$

pak pomocí Hamiltonovy funkce může být zapsána i Hamiltonova-Jacobiova-Bellmanova parciální diferenciální rovnice

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=H^*\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right). \tag{3.33}$$

Tyto zápisy budou využity v další části.

3.2. Kvadraticky optimální řízení

Uvažujme úlohu optimálního řízení pro řízený lineární dynamický podsystém s kvadratickým účelovým funkcionálem:

$$\left.\begin{aligned} &J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}\}}\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_N}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\right)dt+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_N\right], \\ &\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \\ &\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \qquad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné}, \\ &\boldsymbol{x}(t_N)=\boldsymbol{x}_N, \qquad t_N \text{ pevné}, \quad \boldsymbol{x}_N \text{ volné}, \\ &\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)\in R^n\\ \boldsymbol{u}(t)\in R^r\end{aligned}\right\} \text{ pro } t\in\langle t_0,t_N\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n, $\boldsymbol{B}$ - matice typu (n,r), $\boldsymbol{Q}$ - symetrická kladně definitní (nejčastěji diagonální) matice řádu n, $\boldsymbol{R}$ - symetrická kladně definitní (nejčastěji diagonální) matice řádu r, $\boldsymbol{S}$ - symetrická kladně definitní (nejčastěji diagonální) matice řádu n.

Obecně pro $t_N<\infty$ matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ mohou mít časově proměnné prvky, matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{S}$ mohou být kladně semidefinitní.

V tomto případě Bellmanova parciální diferenciální rovnice bude mít tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\min_{\{\boldsymbol{u}\}}H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right), \tag{3.35}$$

kde

$$H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},t\right)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\right). \tag{3.36}$$

Určíme optimální řízení $\{\boldsymbol{u}^*\}$:

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}^T\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},$$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^*+\boldsymbol{B}^T\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{u}^*=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{3.37}$$

$\frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{u}^2} \overset{df}{=} \boldsymbol{R} > 0 \Rightarrow$ ostré globální minimum.

Po dosazení (3.37) do (3.35) obdržíme Hamiltonovu-Jacobiovu-Bellmanovu parciální diferenciální rovnici

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,. \tag{3.38}$$

Její řešení, tj. Bellmanova funkce $V(\boldsymbol{x}, t)$, při $t = t_N$ musí vyhovovat okrajové podmínce

$$V[\boldsymbol{x}(t_N), t_N] = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t_N). \tag{3.39}$$

Bellmanovu funkci budeme hledat ve tvaru kvadratické formy

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}\,, \tag{3.40}$$

kde $\boldsymbol{K}(t)$ je neznámá symetrická matice řádu n s časově proměnnými prvky.

Pokud najdeme takovou matici $\boldsymbol{K}(t)$, pro kterou funkce (3.40) bude vyhovovat rovnici (3.38) a okrajové podmínce (3.39), pak její volba byla správná.

Protože

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \dot{\boldsymbol{K}}(t)\boldsymbol{x}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}\,,$$

lze psát

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \dot{\boldsymbol{K}}(t)\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,. \tag{3.41}$$

Protože platí

$$\left[\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right]^T = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}\,,$$

je možno poslední výraz jako skalár představit ve tvaru součtu [tuto úpravu je nutno provést z toho důvodu, aby matice $\boldsymbol{K}(t)$ byla symetrická]

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}$$

a pak obdržíme z (3.41) po úpravě rovnost

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left[\dot{\boldsymbol{K}}(t)+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t)+\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}(t)\right]\boldsymbol{x}=0,$$

která musí být splněna pro libovolný stav $\boldsymbol{x}$. Výraz v lomených závorkách musí tedy být nulový, tj.

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t)+\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}(t)-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t)+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}. \tag{3.42}$$

Obdržená maticová rovnice se nazývá ***Riccatiova diferenciální rovnice***, jejíž řešením je neznámá symetrická matice $\boldsymbol{K}(t)$ vyhovující okrajové podmínce

$$\boldsymbol{K}(t_N)=\boldsymbol{S}. \tag{3.43}$$

Řešením transponované Riccatiovy diferenciální rovnice při stejné okrajové podmínce (matice $\boldsymbol{S}$ je symetrická) lze ukázat, že matice $\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{K}^T(t)$ je skutečně symetrická.

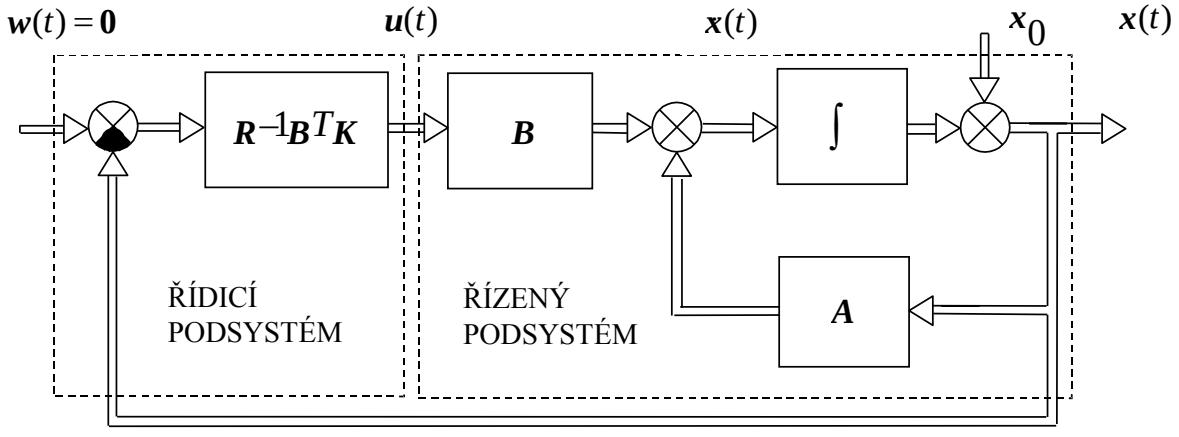
Kvadratická forma (3.40) je tedy skutečně Bellmanovou funkcí pro úlohu optimálního řízení (3.34), a proto minimální hodnota účelového funkcionálu bude

$$J^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{K}(t_0)\boldsymbol{x}_0. \tag{3.44}$$

Ze vztahů (3.37) a (3.40) dostaneme optimální zpětnovazební řízení (obr. 3.7)

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}^*(t). \tag{3.45}$$

Vidíme, že optimální řízení $\boldsymbol{u}^*(t)$ je v každém okamžiku t při zadaných maticích $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{R}$ a určené matici $\boldsymbol{K}(t)$ dáno stavem $\boldsymbol{x}^*(t)$. Je velmi výhodné, že tato závislost je lineární. Znovu připomínáme, že matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ mohou mít časově proměnné prvky, tj. mohou to být nestacionární matice.



Obr. 3.7. Kvadraticky optimální zpětnovazební lineární systém řízení

Maticová Riccatiova diferenciální rovnice (3.42) představuje soustavu $\frac{1}{2}n(n+1)$ nelineárních diferenciálních rovnic 1. řádu obecně s proměnnými koeficienty. Protože matice $\boldsymbol{K}(t)$ je symetrická ($k_{ij} = k_{ji}$) určujeme prvky $k_{ij}(t)$ pro $j \geq i,\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n$. Při řešení se většinou zavádí zpětný čas

$$\tau = t_N - t, \tag{3.46}$$

a tím se převede okrajová (koncová) podmínka (3.43) na počáteční podmínku a pro vlastní řešení lze použít libovolnou numerickou metodu řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Budou-li matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ konstantní a koncový čas nekonečný, tj. účelový funkcionál bude mít tvar

$$J\{\boldsymbol{u}\} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\right)dt, \tag{3.47}$$

pak jde o stacionární úlohu optimálního řízení, jejíž řešení je podstatně jednodušší. Koncový stav $\boldsymbol{x}(\infty) = \boldsymbol{x}_N$ může být volný, resp. pevný nulový, tj. $\boldsymbol{x}(\infty) = \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$, protože by integrál (3.47) nekonvergoval. Pokud řešení úlohy optimálního řízení existuje, automaticky v případě volného koncového stavu bude zaručeno $\boldsymbol{x}(\infty) = \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ (viz např. příklady 3.1 a 3.2).

V této stacionární úloze optimálního řízení Bellmanova funkce má také tvar kvadratické formy [srovnej s (3.40)]

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}. \tag{3.48}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je konstantní symetrická matice řádu n.

Protože $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, lze stejným postupem jako v předchozím případě z Hamiltonovy-Jacobiovy-Bellmanovy parciální diferenciální rovnice (3.38) získat nelineární maticovou rovnici

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}. \tag{3.49}$$

Je to ***Riccatiova algebraická rovnice***. Jejím vyřešením dostaneme konstantní symetrickou kladně definitní matici $\boldsymbol{K}$. Konstantní matici $\boldsymbol{K}$ lze také získat při konstantních maticích $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ jako ustálené řešení Riccatiovy diferenciální rovnice (3.42) pro libovolnou počáteční, resp. koncovou podmínku, protože $\dot{\boldsymbol{K}}(-\infty) = \boldsymbol{0}$. Optimální zpětnovazební řízení je pak dáno vztahem

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}^*(t),$$

resp.

$$\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}^*. \tag{3.50}$$

Vidíme, že optimální řídicí podsystém lze snadno realizovat pomocí proporcionálních vazeb od stavových proměnných (obr. 3.7).

Optimální hodnota účelového funkcionálu (3.47) může být určena pomocí Bellmanovy funkce (3.48)

$$J^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_0. \tag{3.51}$$

Protože v účelovém funkcionálu (3.47) koncový čas (horní mez) je nekonečný, musí řízený podsystém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{3.52}$$

vyhovovat ***podmínce plné řiditelnosti***

$$\operatorname{rank}\left\lfloor \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \right\rfloor = n\ , \tag{3.53}$$

tj. hodnost ***matice řiditelnosti*** musí být rovna řádu řízeného podsystému *n*. Tato podmínka zaručuje, že existuje takové řízení $\boldsymbol{u}(t)$, které převede řízený podsystém (3.52) z libovolného počátečního stavu $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ do stavu $\boldsymbol{0}$ (počátku souřadnic), případně jiného libovolného stavu, za konečnou dobu.

Neřiditelné stavové proměnné by pro $t_N \to \infty$ způsobily neomezený růst hodnoty účelového funkcionálu (3.47).

U kvadraticky optimálních lineárních stacionárních systémů řízení ($t_N \to \infty$) Bellmanova funkce

$$V\left[\boldsymbol{x}(t)\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.54}$$

má ještě jednu velmi důležitou interpretaci ($\boldsymbol{K}$ je symetrická kladně definitní matice). Ukazuje se, že ji lze považovat za ***optimální Ljapunovovu funkci***. Ljapunovova funkce slouží ke kontrole stability dynamických systémů. V našem případě Ljapunovova funkce vyjadřuje ***zobecněnou vzdálenost*** stavu $\boldsymbol{x}(t)$ od klidového rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ (od počátku souřadnic). Bude-li na stavové trajektorii vyvolané optimálním řízením $\boldsymbol{u}^*(t)$ splněna podmínka

$$\frac{dV\left[\boldsymbol{x}(t)\right]}{dt} < 0, \tag{3.55}$$

pak zobecněná vzdálenost stavu $\boldsymbol{x}(t)$ od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ bude neustále klesat a pro $t \to \infty$ bude $\boldsymbol{x}(\infty) = \boldsymbol{0}$, tzn. že dynamický systém bude globálně asymptoticky stabilní, viz (1.34).

Z Hamiltonovy-Jacobiovy-Bellmanovy parciální diferenciální rovnice (3.29) vyplývá, že výraz

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t\right)+\frac{\partial V}{\partial t} \tag{3.56}$$

je vlastně totální (exaktní) derivace Bellmanovy funkce podle času, proto lze psát

$$\frac{dV}{dt}=\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t\right)+\frac{\partial V}{\partial t}=-f_0\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t\right). \tag{3.57}$$

V našem stacionárním případě kvadratického účelového funkcionálu platí $V = V(\boldsymbol{x})$, tj.

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^*\right). \tag{3.58}$$

Protože matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ jsou symetrické kladně definitní matice, proto je splněna podmínka globální asymptotické stability (3.55) kvadraticky optimálního zpětnovazebního systému řízení

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{x}^*(t). \tag{3.59}$$

Rovnice (3.59) byla získána dosazením (3.50) do (3.52). Tzn. charakteristická čísla matice

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K} \tag{3.60}$$

budou mít záporné reálné části.

Souvislosti Bellmanovy funkce s Ljapunovovou funkcí se využívá především pro návrh optimálních nelineárních systémů řízení při současném zajištění asymptotické stability.

Příklad 3.2

Uvažujme řízený podsystém

$$\dot{x}(t)=bu(t), \qquad b>0, \tag{3.61}$$

který má být řízen z počátečního stavu $x(0)=x_0$ tak, aby v čase t_N hodnota účelového funkcionálu

$$J\{u\}=\frac{1}{2}\int_0^{t_N}\left(qx^2+ru^2\right)dt+\frac{1}{2}sx^2(t_N); \qquad q,r,s>0 \tag{3.62}$$

byla minimální. Provedeme podrobný rozbor vlivu t_N a s na optimální řízení (Víteček 1992).

Řešení:

Je to úloha optimálního řízení s kvadratickým účelovým funkcionálem, pro kterou Riccatiova diferenciální rovnice (3.42) má tvar (***K*** = *k*, ***A*** = 0, ***B*** = *b*, ***R*** = *r*, ***Q*** = *q*, ***S*** = *s*)

$$\dot{k}(t)-\frac{b^2}{r}k^2(t)+q=0 \tag{3.63}$$

při koncové podmínce

$$k(t_N)=s\,. \tag{3.64}$$

V souladu s (3.45) optimální zpětnovazební řízení je

$$u^*(t)=-k_P^*(t)x^*(t), \tag{3.65}$$

kde

$$k_P^*(t)=\frac{b}{r}k(t) \tag{3.66}$$

je časově proměnné zesílení řídicího podsystému.

Pro řešení Riccatiovy diferenciální rovnice (3.63) zavedeme zpětný čas

$$\tau=t_N-t \tag{3.67}$$

a novou proměnnou

$$\kappa(\tau)=k(t_N-\tau)=k(t), \tag{3.68}$$

pro kterou platí

$$\frac{dk(t)}{dt}=-\frac{dk(t_N-\tau)}{d\tau}=-\frac{d\kappa(\tau)}{d\tau}=-\dot{\kappa}\,. \tag{3.69}$$

Po dosazení (3. 69) do (3.63) a úpravě obdržíme diferenciální rovnici

$$\dot{\kappa}+\frac{b^2}{r}\kappa^2-q=0 \tag{3.70}$$

s počáteční podmínkou

$$\kappa(0)=s\,. \tag{3.71}$$

Je to také Riccatiova diferenciální rovnice. Pro její řešení použijeme Eulerovu substituci

$$\kappa=\frac{r}{b^2}\frac{\dot{z}}{z}, \tag{3.72}$$

pak

$$\dot{\kappa} = \frac{r}{b^2}\left[\frac{\ddot{z}}{z} - \left(\frac{\dot{z}}{z}\right)^2\right]$$

a po dosazení do (3.70) dostaneme obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\ddot{z} - b^2 \frac{q}{r} = 0, \tag{3.73}$$

jejíž řešení je již snadné:

$$\lambda^2 - b^2 \frac{q}{r} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\beta,$$

$$\beta = b\sqrt{\frac{q}{r}},$$

$$z(\tau) = c_1 e^{\beta\tau} + c_2 e^{-\beta\tau}.$$

Vrátíme se k proměnné (3.72)

$$\kappa(\tau) = \frac{r}{b^2}\frac{\dot{z}(\tau)}{z(\tau)} = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,\frac{c_1 e^{\beta\tau} - c_2 e^{-\beta\tau}}{c_1 e^{\beta\tau} + c_2 e^{-\beta\tau}}. \tag{3.74}$$

Neznámé konstanty c_1 a c_2 určíme z počáteční podmínky (3.71):

$$s = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,\frac{\frac{c_1}{c_2} - 1}{\frac{c_1}{c_2} + 1} \;\Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\;,$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{bs}\sqrt{qr}\,. \tag{3.75}$$

Po dosazení (3.75) do (3.74) a úpravě dostaneme

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,\frac{\alpha\sinh\beta\tau + \cosh\beta\tau}{\alpha\cosh\beta\tau + \sinh\beta\tau}. \tag{3.76}$$

Vrátíme se k původní proměnné $k(t)$. V souladu se vztahem (3.68) a (3.66) můžeme psát

$$k(t) = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,\frac{\alpha\sinh[\beta(t_N - t)] + \cosh[\beta(t_N - t)]}{\alpha\cosh[\beta(t_N - t)] + \sinh[\beta(t_N - t)]} \tag{3.77}$$

a

$$k_P^*(t) = \sqrt{\frac{q}{r}}\,\frac{\alpha\sinh[\beta(t_N - t)] + \cosh[\beta(t_N - t)]}{\alpha\cosh[\beta(t_N - t)] + \sinh[\beta(t_N - t)]}. \tag{3.78}$$

Optimální průběh $\{x^*(t)\}$ určíme z diferenciální rovnice uzavřeného systému řízení. Dostaneme ji dosazením (3.65) do (3.61)

$$\dot{x}^*(t) + bk_P^*(t)x^*(t) = 0. \tag{3.79}$$

Diferenciální rovnici (3.79) řešíme separací proměnných a dostaneme

$$\int_{x_0}^{x^*} \frac{dx^*}{x^*} = -b\int_0^t k_P^*(\tau)d\tau,$$

$$x^*(t) = x_0 \exp\left[-b\int_0^t k_P^*(\tau)d\tau\right]. \tag{3.80}$$

Na základě vztahu (3.61) a (3.80) určíme optimální otevřené řízení

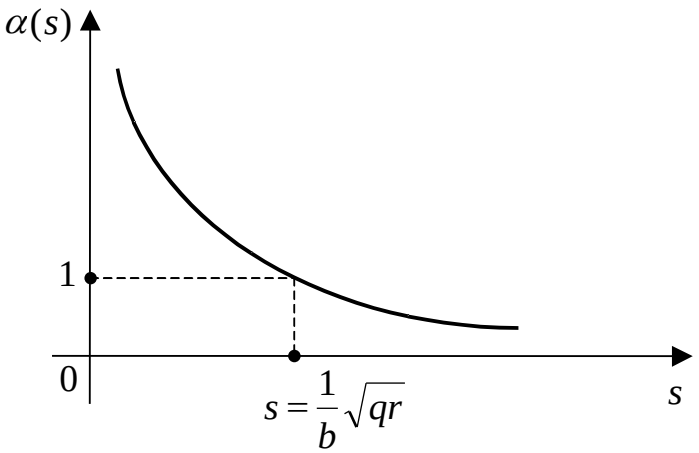
$$u^*(t) = -x_0 k_P^*(t)\exp\left[-b\int_0^t k_P^*(\tau)d\tau\right]. \tag{3.81}$$

Optimální hodnotu účelového funkcionálu (3.62) získáme z Bellmanovy funkce

$$V(x,t) = \frac{1}{2}k(t)x^2 \tag{3.82}$$

pro $t_0 = 0$ a x_0

$$J^* = \frac{1}{2}k(0)x_0^2. \tag{3.83}$$



Obr. 3.8. Příklad 3.2 – závislost koeficientu α na parametru *s*

Konečný koncový čas ($0 < t_N < \infty$)

Jak vyplývá ze vztahů (3.77) ÷ (3.83) zásadní vliv na řešení úlohy optimálního řízení má koeficient α, jehož závislost na parametru s je na obr. 3.8.

a) $\boxed{s = 0 \Rightarrow \alpha = \infty}$

Pro $\alpha = \infty$ ze vztahů (3.77), (3.78), (3.80), (3.81) a (3.83) dostaneme:

$$k(t) = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,\mathrm{tgh}\left[\beta(t_N - t)\right], \tag{3.84}$$

$$k_P^*(t) = \sqrt{\frac{q}{r}}\,\mathrm{tgh}\left[\beta(t_N - t)\right], \tag{3.85}$$

$$x^*(t) = x_0 \frac{\cosh\left[\beta(t_N - t)\right]}{\cosh(\beta t_N)}, \tag{3.86}$$

$$u^*(t) = -x_0\sqrt{\frac{q}{r}}\frac{\sinh\left[\beta(t_N - t)\right]}{\cosh(\beta t_N)}, \tag{3.87}$$

$$J^* = \frac{x_0^2}{2b}\sqrt{qr}\,\mathrm{tgh}(\beta t_N). \tag{3.88}$$

Eliminací času t ze vztahů (3.86) a (3.87) obdržíme závislost optimálního řízení u^* na stavu x^*:

$$u^{*2} = \frac{q}{r}\left[x^{*2} - \frac{x_0^2}{\cosh^2(\beta t_N)}\right],$$

resp.

$$u^* = -\sqrt{\frac{q}{r}}\sqrt{x^{*2} - \frac{x_0^2}{\cosh^2(\beta t_N)}}\,\mathrm{sign}\,x^*. \tag{3.89}$$

Znaménko minus před odmocninou zaručuje zápornou zpětnou vazbu, a tím i stabilitu.

Vztah (3.89) platí pro

$$\left|x^*\right| \geq \frac{x_0}{\cosh(\beta t_N)} = x_N, \tag{3.90}$$

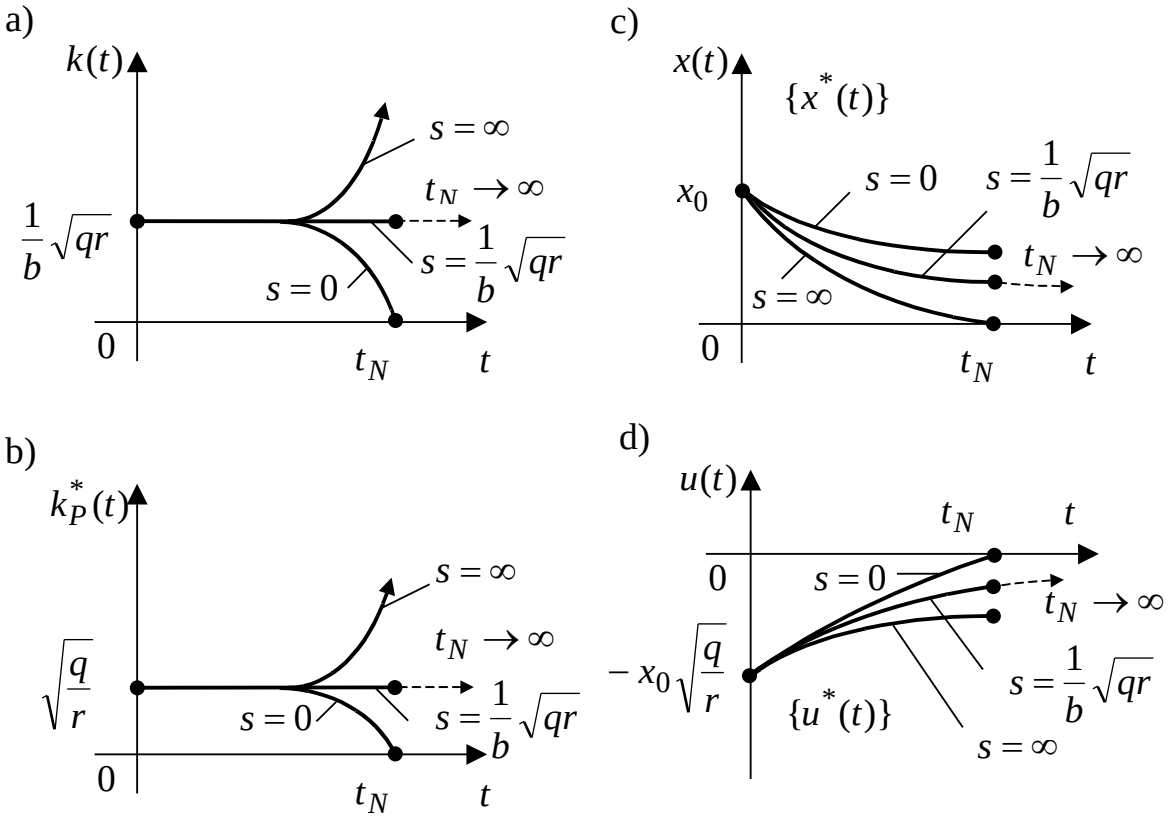
jinak

$$u^* = 0.$$

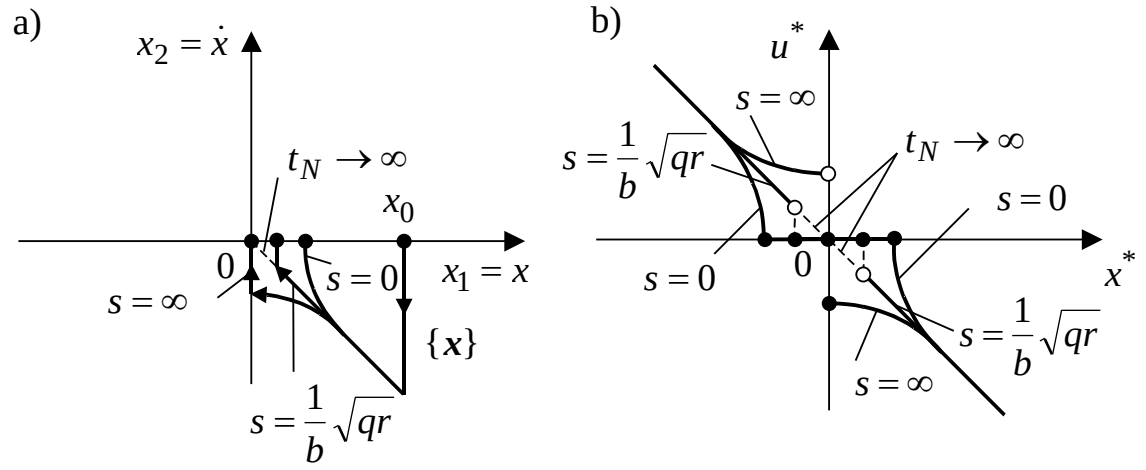
Položíme-li

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= \dot{x} = \frac{1}{b}u, \end{aligned}\right\} \tag{3.91}$$

pak je zřejmé, že průběh stavové trajektorie pro $x_N \le x_1 = x < x_0$ je stejný (až na konstantu $\frac{1}{b}$) jako závislost optimálního řízení u^* na stavu x^*. Všechny průběhy jsou ukázány na obr. 3.9 a 3.10. Pro určitost je uvažován $x_0 > 0$.



Obr. 3.9. Příklad 3.2 – optimální průběhy pro různé hodnoty parametru *s*: koeficientu *k*(*t*) Bellmanovy funkce – (a), zesílení $k_P^*(t)$ řídicího podsystému – (b), stavové proměnné – (c), řízení – (d)



Obr. 3.10. Příklad 3.2 – optimální průběhy pro různé hodnoty parametru *s*: stavové trajektorie – (a), závislosti řízení na stavu – (b)

b) $\boxed{s = \frac{1}{b}\sqrt{qr} \;\Rightarrow\; \alpha = 1}$

Stejným postupem jako v předchozím případě dostaneme:

$$k(t) = k = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,, \tag{3.92}$$

$$k_P^*(t) = k_P^* = \sqrt{\frac{q}{r}}\,, \tag{3.93}$$

$$x^*(t) = x_0\, e^{-\beta t}, \tag{3.94}$$

$$u^*(t) = -x_0\sqrt{\frac{q}{r}}\, e^{-\beta t}, \tag{3.95}$$

$$J^* = \frac{x_0^2}{2b}\sqrt{qr}\,, \tag{3.96}$$

$$u^* = -\sqrt{\frac{q}{r}}\, x^*. \tag{3.97}$$

Tento vztah platí pro

$$\left|x^*\right| \geq x_0 e^{-\beta t_N} = x_N\,. \tag{3.98}$$

Úvahy týkající se stavové trajektorie jsou stejné, jako v předchozím případě.

c) $\boxed{s = \infty \Rightarrow \alpha = 0}$

Stejným postupem dostaneme:

$$k(t) = \frac{1}{b}\sqrt{qr}\,\operatorname{cotgh}[\beta(t_N - t)], \tag{3.99}$$

$$k_P^*(t) = \sqrt{\frac{q}{r}}\,\operatorname{cotgh}[\beta(t_N - t)], \tag{3.100}$$

$$x^*(t) = x_0\,\frac{\sinh[\beta(t_N - t)]}{\sinh(\beta t_N)}, \tag{3.101}$$

$$u^*(t) = -x_0\sqrt{\frac{q}{r}}\,\frac{\cosh[\beta(t_N - t)]}{\sinh(\beta t_N)}, \tag{3.102}$$

$$J^* = \frac{x_0^2}{2b}\sqrt{qr}\,\operatorname{cotgh}(\beta t_N), \tag{3.103}$$

$$u^* = -\sqrt{\frac{q}{r}}\sqrt{x^{*2} + \frac{x_0^2}{\sinh^2(\beta t_N)}}\,\operatorname{sign} x^*. \tag{3.104}$$

V tomto případě pro $x^* = x_N = 0 \Rightarrow u^* = 0 \;\; (t \geq t_N)$.

Pro jiné hodnoty parametru s lze odpovídající průběhy získat stejným způsobem. Tyto průběhy budou pro $0 < s < \frac{1}{b}\sqrt{qr}$ ležet mezi průběhy pro $s = 0$ a $s = \frac{1}{b}\sqrt{qr}$. Podobně průběhy pro $\frac{1}{b}\sqrt{qr} < s < \infty$ budou ležet mezi průběhy pro $s = \frac{1}{b}\sqrt{qr}$ a $s = \infty$ (obr. 3.9 a 3.10).

Z obr. 3.9 a 3.10 vidíme, že realizace optimálního zpětnovazebního řízení pro konečný koncový čas $(0 < t_N < \infty)$ a pro $s \neq \frac{1}{b}\sqrt{qr}$ je velmi obtížná. Vyžaduje použití řídicího podsystému s časově proměnným zesílením $k_P(t)$ a dále od okamžiku t_N zaručujícího $u^*(t) = 0$ (obr. 3.9 b, d). Při nedodržení $u^*(t) = 0$ pro $t \geq t_N$ může být velmi negativně ovlivněno řízení, především při požadovaném pevném koncovém stavu. Jednoduchá je realizace optimálního zpětnovazebního řídicího podsystému pro $s = \frac{1}{b}\sqrt{qr}$, protože zesílení

$k_P^*(t) = k_P^* = \sqrt{\frac{q}{r}}$ je stejné jako pro $t_N \to \infty$ (viz dále a také příklad 3.1). Rovněž v tomto případě není kritické dodržení podmínky $u^*(t) = 0$ pro $t \geq t_N$.

Pro konečný koncový čas optimální zpětnovazební řízení může být rovněž realizováno nelineárním zesílením, daným závislostí optimálního řízení u^* na stavu x^* (obr. 3.10b). Tato nelineární statická charakteristika řídicího podsystému závisí na počátečním stavu, viz vztahy (3.89) a (3.104).

Z toho všeho vyplývá, že realizace kvadraticky optimálního řízení pro konečný koncový čas je pro většinu praktických aplikací nepoužitelná.

Nekonečný koncový čas ($t_N = \infty$)

Při nekonečném koncovém času, tj. pro $t_N \to \infty$ úloha optimálního řízení je stacionární. Koeficient α je ze všech vztahů eliminován, a proto optimální řízení na něm nezávisí, nezávisí také na tom, zda koncový stav je volný či pevný (pevný musí být vždy nulový). Je zřejmé, že vztahy (3.92) ÷ (3.97) získané pro $s = \frac{1}{b}\sqrt{qr}$ a $0 < t_N < \infty$ platí i pro $t_N \to \infty$, tzn. tyto vztahy jsou použitelné pro $0 \leq t < \infty$. Na obr. 3.9 a 3.10 optimální průběhy pro $t_N \to \infty$ jsou značeny čárkovaně.

Všechny výsledky, úvahy i závěry z příkladu 3.1 platí i v tomto případě, kdy $t_N \to \infty$.

Stacionární kvadraticky optimální řízení ($t_N \to \infty$) má veliký význam pro praxi především z důvodu snadné realizace řídicího podsystému.

Příklad 3.3

Určíme optimální zpětnovazební řízení $u^*(x^*)$, které převede řízený podsystém

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \qquad b > 0 \tag{3.105}$$

z počátečního stavu $x(0) = x_0$ do koncového stavu $x(\infty) = x_N = 0$ tak, aby účelový funkcionál

$$J\{u\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(qx^2 + ru^2\right) dt; \qquad q, r > 0 \tag{3.106}$$

měl minimální hodnotu.

Řešení

Je to stacionární úloha optimálního řízení s kvadratickým účelovým funkcionálem. Podmínka plné řiditelnosti je splněna $(\operatorname{rank} b = n = 1)$. Použijeme Riccatiovu algebraickou rovnici (3.49) pro $\boldsymbol{A} = a$, $\boldsymbol{B} = b$, $\boldsymbol{Q} = q$, $\boldsymbol{R} = r$ a dostaneme:

$$k^2 - 2r\frac{a}{b^2}k - \frac{r}{b^2}q = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{r}{b^2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}}\right).$$

Z důvodu stability [viz vztah (3.60)] pro $k > 0$ volíme znaménko plus a obdržíme

$$u^* = -\frac{bk}{r}x^*,$$

$$u^* = -\frac{1}{b}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}}\right)x^*. \tag{3.107}$$

Optimální hodnota účelového funkcionálu se určí na základě vztahu (3.51)

$$J^* = \frac{x_0^2 r}{2b^2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}}\right). \tag{3.108}$$

Ze vztahu (3.107) vyplývá, že pro $r \to 0$ dostaneme fyzikálně nerealizovatelné řízení. Pro $q \to 0$ energeticky optimální řízení má smysl pouze pro $a > 0$ (tj. pro nestabilní řízený podsystém), protože pro $a < 0$ (globálně asymptoticky stabilní řízený podsystém) energeticky optimální řízení je nulové – řízený podsystém by byl neřízený. Z tohoto důvodu se předpokládá $q, r > 0$. Koncový stav v tomto příkladě nemusel být zadán.

Pro $a \to 0$ získáme stejné výsledky jako v příkladě 3.1, resp. 3.2 pro $t_N \to \infty$.

Příklad 3.4

Pomocí dynamického programování pro řízený podsystém

$$\ddot{y}(t) = bu(t), \quad b > 0 \tag{3.109}$$

určíme optimální zpětnovazební řízení minimalizující účelový funkcionál

$$J\{u\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(q_1 y^2 + q_2 \dot{y}^2 + ru^2\right)dt; \qquad q_1, q_2, r > 0, \tag{3.110}$$

přičemž řízený podsystém má být převeden z počátečních podmínek

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0 \tag{3.111}$$

do koncových podmínek

$$y(\infty)=\dot{y}(\infty)=0\,. \tag{3.112}$$

Řešení:

Volíme stavové proměnné

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y,\\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned}\right\} \tag{3.113}$$

a obdržíme stavové vyjádření stacionární úlohy optimálního řízení:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= bu,\\ y &= x_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.114}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(0)&=x_{10},\quad x_2(0)=0,\\ x_1(\infty)&=0,\qquad x_2(\infty)=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.115}$$

$$J^{*}=\min_{\{u\}}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(q_1x_1^2+q_2x_2^2+ru^2\right)dt\ . \tag{3.116}$$

Zkontrolujeme řiditelnost. Ze stavového vyjádření (3.114) máme

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix}, \tag{3.117}$$

a proto matice řiditelnosti (3.53) bude mít tvar

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & b\\ b & 0\end{bmatrix}.$$

Její hodnost je rovna $2 = n \Rightarrow$ řízený podsystém (3.114) je plně řiditelný.

Optimální řízení určíme dvěma postupy:

1. postup

Vyjdeme z Bellmanovy parciální diferenciální rovnice (3.31) pro $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$:

$$0=\min_{\{u\}}H\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right), \tag{3.118}$$

kde

$$H\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)=\frac{1}{2}\left(q_1x_1^2+q_2x_2^2+ru^2\right)+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}bu\,. \tag{3.119}$$

Určíme optimální řízení:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=ru+\frac{\partial V}{\partial x_2}b,$$

$$ru^*+\frac{\partial V}{\partial x_2}b=0\Rightarrow u^*=-\frac{b}{r}\frac{\partial V}{\partial x_2}, \tag{3.120}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=r>0\Rightarrow \text{ostré globální minimum.}$$

Optimální řízení (3.120) dosadíme do (3.119) a obdržíme Hamiltonovu-Jacobiovu-Bellmanovu parciální diferenciální rovnici

$$\frac{1}{2}\left[q_1x_1^2+q_2x_2^2-\frac{b^2}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2\right]+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2=0\,. \tag{3.121}$$

Řešení této rovnice, tj. Bellmanovu funkci, předpokládáme ve tvaru kvadratické formy

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\left(k_{11}x_1^2+2k_{12}x_1x_2+k_{22}x_2^2\right). \tag{3.122}$$

Matice $\boldsymbol{K}$ je symetrická, proto $k_{12}=k_{21}$. Po dosazení

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=k_{11}x_1+k_{12}x_2, \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=k_{12}x_1+k_{22}x_2 \tag{3.124}$$

do rovnice (3.121) dostaneme

$$\frac{1}{2}\left[q_1x_1^2+q_2x_2^2-\frac{b^2}{r}\left(k_{12}x_1+k_{22}x_2\right)^2\right]+\left(k_{11}x_1+k_{12}x_2\right)x_2=0$$

a po úpravě

$$\frac{1}{2}\left(q_1-\frac{b^2}{r}k_{12}^2\right)x_1^2+\frac{1}{2}\left(q_2+2k_{12}-\frac{b^2}{r}k_{22}^2\right)x_2^2+\left(k_{11}-\frac{b^2}{r}k_{12}k_{22}\right)x_1x_2=0\,.$$

Poslední rovnice musí platit pro libovolné x_1 a x_2, proto lze psát

$$\left.\begin{aligned} q_1 - \frac{b^2}{r} k_{12}^2 &= 0, \\ q_2 + 2k_{12} - \frac{b^2}{r} k_{22}^2 &= 0, \\ k_{11} - \frac{b^2}{r} k_{12} k_{22} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.125)$$

Reálná řešení této soustavy nelineárních algebraických rovnic jsou:

$$k_{11} = \pm\sqrt{q_1\left(q_2 + \frac{2}{b}\sqrt{q_1 r}\right)},$$

$$k_{21} = k_{12} = \pm\frac{1}{b}\sqrt{q_1 r},$$

$$k_{22} = \pm\frac{1}{b}\sqrt{r\left(q_2 + \frac{2}{b}\sqrt{q_1 r}\right)}.$$

Matice $\boldsymbol{K}$ musí být kladně definitní, tj. musí platit

$$k_{11} > 0, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0,$$

tzn. $k_{11} > 0, \quad k_{22} > 0$. Rovněž $k_{12} > 0$ z důvodu stability [viz vztahy (3.120) a (3.124)]. Proto musíme uvažovat kladná znaménka.

Na základě vztahu (3.120) dostaneme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = -\frac{b}{r}\left(k_{12}x_1^* + k_{22}x_2^*\right), \qquad (3.126)$$

resp.

$$u^* = -\sqrt{\frac{q_1}{r}}\; x_1^* - \sqrt{\frac{q_2}{r} + \frac{2}{b}\sqrt{\frac{q_1}{r}}}\; x_2^*. \qquad (3.127)$$

2. postup

Vyjdeme z Riccatiovy algebraické rovnice (3.49), tj.

$$\boldsymbol{KA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K} - \boldsymbol{KBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \qquad (3.128)$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad k_{12} = k_{21}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po dosazení a úpravě se získá stejná soustava nelineárních algebraických rovnic jako (3.125), a proto další výpočty jsou stejné. Vidíme, že oba postupy jsou zcela ekvivalentní.

Zkontrolujeme stabilitu optimálního uzavřeného systému řízení, jehož stavové rovnice určíme dosazením (3.126) do (3.114):

$$\dot{x}_1^* = x_2^*,$$

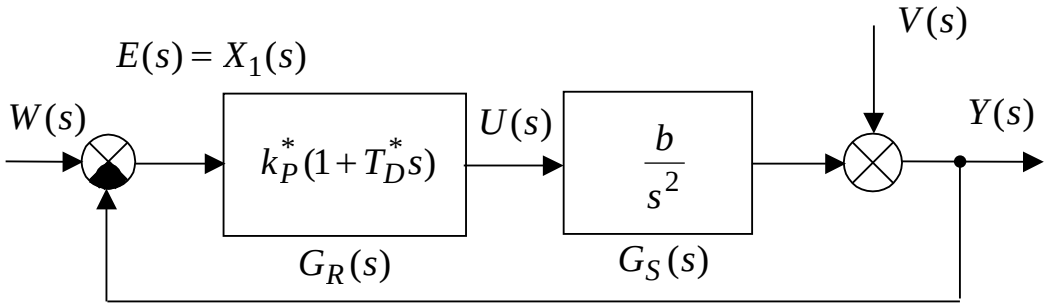
$$\dot{x}_2^* = -\frac{b^2}{r} k_{12} x_1^* - \frac{b^2}{r} k_{22} x_2^*.$$

Charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení je

$$N(s) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{b^2}{r} k_{12} & s + \frac{b^2}{r} k_{22} \end{vmatrix} = s\left(s + \frac{b^2}{r} k_{22} \right) + \frac{b^2}{r} k_{12}. \tag{3.129}$$

Charakteristický mnohočlen je 2. stupně, a proto nutnou a postačující podmínkou globální asymptotické stability je splnění Stodolovy podmínky. Ta bude splněna pro $k_{12} > 0$ a $k_{22} > 0$. Vidíme, že kvadraticky optimální řízení skutečně zaručuje globální asymptotickou stabilitu.

Z charakteristického mnohočlenu (3.129) vyplývá, že pro $b^2 k_{22}^2 - 4 r k_{12} \geq 0 \Rightarrow q_2 b \geq 2\sqrt{q_1 r}$ kořeny budou záporné reálné a odpovídající přechodný proces bude nekmitavý (aperiodický). Pro $q_2 b < 2\sqrt{q_1 r}$ kořeny budou komplexní se zápornou reálnou částí a přechodný proces bude kmitavý. Lze tedy vhodnou volbou váhových koeficientů r, q_1 a q_2 zajistit požadovaný přechodný proces.



Obr. 3.11. Optimálně seřízený regulační obvod – příklad 3.4

Kvadraticky optimální zpětnovazební systém řízení získaný v tomto příkladě lze považovat za optimálně seřízený regulační obvod (obr. 3.11) podle kvadratického integrálního kritéria

$$\int_0^\infty \left(q_1 e^2 + q_2 \dot{e}^2 + r u^2\right) dt \to \min \tag{3.130}$$

pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t) = w_0 \eta(t)$, resp. poruchové veličiny $v(t) = v_0 \eta(t)$. Regulátor je typu PD s optimálními hodnotami stavitelných parametrů [viz vztahy (3.114) – první rovnici, (3.126) a (3.127)]:

$$k_P^* = \frac{b}{r} k_{12} = \sqrt{\frac{q_1}{r}} \ , \tag{3.131}$$

$$T_D^* = \frac{k_{22}}{k_{12}} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1} + \frac{2}{b}\sqrt{\frac{r}{q_1}}} \ . \tag{3.132}$$

Velmi snadno můžeme na základě vztahu (3.51) vypočíst minimální hodnotu účelového funkcionálu (3.130). Pro $x_{20} = \dot{e}(0) = 0$ dostaneme

$$J^* = \frac{e^2(0)}{2}\sqrt{q_1\left(q_2 + \frac{2}{b}\sqrt{q_1 r}\right)}. \tag{3.133}$$

Bellmanova parciální diferenciální rovnice spolu s okrajovou podmínkou představují nutné podmínky optimality. Protože ve všech případech byl použit kvadratický účelový funkcionál a existence optimálního řízení byla zaručena, bylo možné obdržená řešení považovat za optimální.

Dá se rovněž dokázat, existuje-li po částech spojité řízení $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ získané z Bellmanovy parciální diferenciální rovnice, které spolu se stavovou diferenciální rovnicí vytvoří jedinou trajektorii $\{\boldsymbol{x}\}$ na intervalu $\langle t_0, t_N \rangle$, pak toto řízení je řešením úlohy optimálního řízení. V tomto případě Bellmanovu parciální diferenciální rovnici spolu s okrajovou podmínkou lze považovat za ***postačující podmínky optimality***.

Dynamické programování je velmi účinným nástrojem řešení nejrůznějších optimalizačních úloh. Dovoluje snadno uvažovat i omezení řízení a stavu. Umožňuje rovněž zastoupením operátoru min operátorem max přímo řešit maximalizační úlohu optimálního řízení.

Při odvozování Bellmanovy parciální diferenciální rovnice byla požadována spojitá diferencovatelnost Bellmanovy funkce. Tento velmi tvrdý požadavek lze v některých případech oslabit a tak rozšířit použitelnost dynamického programování (Górecki 1993).

4 PONTRJAGINŮV PRINCIP MINIMA

Jiný velmi účinný přístup k řešení úloh optimálního řízení představuje ***Pontrjaginův princip minima*** (Athans & Falb 1966; Bryson & Ho 1969; Górecki 1993; Hsu & Mayer 1967; Kaczorek 1981; Kubík aj. 1972; Kubík aj. 1982; Lewis & Syrmos 1995; Mikleš & Hutla 1986; Razím & Horáček 1985; Sage & White 1977; Spíral & Ovsjanikov 1982; Szklarski, Jaracz & Víteček 1989; Štecha & Horáček 1985; Takahashi, Rabins & Auslander 1972; Tou 1964; Víteček 1992). Pomocí Pontrjaginova principu minima (dále také jen principu minima) lze řešit i velmi složité úlohy s omezením řízení i stavových proměnných.

Mezi principem minima a dynamickým programováním, které představují dva zcela odlišné přístupy k řešení úloh optimálního řízení, existuje těsná souvislost. Tuto souvislost využijeme při získání základních vztahů principu minima.

4.1 Formulace Pontrjaginova principu minima

Uvažujme úlohu optimálního řízení (3.1) a předpokládejme, že má řešení. Označme v jí odpovídající Hamiltonově funkci (3.30)

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}(t), \tag{4.1}$$

která pak bude mít tvar

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t) = f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{4.2}$$

a podobně Bellmanova parciální diferenciální rovnice (3.31)

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t), \tag{4.3}$$

kde $\boldsymbol{p}$ je ***vektor sdružených*** (konjugovaných) ***proměnných*** nebo také ***kovektor stavu***.

Uvažujeme v rovnici (4.3) optimální řízení (z důvodu přehlednosti nebudeme ho ani jiné proměnné označovat hvězdičkou), odstraníme tak silně nelineární operátor min a dostaneme Hamiltonovu-Jacobiovu-Bellmanovu parciální diferenciální rovnici

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t). \tag{4.4}$$

Derivujme levou i pravou stranu podle $\boldsymbol{x}$ při uvažování vztahu (4.1) a obdržíme

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}\partial t}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}. \tag{4.5}$$

Podobně derivujme levou i pravou stranu vztahu (4.1) podle *t*:

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\dot{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial \boldsymbol{x}},$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}\partial t}=-\dot{\boldsymbol{p}}+\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{4.6}$$

V dynamickém programování se předpokládá spojitá diferencovatelnost Bellmanovy funkce podle všech *n*+1 proměnných, a proto na pořadí derivování nezáleží. Protože levé strany vztahů (4.5) a (4.6) jsou stejné, musí být splněny rovnosti

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{4.7a}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{4.7b}$$

Jsou to tzv. ***kanonické diferenciální rovnice principu minima***. Z Hamiltonovy funkce (4.2) plyne, že první rovnice je stavová diferenciální rovnice

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t\right) \tag{4.8}$$

řízeného podsystému a druhá je s ní ***sdružená*** (konjugovaná) ***diferenciální rovnice***.

Vidíme tedy, že pokud úloha optimálního řízení má řešení, pak Hamiltonova funkce (4.2) musí mít globální minimum podle řízení, tj.

$$H^{*}=\min_{\{\boldsymbol{u}\}} H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t\right) \tag{4.9}$$

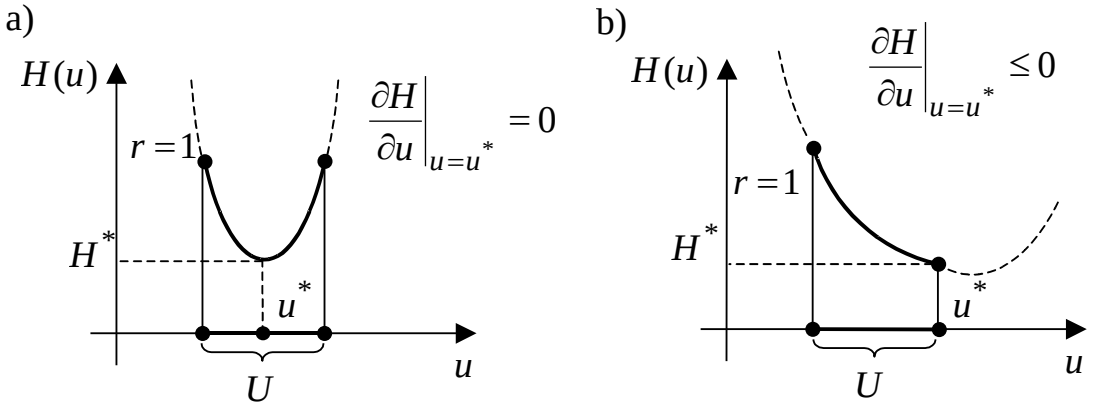
a dále musí platit kanonické rovnice (4.7). To je vlastně podstata Pontrjaginova principu minima. V závislosti na druhu koncových podmínek (1.175) dostaneme různé podmínky pro koncové hodnoty vektoru stavu $\boldsymbol{x}(t_N)=\boldsymbol{x}_N$, resp. vektoru sdružených proměnných $\boldsymbol{p}(t_N)=\boldsymbol{p}_N$. Počáteční podmínce $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ musí vyhovovat řešení stavové rovnice (4.8). V obecném případě volného koncového času t_N a volného koncového stavu $\boldsymbol{x}_N$ ze vztahů (3.7) a (4.1) vyplývá koncová podmínka pro vektor sdružených proměnných

$$\boldsymbol{p}(t_N)=\boldsymbol{p}_N=\left.\frac{\partial F\left[\boldsymbol{x}(t),t\right]}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{t=t_N}. \tag{4.10}$$

Pontrjaginův princip minima spolu s příslušnými okrajovými podmínkami představují ***nutné podmínky minima*** účelového funkcionálu úlohy optimálního řízení (3.1).

Velmi důležité jsou vlastnosti Hamiltonovy funkce (4.2). Její totální (exaktní) derivace podle času *t* je dána vztahem

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \dot{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \dot{\boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T \dot{\boldsymbol{p}} + \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{4.11}$$



Obr. 4.1. Optimální řízení: vnitřní – (a), hraniční – (b)

Protože předpokládáme existenci řešení úlohy optimálního řízení, musí platit kanonické rovnice (4.7), a proto první a třetí výraz v (4.11) se vzájemně eliminují. Druhý výraz je rovněž nulový, protože v případě vnitřního minima Hamiltonovy funkce

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \tag{4.12}$$

a v případě hraničního minima

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0},$$

protože množina přípustných řízení *U* je časově neměnná (obr. 4.1). Proto na optimální trajektorii $\{\boldsymbol{x}^*\}$ platí

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t}. \tag{4.13}$$

Speciálně, bude-li řízený podsystém stacionární, tj. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ a integrand v účelovém funkcionálu nebude explicitně záviset na čase *t*, tj. $f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, platí

$$\frac{dH^*}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H^* = \text{konst}. \tag{4.14}$$

Bude-li celá úloha optimálního řízení stacionární, pak $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ a ze vztahů (4.3) a (4.9) dostaneme

$$H^* = 0. \tag{4.15}$$

Zajímavá je interpretace vektoru sdružených proměnných $\boldsymbol{p}$. Z definičního vztahu (4.1) a ze vztahu (3.8) pro optimální hodnotu účelového funkcionálu J^* vyplývá

$$\boldsymbol{p}(t_0) = \left.\frac{\partial V[\boldsymbol{x}(t), t]}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{t=t_0}. \tag{4.16}$$

Vidíme, že počáteční vektor sdružených proměnných $\boldsymbol{p}(t_0) = \boldsymbol{p}_0$ vyjadřuje citlivost optimální hodnoty účelového funkcionálu J^* ke změně počátečního stavu $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Bude-li hodnota některé ze sdružených proměnných v počátečním časovém okamžiku t_0 nulová, např. $p_i(t_0) = 0$, pak optimální hodnota účelového funkcionálu J^* bude necitlivá k malým změnám počáteční hodnoty příslušné stavové proměnné, tj. $x_i(t_0)$.

Pontrjaginův princip minima můžeme tedy pro úlohu optimálního řízení (3.1) obecně formulovat ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned} &\min_{\{\boldsymbol{u}\}} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, t), \\ &\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ &\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{p}(t_N) = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{t=t_N}. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Princip minima (4.17) představuje ***nutné podmínky lokálního minima*** účelového funkcionálu, které obecně nevedou k jednoznačnému řešení nebo globálnímu minimu. Podmínky principu minima (4.17) jsou však ***nutné a postačující pro globální minimum*** účelového funkcionálu v případě, že Hamiltonova funkce H je lineární vzhledem k řízení $\boldsymbol{u}$, resp. je-li minimum Hamiltonovy funkce H^* konvexní vzhledem ke stavu $\boldsymbol{x}$ (Intriligator 1971).

Tvar optimálního řízení $\boldsymbol{u}^*$ může být velmi často určen již minimalizací Hamiltonovy funkce. Optimální řídicí proměnné jsou obyčejně určeny jako

funkce sdružených proměnných. Z tohoto důvodu je třeba nejdříve určit závislost sdružených proměnných na čase. To vede k nutnosti řešit tzv. ***dvoubodový okrajový problém*** vyjádřený soustavou kanonických rovnic s okrajovými podmínkami. Tato soustava se skládá z $2n$ obyčejných diferenciálních rovnic, z nichž pro prvních n rovnic jsou dány počáteční okrajové podmínky (vzhledem ke stavovým proměnným) a pro n zbývajících rovnic jsou dány koncové okrajové podmínky (vzhledem ke sdruženým proměnným). Připomínáme, že v úloze optimálního řízení (3.1) byl uvažován obecně volný koncový čas i volný koncový stav. Při jiných koncových podmínkách dochází ke změně, viz podkapitola 4.2.

Příklad 4.1

Pomocí principu minima vyřešíme úlohu optimálního řízení (3.34) s kvadratickým účelovým funkcionálem (Víteček 1992).

Řešení:

Sestavíme Hamiltonovu funkci

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\right)+\boldsymbol{p}^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\right), \tag{4.18}$$

pak kanonické rovnice budou mít tvar:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,, \tag{4.19a}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}}=-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\,. \tag{4.19b}$$

Minimalizujeme Hamiltonovu funkci podle řízení:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p}\,,\\ &\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^*+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}\,,\\ &\boldsymbol{u}^*=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p}\,,\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{u}^2}=\boldsymbol{R}\overset{df}{>}0 \;\Rightarrow \quad \text{ostré globální minimum.}$$

Po dosazení (4.20) do (4.19) dostaneme soustavu kanonických rovnic

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p} \tag{4.21a}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p} \tag{4.21b}$$

s okrajovými podmínkami:

počáteční $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$,

koncová $\boldsymbol{p}(t_N) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t_N)$. (4.22)

Vidíme, že řešení soustavy kanonických rovnic (4.21) představuje lineární dvoubodový okrajový problém. Jeho vyřešením získáme $\{\boldsymbol{p}^*\}$ a $\{\boldsymbol{x}^*\}$, a tedy na základě vztahu (4.20) i optimální otevřené řízení $\{\boldsymbol{u}^*\}$. Protože chceme získat optimální zpětnovazební řízení $\{\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}^*, t)\}$ předpokládejme, že vektor sdružených proměnných lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{4.23}$$

kde $\boldsymbol{K}(t)$ je symetrická matice řádu n. Tento předpoklad vychází z tvaru funkce koncových parametrů v (3.34) a ze vztahu (4.1).

Vztah (4.23) derivujeme podle času a dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{K}}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}(t)\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{4.24}$$

Dosazením (4.23) do (4.21) obdržíme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t)\right]\boldsymbol{x}, \tag{4.25a}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\left[\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}(t)\right]\boldsymbol{x}. \tag{4.25b}$$

Nyní dosadíme (4.25a) do (4.24) a dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \left[\dot{\boldsymbol{K}}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t)\right]\boldsymbol{x}. \tag{4.26}$$

Levé strany vztahů (4.25b) a (4.26) jsou stejné, a proto lze psát

$$\left[\dot{\boldsymbol{K}}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t)\right]\boldsymbol{x} = -\left[\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}(t)\right]\boldsymbol{x}.$$

Aby tento vztah platil pro libovolný stav $\boldsymbol{x}$, musí být splněna rovnost

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}(t) - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}(t) + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0} \tag{4.27}$$

při koncové okrajové podmínce $\boldsymbol{K}(t_N) = \boldsymbol{S}$. Obdrželi jsme Riccatiovu diferenciální rovnici shodnou s rovnicí (3.42) získanou pomocí dynamického programování. Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ obecně mohou mít časově proměnné prvky.

Základní vztahy principu minima jsme získali na základě dynamického programování, speciálně z Bellmanovy parciální diferenciální rovnice. Proto řešení úlohy optimálního řízení, které bude vyhovovat Bellmanově parciální diferenciální rovnici spolu s okrajovými podmínkami, současně bude vyhovovat i podmínkám principu minima. Opačné tvrzení však neplatí. Tzn. ze splnění podmínek principu minima nevyplývá, že řešení Bellmanovy parciální diferenciální rovnice existuje, protože u principu minima není nutné

předpokládat dvakrát spojitou diferencovatelnost Bellmanovy funkce podle stavu $\boldsymbol{x}$ [viz vztahy (4.5) a (4.6)].

Při analytickém řešení obě tyto metody představují zcela odlišné přístupy k řešení úloh optimálního řízení. Dynamické programování vede na nelineární parciální diferenciální rovnici a princip minima na dvě soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Princip minima je většinou účinnější, protože ve své podstatě rozděluje řešení Bellmanovy parciální diferenciální rovnice na dvě etapy. Na první etapě určí optimální řízení jako funkci sdružených proměnných a na druhé etapě sdružené proměnné určí jako funkce času. První etapa většinou nečiní žádné potíže. Dovoluje často získat i některé vlastnosti optimálního řízení, a to umožňuje určit i způsob dalšího řešení úlohy. Druhá etapa je obtížnější, protože je třeba řešit dvoubodový okrajový problém. Získané optimální řízení je otevřené.

V dynamickém programování obě etapy jsou řešeny současně, tj. řeší se většinou velmi silně nelineární Bellmanova parciální diferenciální rovnice při zadané okrajové podmínce. Získané optimální řízení je zpětnovazební. Proto při analytickém řešení princip minima je obyčejně užitečnější než dynamické programování.

Při numerickém řešení obě tyto metody vedou ke stejným výpočetním problémům. U dynamického programování je třeba najít přibližné řešení nelineární parciální diferenciální rovnice a v metodě principu minima je třeba určit přibližné řešení dvoubodového okrajového problému.

4.2 Základní úlohy

Formulace principu minima (4.17) je dosti obecná. V některých případech je třeba při řešení úloh optimálního řízení využít ještě dodatečných vlastností Hamiltonovy funkce, sdružených proměnných atd., viz předchozí podkapitola. Proto si dále systematicky uvedeme základní úlohy pro obecně nelineární stacionární řízený podsystém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{4.28a}$$

s pevným počátečním časovým okamžikem t_0 i pevným počátečním stavem $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ při různých kombinacích koncového času t_N a koncového stavu $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}(t_N)$ (Athans & Falb 1966; Csáki 1972; Víteček 1992). V tomto případě Hamiltonova funkce má tvar

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \tag{4.28b}$$

a) Úloha s volným časem i koncem

$$J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dt + F(\boldsymbol{x}_N), \tag{4.29a}$$

$$H^*(t) = H^*(t_N) = 0, \tag{4.29b}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{4.29c}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{p}(t_N) = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{t=t_N}. \tag{4.29d}$$

b) Úloha s volným časem a pevným koncem

$$J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dt, \tag{4.30a}$$

$$H^*(t) = H^*(t_N) = 0, \tag{4.30b}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N, \tag{4.30c}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad \text{žádné podmínky na } \boldsymbol{p}(t_N). \tag{4.30d}$$

c) Úloha s pevným časem a volným koncem

$$J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dt + F(\boldsymbol{x}_N), \tag{4.31a}$$

$$H^*(t) = H^*(t_N) = \text{konst}, \tag{4.31b}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{4.31c}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{p}(t_N) = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{t=t_N}. \tag{4.31d}$$

d) Úloha s pevným časem i koncem

$$J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dt\,, \tag{4.32a}$$

$$H^*(t) = H^*(t_N) = \text{konst}\,, \tag{4.32b}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N\,, \tag{4.32c}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad \text{žádné podmínky na } \boldsymbol{p}(t_N). \tag{4.32d}$$

V úlohách s volným časem dodatečné podmínky (4.29b) a (4.30b) jsou potřebné, protože v těchto úlohách vystupuje další neznámá – koncový čas t_N (viz příklad 4.4).

Příklad 4.2

Řízený podsystém

$$\dot{x} = -ax + bu\,, \quad a \geq 0\,, \quad b > 0 \tag{4.33}$$

je třeba z počátečního stavu $x(0) = x_0$ převést v daném koncovém čase t_N do koncového stavu $x(t_N) = x_N = 0$ tak, aby účelový funkcionál

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_N} \left(qx^2 + ru^2\right) dt\,; \qquad q, r > 0 \tag{4.34}$$

měl minimální hodnotu (Szklarski, Jaracz & Víteček 1989).

Řešení:

Je to základní úloha s pevným časem i koncem (4.32). Sestavíme Hamiltonovu funkci

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2}\left(qx^2 + ru^2\right) + p(-ax + bu) \tag{4.35}$$

a minimalizujeme ji podle u:

$$\frac{dH}{du} = ru + pb\,,$$

$$ru^* + pb = 0\,,$$

$$u^* = -\frac{b}{r} p\,, \tag{4.36}$$

$\frac{d^2H}{du^2} = r > 0 \;\Rightarrow\;$ ostré globální minimum.

Je zřejmé, že minimum Hamiltonovy funkce je konvexní funkcí stavu, a proto princip minima dává nutné a postačující podmínky optimality.

Určíme kanonické rovnice:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{x} = -ax + bu\,, \tag{4.37a}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p} = ap - qx\,. \tag{4.37b}$$

Po dosazení optimálního řízení (4.36) do (4.37a) v souladu s úlohou (4.32) musíme řešit soustavu kanonických rovnic

$$\dot{x} = -ax - \frac{b^2}{r}p,\; x(0) = x_0,\; x(t_N) = 0\,,$$

$$\dot{p} = ap - qx\,.$$

Eliminací sdružené proměnné p se získá jedna diferenciální rovnice 2. řádu

$$\ddot{x} - \left(a^2 + b^2\frac{q}{r}\right)x = 0 \tag{4.38}$$

při okrajových podmínkách

$$x(0) = x_0,\; x(t_N) = 0\,. \tag{4.39}$$

Kořeny její charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - \left(a^2 + b^2\frac{q}{r}\right) = 0$$

jsou

$$\lambda_{1,2} = \pm\beta\,, \qquad \beta = \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}}\,. \tag{4.40}$$

Řešení diferenciální rovnice (4.38) bude mít tedy tvar

$$x = c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}\,. \tag{4.41}$$

Neznámé konstanty c_1 a c_2 určíme z okrajových podmínek (4.39):

$$x_0 = c_1 + c_2\,,$$

$$0 = c_1 e^{\beta t_N} + c_2 e^{-\beta t_N}\,,$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} x_0 \frac{e^{-\beta t_N}}{\sinh(\beta t_N)}, \tag{4.42a}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} x_0 \frac{e^{\beta t_N}}{\sinh(\beta t_N)}. \tag{4.42b}$$

Po dosazení (4.42) do (4.41) a úpravě získáme optimální stavovou trajektorii

$$x^*(t) = x_0 \frac{\sinh[\beta(t_N - t)]}{\sinh(\beta t_N)}. \tag{4.43}$$

Optimální otevřené řízení $u^*(t)$ dostaneme na základě stavové rovnice (4.33)

$$u^* = \frac{1}{b}\left(\dot{x}^* + a x^*\right) ,$$

tj.

$$u^*(t) = \frac{x_0}{b \sinh(\beta t_N)} \{a \sinh[\beta(t_N - t)] - \beta \cosh[\beta(t_N - t)]\}. \tag{4.44}$$

Vydělením vztahu (4.44) vztahem (4.43) obdržíme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = -k_P^*(t) x^*, \tag{4.45a}$$

$$k_P^*(t) = -\frac{1}{b}\{a - \beta \operatorname{cotgh}[\beta(t_N - t)]\}, \tag{4.45b}$$

které na optimálním stavu x^* závisí lineárně. Eliminací času *t* ze vztahů (4.43) a (4.44) získáme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = \frac{1}{b}\left[a x^* - \beta \sqrt{x^{*2} + \frac{x_0^2}{\sinh^2(\beta t_N)}}\ \operatorname{sign} x^* \right], \tag{4.46}$$

které na optimálním stavu x^* závisí nelineárně. Tato závislost, na rozdíl od závislosti (4.45), je stacionární, ale závislá na počátečním stavu x_0.

Pro $t_N \to \infty$ oba vztahy (4.45) a (4.46) budou shodné

$$u^* = \frac{1}{b}(a - \beta) x^*. \tag{4.47}$$

Je to stejný výsledek jako v příkladě 3.3 pro $a < 0$, srovnej vztahy (3.107), (4.40) a (4.47).

Položíme-li ve všech vztazích $a = 0$, pak obdržíme stejné výsledky jako v příkladě 3.2 pro $s \to \infty$, viz vztahy (3.100) ÷ (3.102) a (3.104).

Příklad 4.3

Určíme optimální řízení u^* minimalizující účelový funkcionál

$$J = \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_N} ru^2 dt + sx_N^2 \right); \quad r,s > 0 \tag{4.48}$$

u řízeného podsystému

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad a,b > 0 \tag{4.49}$$

pro pevný počáteční okamžik $t_0 = 0$ i stav $x(0) = x_0$ za předpokladu, že koncový čas t_N je pevný a koncový stav $x(t_N) = x_N$ je volný (Szklarski, Jaracz & Víteček 1989).

Řešení:

Je to základní úloha s pevným časem a volným koncem (4.31). Hamiltonova funkce má tvar

$$H(x,u,p) = \frac{1}{2} ru^2 + p(-ax + bu). \tag{4.50}$$

Určíme její minimum podle u:

$$\frac{dH}{du} = ru + pb,$$

$$ru^* + pb = 0,$$

$$u^* = -\frac{b}{r} p, \tag{4.51}$$

$$\frac{d^2H}{du^2} = r > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ostré globální minimum.}$$

Protože minimum Hamiltonovy funkce je konvexní funkcí stavu, proto princip minima dává nutné a postačující podmínky optimality.

Kanonické rovnice jsou:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{x} = -ax + bu, \tag{4.52a}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p} = ap. \tag{4.52b}$$

Po dosazení optimálního řízení (4.51) do (4.52a) dostaneme [viz úloha (4.31)]

$$\dot{x} = -ax - \frac{b^2}{r} p, \qquad x(0) = x_0, \tag{4.53a}$$

$$\dot{p} = ap, \qquad p(t_N) = sx_N. \tag{4.53b}$$

Nejdříve vyřešíme diferenciální rovnici (4.53b). Její řešení má tvar

$$p = ce^{at}.$$

Z koncové okrajové podmínky dostaneme:

$$sx_N = ce^{at_N} \Rightarrow c = sx_N e^{-at_N},$$

$$p(t) = sx_N e^{a(t-t_N)}. \tag{4.54}$$

Sdruženou proměnnou (4.54) dosadíme do (4.53a) a obdržíme diferenciální rovnici

$$\dot{x} = -ax - \frac{b^2}{r} sx_N e^{a(t-t_N)}, \qquad x(0) = x_0, \tag{4.55}$$

jejíž řešení je

$$x(t) = x_0 e^{-at} - \frac{b^2}{ar} sx_N e^{-at_N} \sinh(at). \tag{4.56}$$

Z ní můžeme pro $t = t_N$ určit koncový stav

$$x_N = x(t_N) = \frac{arx_0 e^{-at_N}}{ar + b^2 se^{-at_N} \sinh(at_N)}. \tag{4.57}$$

Po dosazení (4.57) do (4.56) a úpravě dostaneme optimální stavovou trajektorii

$$x^*(t) = x_0 \left[e^{-at} - \alpha \sinh(at) \right], \tag{4.58a}$$

$$\alpha = \frac{b^2 se^{-2at_N}}{ar + b^2 se^{-at_N} \sinh(at_N)}. \tag{4.58b}$$

Optimální otevřené řízení u^* pak získáme na základě vztahů (4.51), (4.54), (4.57) a (4.58b), resp. stavové rovnice (4.49) a (4.58a):

$$u^*(t) = -\frac{a\alpha x_0}{b} e^{at}. \tag{4.59}$$

Vydělením vztahu (4.59) vztahem (4.58a) a úpravou dostaneme optimální zpětnovazební řízení

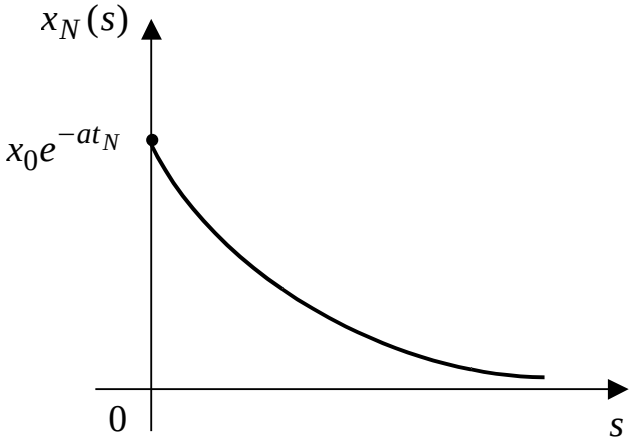
$$u^* = -k_P^*(t)x^*, \tag{4.60a}$$

$$k_P^*(t) = -\frac{2a\alpha}{b[\alpha - (2+\alpha)e^{-2at}]}, \tag{4.60b}$$

které je lineární nestacionární funkcí stavu x^*, resp. eliminací času t ze vztahů (4.58a) a (4.59) obdržíme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = \frac{a}{b}\left[x^* - \sqrt{x^{*2} + \alpha x_0^2(2+\alpha)}\ \operatorname{sign} x^* \right], \tag{4.61}$$

které je nelineární stacionární funkcí stavu x^*. Ze vztahu (4.57) vyplývá, že koncový stav x_N obecně nebude nulový. Závislost koncového stavu x_N na koeficientu s je na obr. 4.2.



Obr. 4.2. Závislost koncového stavu x_N na koeficientu s - příklad 4.3.

Uvažujme nyní dva limitní případy

a) $\boxed{s = 0 \Rightarrow \alpha = 0}$

Ze vztahů (4.58) ÷ (4.61) vyplývá, že tento případ nemá žádný praktický význam, protože $u^* = 0$, tj. řízený podsystém je vlastně neřízený (viz také příklad 3.3).

b) $\boxed{s = \infty \Rightarrow \alpha = \dfrac{e^{-at_N}}{\sinh(at_N)}}$

V tomto případě $x_N = x(t_N) = 0$ a vztahy (4.58a), (4.59), (4.60b) a (4.61) budou mít tvar:

$$x^*(t) = x_0 \frac{\sinh[a(t_N - t)]}{\sinh(at_N)}, \tag{4.62}$$

$$u^*(t) = -\frac{ax_0 e^{-a(t_N - t)}}{b \sinh(at_N)}, \tag{4.63}$$

$$k_P^*(t) = \frac{ae^{-a(t_N - t)}}{b \sinh[a(t_N - t)]}, \tag{4.64}$$

$$u^* = \frac{a}{b}\left[x^* - \sqrt{x^{*2} + \frac{x_0^2}{\sinh^2(at_N)}}\ \operatorname{sign} x^* \right]. \tag{4.65}$$

Je zřejmé, že tyto výsledky musí být shodné s výsledky příkladu 4.2 pro $q = 0 \Rightarrow \beta = a$.

Příklad 4.4

Je dán řízený podsystém

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad a, b > 0. \tag{4.66}$$

Je třeba určit řízení u^* minimalizující účelový funkcionál

$$J = \int_0^{t_N} \left(m + \frac{1}{2} ru^2 \right) dt; \qquad m, r > 0 \tag{4.67}$$

při zadaném počátečním čase $t_0 = 0$ a stavu $x_0 = x(0)$, zadaném koncovém stavu $x_N = x(t_N) = 0$ a volném koncovém čase t_N (Szklarski, Jaracz & Víteček 1989).

Řešení:

Je to základní úloha s volným časem a pevným koncem (4.30). Sestavíme Hamiltonovu funkci

$$H(x, u, p) = m + \frac{1}{2} ru^2 + p(-ax + bu) \tag{4.68}$$

a minimalizujeme ji podle u:

$$\frac{dH}{du} = ru + pb,$$

$$ru^* + pb = 0,$$

$$u^* = -\frac{b}{r} p, \tag{4.69}$$

$\frac{d^2H}{du^2} = r > 0 \;\Rightarrow\;$ ostré globální minimum.

Kanonické rovnice mají tvar:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{x} = -ax + bu\,, \quad x(0) = x_0,\;\; x(t_N) = 0\,, \tag{4.70a}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p} = ap\,. \tag{4.70b}$$

Vyřešíme sdruženou kanonickou rovnici (4.70b)

$$p = ce^{at} \tag{4.71}$$

a výsledek dosadíme do (4.69), dostaneme optimální otevřené řízení

$$u^*(t) = -\frac{bc}{r}e^{at}\,. \tag{4.72}$$

Neznámou konstantu c určíme z vlastnosti optimální hodnoty Hamiltonovy funkce na optimální trajektorii (4.30b). Dosazením (4.71) a (4.72) do (4.68) dostaneme

$$H^* = m - \frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{r}e^{2at} - acx^*e^{at}\,.$$

Pro $t = 0$ z podmínky $H^* = 0$ obdržíme kvadratickou rovnici

$$c^2 + \frac{2arx_0}{b^2}c - \frac{2mr}{b^2} = 0\,,$$

jejíž řešení je

$$c = -\frac{ar}{b^2}\left(x_0 \pm \sqrt{2\frac{b^2m}{a^2r} + x_0^2}\right). \tag{4.73}$$

V souladu se vztahem (4.72) a požadavkem stability musí platit [viz také (4.77)]

$$\left.\begin{aligned} x_0 > 0 \Rightarrow c > 0 \\ x_0 < 0 \Rightarrow c < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 c > 0\,, \tag{4.74}$$

a proto pro $x_0 > 0$ musíme ve vztahu (4.73) uvažovat znaménko plus a pro $x_0 < 0$ znaménko minus.

Optimální otevřené řízení (4.72) bude tedy mít tvar

$$u^*(t) = \frac{a}{b}\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 + 2\frac{b^2 m}{a^2 r}}\ \operatorname{sign} x_0 \right) e^{at}. \tag{4.75}$$

Koncový čas t_N určíme ze stavové rovnice (4.70a) po dosazení optimálního řízení (4.72), obdržíme diferenciální rovnici

$$\dot{x} = -ax - \frac{b^2 c}{r} e^{at}, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(t_N) = 0.$$

Její řešení (tj. optimální stavová trajektorie) je

$$x^*(t) = x_0 e^{-at} - \frac{b^2 c}{ar} \sinh(at). \tag{4.76}$$

Pro $t = t_N \Rightarrow x(t_N) = 0$, proto z rovnice

$$0 = x_0 e^{-at_N} - \frac{b^2 c}{ar} \sinh(at_N)$$

můžeme určit koncový časový okamžik

$$t_N = \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{2ar}{b^2 c} x_0 \right). \tag{4.77}$$

Protože $x_0 c > 0$ [viz vztah (4.47)], výraz v závorce je kladný, a proto rovněž koncový čas t_N bude kladný. Tato úloha optimálního řízení není kvadratická. Z tohoto důvodu optimální zpětnovazební řízení u^* nemůže být vyjádřeno jako lineární funkce stavu x^*. Eliminací času *t* ze vztahů (4.75) a (4.76) dostaneme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = \frac{a}{b}\left[x^* - \sqrt{x^{*2} + 2\frac{b^2 c}{2ar}\left(x_0 + \frac{b^2 c}{2ar} \right)}\ \operatorname{sign} x^* \right], \tag{4.78}$$

které je nelineární stacionární funkcí stavu x^*. Je třeba si uvědomit, že rovněž konstanta *c* závisí na počátečním stavu x_0, viz (4.73).

Ze vztahu (4.78) vyplývá, že realizace optimálního zpětnovazebního řízení je velmi náročná.

Koeficient *m* v účelovém funkcionálu (4.67) a volný koncový čas t_N umožnily současnou minimalizaci doby řízení i nákladů na řízení [viz energeticky a časově optimální řízení (1.76) a (1.77)].

Na základní úlohy principu minima (4.29) ÷ (4.32) pro řízený podsystém (4.28a) lze převést i obecnější úlohy. Např. uvažujme nestacionární úlohu optimálního řízení s volným časem a pevným koncem:

$$\left.\begin{aligned} &J^* = \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)dt, \\ &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), \\ &\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné}, \\ &\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N, \qquad t_N - \text{volný}, \ \boldsymbol{x}_N - \text{pevný}. \end{aligned}\right\} \tag{4.79}$$

Zavedením pomocné stavové proměnné x_{n+1} vztahy

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1, \quad x_{n+1}(t) = t \tag{4.80}$$

lze stavovou rovnici a účelový funkcionál zapsat ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, x_{n+1}, \boldsymbol{u}), \\ &\dot{x}_{n+1} = 1, \end{aligned}\right\} \tag{4.81}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, x_{n+1}, \boldsymbol{u})dt. \tag{4.82}$$

Okrajové podmínky budou:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ &x_{n+1}(t_0) = t_0 \end{aligned}\right\} \text{ pevné}, \tag{4.83}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N \qquad \text{pevný}, \\ &x_{n+1}(t_N) = t_N \qquad \text{volný}. \end{aligned}\right\} \tag{4.84}$$

Vidíme, že došlo k rozšíření stavu $\boldsymbol{x}$ o jednu složku x_{n+1} a že obdržená úloha je základní úlohou s volným časem i koncem (4.29). Došlo ke změně koncových podmínek v důsledku volné složky $x_{n+1}(t_N) = t_N$.

4.3 Reléové řízení

Pro praxi má velký význam ***reléové řízení*** nazývané také „***bang – bang***“ nebo „***mantinelové řízení***“ (Sage & White 1977). Takové řízení se velmi jednoduše realizuje, protože řídicí proměnné nabývají buď svých maximálních, nebo minimálních přípustných hodnot. Úloha optimálního řízení má v tomto případě tvar:

$$\left.\begin{aligned} J^* &= \min_{\{\boldsymbol{u}\}}\left\{\int_{t_0}^{t_N}\left[f_0(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}\right]dt + F(\boldsymbol{x}_N,t_N)\right\} \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0, \qquad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné}, \\ \boldsymbol{x}(t_N) &= \boldsymbol{x}_N, \qquad t_N \text{ i } \boldsymbol{x}_N \text{ obecně volné}, \\ a_i &\le u_i \le b_i; \qquad i = 1,2,\ldots,r, \end{aligned}\right\} \tag{4.85}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je spojitě diferencovatelná vektorová funkce, $\boldsymbol{G}$ - matice typu (n,r), jejíž prvky jsou spojitě diferencovatelné funkce.

Tato úloha optimálního řízení je zvláštní tím, že ve stavové diferenciální rovnici i v integrandu vystupuje lineární závislost na řízení $\boldsymbol{u}$. Proto také Hamiltonova funkce H závisí na řízení $\boldsymbol{u}$ lineárně:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t) = f_0(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}^T\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}\right]. \tag{4.86}$$

Z tohoto důvodu princip minima dává nutné a postačující podmínky optimality.

Lineární závislost Hamiltonovy funkce na řízení způsobuje, že její globální minimum vystupuje, když

$$u_i = \begin{cases} a_i & \text{pro } \left\{\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)\right\}_i > 0 \\ b_i & \text{pro } \left\{\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)\right\}_i < 0 \end{cases}. \tag{4.87}$$

V případě, že

$$\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{0}, \tag{4.88}$$

pak Hamiltonova funkce nezávisí na řízení $\boldsymbol{u}$, a proto nemůže být ani podle $\boldsymbol{u}$ minimalizována. Pokud vektorová rovnice (4.88) platí nejenom v izolovaných časových okamžicích, ale i na celých intervalech, pak řešení úlohy optimálního řízení je ***singulární***. Singulární řešení může mít pouze určitá složka řízení u_i, tj. když i-tá složka vektorové rovnice (4.88) je nulová.

Speciálním případem úloh na reléové řízení jsou časově optimální úlohy.

Příklad 4.5

Řízený podsystém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{4.89}$$

je třeba z počátečního stavu $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ převést do koncového stavu $\boldsymbol{x}(t_N)=\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ v co nejkratší době. Předpokládá se, že řízení je omezeno nerovností

$$|u(t)|\le 1. \tag{4.90}$$

Řešení:

Je to typická časově optimální úloha. Sestavíme Hamiltonovu funkci [viz (1.76b)]

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},u)=1+p_1x_2+p_2u \tag{4.91}$$

a najdeme její minimum podle řízení *u*. Dostaneme

$$u^*=-\operatorname{sign} p_2. \tag{4.92}$$

Určíme kanonické rovnice:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1=x_2,\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}(t_N)=\boldsymbol{0},\\ \dot{x}_2=u,\end{array}\right\} \tag{4.93}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dot{p}_1=0,\\ \dot{p}_2=-p_1,\end{array}\right\} \tag{4.94}$$

Sdružené kanonické rovnice vyřešíme

$$\left.\begin{array}{l}p_1=c_1,\\ p_2=-c_1t+c_2.\end{array}\right\} \tag{4.95}$$

Konstanty c_1 a c_2 jsou počáteční podmínky pro sdružené proměnné p_1 a p_2. Nemohou být libovolné, jsou určeny podmínkou $\boldsymbol{x}(t_N)=\boldsymbol{0}$. Optimální otevřené řízení u^* tedy v souladu s (4.92) a (4.95) bude

$$u^*(t)=-\operatorname{sign}(c_2-c_1t). \tag{4.96}$$

Je zřejmé, že ke změně řízení – „přepnutí“ může dojít maximálně jednou.

Pro $u = 1$ je řešení stavových rovnic (4.89)

$$\begin{aligned}x_2&=t+x_2(0),\\ x_1&=\frac{t^2}{2}+x_2(0)t+x_1(0).\end{aligned} \tag{4.97}$$

Po eliminaci času *t* dostaneme rovnici stavové trajektorie

$$x_1=\frac{x_2^2}{2}+x_1(0)-\frac{x_2^2(0)}{2}. \tag{4.98}$$

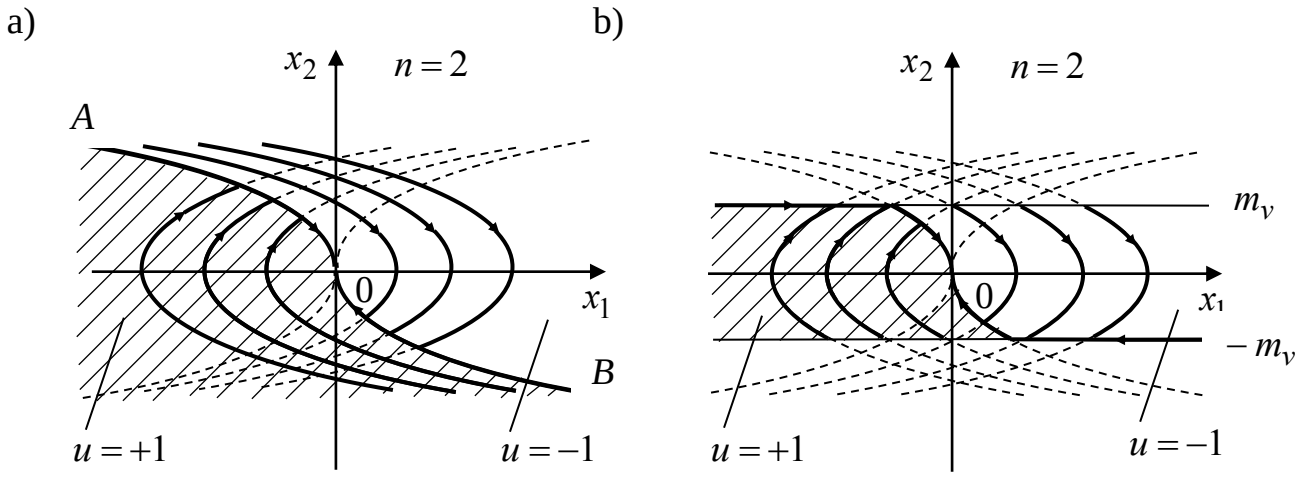
Pro $u=-1$ řešení stavových rovnic (4.89) je

$$x_2 = -t + x_2'(0),$$
$$x_1 = -\frac{t^2}{2} + x_2'(0)t + x_1'(0). \tag{4.99}$$

Po eliminaci času *t* zase dostaneme rovnici stavové trajektorie

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + x_1'(0) + \frac{x_2'^2(0)}{2}. \tag{4.100}$$

Vidíme, že stavové trajektorie jsou tvořeny úseky parabol (4.98) a (4.100), viz obr. 4.3a. Části parabol, které nepatří optimálním stavovým trajektoriím, jsou čárkované. Šrafovaná plocha odpovídá $u=+1$ a nešrafovaná $u=-1$, počáteční podmínky $x_1(0)$ a $x_2(0)$, resp. $x_1'(0)$ a $x_2'(0)$ ve vztazích (4.97) a (4.98), resp. (4.99) a (4.100) jsou dány počátečním stavem $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ a podmínkami spojitosti stavové trajektorie na přepínací křivce *A*0*B*. Bude-li počáteční stav $\boldsymbol{x}_0$ ležet ve šrafované oblasti, pak počáteční optimální řízení bude $u^*=+1$ a když stavová trajektorie dojde na přepínací křivku *A*0, nastoupí přepnutí na řízení $u^*=-1$ a další průběh až do koncového stavu $\boldsymbol{x}(t_N)=\boldsymbol{0}$ je shodný s průběhem přepínací křivky *A*0. Bude-li počáteční stav $\boldsymbol{x}_0$ ležet v nešrafované oblasti, pak optimální stavová trajektorie je určená počátečním optimálním řízením $u^*=-1$, na přepínací křivce *B*0 dojde k přepnutí řízení na $u^*=+1$ a další průběh optimální stavové trajektorie je shodný s přepínací křivkou *B*0. Bude-li počáteční stav $\boldsymbol{x}_0$ ležet na přepínací křivce *A*0*B*, pak průběh optimální stavové trajektorie je plně určen odpovídajícím úsekem přepínací křivky a počátečním řízením, které pro úsek *A*0 je $u^*=-1$ a pro úsek *B*0 $u^*=+1$. V tomto případě



Obr. 4.3. Příklad 4.5 – optimální stavové trajektorie: bez omezení rychlosti – (a), s omezením rychlosti – (b)

k přepnutí řízení nedochází. Optimální dobu převodu $t^* = t_N$ ze stavu $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ do koncového stavu $\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{0}$ lze určit např. na základě vztahů (4.97) a (4.99) nebo podobným způsobem jak v příkladech 1.2 a 1.4.

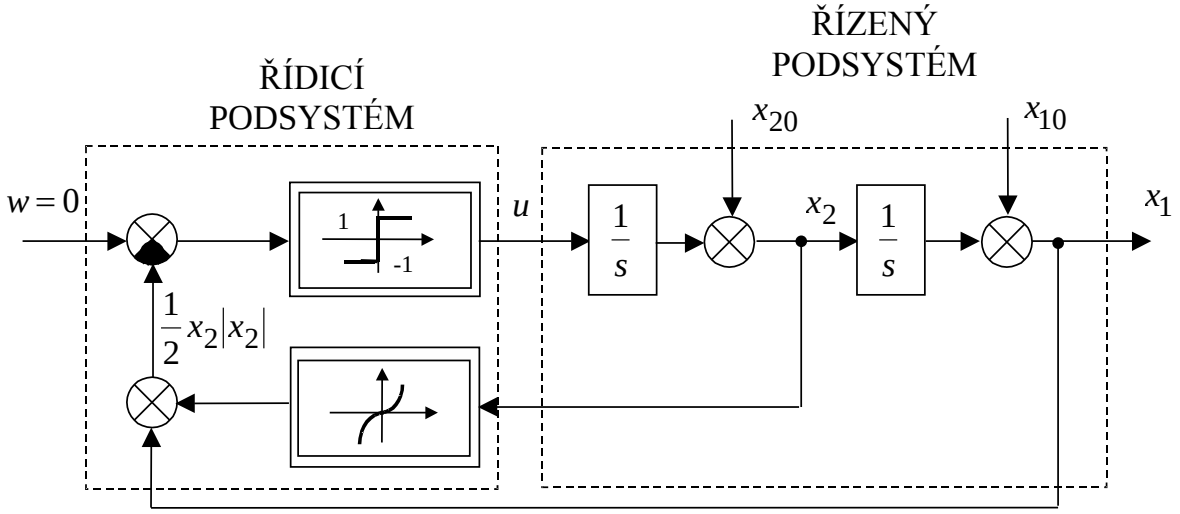
Optimální zpětnovazební řízení u^* můžeme určit na základě obr. 4.3:

$$u^* = \begin{cases} +1 \begin{cases} \text{pro } x_1^* + \dfrac{x_2^{*2}}{2} < 0 \quad \text{a} \quad x_2^* \geq 0 \\ \text{nebo pro } x_1^* - \dfrac{x_2^{*2}}{2} \leq 0 \quad \text{a} \quad x_2^* < 0 \end{cases} \\ -1 \begin{cases} \text{pro } x_1^* + \dfrac{x_2^{*2}}{2} \geq 0 \quad \text{a} \quad x_2^* > 0 \\ \text{nebo pro } x_1^* - \dfrac{x_2^{*2}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad x_2^* \leq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.101}$$

Vztah (4.101) můžeme zapsat v přehledném kompaktním tvaru

$$u^* = -\operatorname{sign}\left(x_1^* + \frac{1}{2} x_2^* \left| x_2^* \right| \right). \tag{4.102}$$

Strukturní blokové schéma odpovídajícího časově optimálního systému řízení je na obr. 4.4.



Obr. 4.4. Strukturní blokové schéma časově optimálního systému řízení z příkladu 4.5

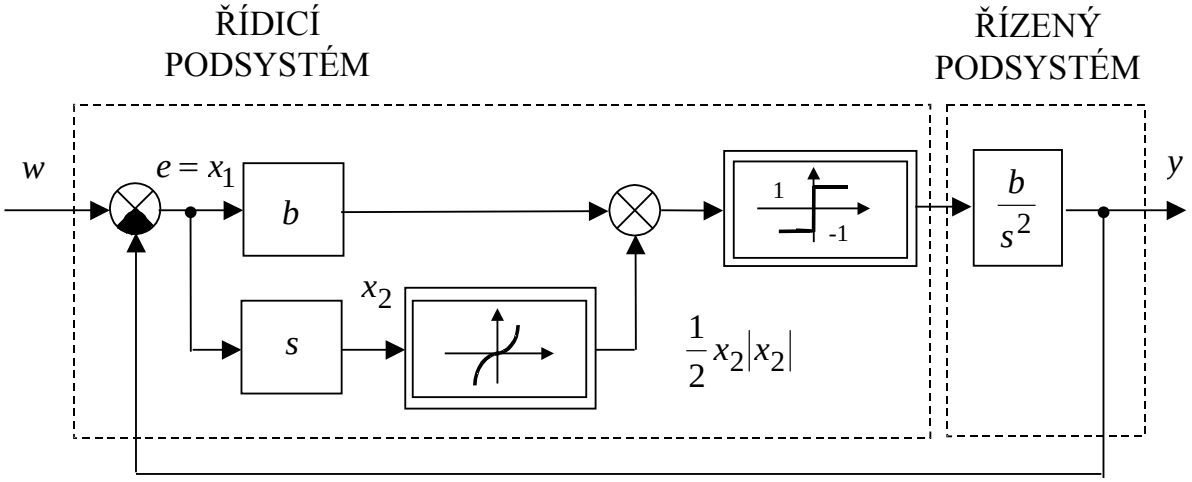
Obdržený systém řízení lze rovněž interpretovat jako časově optimální regulační obvod pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t) = w_0 \eta(t)$ s nelineárním regulátorem (řídicím podsystémem)

$$u^*(t) = \operatorname{sign}\left[be(t) + \frac{1}{2}\dot{e}(t)|\dot{e}(t)| \right] \tag{4.103}$$

a regulovanou soustavou (řízeným podsystémem) s přenosem (obr. 4.5)

$$G_S(s) = \frac{b}{s^2}. \tag{4.104}$$

Zajímavé je srovnání tohoto systému regulace (obr. 4.5) se systémem regulace z příkladu 1.2 (obr. 1.12). V příkladě 1.2 při použití lineárního regulátoru PD bylo nutno pro každou hodnotu skoku polohy žádané veličiny w_0 určit optimální hodnotu derivační časové konstanty T_D^* [viz vztah (1.51)]. Naproti tomu při použití optimálního nelineárního algoritmu (4.103) je automaticky zajištěna minimální doba regulace (převodu) $t^* = t_N$.



Obr. 4.5. Strukturní blokové schéma časově optimálního regulačního obvodu z příkladu 4.5

V případě omezení rychlosti stavové proměnné x_1, tj. pro $\dot{x}_1 = x_2$

$$|x_2| \le m_v \tag{4.105}$$

lze postupovat podobně jako v příkladě 1.5. Průběh optimálních stavových trajektorií je ukázán na obr. 4.3b (pro $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$). Při průběhu zastupujícího bodu $\boldsymbol{x}(t)$ na úsecích $|x_2| = m_v$ optimální řízení je $u^* = 0$, viz obr. 1.19f a obr. 1.20b.

Pontrjaginův princip minima je také často formulován v původní formě principu maxima, který se od principu minima odlišuje v podstatě pouze formálně. Výhoda principu minima spočívá v těsné souvislosti s Hamiltonovým principem, Bellmanovým dynamickým programováním a hlavně v jednotném přístupu k řešení úloh optimálního řízení (Athans & Falb 1966).

5 VARIAČNÍ POČET

Dynamické programování i Pontrjaginův princip minima jsou podstatně obecnější a účinnější než klasický ***variační počet***, jehož základní vztahy získáme z Bellmanovy parciální diferenciální rovnice. V některých konkrétních případech použití variačního počtu je rychlejší a jednodušší (Elsgolc 1969; Hanuš 1978; Hsu & Mayer 1967; Intriligator 1971; Lewis & Syndros 1995; Víteček 1992).

5.1 Eulerova – Lagrangeova diferenciální rovnice

Úloha klasického variačního počtu může být považována za zvláštní případ optimálního řízení, ve které

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}, \\ &\boldsymbol{x}(t) \in R^n, \\ &\boldsymbol{u}(t) \in R^n, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

tj. řízení a stav nejsou omezeny.

Uvažujme úlohu variačního počtu s účelovým funkcionálem v Lagrangeově tvaru s pevným časem i koncem

$$J^* = \min_{\{\dot{\boldsymbol{x}}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt, \tag{5.2a}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné}, \tag{5.2b}$$

$$\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N, \qquad t_N \text{ i } \boldsymbol{x}_N \text{ pevné}, \tag{5.2c}$$

kde $\boldsymbol{x}$ je spojitá časová funkce, $\dot{\boldsymbol{x}}$ - po částech spojitá časová funkce.

Předpokládejme, že úloha (5.2) má řešení. Bellmanova parciální diferenciální rovnice pro tuto úlohu v souladu s (5.1) má tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{\{\dot{\boldsymbol{x}}\}} \left[f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \dot{\boldsymbol{x}} \right]. \tag{5.3}$$

Z nutné podmínky minima výrazu v lomených závorkách dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \left[f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \dot{\boldsymbol{x}} \right] = \boldsymbol{0},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{5.4}$$

Vztah (5.4) totálně derivujeme podle času *t*, tj.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{5.5}$$

Bellmanovu parciální diferenciální rovnici (5.3) pro optimální $\dot{\boldsymbol{x}}$ (z důvodu přehlednosti nebudeme označovat hvězdičkou) derivujeme podle $\boldsymbol{x}$ a dostaneme

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x} \partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{5.6}$$

Předpokládáme, že Bellmanova funkce V je dvakrát spojitě diferencovatelná, nezáleží proto na pořadí derivování, a proto vztahy (5.5) a (5.6) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\dot{\boldsymbol{x}},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\dot{\boldsymbol{x}}.$$

Pravé strany obou vztahů jsou shodné, platí tedy

$$\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{5.7}$$

Dostali jsme ***Eulerovu-Lagrangeovu diferenciální rovnici***, která spolu s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{x}(t_N) &= \boldsymbol{x}_N \end{aligned} \tag{5.8}$$

vyjadřuje ***nutné podmínky minima*** účelového funkcionálu (5.2a).

Spojitá časová funkce $\{\boldsymbol{x}(t)\}$, která vyhovuje Eulerově-Lagrangeově diferenciální rovnici (5.7) spolu s okrajovými podmínkami (5.8) se nazývá ***extremála*** (stacionála, kritikála). Extremála $\{\boldsymbol{x}\}$ může být optimální stavovou trajektorií $\{\boldsymbol{x}^*\}$, ale také nemusí jí být. Tzn. pokud úloha variačního počtu má řešení, pak toto řešení musí být extremálou.

Z nutné podmínky 2. řádu pro minimum výrazu v lomených závorkách rovnice (5.3) obdržíme:

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^2}\left[f_0(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \dot{\boldsymbol{x}} \right] = \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^2},$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^2} \overset{df}{\geq} 0. \tag{5.9}$$

Dostali jsme ***Legendreovu nutnou podmínku minima*** účelového funkcionálu (5.2a). V případě kladné definitnosti je to ***zesílená Legendreova nutná podmínka minima***.

Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice spolu s okrajovými podmínkami a Legendreova podmínka představují nutné podmínky pro slabé minimum. Protože však každé slabé minimum je současně silným minimem, jsou to rovněž nutné podmínky pro silné minimum (viz kap. 1.1 a příklad 5.1).

Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice spolu s okrajovými podmínkami je rovněž nutnou podmínkou pro slabé (silné) maximum. U Legendreovy nutné podmínky je třeba v případě maxima uvažovat opačnou definitnost.

Eulerovu-Lagrangeovu diferenciální rovnici (5.7) a okrajové podmínky (5.8) můžeme zapsat složkově:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \\ &x_i(t_0) = x_{i0}, \\ &x_i(t_N) = x_{iN}, \\ &i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Protože $\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}$ je funkcí x_i, $\dot{x}_i$ a t, po provedení totální derivace podle času t v (5.10) obdržíme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_i^2}\ddot{x}_i + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial \dot{x}_i} - \frac{\partial f_0}{\partial x_i} = 0, \\ &x_i(t_0) = x_{i0},\ x_i(t_N) = x_{iN},\ i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Vidíme, že Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice (5.7) představuje vlastně soustavu n obyčejných obecně nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu, kterou je třeba řešit při $2n$ okrajových podmínkách. Proto řešení (extremála) Eulerovy-Lagrangeovy diferenciální rovnice má tvar

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, t), \tag{5.12}$$

kde vektory konstant $\boldsymbol{c}_1 = [c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}]^T$ a $\boldsymbol{c}_2 = [c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}]^T$ se určí z n počátečních podmínek

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, t_0), \tag{5.13a}$$

a z n koncových podmínek

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, t_N). \tag{5.13b}$$

Důležitý je případ, kdy integrand v účelovém funkcionálu (5.2a) nezávisí explicitně na čase t, tj.

$$f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}). \tag{5.14}$$

V tomto případě Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice (5.11) má tvar

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_i^2} \ddot{x}_i + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - \frac{\partial f_0}{\partial x_i} = 0 .$$

Vynásobíme-li tuto rovnici výrazem $\dot{x}_i$, pak na levé straně dostaneme totální derivaci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - f_0 \right). \tag{5.15}$$

Proveďme naznačenou operaci totální derivace (5.15) a dostaneme:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial \dot{x}_i} \dot{x}_i^2 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_i^2} \ddot{x}_i \dot{x}_i + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i - \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i =$$

$$= \dot{x}_i \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_i^2} \ddot{x}_i + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \right).$$

Vidíme tedy, že v souladu s (5.15) Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice v tomto případě bude

$$\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - f_0 = c_{i1}, \tag{5.16}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde c_{i1} jsou konstanty.

Příklad 5.1

Řízený podsystém

$$\dot{x} = bu, \qquad b > 0 \tag{5.17}$$

je třeba z počátečního stavu $x(0)=0$ převést do koncového stavu $x(1)=1$ tak, aby účelový funkcionál

$$J=\int_0^1 \frac{1}{\dot{x}}\,dt \tag{5.18}$$

měl minimální hodnotu (Víteček 1992).

Řešení:

Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

pro $f_0=\frac{1}{\dot{x}}$ má tvar

$$\ddot{x}=0.$$

Její řešení získáme postupnou integrací

$$\dot{x}=c_1, \tag{5.19}$$

$$x=c_1 t+c_2. \tag{5.20}$$

Protože integrand f_0 nezávisí explicitně na čase *t*, mohli jsme využít vztahu (5.16) a Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice by měla přímo ekvivalentní tvar (5.19). Je zřejmé, že okrajovým podmínkám $x(0)=0$ a $x(1)=1$ vyhovují konstanty $c_1=1$ a $c_2=0$, tj. stavová trajektorie (5.20) bude

$$x^*(t)=t. \tag{5.21}$$

Na základě stavové rovnice (5.17) snadno určíme i otevřené řízení

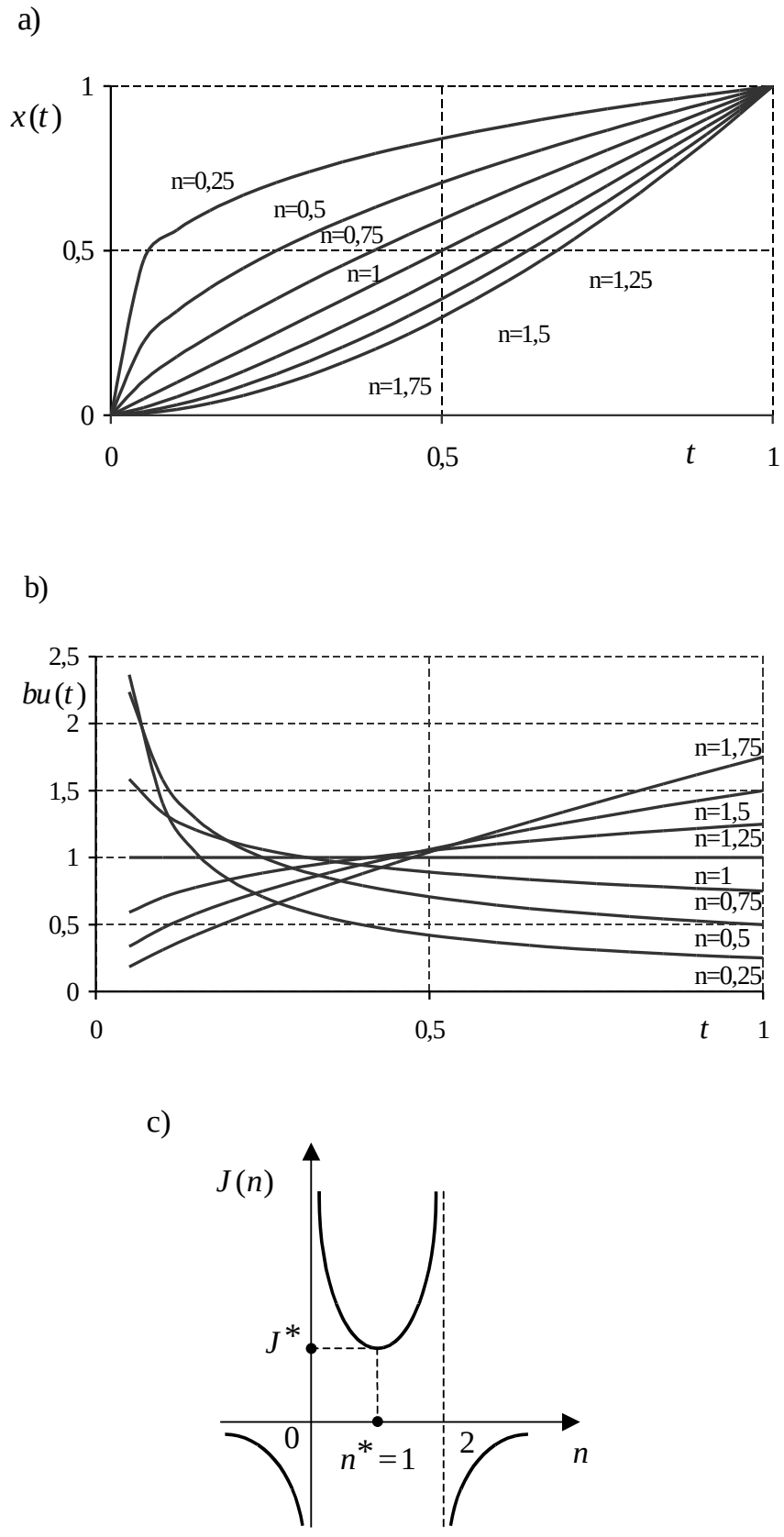
$$u^*(t)=\frac{1}{b}. \tag{5.22}$$

Určíme i odpovídající hodnotu účelového funkcionálu (5.18)

$$J^*=\int_0^1 \frac{1}{\dot{x}^*}\,dt=\int_0^1 dt=1. \tag{5.23}$$

Pro trajektorii (5.21) je také splněna zesílená Legendreova nutná podmínka

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2}=2\frac{1}{\dot{x}^3}\bigg|_{\dot{x}^*=1}=2>0. \tag{5.24}$$



Obr. 5.1. Příklad 5.1: průběhy stavových trajektorií – (a), průběhy řízení – (b), průběh účelové funkce – (c)

I když z podstaty úlohy přímo nevyplývá, že minimum existuje, obdržené řízení (5.22) a odpovídající trajektorie (5.21) zajišťují slabé minimum funkcionálu (5.18). Uvažujme např. hladké stavové trajektorie

$$x(t)=t^n, \qquad n\in(0,2) \tag{5.25}$$

vyhovující okrajovým podmínkám $x(0)=0$ a $x(1)=1$ z blízkého okolí trajektorie (5.21), viz obr. 5.1a. V souladu se stavovou rovnicí (5.17) trajektoriím (5.25) odpovídá otevřené řízení (obr. 5.1b)

$$u(t)=\frac{n}{b}t^{n-1}, \qquad n\in(0,2). \tag{5.26}$$

Pro stavové trajektorie (5.25) účelový funkcionál (5.18) bude účelovou funkcí závislou na mocniteli *n* (obr. 5.1c)

$$J(n)=\int_0^1 \frac{dt}{nt^{n-1}}=\frac{1}{n(2-n)}. \tag{5.27}$$

Určíme minimum funkce (5.27):

$$\frac{dJ}{dn}=-\frac{1}{n^2(2-n)}+\frac{1}{n(2-n)^2},$$

$$-\frac{1}{n^{*2}(2-n^*)}+\frac{1}{n^*(2-n^*)^2}=0\Rightarrow n^*=1, \tag{5.28}$$

$$\left.\frac{d^2J}{dn^2}\right|_{n^*=1}=2>0\Rightarrow \text{ostré globální minimum}$$

$$J^*=J(n^*)=1. \tag{5.29}$$

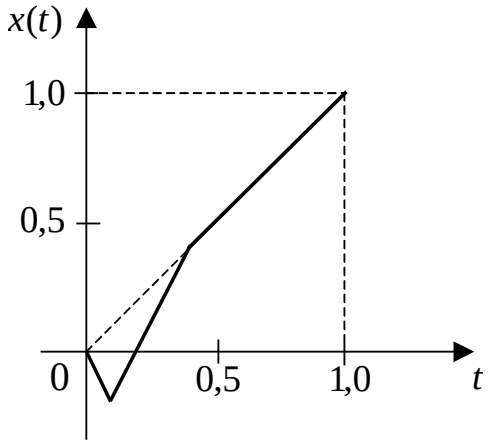
Vidíme, že stavová trajektorie (5.21) skutečně minimalizuje účelový funkcionál (5.18). Je to ale slabé minimum, protože např. na stavové trajektorii (obr. 5.2)

$$x(t)=\begin{cases}-2t & \text{pro} \quad 0\le t<0{,}1\\ -0{,}2+2(t-0{,}1) & \text{pro} \quad 0{,}1\le t<0{,}4\\ t & \text{pro} \quad 0{,}4\le t\le 1\end{cases} \tag{5.30}$$

hodnota účelového funkcionálu (5.18) je

$$J=\int_0^{0{,}1}\frac{1}{-2}dt+\int_{0{,}1}^{0{,}4}\frac{1}{2}dt+\int_{0{,}4}^{1}dt=0{,}7. \tag{5.31}$$

Silné minimum účelového funkcionálu (5.18) neexistuje. Tento příklad ukazuje, že je velmi důležité uvažovat třídu funkcí, ve které se hledá optimální stavová trajektorie.



Obr. 5.2. Stavová trajektorie po částech hladká – příklad 5.1

Příklad 5.2

Řízený podsystém

$$\dot{x} = -ax + bu; \qquad a,b > 0 \tag{5.32}$$

je třeba převést z počátečního stavu $x(0) = x_0$ v okamžiku t_N do koncového stavu $x(t_N) = x_N = 0$ tak, aby účelový funkcionál

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_N} \dot{x}^2 dt \tag{5.33}$$

měl minimální hodnotu (Víteček 1992).

Řešení:

Je to úloha na energeticky optimální řízení (energie = $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$). Z Eulerovy – Lagrangeovy diferenciální rovnice

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

pro $f_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ dostaneme homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\ddot{x} = 0,$$

jejíž řešení získáme postupnou integrací

$$\dot{x} = c_1,$$

$$x = c_1 t + c_2 . \tag{5.34}$$

Neznámé konstanty určíme z okrajových podmínek

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= c_2 \\ 0 &= c_1 t_N + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} c_1 &= -\frac{x_0}{t_N} . \\ c_2 &= x_0 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Protože je splněna zesílená Legendreova nutná podmínka pro minimum

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2} = 1 > 0 ,$$

z fyzikální podstaty úlohy optimálního řízení lze předpokládat existenci minima účelového funkcionálu (5.33) a řešení Eulerovy-Lagrangeovy diferenciální rovnice vyhovující okrajovým podmínkám je jediné, proto v souladu s (5.34) a (5.35) optimální stavová trajektorie $\{x^*(t)\}$ je dána vztahem (obr. 5.3a)

$$x^*(t) = -\frac{x_0}{t_N} t + x_0 . \tag{5.36}$$

Optimální otevřené řízení $\{u^*(t)\}$ obdržíme dosazením (5.36) do stavové rovnice (5.32) a úpravou (obr. 5.3b)

$$u^*(t) = -\frac{a x_0}{b}\left(\frac{t}{t_N} + \frac{1}{a t_N} - 1\right). \tag{5.37}$$

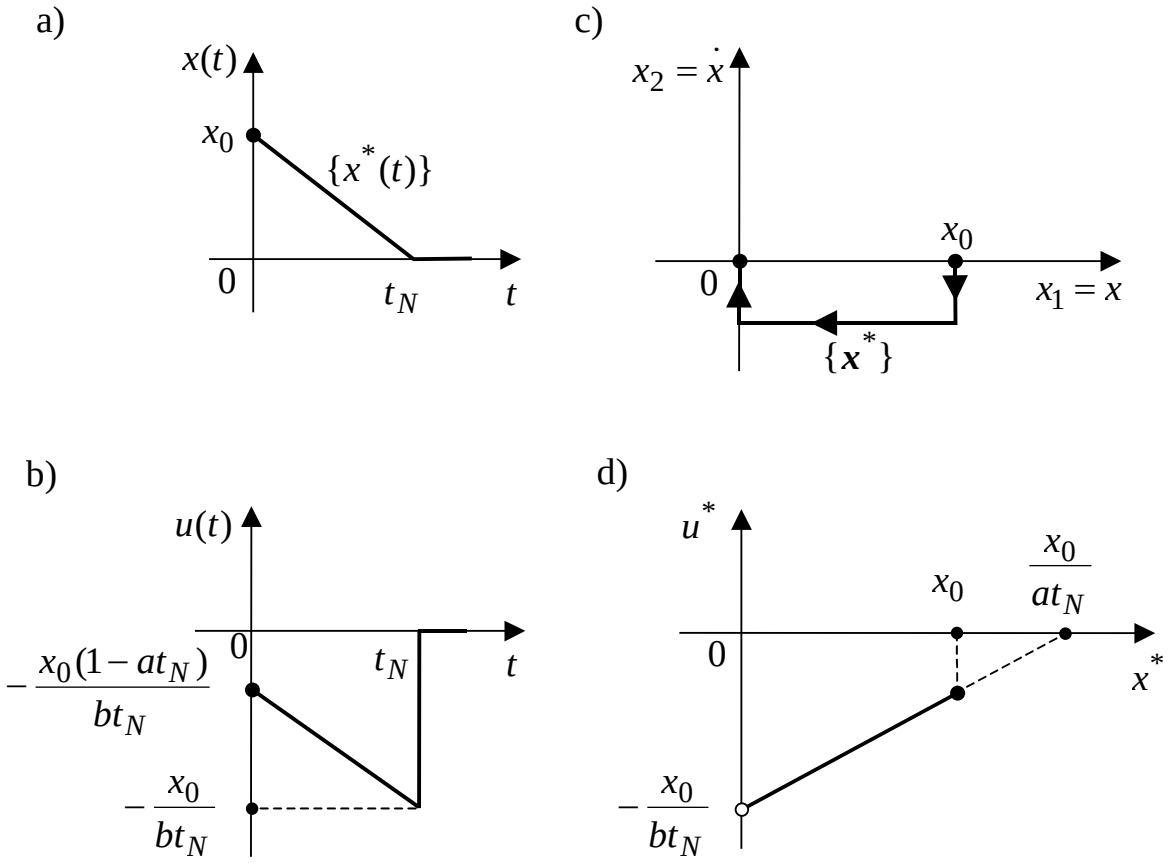
Určíme minimální hodnotu účelového funkcionálu (5.33)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_N} \dot{x}^{*2} dt = \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{t_N^2}\int_0^{t_N} dt = \frac{x_0^2}{2 t_N} . \tag{5.38}$$

Eliminací času t ze vztahů (5.36) a (5.37) dostaneme optimální zpětnovazební řízení (obr. 5.3d)

$$u^* = \frac{a}{b}\left(x^* - \frac{x_0}{a t_N}\right). \tag{5.39}$$

Optimální stavová trajektorie $\{\boldsymbol{x}^*\}$ je na obr. 5.3c.



Obr. 5.3. Příklad 5.2 – optimální průběh: stavové proměnné – (a), otevřeného řízení – (b), stavové trajektorie – (c), zpětnovazebního řízení – (d)

Při formulaci úlohy variačního počtu (5.2) se předpokládalo, že účelový funkcionál (5.2a) se minimalizuje podle $\dot{\boldsymbol{x}}$. Vyplývalo to z toho, že se vycházelo ze vztahů (5.1) a ze souvislostí s dynamickým programováním. Protože mezi $\dot{\boldsymbol{x}}$ a $\boldsymbol{x}$ je jednoznačná závislost (až na konstanty), klasická úloha variačního počtu s pevným časem i koncem se nejčastěji formuluje ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned} &J^* = \min_{\{\boldsymbol{x}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0\left(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t\right) dt \\ &\boldsymbol{x}\left(t_0\right) = \boldsymbol{x}_0, \quad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné,} \\ &\boldsymbol{x}\left(t_N\right) = \boldsymbol{x}_N, \; t_N \text{ i } \boldsymbol{x}_N \text{ pevné.} \end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

5.2 Úlohy variačního počtu s omezením

V podkapitole 5.1 úlohy variačního počtu byly uvažovány bez vedlejších omezujících podmínek. Nejdříve se určila optimální stavová trajektorie a pak na

jejím základě se ze stavové diferenciální rovnice určilo optimální otevřené řízení. Úloha variačního počtu může být zformulována přímo s uvažováním příslušného omezení. Např. uvažujme úlohu variačního počtu s diferenciálním omezením, s pevným časem i koncem:

$$J^* = \min_{\{\boldsymbol{x}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt, \tag{5.41a}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \boldsymbol{0}, \quad m \le n, \tag{5.41b}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0, \ t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné}, \\ \boldsymbol{x}(t_N) &= \boldsymbol{x}_N, \ t_N \text{ i } \boldsymbol{x}_N \text{ pevné}, \end{aligned} \tag{5.41c}$$

kde $\boldsymbol{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_m]^T$ je spojitě diferencovatelná vektorová funkce vyjadřující vztah mezi stavem, jeho změnou v čase a časem.

Je zřejmé, že omezením (5.41b) může být např. stavová diferenciální rovnice. V tomto případě *m* = *n*.

Úlohu variačního počtu s diferenciálním omezením (5.41) lze řešit ***Lagrangeovou metodou***. Sestaví se tzv. ***Lagrangeova funkce***

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{p}, t) = f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t), \tag{5.42}$$

kde $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_m]^T$ je ***vektor Lagrangeových součinitelů*** (multiplikátorů) – obecně je to vektorová časová funkce.

Za předpokladu, že hodnost Jacobiovy matice

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \tag{5.43}$$

je rovna *m*, úlohu variačního počtu s omezením (5.41) lze zastoupit úlohou bez omezení s účelovým funkcionálem

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_N} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{p}, t)dt. \tag{5.44}$$

Protože optimální řešení musí vyhovovat omezení (5.41b), proto platí

$$f_0(\boldsymbol{x}^*, \dot{\boldsymbol{x}}^*, t) = L(\boldsymbol{x}^*, \dot{\boldsymbol{x}}^*, \boldsymbol{p}^*, t), \tag{5.45}$$

a tedy musí platit rovněž

$$J^* = J_1^*. \tag{5.46}$$

Pro úlohu s účelovým funkcionálem (5.44) Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice bude mít tvar dvou vektorových rovnic

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \boldsymbol{0}, \\ &\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}}\right) = \boldsymbol{0}. \end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

Protože Lagrangeova funkce L nezávisí na $\dot{\boldsymbol{p}}$, druhá rovnice v (5.47) vyjadřuje omezení (5.41b), proto ***nutné podmínky minima*** v tomto případě budou

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ &\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N . \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Celkový počet rovnic je $n + m$, na jejich základě se určí $n + m$ neznámých časových funkcí $\{x_i(t)\}$ a $\{p_j(t)\}$. K určení $2n$ neznámých konstant slouží $2n$ okrajových podmínek, které nesmí být ve sporu s omezením (5.41b).

Zvláštním případem omezení (5.41b) je integrální omezení

$$\int_{t_0}^{t_N} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt = \boldsymbol{b}, \tag{5.49}$$

kde $\boldsymbol{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_m]^T$ je spojitě diferencovatelná vektorová funkce, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^T$ - vektor zadaných konstant.

Postup v tomto případě je podobný jako v předchozí úloze (5.41), tj. Lagrangeova funkce L má tvar (5.42), ale vektor Lagrangeových součinitelů $\boldsymbol{p}$ je konstantní a m může být větší než n. ***Nutné podmínky minima*** budou mít tvar:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \boldsymbol{0}, \\ &\int_{t_0}^{t_N} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt = \boldsymbol{b}, \\ &\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ &\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N . \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

Úlohy variačního počtu tohoto typu se nazývají ***izoperimetrické úlohy*** a integrální omezení (5.49) ***izoperimetrické podmínky***. Svůj název dostaly podle klasické úlohy získání mezi křivkami konstantní délky takové křivky, která

ohraničuje největší plošný obsah (perimetr = obvod rovinného obrazce). U izoperimetrických úloh platí tzv. ***princip reciprocity*** (duality), podle kterého platí (pro jednoduchost uvažujeme $m = 1$): „Minimalizuje-li $\{\boldsymbol{x}\}$ funkcionál J při podmínce $b = konst$, pak $\{\boldsymbol{x}\}$ maximalizuje b při podmínce $J = konst$". Např. křivka konstantní délky ohraničující maximální plošný obsah je současně křivka nejmenší délky ohraničující daný plošný obsah. Takovou křivkou je kružnice.

V úlohách variačního počtu často v účelových funkcionálech vystupují vyšší derivace podle času. Uvažujme např. úlohu variačního počtu s pevným časem i koncem:

$$J^* = \min_{\{x\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0\left(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots,x^{(n)},t\right)dt\,, \tag{5.51a}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, & x(t_N) &= x_N,\\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, & \dot{x}(t_N) &= \dot{x}_N,\\ &\vdots & &\vdots\\ x^{(n-1)}(t_0) &= x_0^{(n-1)}, & x^{(n-1)}(t_N) &= x_N^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.51b}$$

Tuto úlohu lze převést na úlohu (5.41) a pak vyřešit. Zaveďme nové proměnné pomocí vztahů:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x,\\ \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{x},\\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{x},\\ &\vdots\\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = x^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

Je zřejmé, že pro každou proměnnou $x^{(i)}$ existuje možnost dvojího zastoupení novou proměnnou, a to x_{i+1}, resp. $\dot{x}_i$. Zvolíme první variantu a dostaneme účelový funkcionál

$$J^* = \int_{t_0}^{t_N} f_0\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\dot{x}_n,t\right)dt\,, \tag{5.53}$$

při diferenciálních omezeních

$$\left.\begin{aligned} x_2 - \dot{x}_1 &= 0,\\ x_3 - \dot{x}_2 &= 0,\\ &\vdots\\ x_n - \dot{x}_{n-1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

Lagrangeova funkce L pro tuto úlohu bude

$$L = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_n, t) + p_1(x_2 - \dot{x}_1) + \cdots + p_{n-1}(x_n - \dot{x}_{n-1}). \tag{5.55}$$

Eulerovy-Lagrangeovy diferenciální rovnice rozepsány složkově

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$ mají tvar:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \dot{p}_1 = 0, && \\
&\frac{\partial f_0}{\partial x_2} + p_1 + \dot{p}_2 = 0, && 1\times \\
&\frac{\partial f_0}{\partial x_3} + p_2 + \dot{p}_3 = 0, && 2\times \\
&\vdots && \vdots \\
&\frac{\partial f_0}{\partial x_{n-1}} + p_{n-2} + \dot{p}_{n-1} = 0, && (n-2)\times \\
&\frac{\partial f_0}{\partial x_n} + p_{n-1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_n}\right) = 0. && (n-1)\times
\end{aligned}$$

Z těchto rovnic eliminujeme Lagrangeovy součinitele p_j a jejich derivace $\dot{p}_j$. Provedeme to tak, že každou i-tou rovnici (i-1)krát derivujeme podle času t (je to zaznačeno napravo). Pak postupnou eliminací Lagrangeových součinitelů od první k poslední rovnici dostaneme

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_3}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_n}\right) = 0.$$

Po převedení na původní proměnnou v souladu se vztahy (5.52) obdržíme tzv. ***Eulerovu-Poissonovu diferenciální rovnici***

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x^{(n)}}\right) = 0, \tag{5.56}$$

která spolu s okrajovými podmínkami (5.51b) tvoří ***nutné podmínky minima*** účelového funkcionálu (5.51a).

Legendreova nutná podmínka (5.9) bude

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{\partial^2 f_0}{\partial [x^{(n)}]^2} \end{bmatrix}^{df} \geq 0.$$

Protože se jedná o kladnou semidefinitnost, ***Legendreova nutná podmínka*** pro minimum účelového funkcionálu (5.51a) má tvar

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial [x^{(n)}]^2} \geq 0. \tag{5.57}$$

Příklad 5.3

Řízený podsystém

$$\ddot{x} = bu, \qquad b > 0 \tag{5.58}$$

je třeba převést z počátečního stavu $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ do koncového stavu $x(t_N) = x_N = \dot{x}(t_N) = \dot{x}_N = 0$ v zadaném koncovém čase t_N tak, aby účelový funkcionál

$$J = \int_0^{t_N} u^2 dt, \qquad t_N < \infty \tag{5.59}$$

měl minimální hodnotu (Víteček 1992).

Řešení:

V souladu se stavovou rovnicí (5.58) účelový funkcionál lze zapsat ve tvaru

$$J = \frac{1}{b^2} \int_0^{t_N} \ddot{x}^2 dt, \tag{5.60}$$

a proto použijeme Eulerovu-Poissonovu diferenciální rovnici pro *n* = 2:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}}\right) = 0,$$

kde

$$f_0 = \frac{1}{b^2}\ddot{x}^2.$$

Eulerova-Poissonova diferenciální rovnice je lineární homogenní 4. řádu

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 0.$$

Její řešení získáme snadno postupnou integrací:

$$\dddot{x} = c_1,$$

$$\ddot{x} = c_1 t + c_2,$$

$$\dot{x} = \frac{c_1}{2} t^2 + c_2 t + c_3,$$

$$x = \frac{c_1}{6} t^3 + \frac{c_2}{2} t^2 + c_3 t + c_4.$$

Z okrajových podmínek dostaneme:

$$c_1 = 12\frac{x_0}{t_N^3}, \qquad c_2 = -6\frac{x_0}{t_N^2}, \qquad c_3 = 0, \qquad c_4 = x_0. \tag{5.61}$$

Z podstaty úlohy variačního počtu (optimálního řízení) vyplývá, že minimum účelového funkcionálu (5.59) existuje (integrand je ryze konvexní), řešení Eulerovy-Poissonovy diferenciální rovnice je jediné, a proto optimální stavová trajektorie je dána vztahem (obr. 5.4a)

$$x^*(t) = x_0\left(2\frac{t^3}{t_N^3} - 3\frac{t^2}{t_N^2} + 1\right). \tag{5.62}$$

Rovněž ze zesílené Legendreovy nutné podmínky pro minimum

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \ddot{x}^2} = \frac{2}{b^2} > 0$$

plyne, že na této trajektorii může být účelový funkcionál (5.59), resp. (5.60) minimalizován.

Optimální otevřené řízení získáme na základě vztahů (5.58) a (5.62):

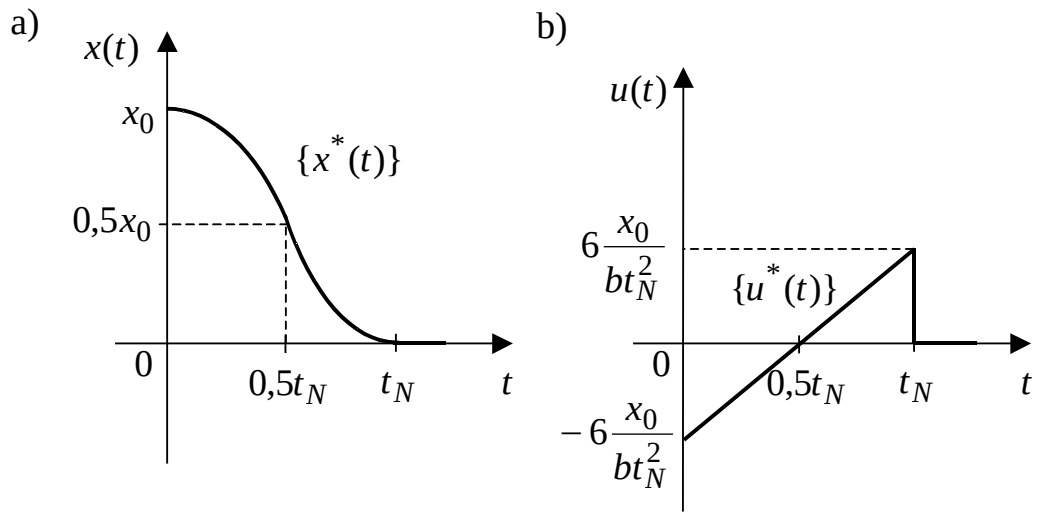
$$u^*(t) = 6\frac{x_0}{bt_N^2}\left(2\frac{t}{t_N} - 1\right), \tag{5.63}$$

viz obr. 5.4b.

Optimální zpětnovazební řízení je možno určit ze vztahů (5.62) a (5.63) eliminací času *t*.

Vypočteme ještě optimální hodnotu účelového funkcionálu (5.59)

$$J^* = \int_0^{t_N} u^{*2} dt = \int_0^{t_N} 36\frac{x_0^2}{b^2 t_N^4}\left(2\frac{t}{t_N} - 1\right)^2 dt = 12\frac{x_0^2}{b^2 t_N^3}. \tag{5.64}$$



Obr. 5.4. Příklad 5.3 – optimální průběh: stavové proměnné – (a), otevřeného řízení – (b)

Příklad 5.4

Řízený podsystém

$$\dot{x} = -ax + bu; \qquad a, b > 0 \tag{5.65}$$

je třeba převést z počátečního stavu $x(0) = x_0$ do koncového stavu $x(\infty) = 0$ při omezení na celkovou energii (energie = $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$)

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{x}^2 dt = b_1 \tag{5.66}$$

a při minimální hodnotě účelového funkcionálu

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 dt\,. \tag{5.67}$$

Řešení:

Je to úloha variačního počtu s integrálním omezením. Sestavíme Lagrangeovu funkci (5.42) s konstantním Lagrangeovým součinitelem *p*

$$L = \frac{1}{2}x^2 + \frac{p}{2}\dot{x}^2 \tag{5.68}$$

a v souladu s (5.50) dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,,$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{p} x = 0 . \tag{5.69}$$

Protože p = *konst*, řešení diferenciální rovnice (5.69) má tvar

$$x = c_1 e^{-\beta t} + c_2 e^{\beta t} , \tag{5.70}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{p}} . \tag{5.71}$$

Z okrajových podmínek $x(0) = x_0$ a $x(\infty) = 0$ obdržíme $c_1 = x_0$ a $c_2 = 0$, a proto řešení diferenciální rovnice (5.69) vyhovující okrajovým podmínkám bude

$$x^*(t) = x_0 e^{-\beta t} . \tag{5.72}$$

Neznámou hodnotu β, resp. Lagrangeova součinitele p určíme z integrálního omezení (5.66):

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \left(- \beta x_0 e^{-\beta t} \right)^2 dt = b_1 ,$$

$$\frac{\beta x_0^2}{4} = b_1 ,$$

$$\beta = \frac{4 b_1}{x_0^2} , \tag{5.73}$$

$$p = \frac{x_0^4}{16 b_1^2} . \tag{5.74}$$

Z podstaty úlohy vyplývá, že globální minimum účelového funkcionálu (5.67) existuje, řešení vyhovující nutným podmínkám (5.72) je jediné, a proto optimální stavová trajektorie $\{x^*(t)\}$ je dána vztahy (5.72) a (5.73).

Na základě stavové rovnice (5.65) již snadno určíme optimální otevřené řízení

$$u^*(t) = - \frac{x_0}{b} (\beta - a) e^{-\beta t} . \tag{5.75}$$

Eliminací času t ze vztahů (5.72) a (5.75) (např. jejich vydělením) získáme optimální zpětnovazební řízení

$$u^* = - \frac{(\beta - a)}{b} x^* . \tag{5.76}$$

Vidíme, že optimální zpětnovazební řízení u^* je lineární funkcí stavu x^*, která závisí na počátečním stavu x_0, viz (5.73).

Vypočteme optimální (minimální) hodnotu účelového funkcionálu (5.67):

$$J^* = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{*2} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x_0 e^{-\beta t}\right)^2 dt = \frac{x_0^2}{4\beta}, \tag{5.77}$$

resp. na základě (5.73)

$$J^* = \frac{x_0^4}{16 b_1}. \tag{5.78}$$

Předpokládejme nyní, že máme maximalizovat účelový funkcionál

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{x}^2 dt. \tag{5.79}$$

při omezení

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 dt = J^*. \tag{5.80}$$

Vzhledem k tomu, že Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice vyjadřuje nutné podmínky jak pro minimum, tak i pro maximum, nemusíme měnit u integrandu v účelovém funkcionálu (5.79) znaménko (abychom maximalizaci převedli na minimalizaci). Lagrangeova funkce L_1 bude pro tuto úlohu mít tvar

$$L_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{p_1}{2}x^2, \tag{5.81}$$

kde p_1 je konstantní Lagrangeův součinitel.

Eulerova-Lagrangeova diferenciální rovnice

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

pro (5.81) bude

$$\ddot{x} - p_1 x = 0. \tag{5.82}$$

Ze srovnání (5.82) a (5.69) vyplývá, že řešení (5.82) je

$$x^*(t) = x_0 e^{-\beta_1 t}, \tag{5.83}$$

$$\beta_1 = \sqrt{p_1}. \tag{5.84}$$

Je zřejmé, že trajektorie (5.72) a (5.83) budou stejné, bude-li platit $\beta = \beta_1$. Podobně jako konstanta β byla určena z integrálního omezení (5.66), bude i konstanta β_1 dána integrálním omezením (5.80):

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x_0 e^{-\beta_1 t}\right)^2 dt = J^*,$$

$$\frac{x_0^2}{4\beta_1} = J^*,$$

$$\beta_1 = \frac{x_0^2}{4J^*}. \tag{5.85}$$

Po dosazení za J^* (5.78) dostaneme

$$\beta_1 = \frac{4b_1}{x_0^2} = \beta. \tag{5.86}$$

Vidíme, že daná úloha vyhovuje principu reciprocity. Vyplývá to přímo ze srovnání Lagrangeových funkcí (5.68) a (5.81), kde integrandy účelové funkce a integrálního omezení jsou zcela rovnocenné, protože vynásobením konstantou lze jednu Lagrangeovu funkci převést na druhou a na optimální řešení to nemá žádný vliv.

5.3 Úloha variačního počtu jako úloha optimálního řízení

Uvažujme úlohu optimálního řízení s pevným časem i koncem

$$\left.\begin{aligned} J^* &= \min_{\{\boldsymbol{u}\}} \int_{t_0}^{t_N} f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)dt, \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0, \quad t_0 \text{ i } \boldsymbol{x}_0 \text{ pevné}, \\ \boldsymbol{x}(t_N) &= \boldsymbol{x}_N, \quad t_N \text{ i } \boldsymbol{x}_N \text{ pevné}, \\ \left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &\in R^n \\ \boldsymbol{u}(t) &\in R^r\end{aligned}\right\} & \quad t \in \langle t_0, t_N \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{5.87}$$

Tuto úlohu optimálního řízení lze považovat za úlohu variačního počtu (5.41) s diferenciálním omezením, kde

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) - \dot{\boldsymbol{x}}, \tag{5.88}$$

proto nutné podmínky optimality budou mít tvar

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \boldsymbol{0}, \tag{5.89a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}}\right) = \boldsymbol{0}, \tag{5.89b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}\right) = \boldsymbol{0}, \tag{5.89c}$$

kde L je Lagrangeova funkce

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, t) = f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{p}^T\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - \dot{\boldsymbol{x}}\right]. \tag{5.90}$$

Protože Lagrangeova funkce (5.90) nezávisí na $\dot{\boldsymbol{u}}$ a $\dot{\boldsymbol{p}}$, proto ***nutné podmínky pro úlohu optimálního řízení s pevným časem i koncem*** (5.87) mají tvar

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \boldsymbol{0}, \\ &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \\ &\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ &\boldsymbol{x}(t_N) = \boldsymbol{x}_N. \end{aligned}\right\} \tag{5.91}$$

Příklad 5.5

Vyřešíme příklad 5.3 pomocí podmínek (5.91).

Řešení:

Rovnici řízeného podsystému (5.58) zapíšeme pro $x_1 = x$ stavově:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= bu. \end{aligned}\right\} \tag{5.92}$$

Lagrangeova funkce (5.90) bude mít tvar

$$L = u^2 + p_1(x_2 - \dot{x}_1) + p_2(bu - \dot{x}_2). \tag{5.93}$$

V souladu s nutnými podmínkami (5.91) lze tedy psát:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \Rightarrow \dot{p}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \Rightarrow \dot{p}_2 = -p_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u + p_2 b = 0,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = bu.$$

Z první rovnice dostaneme $p_1 = c_1$, dosadíme do druhé rovnice, ze které obdržíme $p_2 = -c_1 t + c_2$. Dosadíme výsledek do třetí rovnice a získáme řízení

$$u = \frac{b}{2}(c_1 t - c_2). \tag{5.94}$$

Po dosazení řízení (5.94) do stavových rovnic dostaneme

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{b^2}{2}(c_1 t - c_2),$$

resp.

$$\ddot{x}_1 = \frac{b^2}{2}(c_1 t - c_2).$$

Řešení získáme postupnou integrací

$$\dot{x}_1 = \frac{b^2}{4} c_1 t^2 - \frac{b^2}{2} c_2 t + c_3,$$

$$x_1 = \frac{b^2}{12} c_1 t^3 - \frac{b^2}{4} c_2 t^2 + c_3 t + c_4. \tag{5.95}$$

Z okrajových podmínek obdržíme neznámé konstanty:

$$c_1 = \frac{24}{b^2 t_N^3} x_0, \qquad c_2 = \frac{12}{b^2 t_N^2} x_0, \qquad c_3 = 0, \qquad c_4 = x_0. \tag{5.96}$$

Stavová trajektorie (5.95) a otevřené řízení (5.94) mají tedy tvar

$$x^*(t) = x_1(t) = x_0\left(2\frac{t^3}{t_N^3} - 3\frac{t^2}{t_N^2} + 1\right), \tag{5.97}$$

$$u^*(t) = 6\frac{x_0}{b t_N^2}\left(2\frac{t}{t_N} - 1\right). \tag{5.98}$$

Ze srovnání se vztahy (5.62) a (5.63) vyplývá, že jsme dostali optimální stavovou trajektorii a optimální otevřené řízení, a proto další postup i výsledky budou stejné jako v příkladě 5.3.

Ukážeme si souvislost klasického variačního počtu s Pontrjaginovým principem minima. Uvažujme pro úlohu optimálního řízení (5.87) Hamiltonovu funkci

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t)=f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

a srovnejme ji s Lagrangeovou funkcí (5.90), tj.

$$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},t)=f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{p}^T\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)-\dot{\boldsymbol{x}}\right].$$

Je zřejmé, že platí

$$L=H-\boldsymbol{p}^T\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{5.99}$$

proto nutné podmínky (5.89) budou mít tvar

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)=\boldsymbol{0}\Rightarrow\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}+\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{0}, \tag{5.100a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{p}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}}\right)=\boldsymbol{0}\Rightarrow\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}-\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}, \tag{5.100b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}\right)=\boldsymbol{0}\Rightarrow\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}. \tag{5.100c}$$

Vidíme, že první dvě rovnice jsou kanonické diferenciální rovnice principu minima, ve variačním počtu také nazývané ***Hamiltonovy kanonické rovnice***. Poslední vztah (5.100c) vyjadřuje nutnou podmínku pro vnitřní minimum Hamiltonovy funkce podle řízení $\boldsymbol{u}$. Odtud také vyplývá, že klasický variační počet lze považovat za speciální případ Pontrjaginova principu minima, kde vztah (5.100c) má značně obecnější tvar

$$\min_{\{\boldsymbol{u}\}} H, \tag{5.101}$$

umožňující uvažovat i hraniční minimum (tj. řízení může být omezeno). Proto vektor Lagrangeových součinitelů $\boldsymbol{p}$ lze pokládat za vektor sdružených proměnných (kovektor stavu) a úlohy variačního počtu s různými koncovými podmínkami (a tedy nejenom s pevným časem i koncem) mohou být zavedením Hamiltonovy funkce řešeny Pontrjaginovým principem minima.

6 ZÁVĚR

Teorie optimálních systémů řízení patří mezi náročné oblasti teorie automatického řízení, kterým je věnována neustále vysoká pozornost v odborné literatuře.

Vzhledem k dostupnosti relativně levné a výkonné výpočetní techniky je možné v současné době realizovat i velmi složité a výpočetně náročné algoritmy řízení, jejichž běžné praktické použití bylo doposud nereálné. Z tohoto důvodu optimalizační metody a přístupy nabývají na významu. Rovněž neustále rostoucí ceny všech druhů energií a zhoršující se ekologie životního prostředí vyžadují vyšší kvalitu řízení. Proto je třeba, aby absolventi technických univerzit byli seznámeni se současnými možnostmi optimálního řízení. Skripta obsahují základy metod dynamické optimalizace, které umožní vážným zájemcům další studium i specializovaných odborných publikací.

7 LITERATURA

ATHANS, M. & FALB, P. L. *Optimal Control. An Introduction to the Theory and its Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966

BOBÁL, V. & VAŠEK, V. *Teorie automatického řízení I*. Skripta FT ve Zlíně, VUT v Brně, 1989

BRYSON, A. E. & HO, Y. *Applied Optimal Control*. Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, 1969

BURÝ, A. Identification and Modelling for the Control Quality Mining Problem. In: *Proceedings of the 12th Conference „Process Control´99*", Tatranske Matliare, Slovak Republic, May 31- June 3, 1999, Volume 1, pp. 95 - 98

CSÁKI, F. *Modern Control Theories. Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972

ELSGOLC, L. E. *Differencialnyje uravnenija i variacionnoje isčislenije*. Nauka, Moskva, 1969

GÓRECKI, H. *Optymalizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwo Naukove PWN, Warszawa, 1993

HANUŠ, B. *Optimalizace systémů řízení*. Skripta VŠST, Liberec, 1978

HEGER, M. Využití simulačních modelů pro optimální nastavení regulačních okruhů ohřívacích pecí. In: *Sborník vědecké konference ASŘ TP*. Ostrava – Podolanky, 1990, str. 36 - 41

HSU, J. C. & MAYER, A. V. *Modern Control Principles and Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967

CHUA, L. O. & LIN, P. M. *Computer – Aided Analysis of Electronic Circuits*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975

INTRILIGATOR, M. *Mathematical Optimalization and Economic Theory*. Prentice-Hall, New York, 1971

ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Third Edition. Springer – Verlag, Berlin, 1995

KACZOREK, T. *Teoria sterowania*. *Tom II. Układy nieliniowe, procesy stochastyczne oraz optymalizacja statyczna i dynamiczna.* WNT, Warszawa, 1981

KACZOREK, T. *Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1983

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Second Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996

KOLOMAZNÍK, K. *Modelování zpracovatelských procesů*. Skripta FT ve Zlíně, VUT v Brně, 1990

KUBÍK, S. AJ. *Optimální systémy automatického řízení*. SNTL, Praha, 1972

KUBÍK, S. AJ. *Teorie automatického řízení II. Optimální, adaptivní a učící se systémy*. SNTL/ALFA, Praha, 1982

KUSYN, J., VÍTEČEK, A. & SMUTNÝ, L. *Teorie řízení. Statická optimalizace*. Skripta FSE VŠB v Ostravě, 1986 (1. vydání), 1988 (2. vydání)

LEWIS, F. L. & SYRMOS, V. L. *Optimal Control*. Second Edition. John Wiley & Sons, New York, 1995

LIN, CH. F. *Advanced Control Systems Design*. PRT Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994

MIKLEŠ, J. & HUTLA, V. *Teória automatického riadenia*. ALFA/SNTL, Bratislava, 1986

NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů*. MONTANEX, Ostrava, 1999

RAMIREZ, W. F. *Process Control and Identification*. Academic Press, London, 1994

RAZÍM, M. & HORÁČEK, P. *Optimální a adaptivní řízení*. Skripta FEL ČVUT v Praze, 1985

RAZÍM, M. & ŠTECHA, J. *Nelineární systémy*. Skripta FEL ČVUT v Praze, 1997

SAGE, A. P. & WHITE CH. C. *Optimum Systems Control*. Second Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977

SALOKY, T. Niektoré problémy optimálneho riadenia priemyselných robotov. In: *Zborník vedeckých prác VŠT v Košiciach*. ALFA, Bratislava, 1985, str. 353 - 357

SHINNERS, S. M. *Modern Control System Theory and Design.* John Wiley & Sons, New York, 1992

SLOTINE, J. J. & LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991

SPÍRAL, L. & OVSJANNIKOV, V. *Optimalizace průmyslových regulačních obvodů*. SNTL/ALFA, Praha, 1982

SPONG, M. W. & VIDYASAGAR, M. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1989

SZKLARSKI, L., JARACZ, K. & VÍTEČEK, A. *Optymalizacia układów napędowych*. PWN, Warszawa, 1989

ŠTECHA, J. & HORÁČEK, P. *Optimální řídicí systémy*. Skripta FEL ČVUT v Praze, 1985

ŠTECHA, J. & HAVLENA, V. *Teorie dynamických systémů*. Skripta FEL ČVUT v Praze, 1993

ŠVARC, I. *Teorie automatického řízení II.* Skripta FS VUT v Brně, 1986

TAKAHASHI, Y., RABINS, M. J. & AUSLANDER, D. M. *Control and Dynamic Systems.* Addison – Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1972

TOU, J. T. *Modern Control Theory.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1964

UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992

VIDYASAGAR, M. *Nonlinear System Analysis.* Second Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993

VÍTEČEK, A. AJ. *Algoritmy řízení robotů.* Výzkumná zpráva úkolu SPZV III-8-2/06/05-3, FSE VŠB v Ostravě, 1990

VÍTEČEK, A. *Syntéza optimálního programového řízení metodou agregace stavových proměnných.* Habilitační práce, FS VŠB v Ostravě, 1991

VÍTEČEK, A. *Optimalizace systémů. Dynamická optimalizace.* Skripta FS VŠB v Ostravě, 1992

WESTPHAL, L. C. *Sourcebook of Control Systems Engineering.* Chapman & Hall, London, 1995

ZADA, V. O jedné univerzální metodě optimálního řízení. *Automatizace*, 1/1999, str. 18 - 25

ZBORAY, L. & ĎUROVSKÝ, F. *Stavové riadenie elektrických pohonov.* Študijný materiál pre špecializovaný kurz „Microcomputer Controlled Electrical Drives in Industrial Automation“, TU v Košiciach, 1996

ZÍTEK, P. *Simulace dynamických systémů.* SNTL, Praha, 1990

ZÍTEK, P. & VÍTEČEK, A. *Návrh řízení podsystémů se zpožděními a nelinearitami.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999

ZÍTEK, P., HOFREITER, M. & HLAVA, J. *Automatické řízení.* Skripta FS ČVUT v Praze, 1999