Univerzita Tomáše Bati
Fakulta aplikované informatiky

ODBORNĚ NAUČNÁ MONOGRAFIE

NELINEÁRNÍ SYSTÉMY
DECENTRALIZOVANÉ ŘÍZENÍ

Miluše Vítečková, Antonín Víteček

Univerzita Tomáše Bati
Fakulta aplikované informatiky

NELINEÁRNÍ SYSTÉMY
DECENTRALIZOVANÉ ŘÍZENÍ

Miluše Vítečková
Antonín Víteček

Ostrava – Zlín, 2024

KATALOGIZACE V KNIZE - NÁRODNÍ KNIHOVNA ČR

Vítečková, Miluše, 1960-
Nelineární systémy : decentralizované řízení / Miluše Vítečková, Antonín Víteček. -- Pořadí vydání: první, vydáno elektronicky. -- Ostrava ; Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2024. -- 1 online zdroj. -- (Inženýrská informatika)
Nad názvem: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky. -- Obsahuje bibliografii

ISBN 978-80-7678-232-7 (online ; pdf)

* 517.938 * 681.5 * 681.514 * (048.8) * (0.034.2:08)
– nelineární dynamické systémy
– automatické řízení
– robustní řízení
– monografie
– elektronické knihy

681.5 - Automatizační a řídicí technika [19]

Recenzoval: doc. Ing. Marek Kubalčík, PhD.

© prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc., prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c., 2023

ISBN 978-80-7678-232-7

PŘEDMLUVA

Odborná monografie „Nelineární systémy. Decentralizované řízení“ je věnována návrhu řízení nelineárních dynamických systémů, které mají matematický model v tzv. standardním tvaru. Tato skupina nelineárních systémů je poměrně široká a zahrnuje mnoho, pro technickou praxi, důležitých systémů. Jsou to především mechanické a elektromechanické systémy (roboty, manipulátory, elektrické motory atd.). Hlavní pozornost je věnována robustním řízením, která nevyžadují znalost přesného matematického modelu a měřitelnost poruchových veličin. Důraz je kladen na jednoduchost a názornost. Monografie obsahuje řadu původních myšlenek a postupů, z nichž některé vznikly již dříve v rámci spolupráce s Ústavem technické kybernetiky Slovenské akademie věd v letech 1985 až 1990. Její současná podoba vznikla v rámci spolupráce s pracovníky Fakulty aplikované kybernetiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně. Nezbytná teorie je doplněna plně řešenými příklady, které tvoří nedílnou součást popsané teorie. Předpokládá se znalost teorie automatického řízení v rozsahu skript: Vítečková, M., Víteček, A. *Základy automatické regulace.* 2. rozšířené vydání (3. dotisk), Ostrava, 2023 a Vítečková, M., Víteček, A.: *Nelineární řízení. Analýza*. Ostrava, 2019, příp. jiných podobných odborných textů.

Vzhledem k tomu, že odborná monografie pojednává o základech návrhu řízení nelineárních systémů, nejsou v nich uváděny přesné důkazy ani odkazy na použitou literaturu. Pro prohloubení a rozšíření problematiky nelineárních systémů jsou doporučeny níže uvedené publikace:

ČELIKOVSKÝ, M. *Nelineární systémy.* Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006

HUBA, M. *Nelineárne systémy*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2003

KHALIL, H. *Nonlinear systems.* Third edition. Prentice-Hall, New Jersey, 2002

NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů.* Montanex, Ostrava, 1999

RAZÍM, M., ŠTECHA, J. *Nelineární systémy.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997

SLOTINE, J. E., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliff, New Jersey, 1991

ZÍTEK, P. *Simulace dynamických systémů*. SNTL, Praha, 1990

ZÍTEK, P., VÍTEČEK, A. *Návrh řízení podsystémů se zpožděními a nelinearitami.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999

Publikace je určena především pro studenty magisterského a doktorského studia oborů z oblasti automatizace, robotiky a mechatroniky.

OBSAH

PŘEDMLUVA 4
OBSAH 5
Seznam základního značení a symbolů 6
1 Nelineární dynamické systémy 12
1.1 Standardní tvar modelů nelineárních systémů 12
1.2 Zpětnovazební linearizace vstup-stav standardních nelineárních systémů a řiditelnost 16
1.3 Jednoduché transformace modelů nelineárních systémů na standardní tvar 24
1.4 Zpětnovazební linearizace vstup-výstup standardních nelineárních systémů a relativní stupeň 34
2 Návrh řízení standardních nelineárních systémů 42
2.1 Nerobustní řízení 42
2.1.1 Řízení na základě modelu 42
2.1.2 Řízení na základě účelového funkcionálu 58
2.2 Robustní řízení 64
2.2.1 Řízení využívající malé dopravní zpoždění 64
2.2.2 Řízení s vysokým zesílením 80
2.2.3 Řízení v klouzavém režimu 1 98
2.2.4 Řízení v klouzavém režimu 2 126
3 Mechanické systémy 143
3.1 Řízení využívající malé dopravní zpoždění pro mechanické systémy 147
3.2 Řízení s vysokým zesílením pro mechanické systémy 153
3.3 Integrační klouzavé řízení pro mechanické systémy 160
3.4 Klasické klouzavé řízení pro mechanické systémy 162
4 Závěr 164
Příloha A – Agregační matice 165
Příloha B – Striktní trojúhelnikový tvar matematického modelu 167
Příloha C – Lieova derivace a zpětnovazební linearizace 169
Příloha D – Podmínky pro využití malého dopravního zpoždění při řízení 179
Literatura 181

SEZNAM ZÁKLADNÍHO ZNAČENÍ A SYMBOLŮ

a konstanta, amplituda, šířka hystereze

a_i koeficient levé strany lineární diferenciální rovnice, koeficient mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, koeficient charakteristického mnohočlenu

$\boldsymbol{A}$ čtvercová matice systému řádu n [typu (n, n)]

$\boldsymbol{A}_j$ čtvercová matice dílčího systém řádu n_j [typu (n_j,n_j)]

b koeficient viskózního tření, moment tření, konstanta

b_i koeficient pravé strany lineární diferenciální rovnice, koeficient mnohočlenu v čitateli přenosu

$\boldsymbol{b}_j$ konstantní vektor vstupu dimenze n_j

$\boldsymbol{B}$ matice vstupu typu (n, m)

c_j koeficient tuhosti

$\boldsymbol{C}$ čtvercová matice Coriolisových, odstředivých a viskózních sil řádu n [typu (n,n)]

d_{ji} prvek agregační matice $\boldsymbol{D}$

d_{ji}^a prvek základní agregační matice $\boldsymbol{D}_a$

d_{ji}^h prvek výstupní agregační matice $\boldsymbol{D}_h$

$\boldsymbol{D}$ agregační matice s prvky d_{ji} typu (m, n)

$\boldsymbol{D}_a$ základní agregační matice s prvky d_{ji}^a typu (m, n)

$\boldsymbol{D}_h$ výstupní agregační matice s prvky d_{ji}^h typu (m, n)

$e_i = x_i^w - x_i$ odchylka, odchylka stavových proměnných

$\boldsymbol{e}$ vektor odchylek stavových proměnných e_i dimenze n

E_k kinetická energie

E_p potenciální energie

f síla

f_i obecně nelineární funkce

$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{F}$ vektorová obecně nelineární funkce se složkami f_i, F_i dimenze n

$\boldsymbol{f}_a$ agregovaná vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ dimenze m

g tíhové zrychlení

g_i, g_{ij} obecně nelineární funkce

$\boldsymbol{g}$ vektor tíhových sil dimenze n

$\boldsymbol{g}_j$ vektorová obecně nelineární funkce se složkami g_{ij} dimenze n

G tíha

$G(s)$ přenos

$\boldsymbol{G}$ matice obecně nelineárních funkcí g_{ij} typu (n,m)

$\boldsymbol{G}_a$ čtvercová agregovaná matice $\boldsymbol{G}$ řádu m [typu (m,m)]

h malé dopravní zpoždění

h_j obecně nelineární výstupní funkce

$\boldsymbol{h}$ vektorová obecně nelineární výstupní funkce se složkami h_j dimenze m

i proud, index ($i = 1,2,\ldots,n$, pokud není řečeno jinak)

$\mathbf{I}$ jednotková matice

j index ($j = 1,2,\ldots,m$, pokud není řečeno jinak)

J moment setrvačnosti

k_i konstantní koeficient

K_D váha derivační složky regulátoru

K_I váha integrační složky regulátoru

K_P zesílení regulátoru, váha proporcionální složky regulátoru

$\boldsymbol{K}$ čtvercová matice uzavřeného systému řízení s maticemi $\boldsymbol{K}_{jj}$ na diagonále řádu n [typu (n,n)], matice lineární klouzavé plochy typu (m,n)

$\boldsymbol{K}_{jj}$ čtvercová matice dílčího podsystému řádu n_j [typu (n_j,n_j)]

l délka

L Lagrangeova funkce, indukčnost

$L_f h$ Lieova derivace skalární funkce h podél vektorové funkce $\boldsymbol{f}$

m hmotnost, moment, počet řídicích proměnných u_j, počet výstupních proměnných y_j

m_j integrál z požadovaného modelu dílčího podsystému m_j^w (= 0), dílčí integrační klouzavá plocha

$\boldsymbol{m}$ integrál z požadovaného modelu uzavřeného systému řízení $\boldsymbol{m}^w$ (= $\mathbf{0}$), integrační klouzavá plocha – vektor se složkami m_j dimenze m

m_j^w požadovaný model dílčího podsystému (= 0)

$\boldsymbol{m}^w$ požadovaný model uzavřeného systému řízení (= **0**) – vektor se složkami m_j^w dimenze m

M vzájemná indukčnost, moment

$\boldsymbol{M}$ čtvercová matice setrvačnosti řádu n [typu (n,n)]

n řád dynamického systému = počet stavových proměnných x_i, stupeň charakteristického mnohočlenu

n_j dílčí řád = řád podsystému

N charakteristický mnohočlen

q_j zobecněná (konfigurační) proměnná, číslo nefázové rovnice

$\boldsymbol{q}$ vektor zobecněných (konfiguračních) proměnných q_j dimenze n

$\boldsymbol{Q}_{cj}$ čtvercová matice řiditelnosti dílčího podsystému řádu n_j [typu (n_j, n_j)]

$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_0$ čtvercové váhové matice řádu n [typu(n,n)]

r relativní stupeň, poloměr, vzdálenost hmotného bodu od osy otáčení

r_j dílčí relativní stupeň

R odpor

R_d Rayleighová disipativní funkce

s komplexní proměnná v Laplaceově transformaci

s_j agregovaná odchylka

$\boldsymbol{s}$ vektor agregovaných odchylek s_j dimenze m

t skutečný čas

T_i časová konstanta

T_D derivační časová konstanta

T_I integrační časová konstanta

$\boldsymbol{T}$ diagonální matice časových konstant T_j řádu m [typu (m, m)]

u napětí, řízení

u_j řídicí (vstupní) proměnná

$\boldsymbol{u}$ vektor řídicích (vstupních) proměnných u_j dimenze m

u_j^m amplituda řízení (nasycení, omezení)

$\boldsymbol{U}$ diagonální matice amplitud řízení u_j^m řádu m [typu (m, m)]

$\boldsymbol{v}$ vektor poruchových proměnných dimenze $p \le n$

V Ljapunovova funkce

w žádaná proměnná

w_j žádaná proměnná

$\boldsymbol{w}$ vektor žádaných proměnných w_j dimenze m

x stavová proměnná

x_i stavová proměnná

$\boldsymbol{x}$ vektor stavových proměnných (stav) x_i dimenze n

$\boldsymbol{x}_a$ agregovaný vektor stavu $\boldsymbol{x}$ dimenze m

$\boldsymbol{x}_e$ rovnovážný stav (equilibrium) dimenze n

y výstupní proměnná

y_j výstupní proměnná

$\boldsymbol{y}$ vektor výstupních proměnných y_j dimenze m

z_i pomocná stavová proměnná, doplňková proměnná

$\boldsymbol{z}$ vektor pomocných stavových proměnných z_i dimenze n

α konstanta, úhel, (časová) funkce u kombinovaného řízení

β konstanta, časové měřítko

Δ_j změna polohy hmotného bodu m_j v tíhovém poli

ε kladné malé číslo

$\varepsilon_j = q_j^w - q_j$ odchylka zobecněných (konfiguračních) proměnných

$\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor odchylek zobecněných (konfiguračních) proměnných ε_j dimenze m

ω úhlový kmitočet

Φ magnetický tok

λ velká kladná reálná konstanta

ξ koeficient poměrného tlumení

σ_j dílčí klouzavá plocha (= 0)

$\boldsymbol{\sigma}$ klouzavá plocha (= $\mathbf{0}$) – vektor se složkami σ_j dimenze m

τ rychlý čas

Θ_j zesílení

$\boldsymbol{\Theta}$ čtvercová nejčastěji diagonální matice zesílení Θ_j řádu m [typu (m,m)]

Horní indexy

* optimální, doporučený

$^{\times}$ s velkým zesílením

^{c} kombinovaný (combinated)

^{sl} klouzavý (sliding)

$^{-1}$ inverzní

^{T} transponovaný

^{w} žádaný

Dolní indexy

$_{a}$ agregovaný

$_{e}$ odhadnutý (estimated), výjimkou je rovnovážný stav (equilibrium)

$_{0}$ počáteční

Symboly

$\dot{\cdot}$ (totální) derivace podle času (‘ v těchto textech neoznačuje derivaci)

$\wedge$ odhad

$\|\cdot\|$ norma

$|\cdot|$ absolutní hodnota

Relační znaménka

$\approx$ přibližně rovno

$\doteq$ po zaokrouhlení rovno

$\Rightarrow$ implikace

$\Leftrightarrow$ ekvivalence

Grafické značky

$\int$ integrace

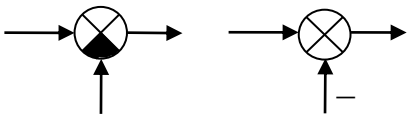
$\int \int \ldots \int$ vícenásobná integrace

 nelineární systém (podsystém, prvek, člen)

 lineární systém (podsystém, prvek, člen)

 jednorozměrový signál (proměnná, veličina)

 mnohorozměrový signál (proměnná, veličina)



součtový člen (vyplněný segment označuje znaménko minus)

Zkratky

adj adjungovaný

arg argument

asign aproximace funkce sign

const konstanta

det determinant

dim dimenze vektoru, typ matice

lim limita

rank hodnost matice

sat nasycení

sign znaménková funkce, znaménko

Proměnné jsou značeny kurzívou malými písmeny.

Matice jsou značeny tučně kurzívou velkými písmeny a vektory tučně kurzívou malými písmeny.

Originály jsou značeny malými písmeny a odpovídající obrazy velkými písmeny.

Pojmy veličina a proměnná mají stejný význam a používají se alternativně.

Výjimky od výše uvedeného označení jsou výslovně uvedeny.

1 NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Návrh řízení nelineárních dynamických systémů (slovo dynamický budeme často vynechávat) patří mezi náročné oblasti automatického řízení. Většina známých metod návrhu řízení se týká vždy pouze určité, často velmi úzké, třídy nelineárních systémů. Je to dáno jejich velikou různorodostí a také tím, že jak teorie nelineárních systémů, tak i teorie automatického řízení se neustále rozvíjejí a stále se objevují nové přístupy k návrhu řízení a současně jsou vyvíjeny nové technické a programové prostředky pro jejich aplikaci a implementaci.

V odborné monografii je věnována pozornost nelineárním dynamickým systémům, jejichž matematický model má standardní tvar, případně mohou být na něj matematickými úpravami transformovány. Takové nelineární systémy jsou v technické praxi velmi rozšířené. Mezi ně patří mechanické, elektromechanické, elektrické a hydraulické systémy, se kterými se setkáváme velmi často.

Standardní tvar jejich matematických modelů umožňuje zjednodušené ověření řiditelnosti a následně navrhnout jejich vhodné řízení.

Pro transformaci matematických modelů na standardní tvar jsou využívány jednoduché klasické přístupy nevyžadující speciální znalosti matematické analýzy a mechaniky. Jiný obecný přístup je stručně uveden v příloze C.

Z důvodu zjednodušení zápisu v textu čas t, případně jiné nezávislé proměnné, budeme často vynechávat.

1.1 Standardní tvar modelů nelineárních systémů

I když většina z popisovaných přístupů k návrhu řízení je poměrně obecná, budeme se zabývat pouze řízením nelineárních dynamických systémů, jejichž matematické modely mají tzv. ***standardní tvar***

$$
\begin{aligned}
n_1 &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_1 = x_2, & x_1(0),\\
\dot{x}_2 = x_3, & x_2(0),\\
\quad\vdots & \quad\vdots\\
\dot{x}_{q_1} = f_{q_1}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_1 j}(\boldsymbol{x}) u_j, & x_{q_1}(0),
\end{array}\right.\\
n_2 &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_{q_1+1} = x_{q_1+2}, & x_{q_1+1}(0),\\
\dot{x}_{q_1+2} = x_{q_1+3}, & x_{q_1+2}(0),\\
\quad\vdots & \quad\vdots\\
\dot{x}_{q_2} = f_{q_2}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_2 j}(\boldsymbol{x}) u_j, & x_{q_2}(0),
\end{array}\right.\\
n_3 &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_{q_2+1} = x_{q_2+2}, & x_{q_2+1}(0),\\
\dot{x}_{q_2+2} = x_{q_2+3}, & x_{q_2+2}(0),
\end{array}\right. \qquad (1.1a)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
n_m &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_n = f_n(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(\boldsymbol{x}) u_j, & x_n(0),
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$
q_j = q_{j-1} + n_j; \qquad q_0 = 0; \qquad n = q_m = \sum_{j=1}^{m} n_j; \qquad j = 1,2,...,m, \qquad (1.1b)
$$

kde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ je vektor stavových proměnných (stav) dimenze n, u_j – řídicí (vstupní) proměnné, f_j – obecně nelineární funkce, $g_{q_j j}$ – obecně nelineární funkce, n – počet stavových proměnných (řád nelineárního systému), n_j – dílčí řád, m – počet řídicích proměnných, ^{T} – symbol transpozice.

Matematický model (1.1) má složkový tvar, který může být také vyjádřen ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(n_1)} &= f_{q_1}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_1 j}(\boldsymbol{x}) u_j, \\ x_{q_1+1}^{(n_2)} &= f_{q_2}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_2 j}(\boldsymbol{x}) u_j, \\ &\vdots \\ x_{q_{m-1}+1}^{(n_m)} &= f_n(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(\boldsymbol{x}) u_j. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Z důvodu zjednodušení zápisu počáteční podmínky budeme často vynechávat.

Standardní model nelineárního systému (1.1) nebo (1.2) můžeme vyjádřit přehledněji v kompaktním (vektorovém) tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}) u_j, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1.3}$$

nebo

$$\underset{(n,1)}{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underset{(n,1)}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} + \underset{(n,m)}{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})} \underset{(m,1)}{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{f} = \left[x_2, \ldots, f_{q_1}, x_{q_1+2}, \ldots, f_{q_2}, x_{q_2+2}, \ldots, f_n\right]^T, \dim \boldsymbol{f} = n, \tag{1.5a}$$

$$\boldsymbol{u} = \left[u_1, u_2, \ldots, u_m\right]^T, \ \dim \boldsymbol{u} = m, \tag{1.5b}$$

$$\boldsymbol{g}_j = \left[0,0,\ldots,g_{q_1 j},0,\ldots,g_{q_2 j},0,\ldots,g_{nj}\right]^T, \dim \boldsymbol{g}_j = n, \tag{1.5c}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{q_1 1} & g_{q_1 2} & \ldots & g_{q_1 m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{q_2 1} & g_{q_2 2} & \ldots & g_{q_2 m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & g_{n2} & \ldots & g_{nm} \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_m\right], \dim \boldsymbol{G} = (n,m), \tag{1.5d}$$

kde $\boldsymbol{f}$ je vektorová funkce, $\boldsymbol{g}_j$ – vektorová funkce, $\boldsymbol{u}$ – vektor řídicích proměnných (řízení), $\boldsymbol{G}$ – matice funkcí g_{ij}, dim – dimenze (rozměr) vektoru nebo typ matice.

V dalším textu se předpokládá, pokud nebude řečeno jinak, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ $(m \le n)$ a striktně se nerozlišují pojmy systém (podsystém) a model. Proto budeme většinou používat zkrácený pojem standardní nelineární systém.

U standardního tvaru modelu nelineárního systému (1.1) budeme nazývat rovnice, ve kterých vystupuje řízení ***nefázové***. Jsou to rovnice $q_1, q_2, \ldots, q_m = n$. Jejich počet je roven m. Rovnice 1 až $q_1 - 1$, $q_1 + 1$ až $q_2 - 1, \ldots, q_{m-1} + 1$ až $n - 1$ jsou ***fázové*** (následující stavová proměnná je derivací předchozí stavové proměnné). Jejich počet je $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_m - 1) = n - m$.

Příklad 1.1

Je třeba rozhodnout, zda nelineární systémy s matematickými modely

$$\dot{x} = x - x^3 + (x^2 + 1)u; \tag{1.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + u; \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 + x_3 x_4^2 + x_1 u_1 + x_2 u_2; \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 x_3 + u_2 + x_2^2 u_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1^3 - x_2 + u_1 + u_2 + u_3; \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

mají standardní tvar.

Řešení:

Pro nelineární systém (1.6) v souladu s (1.1) platí $n = n_1 = q_1 = 1$, $m = 1$, tj.

$$f = x - x^3, \quad g = (x^2 + 1). \tag{1.10}$$

Nelineární systém (1.6) má standardní tvar.

Nelineární systém (1.7) nemá standardní tvar, protože druhá rovnice není fázová a neobsahuje řízení. V další části textu bude ukázáno, že některé takové matematické modely se dají transformovat na standardní tvar.

Pro nelineární systém (1.8) v souladu s (1.1) můžeme psát $n_1 = q_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n = n_1 + n_2 = q_2 = 4$, $m = 2$, tj.

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 + x_3 x_4^2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Nelineární systém (1.8) má standardní tvar.

Podobně pro nelineární systém (1.9) lze psát $n_1 = q_1 = 1$, $n_2 = 1$, $q_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n = n_1 + n_2 + n_3 = q_3 = 3$, $m = 3$, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 x_3 \\ -x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{G} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Nelineární systém (1.9) má standardní tvar.

1.2 Zpětnovazební linearizace vstup-stav standardních nelineárních systémů a řiditelnost

Pro vyčlenění nefázových rovnic zavedeme ***základní agregační matici*** $\boldsymbol{D}_a$ typu (m, n), jejíž prvky jsou dány vztahy (viz příloha A)

$$d_{ji}^a = \begin{cases} 1 \ \text{pro} \ i = q_j \\ 0 \ \text{pro} \ i \neq q_j \end{cases}. \tag{1.13}$$

V každém řádku matice $\boldsymbol{D}_a$ se objeví pouze jedna jednička.

Jejím použitím se dostanou ***agregované veličiny***

$$\underset{(m,1)}{\boldsymbol{x}_a} = \underset{(m,n)}{\boldsymbol{D}_a}\,\underset{(n,1)}{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_{q_1} \\ x_{q_2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \underset{(m,1)}{\boldsymbol{f}_a} = \underset{(m,n)}{\boldsymbol{D}_a}\,\underset{(n,1)}{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} f_{q_1} \\ f_{q_2} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

$$\underset{(m,m)}{\boldsymbol{G}_a} = \underset{(m,n)}{\boldsymbol{D}_a}\,\underset{(n,m)}{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} g_{q_1 1} & g_{q_1 2} & \cdots & g_{q_1 m} \\ g_{q_2 1} & g_{q_2 2} & \cdots & g_{q_2 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

Prakticky můžeme získat agregované veličiny (1.14) ***přímo vynecháním složek vektoru nebo řádků matice odpovídajících fázovým rovnicím.***

Nyní můžeme matematické modely (1.1) – (1.4) vyjádřit jednodušeji v agregovaném tvaru [porovnej s (1.2)]

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{q_1} &= f_{q_1}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_1 j}(\boldsymbol{x}) u_j, \\ \dot{x}_{q_2} &= f_{q_2}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_2 j}(\boldsymbol{x}) u_j, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(\boldsymbol{x}) u_j, \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a = \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}. \tag{1.16}$$

Ze složkového vyjádření matematického modelu (1.1) nebo (1.2) vyplývá, že nelineární systém řádu n sestává z m podsystémů s dílčími řády $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Mezi jednotlivými podsystémy existují vazby (interakce) dané obecně nelineárními funkcemi $f_{q_j j}(\boldsymbol{x})$ a $g_{ij}(\boldsymbol{x})$.

Existuje-li inverzní matice

$$\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})]^{-1}, \tag{1.17}$$

pak lze zvolit řízení $\boldsymbol{u}$ na základě rovnosti $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$, tj.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})], \tag{1.18a}$$

$$\boldsymbol{u}^0 = [u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0], \tag{1.18b}$$

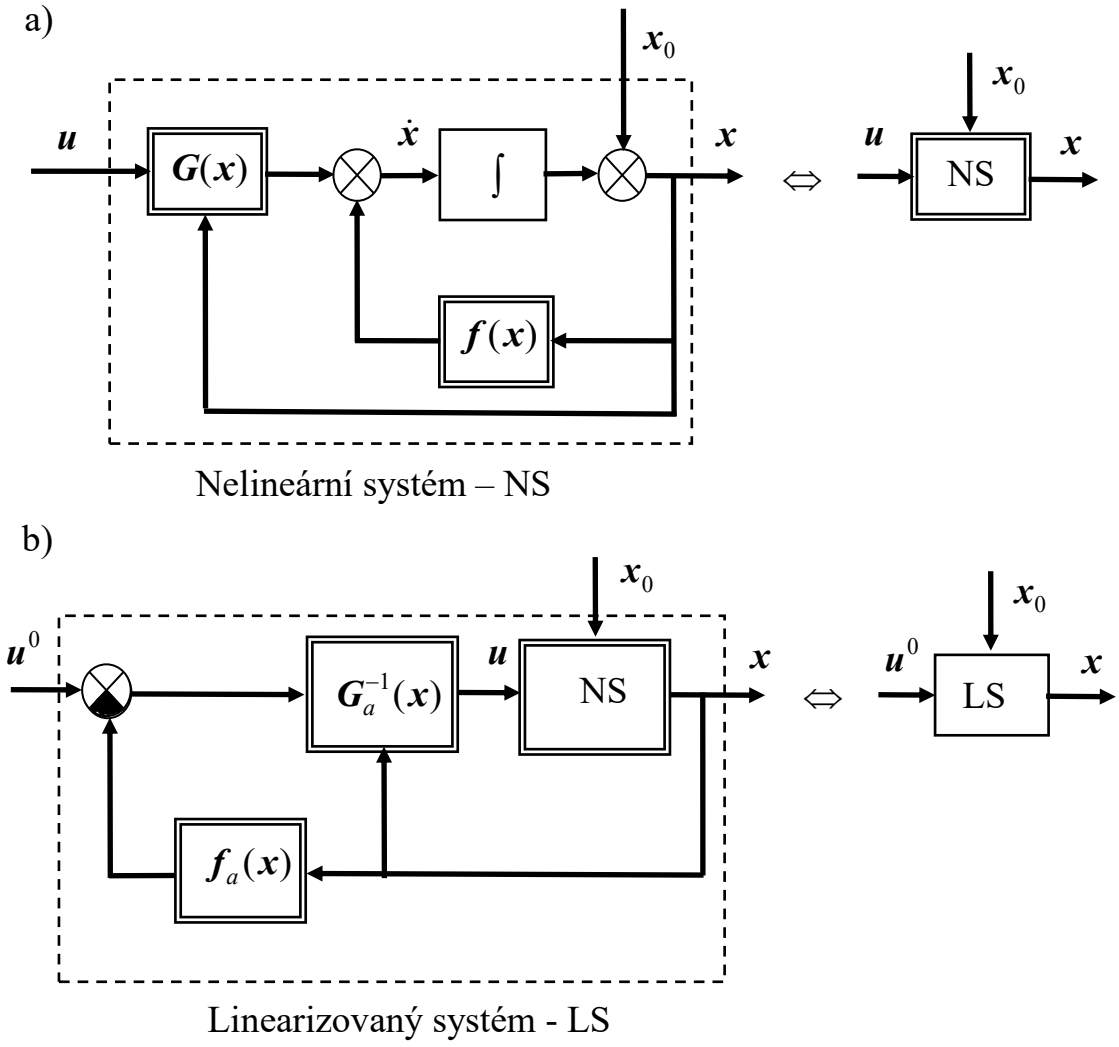
které standardní nelineární systém s matematickými modely (1.1) – (1.4), (1.15) a (1.16) transformuje na lineární systém (obr. 1.1). Je to tzv. ***exaktní*** neboli

zpětnovazební linearizace vstup – stav. Lineární systém se skládá z *m* vzájemné nezávislých lineárních podsystémů, viz (1.20).

$$\dot{x}_{q_1} = u_1^0,\ \dot{x}_{q_2} = u_2^0, \ldots,\ \dot{x}_n = u_m^0, \tag{1.19a}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a = \boldsymbol{u}^0. \tag{1.19b}$$



Obr. 1.1 Zpětnovazební linearizace vstup-stav standardního nelineárního systému: a) standardní nelineární systém, b) linearizovaný systém

Protože platí [viz také (1.1) a (1.2)]

$$\dot{x}_{q_1} = x_1^{(n_1)},\ \dot{x}_{q_2} = x_{q_1+1}^{(n_2)}, \ldots,\ \dot{x}_n = x_{q_{m-1}+1}^{(n_m)}, \tag{1.20}$$

vektorovou rovnici (1.19b) můžeme zapsat složkově

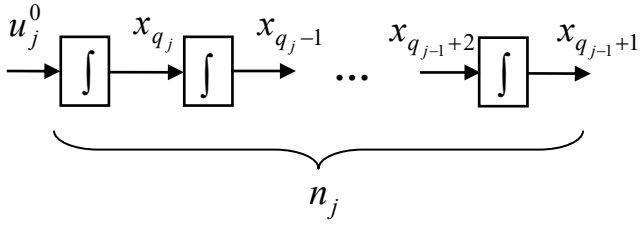
$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= x_3,\\
&\vdots\\
\dot{x}_{q_1} &= u_1^0,\\
\dot{x}_{q_1+1} &= x_{q_1+2},\\
&\vdots\\
\dot{x}_{q_2} &= u_2^0,\\
\dot{x}_{q_2+1} &= x_{q_2+2},\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= u_m^0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Použijeme-li řízení (1.18a) na agregovaný systém (1.16), dostaneme lineární agregovaný systém (1.19b). Naproti tomu, použije-li se řízení (1.18a) na neagregovaný systém (1.1) – (1.4), dostane se lineární systém ve složkovém vyjádření (1.21).

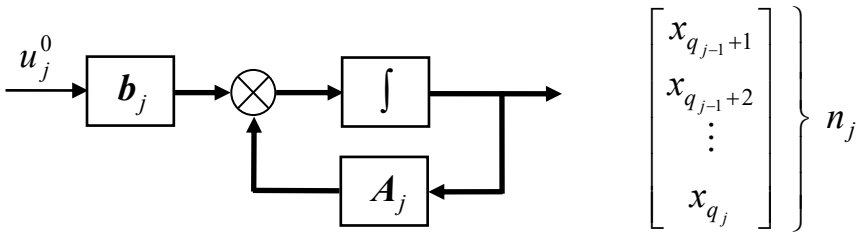
Vidíme, že použitím řízení (1.18) u standardního nelineárního systému, za předpokladu splnění podmínky (1.17), jsme dostali lineární systém skládající se ze vzájemně nezávislých lineárních podsystémů dílčích řádů n_j s novými vstupy u_j^0 (viz obr. 1.2)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_{q_{j-1}+1} &= x_{q_{j-1}+2},\\
\dot{x}_{q_{j-1}+2} &= x_{q_{j-1}+3},\\
&\vdots\\
\dot{x}_{q_j} &= u_j^0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_{q_{j-1}+1} \\ \dot{x}_{q_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{q_j} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_j \begin{bmatrix} x_{q_{j-1}+1} \\ x_{q_{j-1}+2} \\ \vdots \\ x_{q_j} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_j u_j^0 \,. \tag{1.22}$$

a)



b)



Obr. 1.2 Lineární podsystém: a) složkové vyjádření, b) stavové vyjádření

Celý lineární systém lze tedy popsat ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^0, \tag{1.23a}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \dots & \boldsymbol{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}, \quad \dim \boldsymbol{A} = (n,n); \tag{1.23b}$$

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \dim \boldsymbol{A}_j = (n_j, n_j); \tag{1.23c}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}, \quad \dim \boldsymbol{B} = (n,m); \tag{1.23d}$$

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \ \dim \boldsymbol{b}_j = n_j. \tag{1.23e}$$

Protože pro dílčí čtvercovou matici řiditelnosti $\boldsymbol{Q}_{cj}$ řádu n_j každého lineárního podsystému (1.22) platí

$$\boldsymbol{Q}_{cj} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_j & \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{b}_j & \dots & \boldsymbol{A}_j^{n_j-1}\boldsymbol{b}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.24a}$$

$$\det \boldsymbol{Q}_{cj} = -1 \Rightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_{cj} = n_j, \tag{1.24b}$$

je daný lineární podsystém řiditelný, a proto je řiditelný i celý lineární systém (1.23) (det je determinant, rank – hodnost matice).

Řiditelnost jednotlivých lineárních podsystémů vyplývá přímo také z toho, že každý lineární podsystém sestává z n_j sériově zapojených integrátorů (takové zapojení je vždy řiditelné).

Je zřejmé, že je-li splněna podmínka (1.17) [tj. existuje inverzní matice $\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})$] pro daný standardní nelineární systém, pak ho vhodným řízením [např. (1.18)] můžeme transformovat na řiditelný lineární systém. Z tohoto důvodu postačující podmínka řiditelnosti standardního nelineárního systému má tvar

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = m \Rightarrow \det \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \det[\boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})] \neq 0. \tag{1.25}$$

Vidíme, že podmínkou řiditelnosti standardního nelineárního systému je existence inverzní agregované matice $\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$, tj. agregovaná matice $\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})$ musí mít hodnost m a protože je čtvercová, praktičtější podmínkou je, aby její determinant byl nenulový.

Standardní tvar nelineárních systémů se také někdy nazývá ***nelineární kanonický tvar řízení***.

Standardní nelineární systémy jsou ***afinní***, tj. lineární v řízení.

Příklad 1.2

Je dán standardní nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(\boldsymbol{x}) + g_{11}(\boldsymbol{x})u_1 + g_{12}(\boldsymbol{x})u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= f_4(\boldsymbol{x}) + g_{42}(\boldsymbol{x})u_2, \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

u kterého bylo použito řízení (1.18). Je třeba určit vlastnosti získaného systému.

Řešení:

Z důvodu zjednodušení zápisu nezávisle proměnné budeme někdy vynechávat.

Standardní nelineární systém (1.26) zapíšeme v kompaktním tvaru ($n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n = n_1 + n_2 = 4$, $q_1 = 1$, $q_2 = n = 4$, $m = 2$)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{1.27}$$

kde

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \quad \boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T,$$

$$\boldsymbol{f} = [f_1, x_3, x_4, f_4]^T,$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_1 = \begin{bmatrix} g_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_2 = \begin{bmatrix} g_{12} \\ 0 \\ 0 \\ g_{42} \end{bmatrix}.$$

V souladu se vztahem (1.13) bude základní agregační matice typu (2, 4)

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agregované veličiny tedy budou

$$\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix}.$$

Určíme ještě inverzi základní agregační matice

$$\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x}) = \frac{\operatorname{adj} \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})}{\det \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{g_{11} g_{42}} \begin{bmatrix} g_{42} & -g_{12} \\ 0 & g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{g_{11}} & -\dfrac{g_{12}}{g_{11} g_{42}} \\ 0 & \dfrac{1}{g_{42}} \end{bmatrix},$$

kde adj je adjungovaný.

Z posledního vztahu je zřejmé, že pro $g_{11} g_{42} \neq 0$ je $\det \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) \neq 0$, jinak by inverze matice $\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})$ neexistovala a daný standardní nelineární systém by byl neřiditelný.

Po dosazení řízení

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})]$$

do

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}),$$
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}^0.$$

Provedeme dílčí výpočty

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{g_{11}} & -\dfrac{g_{12}}{g_{11}g_{42}} \\ 0 & \dfrac{1}{g_{42}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \end{bmatrix}.$$

a dostaneme

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u_1^0, \\ &\left.\begin{aligned} &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_4, \end{aligned}\right\} \quad n_2 = 3 \\ &\dot{x}_4 = u_2^0. \end{aligned}\right\} \; n = 4. \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad n_1 = 1$$

Vidíme, že obdržený systém je lineární řádu 4 a že se skládá ze 2 vzájemně nezávislých lineárních podsystémů řádu 1 a 3.

Příklad 1.3

Je třeba ověřit řiditelnost nelineárních systémů z příkladu 1.1.

Řešení:

Pro standardní nelineární systém (1.6) platí (1.10), a proto můžeme psát

$$\boldsymbol{D}_a = d_a = 1 \Rightarrow g_a(\boldsymbol{x}) = g(x) = x^2 + 1,$$

$$\det(x^2 + 1) \neq 0 .$$

Standardní nelineární systém (1.6) je řiditelný.

Nelineární systém (1.7) nemá standardní tvar, a proto o jeho řiditelnosti nemůžeme rozhodnout.

Pro standardní nelineární systém (1.8) platí vztahy (1.11). V souladu s nimi a (1.13) můžeme psát

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix},$$

$$\det \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 \Rightarrow x_2 \neq 0 .$$

Standardní nelineární systém (1.8) je řiditelný pro $x_2 \neq 0$.

Pro standardní nelineární systém (1.9) platí (1.12). Můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \Rightarrow \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

kde **I** je jednotková matice odpovídajícího typu.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x_2^2 \Rightarrow x_2 \neq \pm 1.$$

Standardní nelineární systém (1.9) je řiditelný pro $x_2 \neq \pm 1$.

1.3 Jednoduché transformace modelů nelineárních systémů na standardní tvar

Obecná transformace matematických modelů nelineárních systémů na standardní tvar je teoreticky i prakticky velmi náročná. Z tohoto důvodu uvedeme pouze jednoduché, ale z praktického hlediska důležité postupy formou obecných i konkrétních příkladů.

Volba vhodných stavových proměnných

Metoda volby vhodných stavových proměnných spočívá v postupném derivování nestandardních rovnic ve složkovém stavovém vyjádření. Každá nestandardní rovnice se derivuje podle času tolikrát, až se v nich objeví vstup (řízení) a pak se vhodně zvolí nové stavové proměnné. Pokud po tomto postupu matematický model nebude mít standardní tvar, pak je třeba obrátit se na specializovanou literaturu, zda taková transformace je pro daný systém možná.

Příklad 1.4

Nelineární systém *n*-tého řádu s jedním vstupem

$$\begin{aligned} &z^{(n)} = f_n(z, \dot{z}, \ldots, z^{(n-1)}) + g_n(z, \dot{z}, \ldots, z^{(n-1)})u, \\ &z(0), \dot{z}(0), \ldots, z^{(n-1)}(0), \end{aligned} \tag{1.28}$$

je třeba transformovat na standardní tvar a ověřit jeho řiditelnost.

Řešení:

Volbou stavových proměnných $x_1 = z$, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$, …, $x_n = \dot{x}_{n-1} = z^{(n-1)}$ dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= z(0), \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0) &= \dot{z}(0), \\ &\vdots & &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)u, & x_n(0) &= z^{(n-1)}(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.29a}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1.29b}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, & \dim \boldsymbol{x} &= n, \\ \boldsymbol{f} &= [x_2, x_3, \ldots, f_n]^T, & \dim \boldsymbol{f} &= n, \\ \boldsymbol{g} &= [0, 0, \ldots, g_n]^T, & \dim \boldsymbol{g} &= n. \end{aligned}$$

Pro standardní nelineární systém (1.29) platí $n = n_1 = q_1$, $m = 1$ a podmínka řiditelnosti má jednoduchý tvar

$$g_n(\boldsymbol{x}) \neq 0\,. \tag{1.30}$$

Příklad 1.5

Nelineární systém ve ***striktním trojúhelníkovém tvaru*** s jedním vstupem

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & z_1(0),\\ \dot{z}_2 &= f_2'(z_1, z_2) + z_3, & z_2(0),\\ \dot{z}_3 &= f_3'(z_1, z_2, z_3) + g_3'(z_1, z_2, z_3)u, & x_3(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

je třeba transformovat na standardní tvar a ověřit řiditelnost.

Řešení:

Zvolíme nové stavové proměnné

$$x_1 = z_1,\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_2,\ x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{z}_1 = \dot{z}_2$$

a můžeme psát

$$x_3 = \dot{z}_2,$$

$$x_3 = f_2'(x_1, x_2) + z_3 \ \Rightarrow\ z_3 = x_3 - f_2'(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\partial f_2'(x_1, x_2)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_2'(x_1, x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \dot{z}_3,$$

$$\dot{x}_3 = \underbrace{\frac{\partial f_2'(x_1, x_2)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial f_2'(x_1, x_2)}{\partial x_2}x_3 + f_3'[x_1, x_2, x_3 - f_2'(x_1, x_2)]}_{f_3(\boldsymbol{x})} + \underbrace{g_3'[x_1, x_2, x_3 - f_2'(x_1, x_2)]}_{g_3(\boldsymbol{x})}u.$$

Standardní nelineární systém bude mít tvar

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= z_1(0),\\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0) &= z_2(0),\\ \dot{x}_3 &= f_3(\boldsymbol{x}) + g_3(\boldsymbol{x})u, & x_3(0) &= f_2'[z_1(0), z_2(0)] + z_3(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.32a}$$

tj.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.32b}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, x_3]^T, \quad \dim \boldsymbol{x} = 3,\\ \boldsymbol{f} &= [x_2, x_3, f_3]^T, \quad \dim \boldsymbol{f} = 3,\\ \boldsymbol{g} &= [0, 0, g_3]^T, \quad \dim \boldsymbol{g} = 3. \end{aligned}\right\} \tag{1.32c}$$

U standardního nelineárního systému (1.32) je $n = n_1 = q_1 = 3$, $m = 1$ a podmínka řiditelnosti je

$$g_3(\boldsymbol{x}) = g_3'[x_1, x_2, x_3 - f_2'(x_1, x_2)] \neq 0\,.$$

Je zřejmé, že striktní trojúhelníkový nelineární systém konečného řádu n může být vždy transformován na standardní tvar, ale pro vyšší řád n obecný zápis je velmi nepřehledný a postup je pracný.

Při úpravě je možné zápis i vlastní úpravu zjednodušit a dosazení provést až v koncové fázi. Ukážeme si to na nelineárním systému (1.31), tj.

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2,\\
\dot{z}_2 &= f_2' + z_3,\\
\dot{z}_3 &= f_3' + g_3' u.
\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočteme

$$z_3 = \dot{z}_2 - f_2'$$

a pak také druhou rovnici derivujeme podle času (zatím pouze symbolicky)

$$\ddot{z}_2 = \dot{f}_2' + \dot{z}_3 \;\Rightarrow\; \ddot{z}_2 = \dot{f}_2' + f_3' + g_3' u\,.$$

Po dosazení nových proměnných dostaneme

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= x_3,\\
\dot{x}_3 &= \dot{f}_2' + f_3' + g_3' u,
\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

kde

$$\dot{f}_2' = \frac{\partial f_2'}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial f_2'}{\partial z_2}\dot{z}_2 = \frac{\partial f_2'}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial f_2'}{\partial x_2}x_3\,.$$

Po dosazení a úpravě se obdrží stejný výsledek jako (1.32).

Obecnější striktní trojúhelníkový tvar je uveden v příloze B.

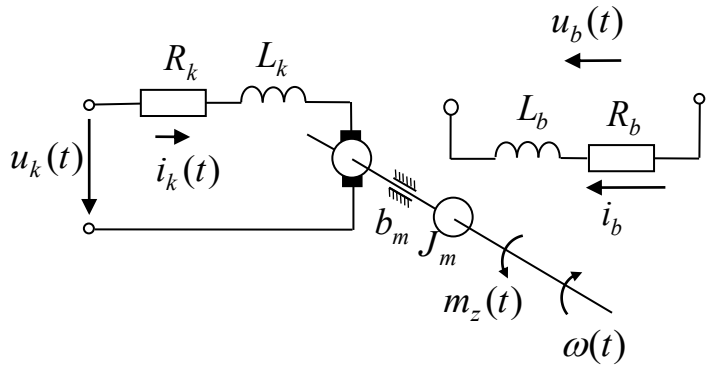
Příklad 1.6

Stejnosměrný motor s cizím buzením lze zjednodušeně zastoupit náhradním obvodovým schématem na obr. 1.3, pro které platí

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} &= \omega(t),\\
\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{J_m}[Mi_k(t)i_b(t) - b_m\omega(t) - m_z(t)],\\
\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{L_k}[u_k(t) - Mi_b(t)\omega(t) - R_k i_k(t)],\\
\frac{\mathrm{d}i_b(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{L_b}[u_b(t) - R_b i_b(t)],
\end{aligned}\right\} \qquad (1.34)$$

kde α je úhel natočení hřídele [rad], ω – úhlová rychlost [rad.s^{-1}], M – vzájemná indukčnost mezi vinutím buzení a kotvy [H], i_k – proud kotvy [A], i_b – budicí proud [A], u_k – napětí kotvy [V], u_b – budicí napětí [V], b_m – koeficient viskózního tření [kg.m^2.rad^{-1}.s^{-1}], m_z – zátěžný moment [N.m], L_k – celková indukčnost obvodu kotvy [H], L_b – celková indukčnost budicího obvodu [H], R_k – celkový odpor obvodu kotvy [Ω], R_b – celkový odpor budicího obvodu [Ω], J_m – celkový hmotný moment setrvačnosti redukovaný na hřídel motoru [kg.m^2]. Předpokládá se lineární magnetizační charakteristika.

Matematický model stejnosměrného motoru s cizím buzením je třeba transformovat na standardní tvar.



Obr. 1.3 Schéma stejnosměrného motoru s cizím buzením

Řešení:

Druhá rovnice v matematickém modelu (1.34) je nestandardní, a proto ji derivujeme podle času

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{J_m}\left(Mi_b\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + Mi_k\frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t} - b_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m_z}{\mathrm{d}t}\right). \qquad (1.35)$$

Po dosazení za derivace $\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ z modelu (1.34) a úpravě dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} = \frac{b_m^2}{J_m^2}\omega - \frac{M^2}{J_m L_k} i_b^2 \omega - \frac{M}{J_m}\left(\frac{b_m}{J_m} + \frac{R_k}{L_k} + \frac{R_b}{L_b}\right) i_k i_b + \\ + \frac{b_m}{J_m^2} m_z - \frac{1}{J_m}\frac{\mathrm{d}m_z}{\mathrm{d}t} + \frac{M}{J_m L_b} i_k u_b + \frac{M}{J_m L_k} i_b u_k . \tag{1.36}$$

Nyní zvolíme stavové proměnné a řízení, označíme poruchy

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha, & u_1 &= u_b, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \omega, & u_2 &= u_k, \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \dot{\omega}, & v &= m_z, \\ x_4 &= i_k . \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

Po dosazení (1.37) do druhé rovnice v (1.34) vypočteme budicí proud

$$i_b = \frac{1}{M x_4}(b_m x_2 + J_m x_3 + v),$$

dosadíme do (1.36) a při uvažování (1.37) po úpravách dostaneme standardní tvar matematického modelu stejnosměrného motoru s cizím buzením ($n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 4$, $q_1 = 3$, $q_2 = n = 4$, $m = 2$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= \alpha(0), \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0) &= \omega(0), \\ \dot{x}_3 &= f_3 + g_{31}u_1 + g_{32}u_2, & x_3(0) &= \dot{\omega}(0), \\ \dot{x}_4 &= f_4 + g_{42}u_2, & x_4(0) &= i_k(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x_2, x_3, x_4, v) + \boldsymbol{G}(x_2, x_3, x_4, v)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1.39a}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,\ \dim \boldsymbol{x} = 4,\ \boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T,\ \dim \boldsymbol{u} = 2,\\
&\boldsymbol{f} = [x_2, x_3, f_3, f_4]^T,\ \dim \boldsymbol{f} = 4,\ \boldsymbol{v} = [v, \dot{v}]^T,\ \dim \boldsymbol{v} = 2,\\
&\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix},\ \dim \boldsymbol{g}_1 = \dim \boldsymbol{g}_2 = 4,\ \dim \boldsymbol{G} = (4,2),
\end{aligned}\right\} \quad (1.39b)$$

$$\left.\begin{aligned}
f_3 &= \frac{b_m^2}{J_m^2} x_2 - \frac{1}{J_m L_k} \frac{x_2}{x_4^2} (b_m x_2 + J_m x_3 + v)^2 + \\
&\quad - \frac{1}{J_m} \left(\frac{b_m}{J_m} + \frac{R_k}{L_k} + \frac{R_b}{L_b} \right) (b_m x_2 + J_m x_3) + \\
&\quad - \frac{1}{J_m} \left(\frac{R_k}{L_k} + \frac{R_b}{L_b} \right) v - \frac{1}{J_m} \dot{v},\\
f_4 &= -\frac{R_k}{L_k} x_4 - \frac{1}{L_k} \frac{x_2}{x_4} (b_m x_2 + J_m x_3 + v),\\
g_{31} &= \frac{M}{J_m L_b} x_4,\ g_{32} = \frac{1}{J_m L_k x_4} (b_m x_2 + J_m x_3 + v),\\
g_{42} &= \frac{1}{L_k},
\end{aligned}\right\} \quad (1.39c)$$

kde v je považováno za poruchovou veličinu.

Základní agregační matice má tvar

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

a proto lze psát

$$\boldsymbol{G}_a = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{31} & g_{32} \\ 0 & g_{42} \end{bmatrix}.$$

Z podmínky řiditelnosti (1.25)

$$\det \boldsymbol{G}_a = \begin{vmatrix} g_{31} & g_{32} \\ 0 & g_{42} \end{vmatrix} = g_{31} g_{42} \neq 0 \tag{1.41}$$

vyplývá, že nelineární systém ve standardním tvaru (1.38) nebo (1.39) bude řiditelný pro $x_4 = i_k \neq 0$.

Zvolíme-li za čtvrtou stavovou proměnnou v (1.37) $x_4 = i_b$ a vypočteme z druhé rovnice v (1.34) proud kotvy

$$i_k = \frac{1}{M x_4}(b_m x_2 + J_m x_3 + v), \tag{1.42}$$

pak po dosazení do (1.36) a úpravě dostaneme poněkud jiný standardní tvar modelu stejnosměrného motoru s cizím buzením

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= \alpha(0), \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0) &= \omega(0), \\ \dot{x}_3 &= f_3 + g_{31} u_1 + g_{32} u_2, & x_3(0) &= \dot{\omega}(0), \\ \dot{x}_4 &= f_4 + g_{41} u_1, & x_4(0) &= i_b(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.43a}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} f_3 &= \frac{b_m^2}{J_m^2} x_2 - \frac{M}{J_m L_k} x_2 x_4^2 - \frac{1}{J_m}\left(\frac{b_m}{J_m} + \frac{R_k}{L_k} + \frac{R_b}{L_b}\right)(b_m x_2 + J_m x_3) + \\ &\quad - \frac{1}{J_m}\left(\frac{R_k}{L_k} + \frac{R_b}{L_b}\right) v - \frac{1}{J_m}\dot{v}, \\ f_4 &= -\frac{R_b}{L_b} x_4, \\ g_{31} &= \frac{1}{J_m L_b x_4}(b_m x_2 + J_m x_3 + v), \quad g_{32} = \frac{M}{J_m L_k} x_4, \\ g_{41} &= \frac{1}{L_b}. \end{aligned}\right\} \tag{1.43b}$$

Základní agregační matice je stejná jako (1.40), a proto podmínka řiditelnosti je

$$\det(\boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}) = \det \boldsymbol{G}_a = \det\begin{bmatrix} g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & 0 \end{bmatrix} = -g_{32} g_{41} = \frac{M}{J_m L_k L_b} x_4 \neq 0,$$

tj. $x_4 = i_b \neq 0$.

V tomto příkladě vystupuje i poruchová veličina *v*. Pokud je měřitelná, může být uvažována v řídicím algoritmu. V opačném případě je považována za nepřesnost matematického modelu nebo za neurčitost.

Příklad 1.7

Typický mechanický systém řádu $2n$ s n stupni volnosti může být popsán matematickým modelem (viz také kapitola 3)

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}, \tag{1.44}$$

kde $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ je čtvercová symetrická kladně definitní matice setrvačnosti řádu n, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ – čtvercová matice Coriolisových, odstředivých a viskózních sil řádu n, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ – vektor tíhových sil dimenze n, $\boldsymbol{q}$ – vektor zobecněných (konfiguračních) proměnných dimenze n, $\boldsymbol{v}$ – vektor poruchových proměnných dimenze n, $\boldsymbol{u}$ – vektor zobecněných sil (řídicích proměnných) dimenze n.

Matematický model mechanického systému (1.44) je třeba transformovat na standardní tvar a ověřit jeho řiditelnost.

Řešení:

V případě mechanických systémů s matematickým modelem (1.44) je řešení jednoduché. Zavedeme stavové proměnné a označení:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{q} = [x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}]^T = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T, \\
&\boldsymbol{x}_2 = \dot{\boldsymbol{q}} = [x_2, x_4, \ldots, x_{2n}]^T = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n]^T, \\
&\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_{2n}]^T = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2 \ldots, q_n, \dot{q}_n]^T, \\
&\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T, \ \boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T.
\end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

Nyní již můžeme matematický model mechanického systému (1.44) zapsat ve standardním tvaru

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_2, && \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{q}(0), \\
&\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{u}, && \boldsymbol{x}_2(0) = \dot{\boldsymbol{q}}(0),
\end{aligned}\right\} \tag{1.46a}$$

kde

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x}_1)[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{v}]. \tag{1.46b}$$

Matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_1)$ – je čtvercová symetrická a kladně definitní, a proto existuje její inverze – daný mechanický systém je řiditelný.

Doplňkové proměnné

V předchozím textu transformace modelů na standardní tvar předpokládala, že model nelineárního systému je ***afinní***, tj. lineárně závislý na řízení. Nyní

budeme uvažovat obecnější modely nelineárních systémů, kdy pomocí doplňkových proměnných upravíme jejich model tak, aby pomocí vhodné volby stavových proměnných mohl být transformován na standardní tvar.

Příklad 1.8

Je dán nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & z_1(0) &= z_{10}, \\ \dot{z}_2 &= f_2'(z_1, z_2, u'), & z_2(0) &= z_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

který je třeba upravit tak, aby ho bylo možné transformovat na standardní tvar.

Řešení:

U nelineárního systému (1.47) zavedeme doplňkovou proměnnou $z_3 = u'$ a dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & z_1(0), \\ \dot{z}_2 &= f_2'(z_1, z_2, z_3), & z_2(0), \\ \dot{z}_3 &= u, & z_3(0) = u'(0). \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

Nyní již můžeme použít postup z předchozího textu, tj. druhou rovnici je třeba jednou derivovat podle času a použít nové stavové proměnné $x_1 = z_1$, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_2$, $x_3 = \dot{x}_2 = \dot{z}_2$, $z_3 = u'$, tj. $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$.

Můžeme psát

$$\dot{z}_2 = f_2'(z_1, z_2, z_3) \Rightarrow x_3 = f_2'(x_1, x_2, z_3) \Rightarrow z_3 = f_2^0(x_1, x_2, x_3), \tag{1.49}$$

$$\ddot{z}_2 = \left.\frac{\partial f_2'}{\partial z_1}\right|_{\boldsymbol{x}} x_2 + \left.\frac{\partial f_2'}{\partial z_2}\right|_{\boldsymbol{x}} x_3 + \left.\frac{\partial f_2'}{\partial z_3}\right|_{\boldsymbol{x}} u \ . \tag{1.50}$$

Po dosazení (1.49) do (1.50) a úpravě dostaneme

$$\dot{x}_3 = \underbrace{\left.\frac{\partial f_2'}{\partial z_1}\right|_{\boldsymbol{x}} x_2 + \left.\frac{\partial f_2'}{\partial z_2}\right|_{\boldsymbol{x}} x_3}_{f_3(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\left.\frac{\partial f_2'}{\partial z_3}\right|_{\boldsymbol{x}}}_{g_3(\boldsymbol{x})} u \ ,$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= z_1(0), \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0) &= z_2(0), \\ \dot{x}_3 &= f_3(\boldsymbol{x}) + g_3(\boldsymbol{x})u, & x_3(0) &= \left.f_2'\right|_0. \end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

Je zřejmé, že nelineární systém (1.51) má standardní tvar.

Příklad 1.9

Nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, && z_1(0), \\ \dot{z}_2 &= -z_1 + u'^3, && z_2(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

je třeba transformovat na standardní tvar.

Řešení:

Zavedeme novou doplňkovou proměnnou $z_3 = u'$ a dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -z_1 + z_3^3, \\ \dot{z}_3 &= u\ . \end{aligned}\right\} \tag{1.53}$$

Zvolíme stavové proměnné $x_1 = z_1$, $x_2 = \dot{x}_1 = z_2$, $x_3 = \dot{x}_2 = \dot{z}_2$, tj. $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$.

Můžeme psát

$$\dot{z}_2 = -z_1 + z_3^3 \ \Rightarrow\ x_3 = -z_1 + z_3^3 \ \Rightarrow\ z_3 = \sqrt[3]{x_1 + x_3}\ ,$$

$$\ddot{z}_2 = -\dot{z}_1 + 3z_3^2\Big|_{\boldsymbol{x}} \dot{z}_3 ,$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 + 3\sqrt[3]{(x_1 + x_2)^2}\ u\ ,$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, && x_1(0) = z_1(0), \\ \dot{x}_2 &= x_3, && x_2(0) = z_2(0), \\ \dot{x}_3 &= -x_2 + 3\sqrt[3]{(x_1 + x_2)^2}\ u, && x_3(0) = -z_1(0) + [u'(0)]^3. \end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

Obdrželi jsme standardní tvar, i když za cenu zvýšení řádu systému o 1.

V celé řadě prakticky důležitých případů transformace nestandardních matematických modelů nelineárních systémů na standardní tvary může být provedena jednoduchými postupy spočívajícími ve vhodné volbě stavových proměnných, příp. v zavedení doplňkových proměnných.

1.4 Zpětnovazební linearizace vstup-výstup standardních nelineárních systémů a relativní stupeň

Uvažujme nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \quad \dim \boldsymbol{x} = \dim \boldsymbol{f} = n, \quad \dim \boldsymbol{G} = (n,m), \tag{1.55a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \qquad \dim \boldsymbol{y} = \dim \boldsymbol{h} = m, \quad \dim \boldsymbol{u} = m, \tag{1.55b}$$

kde $\boldsymbol{h}$ je obecně nelineární spojitá vektorová funkce.

Protože počet výstupů y_j je stejným jako počet vstupů (řízení) u_j (tj. m), proto takový systém se nazývá ***čtvercový***. Je to nejčastější případ.

Předpokládejme, že nelineární systém (1.55) má rovnovážný stav (pracovní bod) $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{y}_e = \boldsymbol{0}$ odpovídající řízení $\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{0}$.

Relativní stupeň výstupu y_j je dán řádem derivace podle času r_j, pro který se poprvé objeví v derivovaném výrazu některá ze složek řízení $\boldsymbol{u}$. Výsledný relativní stupeň daného nelineárního systému je dán součtem dílčích relativních stupňů, tj.

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_m. \tag{1.56}$$

Relativní stupeň r u nelineárního systému je lokální vlastnost, která platí pro daný stav, příp. pro danou oblast stavů.

Příklad 1.10

U jednorozměrového nelineárního systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 + u \end{aligned} \tag{1.57}$$

je třeba určit relativní stupeň r za předpokladu, že výstup je dán vztahem:

a) $y = x_1$, (1.58a)

b) $y = x_2$, (1.58b)

c) $y = x_1 + x_2$. (1.58c)

Řešení:

a) $y = h(x_1) = x_1$,

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d}\, h}{\mathrm{d}\, x_1}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, t^2} = -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - \sin x_1 + u.$$

Řízení u se objevilo při druhé derivaci výstupu y, proto relativní stupeň $r = 2 = n = 2$.

b) $y = h(x_2) = x_2$,

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,x_2}\dot{x}_2 = -\sin x_1 + u\,.$$

V tomto případě se řízení u objevilo při první derivaci, a proto $r = 1 < n = 2$.

c) $y = h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$,

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial h}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - \sin x_1 + u\,.$$

Rovněž v tomto případě se řízení objevilo při první derivaci, a proto $r = 1 < n = 2$.

Je zřejmé, že relativní stupeň silně závisí na výstupní funkci *h*.

Příklad 1.11

Je dán dvourozměrový nelineární systém řádu $n = 2$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u_1 - u_2,\\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 + u_1 + u_2,\end{aligned}\right\} \tag{1.59a}$$

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= x_1,\\ y_2 &= x_2.\end{aligned}\right\} \tag{1.59b}$$

Je třeba určit jeho relativní stupeň.

Řešení:

$$y_1 = h_1(x_1) = x_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,h_1}{\mathrm{d}\,x_1}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u_1 - u_2,$$

$$y_2 = h_2(x_2) = x_2,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,h_2}{\mathrm{d}\,x_2}\dot{x}_2 = -\sin x_1 + u_1 + u_2\,.$$

V obou případech se řízení $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T$ objevilo při první derivaci, a proto $r_1 = r_2 = 1$.

Nelineární systém (1.59) má relativní stupeň

$$r = r_1 + r_2 = 2 = n = 2\,.$$

Příklad 1.12

Je dán model jednorozměrového lineárního systému ve tvaru přenosu

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-r}s^{n-r}+b_{n-r-1}s^{n-r-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}, \tag{1.60}$$

kde Y je obraz výstupu y, U – obraz řízení u.

Je třeba ukázat, že relativní stupeň lineárního systému popsaného přenosem (1.60) je dán rozdílem stupňů jmenovatele a čitatele, tj. r.

Řešení:

Jednorozměrový lineární systém (1.60) vyjadříme v kanonickém tvaru řízení

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= x_3,\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u,\\
y &= b_0x_1 + b_1x_2 + \cdots + b_{n-r}x_{n-r+1}.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Protože

$$y=h(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)^T\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial h}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial h}{\partial x_2}\dot{x}_2+\cdots+\frac{\partial h}{\partial x_{n-r+1}}\dot{x}_{n-r+1}=\\
&=b_0\dot{x}_1+b_1\dot{x}_2+\cdots+b_{n-r}\dot{x}_{n-r+1},\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=b_0\dot{x}_2+b_1\dot{x}_3+\cdots+b_{n-r}\dot{x}_{n-r+2},\\
&\vdots\\
\frac{\mathrm{d}^r y}{\mathrm{d}t^r}&=b_0\dot{x}_r+b_1\dot{x}_{r+1}+\cdots+b_{n-r}\dot{x}_n=\\
&=b_0x_{r+1}+b_1x_{r+2}+\cdots-b_{n-r}(a_0x_1+a_1x_2+\cdots+a_{n-1}x_n-u).
\end{aligned}$$

Vidíme, že řízení u se objevilo při r-té derivaci, a proto relativní stupeň jednorozměrového lineárního systému (1.60) je skutečně dán rozdílem stupňů jmenovatele a čitatele přenosu, tj. r.

Příklad 1.13

U standardního nelineárního systému z příkladu 1.2 (1.26)

$$n=4\begin{cases} n_1=1 & \{\dot{x}_1=f_1(\boldsymbol{x})+g_{11}(\boldsymbol{x})u_1+g_{12}(\boldsymbol{x})u_2, \\ n_2=3 & \begin{cases}\dot{x}_2=x_3, \\ \dot{x}_3=x_4, \\ \dot{x}_4=f_4(\boldsymbol{x})+g_{42}(\boldsymbol{x})u_2\end{cases}\end{cases} \qquad (1.62a)$$

s výstupy

$$\left.\begin{aligned} y_1&=h_1(x_1)=x_1, \\ y_2&=h_2(x_2)=x_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1.62b)$$

je třeba určit relativní stupeň.

Řešení:

Lze psát

$$\frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\,h_1}{\mathrm{d}\,x_1}\dot{x}_1=\dot{x}_1=f_1(\boldsymbol{x})+g_{11}(\boldsymbol{x})u_1+g_{12}(\boldsymbol{x})u_2.$$

Řízení se objevilo již při první derivaci, a proto $r_1=1$. Podobně lze psát

$$\frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\,h_2}{\mathrm{d}\,x_2}\dot{x}_2=\dot{x}_2=x_3,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y_2}{\mathrm{d}\,t^2}=\dot{x}_3=x_4,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\,y_2}{\mathrm{d}\,t^3}=\dot{x}_4=f_4(\boldsymbol{x})+g_{42}(\boldsymbol{x})u_2.$$

Řízení se objevilo při třetí derivaci, a proto $r_2=3$.

Relativní stupeň standardního nelineárního systému je $r=r_1+r_2=4$.

Vidíme, že relativní stupeň $r_1=1$ je roven dílčímu řádu $n_1=1$ a podobně relativní stupeň $r_2=3$ je roven dílčímu řádu $n_3=3$. Relativní stupeň standardního nelineárního systému $r=4$ je pak roven celkovému řádu $n=4$.

Samozřejmě tyto závěry platí v případě definování výstupů podobně jako (1.62b).

Uvažujme nyní obecný standardní nelineární systém ve složkovém vyjádření (1.1)

$$
\begin{aligned}
n_1 &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_1 = x_2, & x_1(0), \\
\dot{x}_2 = x_3, & x_2(0), \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
\dot{x}_{q_1} = f_{q_1}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_1 j}(\boldsymbol{x}) u_j, & x_{q_1}(0),
\end{array}\right. \\
n_2 &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_{q_1+1} = x_{q_1+2}, & x_{q_1+1}(0), \\
\dot{x}_{q_1+2} = x_{q_1+3}, & x_{q_1+2}(0), \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
\dot{x}_{q_2} = f_{q_2}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_2 j}(\boldsymbol{x}) u_j, & x_{q_2}(0),
\end{array}\right. \\
n_3 &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_{q_2+1} = x_{q_2+2}, & x_{q_2+1}(0), \\
\quad\dot{x}_{q_2+2} = x_{q_2+3}, & x_{q_2+2}(0), \\
\quad\vdots & \quad\vdots
\end{array}\right. \\
n_m &\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x}_n = f_n(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(\boldsymbol{x}) u_j, & x_n(0),
\end{array}\right.
\end{aligned}
\tag{1.63a}
$$

$$
q_j = q_{j-1} + n_j, \quad q_0 = 0, \quad n = \sum_{j=1}^{m} n_j , \tag{1.63b}
$$

s výstupy

$$
\left.\begin{array}{l}
y_1 = h_1(x_1) = x_1 , \\
y_2 = h_2(x_{q_1+1}) = x_{q_1+1}, \\
\vdots \\
y_j = h_j(x_{q_{j-1}+1}) = x_{q_{j-1}+1}, \\
\vdots \\
y_m = h_m(x_{q_{m-1}+1}) = x_{q_{m-1}+1}
\end{array}\right\} \tag{1.63c}
$$

kde y_i jsou výstupní proměnné (výstupy).

V souladu s definicí relativního stupně pro j-tý výstup lze psát

$$\frac{\mathrm{d}\,y_j}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,h_j}{\mathrm{d}\,x_{q_{j-1}+1}} = \dot{x}_{q_{j-1}+1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y_j}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{x}_{q_{j-1}+1} = \dot{x}_{q_{j-1}+2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\,y_j}{\mathrm{d}\,t^3} = \dddot{x}_{q_{j-1}+2} = \dot{x}_{q_{j-1}+3},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n_j}\,y_j}{\mathrm{d}\,t^{n_j}} = \dot{x}_{q_{j-1}+n_j} = \dot{x}_{q_j} = f_{q_j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} g_{q_j j}(\boldsymbol{x}) u_j .$$

Při derivaci n_j-tého řádu podle času se v derivovaném výrazu objevilo řízení, a proto relativní stupeň $r_j = n_j$, tj. relativní stupeň pro j-tý výstup je roven odpovídajícímu dílčímu řádu n_j.

Je zřejmé, že relativní stupeň r nelineárního systému ve standardním tvaru (1.63a,b) a s výstupy (1.63c) je roven součtu dílčích řádů n_j, tj. platí

$$r = \sum_{j=1}^{m} r_j = n = \sum_{j=1}^{m} n_j, \quad r_j = n_j . \tag{1.64}$$

Dílčí řád n_j, tj. relativní stupeň r_j u standardního nelineárního systému je velmi důležitý při návrhu decentralizovaného řízení.

Pro $r = n$ ***zpětnovazební linearizace vstup-stav je současně linearizací vstup-výstup. U standardních nelineárních systémů pro*** (1.63c) ***to platí vždy***.

Zpětnovazební linearizace vstup-výstup je také často nazývána ***dynamická inverze***.

Výstupní proměnné y_j lze získát ze stavových proměnných x_i na základě vztahů (1.63c)

$$y_j = x_{q_{j-1}+1},$$

tj.

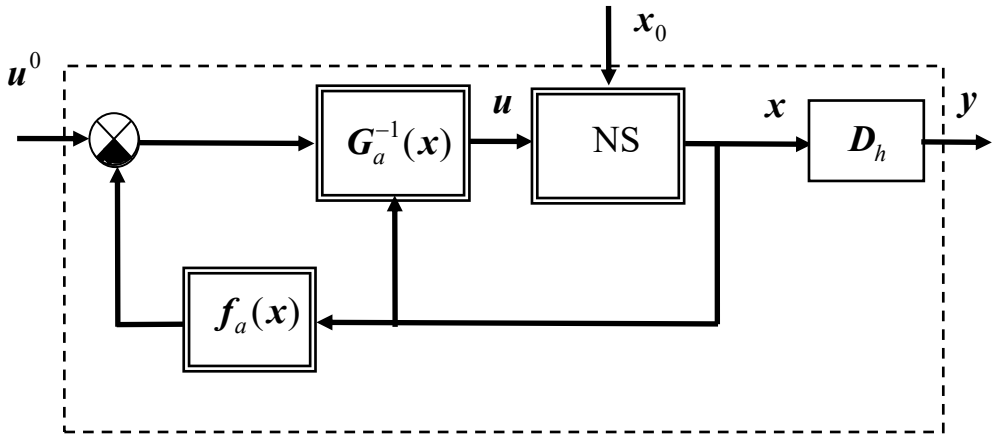
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}_h \boldsymbol{x}, \tag{1.65}$$

kde ***výstupní agregační matice*** $\boldsymbol{D}_h$ typu (m,n) je dána (viz příloha A)

$$\boldsymbol{D}_h = [d_{ji}^h], \tag{1.66a}$$

$$d_{ji}^h = \begin{cases} 1 \ \textbf{pro} \ \ i = q_{j-1} + 1, \\ 0 \ \textbf{pro} \ \ i \neq q_{j-1} + 1. \end{cases} \tag{1.66b}$$

Linearizovaný standardní nelineární systém vstup-výstup je na obr. 1.4.



Obr. 1.4 Zpětnovazevní linearizace vstup-výstup standardního nelineárního systému

2 NÁVRH ŘÍZENÍ STANDARDNÍCH NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

Řízení systémů je dáno ***cílem řízení***, který v nejčastějších, pro praxi důležitých, případech lze formulovat jako ***stabilizaci*** nebo ***sledování***.

Stabilizační řízení stabilizuje výstupní veličiny na hodnotách odpovídajících žádaných veličin a současně potlačuje škodlivý vliv poruchových veličin. Naproti tomu ***sledovací řízení*** je obecnější, musí být stabilizační a současně zajišťovat průběžné sledování odpovídajících žádaných veličin výstupními veličinami. Samozřejmě i v tomto případě poruchové veličiny musí být potlačovány. Pro sledovací řízení se někdy používá pojem ***programové řízení***.

2.1 Nerobustní řízení

Nerobustní řízení ke své správné činnosti vyžaduje znalost matematického modelu řízeného systému a měřitelnost poruchových veličin. Je zřejmé, že jsou to velmi náročné požadavky především v průmyslových podmínkách. Existence záporné zpětné vazby dovede tyto požadavky zmírnit, ale v některých případech to může být nedostatečné. Význam nerobustního řízení spočívá v kombinaci s vhodným robustním řízením, kdy nerobustní řízení využívá částečnou znalost vlastností řízeného systému a částečnou měřitelnost poruchových veličin. Naproti tomu robustní řízení pak zajistí požadovanou kvalitu řízení i při neúplné znalosti matematického modelu a měřitelnosti poruchových veličin.

2.1.1 Řízení na základě modelu

V dalším textu, pokud nebude řečeno jinak, se budeme zabývat především sledováním a budeme vycházet ze standardních tvarů modelů nelineárních systémů a zpětnovazební linearizace. ***Také se předpokládá dostupnost všech stavových proměnných***.

Rozdíl mezi oběma řízeními, tj. stabilizačním a sledovacím řízení, si ukážeme na jednorozměrovém standardním nelineárním systému.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\boldsymbol{x}) + g_n(\boldsymbol{x})u, \\ y &= x_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

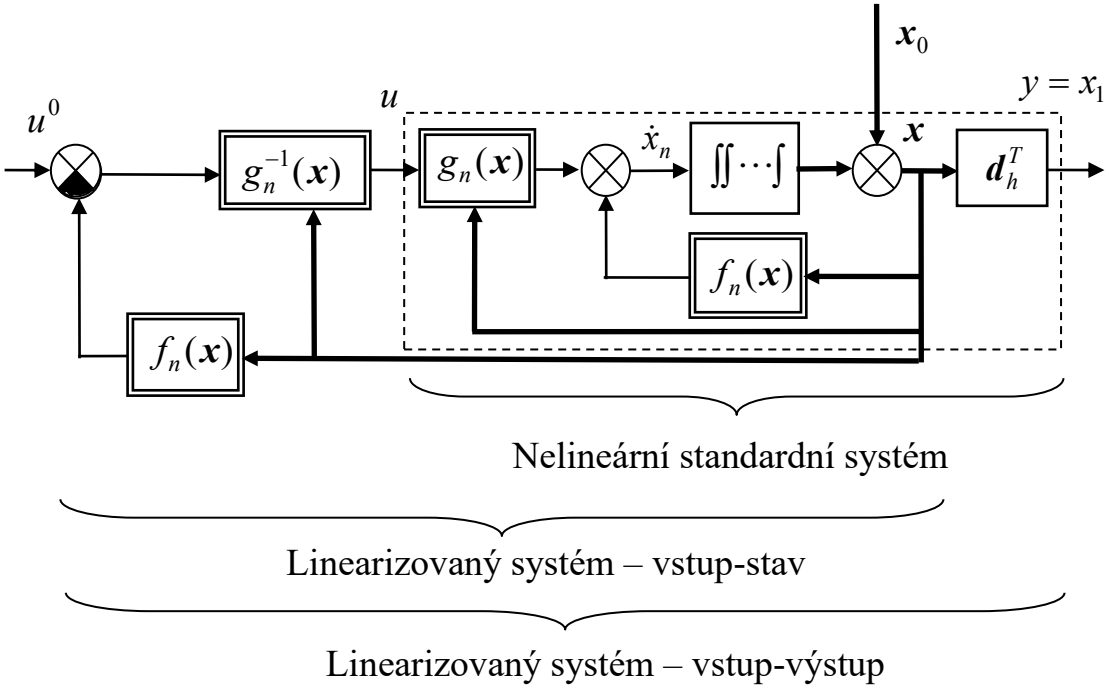
Provedeme zpětnovazební linearizaci vstup-stav pomocí řízení [viz (1.18)]

$$u = g_n^{-1}(\boldsymbol{x})[u^0 - f_n(\boldsymbol{x})]\,, \quad g_n(\boldsymbol{x}) \neq 0\,. \tag{2.2}$$

a dostaneme linearizovaný (lineární) systém (obr. 2.1)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= x_3\,, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u^0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

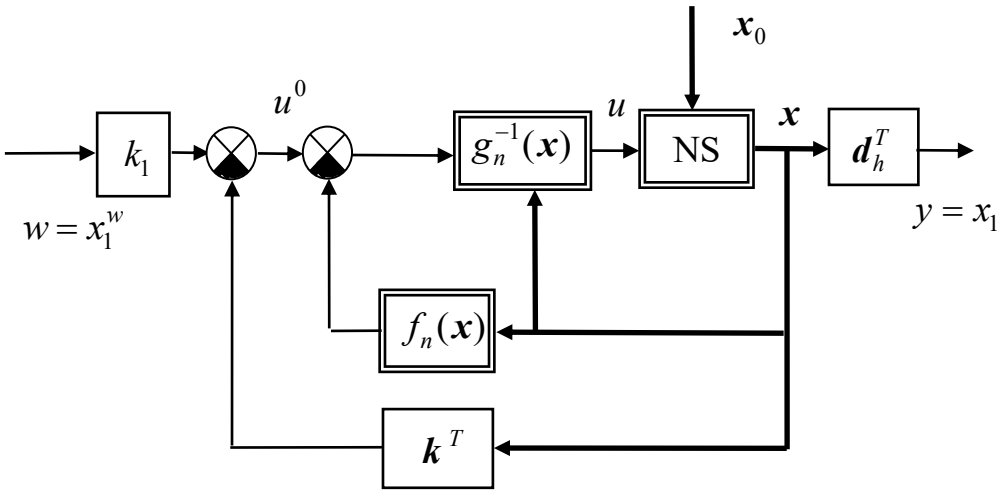
Protože platí $y = x_1$ ($n = r$), jde současně o zpětnovazební linearizaci vstup-výstup.



Obr. 2.1 Zpětnovazební linearizace jednorozměrového standardního nelineárního systému

Stabilizační řízení

Pro stabilizační řízení můžeme použít klasické stavové řízení v souladu s obr. 2.2.



Obr. 2.2 Stabilizační řízení jednorozměrového standardního nelineárního systému

Zpětnovazební řízení (zpětnovazební regulace) je realizováno pomocí vektoru

$$\boldsymbol{k}^T = [k_1, k_2, \ldots, k_n], \tag{2.4}$$

jehož složky k_i (z důvodu strukturní stability musí všechny existovat) jsou zvoleny tak, aby zajistily požadované vlastnosti systému řízení, tj.

$$u^0 = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x} + k_1 x_1^w = -\sum_{i=1}^{n} k_i x_i + k_1 x_1^w. \tag{2.5}$$

Celé řízení spolu s linearizačním řízením je pak dáno vztahem

$$u = \frac{1}{g_n(\boldsymbol{x})} (\underbrace{k_1 x_1^w - \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}}_{u^0}) - \frac{1}{g_n(\boldsymbol{x})} f_n(\boldsymbol{x}). \tag{2.6}$$

Vidíme, že řízení se skládá ze dvou částí. První část pravé strany výrazu (2.6) zajišťuje požadované vlastnosti uzavřeného systému řízení a druhá část zajišťuje zpětnovazební linearizaci.

Požadovaný model uzavřeného systému řízení má tvar

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - \cdots - k_n x_n + k_1 x_1^w \end{aligned}\right\} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_w x_1^w, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix}, \ \dim \boldsymbol{K} = (n,n), \ \boldsymbol{b}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \ \dim \boldsymbol{b}_w = (n,1),$$

$$\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{d}_a^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \ -\boldsymbol{k}^T = \boldsymbol{d}_a^T \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & \ldots & -k_n \end{bmatrix}.$$

Po aplikaci řízení (2.6) na standardní nelineární systém (2.1) se dostane

$$\dot{x}_n + k_n x_n + k_{n-1} x_{n-1} + \cdots + k_2 x_2 + k_1 x_1 = k_1 x_1^w,$$

$$x_1^{(n)} + k_n x_1^{(n-1)} + k_{n-1} x_1^{(n-2)} + \cdots + k_2 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = k_1 x_1^w. \tag{2.8a}$$

Zpětnovazební vektor $\boldsymbol{k}$ může být určen libovolnou metodou, ale vždy tak, aby zajistil asymptotickou stabilitu při požadované kvalitě řízení.

Za předpokladu nulových počátečních podmínek můžeme ze vztahu (2.8a) získat přenos systému řízení

$$\frac{X_1(s)}{X_1^w(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{k_1}{s^n + k_n s^{n-1} + \cdots + k_2 s + k_1}, \tag{2.8b}$$

ze kterého je zřejmé, že pro určení zpětnovazebního vektoru $\boldsymbol{k}$ můžeme s výhodou použít metodu standardních tvarů.

Sledovací řízení

V tomto případě po zpětnovazební linearizaci je použito řízení

$$u^0 = \dot{x}_n^w + \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{e} = \frac{\mathrm{d}^n x_1^w}{\mathrm{d}t^n} + \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{e}, \tag{2.9}$$

kde

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}^w - \boldsymbol{x}, \tag{2.10}$$

a $\boldsymbol{k}^T$ je dáno vztahem (2.4). Požadovaný model zpětnovazebního sledovacího řízení je

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ \dot{e}_n &= -k_1 e_1 - k_2 e_2 - \cdots - k_n e_n \end{aligned}\right\} \dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}\,, \tag{2.11}$$

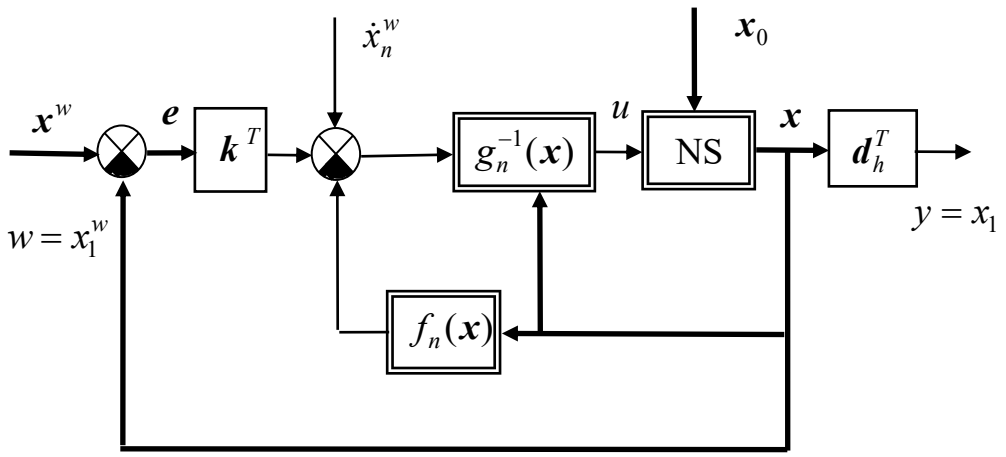
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix}, \dim \boldsymbol{K} = (n,n),$$

$$\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{d}_a^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \qquad -\boldsymbol{k}^T = \boldsymbol{d}_a^T \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & \ldots & -k_n \end{bmatrix}.$$

Celé řízení je pak dáno vztahem (obr. 2.3)

$$u = \frac{1}{g_n(\boldsymbol{x})}(\underbrace{\dot{x}_n^w + \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{e}}_{u^0}) - \frac{1}{g_n(\boldsymbol{x})} f_n(\boldsymbol{x})\,. \tag{2.12}$$

Opět první část pravé strany výrazu (2.12) zajišťuje požadované vlastnosti uzavřeného systému řízení a druhá část zajišťuje zpětnovazební linearizaci.



Obr. 2.3 Sledovací řízení jednorozměrového standardního nelineárního systému

Použitím řízení (2.12) u jednorozměrového standardního nelineárního systému (2.1) se dostane

$$\dot{x}_n = \dot{x}_n^w + k_n e_n + k_{n-1} e_{n-1} + \cdots + k_2 e_2 + k_1 e_1,$$

$$\dot{e}_n + k_n e_n + k_{n-1} e_{n-1} + \cdots + k_2 e_2 + k_1 e_1 = 0.$$

Protože platí

$$\dot{e}_i = e_{i+1},$$

po dosazení obdržíme

$$e_1^{(n)} + k_n e_1^{(n-1)} + k_{n-1} e_1^{(n-2)} + \cdots + k_2 \dot{e}_1 + k_1 e_1 = 0, \qquad e_1 = x_1^w - x_1. \quad (2.13a)$$

Za předpokladu nulových počátečních podmínek můžeme ze vztahu (2.13a) získat přenos systému řízení

$$\frac{X_1(s)}{X_1^w(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{s^n + k_n s^{n-1} + \cdots + k_2 s + k_1}{s^n + k_n s^{n-1} + \cdots + k_2 s + k_1} = 1. \quad (2.13b)$$

Z přenosu (2.13b) vyplývá, že pokud jsou k dispozici všechny derivace žádané veličiny $w = x_1^w$, pak při nulových počátečních podmínkách sledování je „ideální“. Samozřejmě, že se předpokládá dokonalá znalost funkcí $f_n(\boldsymbol{x})$, $g_n(\boldsymbol{x})$ a dostupnost všech stavových proměnných.

Pro obecné průběhy žádané veličiny $w = x_1^w$ určení vyšší derivace než 3. řádu není reálné. Nejčastěji je uvažován 2. řád derivace. V tomto případě přenos systému řízení má tvar

$$\frac{X_1(s)}{X_1^w(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{k_2 s^2 + k_2 s + k_1}{s^n + k_n s^{n-1} + \cdots + k_2 s + k_1}. \quad (2.14)$$

Pokud nebudou k dispozici žádné derivace žádané veličiny, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^i x_1^w}{\mathrm{d}t^i} = 0 \quad (2.15)$$

pro všechna i ($i = 1, 2, \ldots, n$), pak přenos systému řízení při nulových počátečních podmínkách je dán vztahem (2.8b).

Je tedy zřejmé, že stabilizační řízení je speciálním případem sledovacího řízení.

Příklad 2.1

Pro nelineární systém 2. řádu (obr. 2.4)

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\sin(z_1) + 2u \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

je třeba navrhnout vhodné řízení, které zajistí vlastnosti uzavřeného systému řízení odpovídající lineárnímu systému 2. řádu.

Řešení:

Nelineární systém (2.16) nemá standardní tvar, a proto ho na něj upravíme.

První rovnici jednou derivujeme podle času

$$\ddot{z}_1 = -\dot{z}_1 + \dot{z}_2 \;\Rightarrow\; \ddot{z}_1 = z_1 - z_2 - \sin(z_1) + 2u$$

a zavedeme nové proměnné

$$x_1 = z_1,\; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1,\; \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{z}_1. \tag{2.17}$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \sin(x_1) + 2u, \end{aligned}$$

tj.

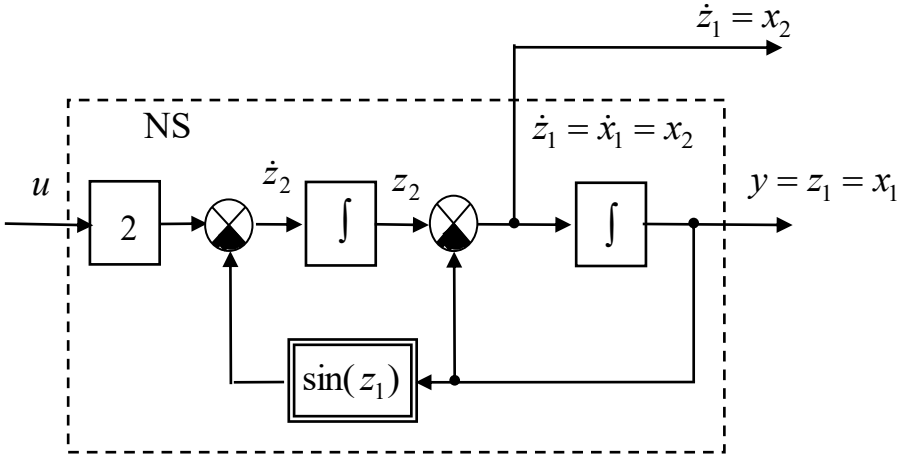
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\boldsymbol{x}) + g_2 u, \end{aligned}\right\} \tag{2.18a}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} f_2(\boldsymbol{x}) &= -x_2 - \sin(x_1), \\ g_2 &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{2.18b}$$

Původní proměnné jsou dány vztahy

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1, \\ z_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$



Obr. 2.4 Nelineární systém 2. řádu – příklad 2.1

Navrhneme sledovací řízení, které pro požadovaný lineární systém 2. řádu

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_0\omega_0\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \tag{2.20}$$

má v souladu s (2.12) a (2.18) pro $k_1 = \omega_0^2$ a $k_2 = 2\xi_0\omega_0$ tvar

$$u = \frac{1}{g_2}[\dot{x}_2^w + \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{e} - f_2(\boldsymbol{x})] = \frac{1}{2}[\dot{x}_2^w + \omega_0^2 e_1 + 2\xi_0\omega_0 e_2 + \sin(x_1) + x_2], \tag{2.21}$$

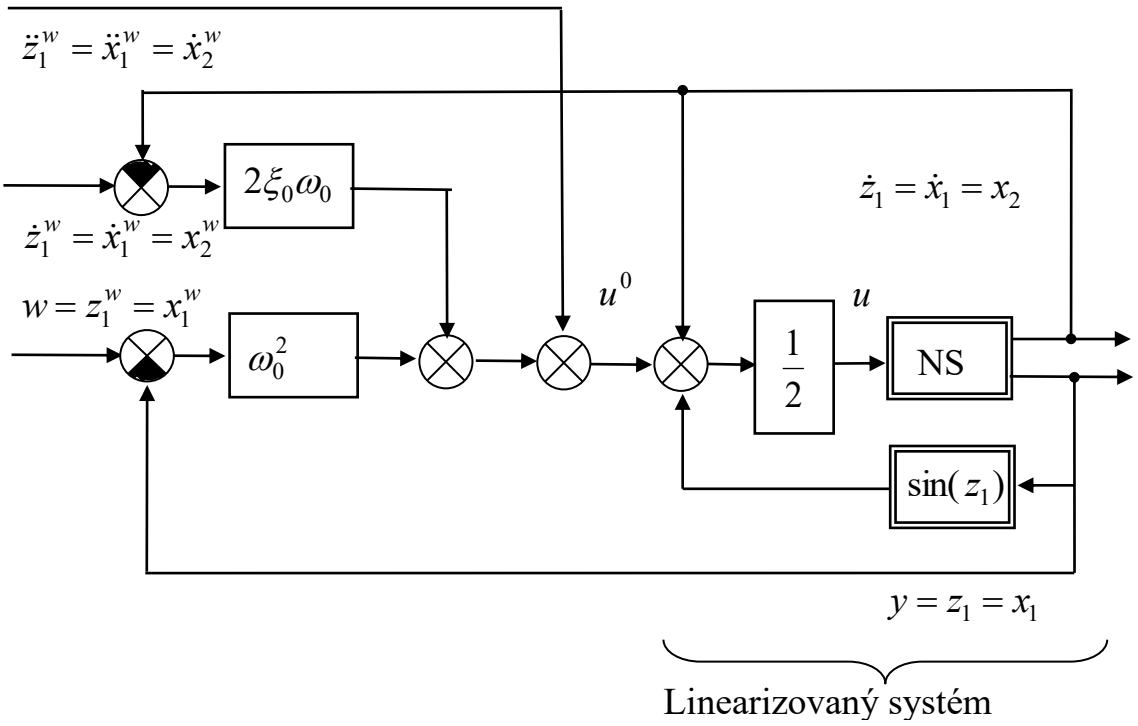
$$e_1 = x_1^w - x_1, \qquad e_2 = x_2^w - x_2,$$

kde ξ_0 je koeficient poměrného tlumení, ω_0 – úhlový kmitočet netlumených kmitů.

Použitím řízení (2.21) u nelineárního systému (2.18), resp. (2.16), viz obr. 2.5, po úpravě dostaneme

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_2^w + 2\xi_0\omega_0 e_2 + \omega_0^2 e_1 \;\Rightarrow$$

$$\ddot{e}_1 + 2\xi_0\omega_0\dot{e}_1 + \omega_0^2 e_1 = 0. \tag{2.22}$$



Obr. 2.5 Systém sledovacího řízení – příklad 2.1

Rovnice (2.22) popisuje odchylku sledování. Je zřejmé, že pokud počáteční podmínky

$$e_1(0) = x_1^w(0) - x_1(0) = z_1^w(0) - z_1(0),$$
$$e_2(0) = \dot{e}_1(0) = \dot{x}_1^w(0) - \dot{x}_1(0) = \dot{z}_1^w(0) - \dot{z}_1(0)$$

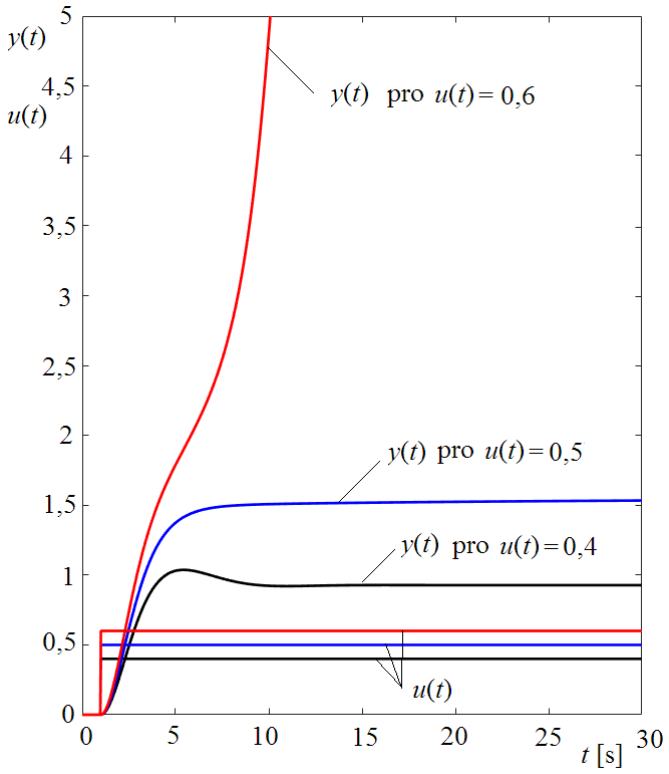
budou nulové, pak sledování bude „ideální“, tj.

$$e_1(t) = x_1^w(t) - x_1(t) = z_1^w(t) - z_1(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \geq 0.$$

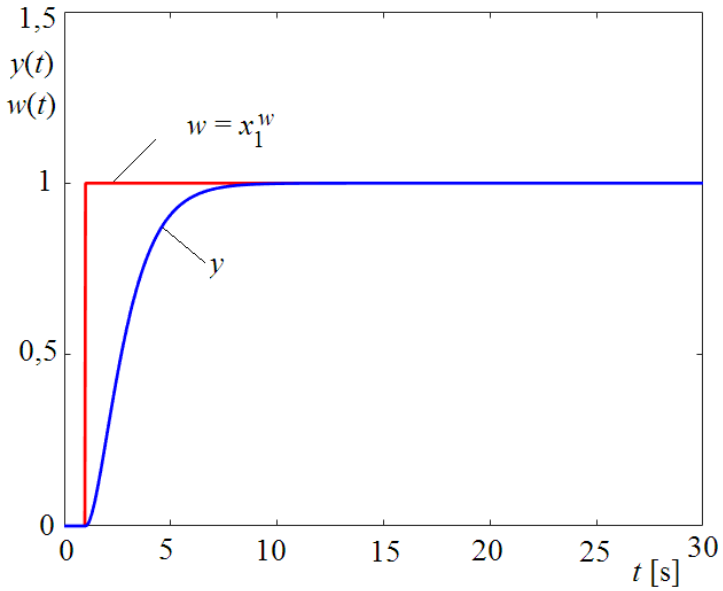
V případě nenulových počátečních podmínek průběh odchylky sledování $e_1(t)$ se řídí diferenciální rovnicí (2.22) a pro $\xi_0 > 0$ vždy asymptoticky konverguje k nule.

Nelineární systém (2.16) na obr. 2.4 je silně nelineární, viz obr. 2.6, kde jsou odezvy na skokové změny vstupní veličiny $u = 0{,}4$; 0,5 a 0,6. Z obr. 2.6 a ze vztahu (2.16) vyplývá, že pro $|u| > 0{,}5$ se dominantně projeví integrační vlastnost nelineárního systému, protože záporná zpětná vazba u prvního integrátoru se stává neúčinná a druhý integrátor spolu se zpětnou vazbou realizuje proporcionální člen se setrvačností prvního řádu.

Na obr. 2.7 je přechodová charakteristika navrženého systému řízení pro $\omega_0 = 1$ rad.s^{-1} a $\xi_0 = 1$, viz (2.20).



Obr. 2.6 Odezvy nelineárního systému na skokové změny vstupní veličiny – příklad 2.1

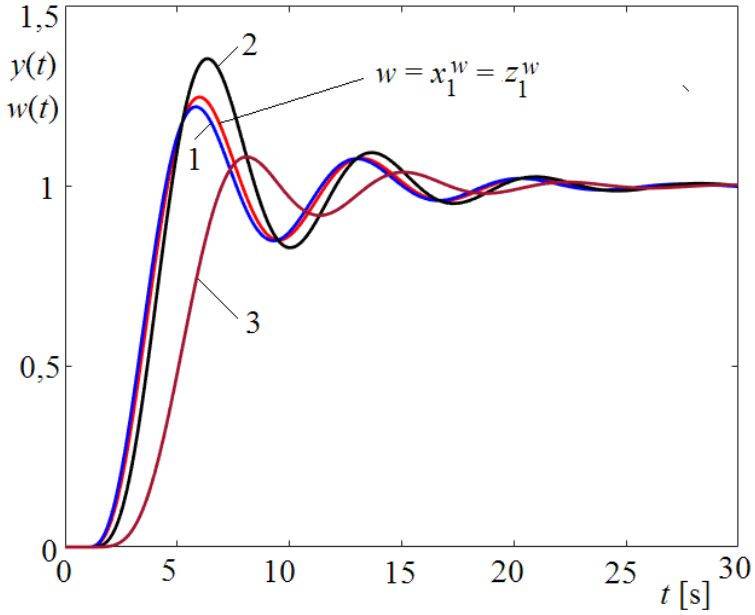


Obr. 2.7 Přechodová charakteristika navrženého systému řízení – příklad 2.1

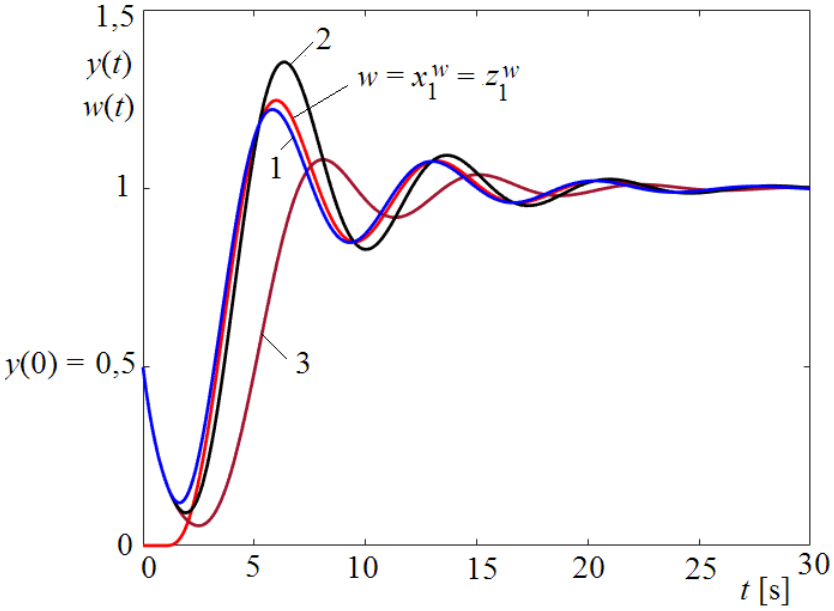
Pro ověření navrženého sledovacího řízení (2.21) byla zvolena přechodová charakteristika proporcionálního členu se setrvačností 3. řádu

$$W(s) = X_1^w(s) = Z_1^w(s) = \frac{1}{s(2s^3 + 2s^2 + 2s + 1)} \tag{2.23}$$

z důvodu nulových počátečních podmínek až do 2. řádu včetně. Sledování zadaného průběhu w [tj. přechodové charakteristiky (2.23)] výstupní veličinou $y = x_1$ pro nulové počáteční podmínky je na obr. 2.8 a pro $y(0) = x_1(0) = z_1(0) = 0{,}5$ je na obr. 2.9.



Obr. 2.8 Sledování zadaného průběhu při nulových počátečních podmínkách – příklad 2.1



Obr. 2.9 Sledování zadaného průběhu při nenulové počáteční podmínce – příklad 2.1

Průběhy výstupní veličiny $y = x_1$ jsou očíslovány a vyjadřují dostupnost derivací:

1 – jsou dostupné derivace $\dot{x}_1^w$ a $\ddot{x}_1^w = \dot{x}_2^w$,

2 – je dostupná derivace $\dot{x}_1^w$,

3 – není dostupná žádná derivace.

Průběhy 1 a 2 odpovídají sledovacímu řízení, viz vztahy (2.13b) a (2.14). Průběh 1 by měl odpovídat „ideálnímu“ sledování. Je třeba si však uvědomit, že derivace $\dot{x}_1^w$ a $\ddot{x}_1^w$ jsou získávány aproximací a tato nepřesnost spolu s dynamikou systému řízení (viz obr. 2.7) způsobují snížení kvality sledování. Kvalita sledování se výrazně zvýší pro $\omega_0 > 1$, tj. při zrychlení dynamiky systému řízení.

Protože stabilizační řízení je speciálním případem sledovacího řízení, dále se budeme převážně zabývat sledovacím řízením a slovo sledovací budeme často vynechávat.

Pro mnohorozměrové standardní nelineární systémy sledovací řízení má tvar [viz (1.18) a (2.12)]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})(\underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}^0}) - \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) \tag{2.24}$$

kde $\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})(\dot{\boldsymbol{x}}_a^w + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e})$ zajišťuje požadované vlastnosti, $\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})$ – zajišťuje zpětnovazební linearizaci a $\boldsymbol{K}_a$ je čtvercová matice řádu m [typu (m, m)]

$$-\boldsymbol{K}_a = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{k}_1^T \\ -\boldsymbol{k}_2^T \\ \vdots \\ -\boldsymbol{k}_m^T \end{bmatrix} = [-\boldsymbol{k}_1, -\boldsymbol{k}_2, \ldots, -\boldsymbol{k}_m]^T, \tag{2.25a}$$

$$-\boldsymbol{k}_j^T = [-k_{jq_{j-1}+1} \quad -k_{jq_{j-1}+2} \quad \ldots \quad -k_{jq_j}]. \tag{2.25b}$$

Matice $\boldsymbol{K}$ má složitější strukturu a je dána vztahem (2.27).

Při návrhu řízení je vhodné ke každému j-tému dílčímu podsystému (obr. 1.2) ***přistupovat jako k jednorozměrovému systému v souladu se vztahy*** (2.12) [případně (2.6)].

Řízení (2.24) zajistí u uzavřeného systému řízení, že jeho matematický model má tvar

$$\dot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0, \tag{2.26}$$

kde matice dynamiky $\boldsymbol{K}$ je dána vztahem (2.27a) a dílčí matice $\boldsymbol{K}_{jj}$ jsou v normálním (kanonickém) tvaru řízení (2. Brunovského – Kalmana – Luenbergera kanonický tvar)

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{22} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{K}_{mm} \end{bmatrix}, \qquad \dim \boldsymbol{K} = (n,n), \tag{2.27a}$$

$$\boldsymbol{K}_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{jq_{j-1}+1} & -k_{jq_{j-1}+2} & -k_{jq_{j-1}+3} & \cdots & -k_{jq_j} \end{bmatrix}, \tag{2.27b}$$

$\dim \boldsymbol{K}_{jj} = (n_j, n_j)$.

Každému dílčímu podsystému řízení řádu n_j (relativního stupně r_j) odpovídá charakteristický mnohočlen

$$N_j^w(s) = k_{jq_{j-1}+1} + k_{jq_{j-1}+2}s + \cdots + k_{jq_j}s^{n_j-1} + s^{n_j}. \tag{2.28a}$$

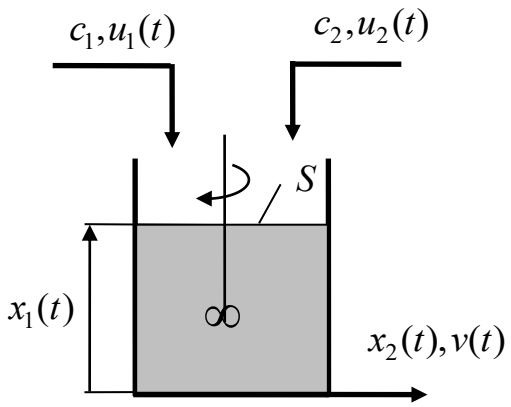
Charakteristický mnohočlen celého systému řízení je pak dán jejich součinem

$$N^w(s) = \prod_{j=1}^{m} N_j^w(s). \tag{2.28b}$$

Příklad 2.2

V koncentračním směšovači (obr. 2.10) s neměnným průřezem S [m^2] probíhá dokonalé mísení dvou roztoků stejné látky, ale s rozdílnými konstantními koncentracemi c_1 a c_2 [kmol.m^{-3}] s odpovídajícími objemovými přítoky $u_1(t)$ a $u_2(t)$ [m^3.s^{-1}]. Tyto přítoky je třeba řídit tak, aby výsledná koncentrace roztoku $x_2(t)$ [kmol.m^{-3}] byla rovna $w_2 = x_2^w$ a výška hladiny roztoku $x_1(t)$ [m] byla udržována na hodnotě $w_1 = x_1^w$.

Předpokládá se, že objemový výtok $v(t)$ je volný, tj. úměrný druhé odmocnině výšky hladiny $x_1(t)$.



Obr. 2.10 Zjednodušené schéma koncentračního směšovače – příklad 2.2

Řešení:

Koncentrační směšovač na obr. 2.10 může být popsán bilančními rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} S\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} &= u_1(t) + u_2(t) - v(t), && x_1(0) \\ S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t)x_2(t)] &= c_1u_1(t) + c_2u_2(t) - x_2(t)v(t), && x_2(0) \\ v(t) &= a\sqrt{x_1(t)} \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

při fyzikálních omezeních

$$\left.\begin{aligned} &x_1(t) > 0, && u_1(t), u_2(t) \geq 0, \\ &0 < c_1 \leq x_2(t) \leq c_2, && x_2^w(0) \leq c_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

kde a je známá konstanta [$\mathrm{m}^{5/2}.\mathrm{s}^{-1}$].

Úpravou rovnic (2.29) se obdrží stavový model koncentračního směšovače

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{a}{S}\sqrt{x_1} + \frac{1}{S}u_1 + \frac{1}{S}u_2, \\ \dot{x}_2 &= +\frac{c_1 - x_2}{Sx_1}u_1 + \frac{c_2 - x_2}{Sx_1}u_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

tj.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x_1) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{2.32a}$$

kde

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T, \boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T, \boldsymbol{f} = \left[-\frac{a}{S}\sqrt{x_1}, 0 \right]^T,$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \\ \frac{c_1 - x_2}{S x_1} & \frac{c_2 - x_2}{S x_1} \end{bmatrix}. \tag{2.32b}$$

Ze stavového modelu (2.31) vyplývá, že nelineární systém reprezentující koncentrační směšovač je ve standardním tvaru ($n_1 = r_1 = n_2 = r_2 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = n = 2$, $n = n_1 + n_2 = r = r_1 + r_2 = 2$).

Protože matice $\boldsymbol{G}$ je čtvercová (základní agregační matice $\boldsymbol{D}_a$ je jednotková), a proto podmínkou řiditelnosti v souladu s (1.25) je

$$\det \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{c_2 - c_1}{S^2 x_1} \neq 0. \tag{2.33}$$

Tato podmínka je vždy splněna [viz fyzikální omezení (2.30)] až na případ $c_1 = c_2 = x_2^w$, kdy řízení je zbytečné.

V našem případě pro $q_1 = 1$ a $q_2 = 2$ můžeme v souladu se vztahy (2.31) a (2.32) psát

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})[\dot{\boldsymbol{x}}^w + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}(x_1)] \tag{2.34a}$$

kde

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a^w = \dot{\boldsymbol{x}}^w,$$

$$\boldsymbol{G}_a^{-1}(x) = \boldsymbol{G}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} S\frac{c_2 - x_2}{c_2 - c_1} & -S\frac{x_1}{c_2 - c_1} \\ -S\frac{c_1 - x_2}{c_2 - c_1} & S\frac{x_1}{c_2 - c_1} \end{bmatrix}, \tag{2.34b}$$

$$\boldsymbol{f}_a(x_1) = \boldsymbol{f}(x_1) = \begin{bmatrix} -\frac{a}{S}\sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\boldsymbol{K}_a = -\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 0 \\ 0 & -k_{22} \end{bmatrix}.$$

Protože se má udržovat koncentrace roztoku na hodnotě $w_2 = x_2^w$ a výška hladiny na hodnotě $w_1 = x_1^w$ jde o stabilizační řízení (tj. jde o běžnou regulaci), v řízení (2.34) nebude uvažována derivace $\dot{\boldsymbol{x}}^w$. Výsledné řízení ve složkovém tvaru má tedy tvar

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= S\frac{c_2 - x_2}{c_2 - c_1}\left(k_{11}e_1 + \frac{a}{S}\sqrt{x_1}\right) - S\frac{x_1}{c_2 - c_1}k_{22}e_2, \\ u_2 &= -S\frac{c_1 - x_2}{c_2 - c_1}\left(k_{11}e_1 + \frac{a}{S}\sqrt{x_1}\right) + S\frac{x_1}{c_2 - c_1}k_{22}e_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.35)$$

Použitím řízení (2.35) u koncentračního směšovače (2.29), resp. (2.32) se dostane

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + k_{11}x_1 = k_{11}x_1^w \;\Rightarrow\; T_1\dot{x}_1 + x_1 = x_1^w, \quad x_1(0), \\ \dot{x}_2 + k_{22}x_2 = k_{22}x_2^w \;\Rightarrow\; T_2\dot{x}_2 + x_2 = x_2^w, \quad x_2(0), \end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

kde T_1 a T_2 jsou časové konstanty [s].

Protože výsledek je jednoduchý, simulace nebyla prováděna.

Doposud navrhované řízení u standardních nelineárních systémů po zpětnovazební linearizaci bylo lineární a uzavřený systém řízení byl rovněž lineární.

Tento přístup k návrhu řízení lze zobecnit. Uvažujme řiditelný standardní nelineární systém [(1.1) – (1.4)]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad (2.37)$$

pro který je třeba navrhnout takové řízení, které zajistí, aby uzavřený systém řízení měl matematický model ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}^w - \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0, \qquad (2.38a)$$

resp. v agregovaném tvaru

$$\dot{\boldsymbol{e}}_a - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{x}_a^w - \boldsymbol{x}_a, \qquad (2.38b)$$

kde obecně nelineární funkce $\boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{e})$ ***má stejnou strukturu jako funkce*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ve vztahu (2.37) [viz (1.1)], tj.

$$\boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{e}) = \left[e_2, \ldots, f_{q_1}^w(\boldsymbol{e}), e_{q_1+2}, \ldots, f_{q_2}^w(\boldsymbol{e}), e_{q_2+2}, \ldots, f_n^w(\boldsymbol{e})\right]^T, \qquad (2.39)$$

a vyhovuje podmínce

$$\boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \qquad (2.40a)$$

s globálně asymptoticky stabilním stavem

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}\ . \qquad (2.40b)$$

Na základě podobnosti se vztahy (2.12) a (2.24) lze psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e})}_{\boldsymbol{u}^0}] - \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) = \\ &= \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\dot{\boldsymbol{x}}_a^w - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})],\end{aligned} \tag{2.41}$$

kde $\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\dot{\boldsymbol{x}}_a^w - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e})]$ zajišťuje požadované vlastnosti a $\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})$ – zajišťuje zpětnovazební linearizaci.

Je zřejmé, že použitím řízení (2.41) u standardního nelineárního systému (2.37) se obdrží uzavřený systém řízení s matematickým modelem (2.38).

Podobně i u řízení (2.6), (2.12) a (2.24) jsme mohli na základě tvaru (struktury) standardního nelineárního systému přímo vycházet z požadovaného matematického modelu uzavřeného systému řízení, viz odpovídající vztahy (2.7), (2.11) a (2.26).

Návrh řízení na základě modelu je velmi jednoduchý a má výhodu spočívající v tom, že požadovaný model uzavřeného systému řízení můžeme zvolit ve tvaru, který nejlépe odpovídá našim představám.

2.1.2 Řízení na základě účelového funkcionálu

Sledovací řízení lze rovněž navrhnout na základě minimalizace kvadratického účelového funkcionálu

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} + \dot{\boldsymbol{e}}^T\boldsymbol{Q}_0\dot{\boldsymbol{e}})\,\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}^w - \boldsymbol{x}, \tag{2.42}$$

kde $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$ jsou symetrické čtvercové kladně definitní, resp. kladně semidefinitní konstantní váhové matice řádu n [$\dim \boldsymbol{Q} = \dim \boldsymbol{Q}_0 = (n,n)$].

Z důvodu existence kvadratického účelového funkcionálu (2.42) musí platit

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{2.43}$$

První výraz v integrandu kvadratického účelového funkcionálu (2.42) zajišťuje blízkost trajektorií $\boldsymbol{x}(t)$ a $\boldsymbol{x}^w(t)$, druhý výraz zajišťuje dostatečnou blízkost i jejich derivací $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ a $\dot{\boldsymbol{x}}^w(t)$, tj. blízkost jejich časových změn. Protože každá časová změna stavu vyžaduje určitou spotřebu energie řízení, druhý výraz vyjadřuje nepřímo i spotřebu energie.

Důležitost jednotlivých složek vektoru $\boldsymbol{e}(t)$ a $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ vyjadřují odpovídající nezáporné konstantní prvky váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$.

Cílem je navrhnout řízení $\boldsymbol{u}$, které pro řiditelný standardní nelineární systém [(1.1) – (1.4)]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.44}$$

zajistí minimum kvadratického účelového funkcionálu (2.42).

Zavedeme vektor agregované odchylky

$$\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}, \qquad \dim \boldsymbol{D} = (m,n), \qquad \operatorname{rank} \boldsymbol{D} = m, \tag{2.45}$$

kde $\boldsymbol{D}$ je nezáporná agregační matice (tato matice je obecně jiná, než základní agregační matice $\boldsymbol{D}_a$ a výstupní agregační matice $\boldsymbol{D}_h$). Jejím úkolem je vyčlenit odchylky e_i dílčích podsystémů do agregovaných odchylek s_j ovlivňovaných odpovídajícími řízeními u_j. Z tohoto důvodu v každém řádku j agregační matice $\boldsymbol{D}$ je n_j kladných prvků a zbývající prvky jsou nulové (viz příloha A), tj.

$$\left.\begin{aligned} &d_{ji} > 0 \ \text{pro} \ q_{j-1} < i \le q_j, \\ &d_{ji} = 0 \ \text{pro} \ i \le q_{j-1} \ \text{nebo} \ i > q_j. \end{aligned}\right\} \tag{2.46a}$$

Z důvodu zjednodušení je vhodné volit

$$d_{jq_j} = 1. \tag{2.46b}$$

Nyní můžeme vektory $\boldsymbol{e}(t)$ a $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ v kvadratickém účelovém funkcionálu (2.42) zastoupit agregovanými vektory $\boldsymbol{s}(t)$ a $\dot{\boldsymbol{s}}(t)$, tj.

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{s} + \dot{\boldsymbol{s}}^T \boldsymbol{T}^2 \dot{\boldsymbol{s}}) \,\mathrm{d}t, \tag{2.47}$$

kde

$$\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}[T_1, T_2, \ldots, T_m], \quad \dim \boldsymbol{T} = (m,m), \tag{2.48}$$

je diagonální matice kladných časových konstant T_j.

Ze srovnání funkcionálů (2.42) a (2.47) vyplývají rovnosti

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{T}^2 \boldsymbol{D} \tag{2.49}$$

a na základě vztahů (2.43) a (2.45) platí

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{s}(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{2.50}$$

Ze vztahu (2.49) je zřejmé, že pro dané matice $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{T}$ vždy existují odpovídající váhové matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$, a proto v tomto případě oba funkcionály (2.42) a (2.47) budou vzájemně ekvivalentní. Pro dané matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$ oba funkcionály budou ekvivalentní pouze za předpokladu existence rozkladu (2.49).

Jednoduchá struktura kvadratického účelového funkcionálu (2.47) umožňuje jeho přímou minimalizaci.

Použijeme pomocný kvadratický funkcionál

$$\int_0^\infty (\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s})^T (\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}) \,\mathrm{d}t\,, \tag{2.51}$$

který nabývá svého ostrého globálního minima rovného 0 pro

$$\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{s}(0) = \boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(0) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_0\,, \tag{2.52}$$

tj. pro řešení

$$\boldsymbol{s}^*(t) = \exp(-\boldsymbol{T}^{-1}t)\boldsymbol{s}_0\,. \tag{2.53}$$

Z řešení (2.53) vyplývá interpretace diagonální matice (2.48) jako matice časových konstant.

Nyní si ukážeme souvislost mezi kvadratickými funkcionály (2.47) a (2.51).

Pomocný funkcionál (2.51) upravíme

$$\int_0^\infty (\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s})^T (\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}) \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} + \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}^2\dot{\boldsymbol{s}}) \,\mathrm{d}t + 2\int_0^\infty \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} \,\mathrm{d}t \tag{2.54}$$

a poslední výraz integrujeme metodou per partes

$$\int_a^b u\dot{v} \,\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b \dot{u}v \,\mathrm{d}t \tag{2.55}$$

s využitím koncových podmínek (2.50), tj.

$$\int_0^\infty \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} \,\mathrm{d}t = [\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}]_0^\infty - \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s} \,\mathrm{d}t = -\boldsymbol{s}_0^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0 - \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s} \,\mathrm{d}t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 2\int_0^\infty \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} \,\mathrm{d}t = -\boldsymbol{s}_0^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0\,. \tag{2.56}$$

Na základě vztahů (2.54) a (2.56) dostaneme velmi důležitou rovnost

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} + \dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{T}^2\dot{\boldsymbol{s}}) \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s})^T (\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}) \,\mathrm{d}t + \boldsymbol{s}_0^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0\,. \tag{2.57}$$

Protože hodnota [viz (2.56), (2.45)]

$$\boldsymbol{s}_0^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{e}_0^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_0 \tag{2.58}$$

je konstantní, z rovnosti (2.57) vyplývá, že kvadratický účelový funkcionál (2.47) nabývá svého ostrého globálního minima J^* rovného hodnotě (2.58) na stejné časové funkci (2.53) jako pomocný kvadratický funkcionál (2.51). Hvězdička znamená optimální. Rovněž je zřejmé, že za předpokladu platnosti vztahů (2.49) hodnota (2.58) je ostrým globálním minimem původního kvadratického účelového funkcionálu (2.42).

Diferenciální rovnice (2.52) popisuje vlastnosti optimálního uzavřeného systému řízení vzhledem k vektoru agregované odchylky $\boldsymbol{s}$. Po uvažování vztahu (2.45) a úpravě obdržíme agregovanou diferenciální rovnici optimálního systému řízení vzhledem k odchylce $\boldsymbol{e}$

$$\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 . \tag{2.59}$$

Protože platí

$$\dot{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u}^*) = \dot{\boldsymbol{x}}^w - \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}^*), \tag{2.60}$$

po uvažování (2.44) dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u}^*) = \dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^* . \tag{2.61}$$

Ze struktury matic $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ vyplývá, že

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}), \tag{2.62}$$

a proto pro řiditelný standardní nelineární systém (2.44) platí

$$\det[\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})] \neq 0 \Rightarrow [\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})]^{-1} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x}) . \tag{2.63}$$

S využitím vztahů (2.59), (2.61) a (2.63) po úpravě dostaneme optimální řízení

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{x}}^w + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] . \tag{2.64}$$

Optimální řízení (2.64) pro dané matice $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{T}$ minimalizuje kvadratický účelový funkcionál (2.42) pro (2.49), tzn., že zajišťuje optimální sledování zadané trajektorie $\boldsymbol{x}^w(t)$ skutečným stavem $\boldsymbol{x}(t)$. Z něho a ze struktury agregační matice (2.46) vyplývá, že dochází rovněž ke zpětnovazební linearizaci a optimální uzavřený systém řízení je lineární

$$\dot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 , \tag{2.65}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je konstantní čtvercová matice dynamiky [viz také (2.27)].

Optimální uzavřený systém řízení (2.65) sestává z m lineárních dílčích podsystémů řízení řádu n_j s dílčími charakteristickými mnohočleny [srovnej s (2.28a)]

$$N_j^w(s) = (d_{jq_{j-1}+1} + d_{jq_{j-1}+2}s + \cdots + d_{jq_j-1}s^{n_j-2} + s^{n_j-1})\left(\frac{1}{T_j} + s\right). \tag{2.66}$$

Každý dílčí charakteristický mnohočlen musí mít asymptoticky stabilní kořeny.

Charakteristický mnohočlen celého optimálního systému řízení je součinem dílčích charakteristických mnohočlenů, podobně jako (2.28b).

Zajímavé je, že každý dílčí charakteristický mnohočlen (2.66) musí obsahovat nejméně jeden záporný reálný pól

$$s = -\frac{1}{T_j}. \tag{2.67}$$

Optimální uzavřený systém řízení (2.65) je tvořen m lineárními autonomními dílčími podsystémy řízení, jejichž požadované vlastnosti můžeme snadno zajistit vhodnou volbou časových konstant T_j a koeficientů d_{ji} jejich charakteristických mnohočlenů (2.66), tj. vhodnou volbou matic $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{D}$. Je to důležitý závěr, protože požadovanou kvalitu sledování vyjádřenou kvadratickým účelovým funkcionálem (2.42) zaručíme bez nutnosti předchozí znalosti váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{Q}_0$. Je tedy zřejmé, že kvadratický účelový funkcionál (2.42) má pouze pomocnou roli a že při jeho minimalizaci rovněž došlo ke zpětnovazební linearizaci vstup-stav.

Navrhneme-li sledovací řízení na základě lineárního modelu tak, aby každý dílčí charakteristický mnohočlen obsahoval nejméně jeden záporný reálný pól, pak toto řízení minimalizuje odpovídající kvadratický účelový funkcionál.

Příklad 2.3

Je třeba navrhnout optimální řízení na základě kvadratického účelového funkcionálu (2.42) pro standardní nelineární systém z příkladu 1.2 [viz (1.26)]

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) + g_{11}(\boldsymbol{x})u_1 + g_{12}(\boldsymbol{x})u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= f_4(\boldsymbol{x}) + g_{42}(\boldsymbol{x})u_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

Řešení:

Využijeme některé výsledky získané v příkladě 1.2.

V souladu se vztahem (2.64) optimální řízení je

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{x}}^w + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})], \tag{2.69a}$$

kde (viz příklad 1.2)

$$[\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})]^{-1} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{g_{11}} & -\dfrac{g_{12}}{g_{11}g_{42}} \\ 0 & \dfrac{1}{g_{42}} \end{bmatrix}. \tag{2.69b}$$

Agregační matici získáme na základě vztahu (2.46) pro $q_1 = 1$ a $q_2 = 4$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.69c}$$

Matice časových konstant je diagonální (2.48)

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}. \tag{2.69d}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \quad \dot{\boldsymbol{x}}^w = [\dot{x}_1^w, \dot{x}_2^w, \dot{x}_3^w, \dot{x}_4^w]^T, \\ &\boldsymbol{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T, \quad \boldsymbol{f} = [f_1(\boldsymbol{x}), x_3, x_4, f_4(\boldsymbol{x})]^T, \end{aligned}\right\} \tag{2.69e}$$

$$\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_{11}(\boldsymbol{x}) & g_{12}(\boldsymbol{x}) \\ 0 & g_{42}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}. \tag{2.69f}$$

Použitím řízení (2.64) se dostane optimální uzavřený systém řízení (2.59), tj. po dosazení (2.69c) a (2.69d) do (2.59) a úpravě dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 + \frac{1}{T_1} e_1 &= 0, \\ \dddot{e}_2 + \left(d_{23} + \frac{1}{T_2} \right) \ddot{e}_2 + \left(d_{22} + \frac{d_{23}}{T_2} \right) \dot{e}_2 + \frac{d_{22}}{T_2} e_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.70a}$$

při počátečních podmínkách

$$e_1(0),\ e_2(0),\ \dot{e}_2(0),\ \ddot{e}_2(0). \tag{2.70b}$$

Časové konstanty T_1 a T_2 zvolíme s ohledem na dynamické vlastnosti řízeného standardního nelineárního systému (2.68). Koeficienty d_{22} a d_{23} zvolíme v návaznosti na časovou konstantu T_2. Např. pro

$$d_{22} = \frac{1}{T_2^2} \quad \text{a} \quad d_{23} = \frac{2}{T_2} \tag{2.71}$$

dostaneme optimální uzavřený systém řízení

$$\left.\begin{aligned} T_1 \dot{e}_1 + e_1 &= 0, \\ T_2^3 \dddot{e}_2 + 3T_2^2 \ddot{e}_2 + 3T_2 \dot{e}_2 + e_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.72}$$

Z příkladu 2.3 je zřejmé, že kvadratický účelový funkcionál (2.42) má skutečně pouze pomocnou roli a že optimální řízení můžeme určit přímo na základě matematického modelu řízeného standardního nelineárního systému a požadovaných vlastností uzavřeného systému řízení.

Doposud se předpokládalo, že matematický model řízeného standardního nelineárního systému je časově neměnný (t-invariantní) a že na systém řízení nepůsobí poruchové veličiny.

Výše uvedené přístupy k návrhu řízení platí i pro časově proměnné (*t*-variantní) standardní nelineární systémy a pro měřitelné poruchové veličiny, tj. pro jejich matematické modely ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.73}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je vektor poruchových veličin $\dim \boldsymbol{v} = p$.

V tomto případě v části řízení týkající se zpětnovazební linearizace musí být uvažovány v souladu s matematickým modelem (2.73) odpovídající výrazy

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &\rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t), \\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) &\rightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t), \end{aligned}\right\} \tag{2.74a}$$

případně

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) &\rightarrow \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t), \\ \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) &\rightarrow \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t). \end{aligned}\right\} \tag{2.74b}$$

2.2 Robustní řízení

V předchozí podkapitole při návrhu řízení se předpokládalo, že matematický model standardního nelineárního systému je známý a že působící poruchové veličiny jsou plně měřitelné. V reálných podmínkách matematický model je známý pouze přibližně, většinou je zjednodušen a poruchové veličiny nejsou často plně měřitelné. Z tohoto důvodu pro praxi mají význam metody robustního řízení, které tuto plnou znalost nevyžadují, nebo ji získají přímo z řízeného nelineárního systému.

2.2.1 Řízení využívající malé dopravní zpoždění

Řízení využívající malé dopravní zpoždění [TDC – **T**ime **D**elay(ed) **C**ontrol] vychází z předpokladu, že při malém dopravním zpoždění *h* se vlastnosti řízeného systému změní také málo.

Uvažujme řiditelný standardní nelineární systém [viz (1.1) – (1.4)]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{2.75}$$

a jemu odpovídající agregovaný systém [viz (1.14) a (1.16)]

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a = \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\,. \tag{2.76}$$

Z této rovnice vyplývá

$$\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}_a - \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\,. \tag{2.77}$$

Nyní předpokládejme, že $\dot{\boldsymbol{x}}_a$ a $\boldsymbol{u}$ je zpožděno o malý časový interval *h* a že matice $\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})$ je konstantní a přibližně známa. Je zřejmé, že platí [viz (2.77)]

$$\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}_{ae}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \boldsymbol{G}_{ae}\boldsymbol{u}(t-h), \tag{2.78}$$

kde $\boldsymbol{f}_{ae}(\boldsymbol{x})$ je odhad funkce $\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{G}_{ae}$ – konstantní čtvercová matice řádu *m*, tj. $\dim \boldsymbol{G}_{ae} = \dim \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = (m,m)$, která vyhovuje podmínce (viz příloha D)

$$\left\| \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_{ae}^{-1} - \mathbf{I} \right\| < 1. \tag{2.79}$$

Podmínka (2.79) zajišťuje konvergenci

$$\boldsymbol{f}_{ae}[\boldsymbol{x}(t-h)] \rightarrow \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) \tag{2.80}$$

pro $h \rightarrow 0$ a $t \rightarrow \infty$.

Je zřejmé, že uvedený přístup k určení odhadu $\boldsymbol{f}_{ae}(\boldsymbol{x})$ vlastně realizuje ***pozorovatel*** (estimátor) funkce $\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})$.

Protože odhad $\boldsymbol{f}_{ae}[\boldsymbol{x}(t)]$ zastupuje funkci $\boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)]$, proto je zřejmé, že v řízeních (2.6), (2.12), (2.24) a (2.41) ***odhad*** (2.78) ***zajišťuje zpětnovazební linearizaci vstup-stav***.

V souladu se vztahem (2.41) řízení je dáno

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_{ae}^{-1}[\dot{\boldsymbol{x}}_a^w - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e})] - \boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\boldsymbol{f}_{ae}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_{ae}^{-1}[\dot{\boldsymbol{x}}_a^w - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}_{ae}(\boldsymbol{x})]. \tag{2.81}$$

Použití malého dopravního zpoždění *h* pro odhad funkce $\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})$ má úžasnou výhodu v tom, že umožňuje odhadnout i její časovou proměnnost a neurčitost včetně neměřitelných poruchových veličin, tj.

$$\boldsymbol{f}_{ae}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \approx \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) + \Delta\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x},t),$$

kde $\Delta\boldsymbol{f}_a$ je neurčitost funkce $\boldsymbol{f}_a$.

Jako malé dopravní zpoždění *h* je možné volit u číslicového řízení vzorkovací periodu. U číslicové simulace je vhodné volit *h* jako násobek kroků řešení.

Při analogové regulaci malé dopravní zpoždění *h* je možné zastoupit proporcionálním členem se setrvačností 1. řádu

$$\frac{1}{hs+1}.$$

V případě potřeby je třeba zpožděné veličiny vhodně filtrovat.

Příklad 2.4

U nelineárního systému (2.16) z příkladu 2.1 pro stejné zadání je třeba navrhnout řízení využívající malé dopravní zpoždění (TDC).

Řešení:

Využijeme dílčí výsledky z příkladu 2.1, a proto v souladu se vztahy (2.18), (2.21) a (2.78) můžeme psát

$$\dot{x}_a = \dot{x}_2, \qquad f_a(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = g_2,$$

$$u = \frac{1}{g_2}[\dot{x}_2^w + \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{e} - f_2(\boldsymbol{x})] \Rightarrow$$

$$u = -\frac{1}{g_{2e}}[\underbrace{\dot{x}_2(t-h) - g_{2e}u(t-h)}_{f_{2e}(\boldsymbol{x})} - \dot{x}_2^w - \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{e}] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2}[\dot{x}_2(t-h) - 2u(t-h) - \dot{x}_2^w - \omega_0^2 e_1 - 2\xi_0\omega_0 e_2], \\ e_1 &= x_1^w - x_1,\ e_2 = x_2^w - x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.82)$$

Čas je uveden pouze ve výrazech obsahujících malé dopravní zpoždění h.

Blokové schéma systému řízení bez uvažování filtrace je na obr. 2.11.

Pro ověření navrženého řízení (2.82) pro $\omega_0 = 1$ rad.s^{-1}, $\xi_0 = 1$ a $h = 0{,}1$ s a $g_{2e} = g_2 = 2$ bylo použito sledování výstupní veličinou $y = z_1 = x_1$ přechodové charakteristiky lineárního členu 3. řádu (2.23) pro nulové počáteční podmínky (obr. 2.12) a pro $y(0) = z_1(0) = x_1(0) = 0{,}5$ (obr. 2.13). Aby bylo možné vizuální porovnání kvality řízení, jsou průběhy na obr. 2.12 a 2.13 očíslovány stejně jako na obr. 2.8 a 2.9, tj.

1 – jsou dostupné derivace $\dot{x}_1^w$ a $\ddot{x}_1^w = \dot{x}_2^w$,

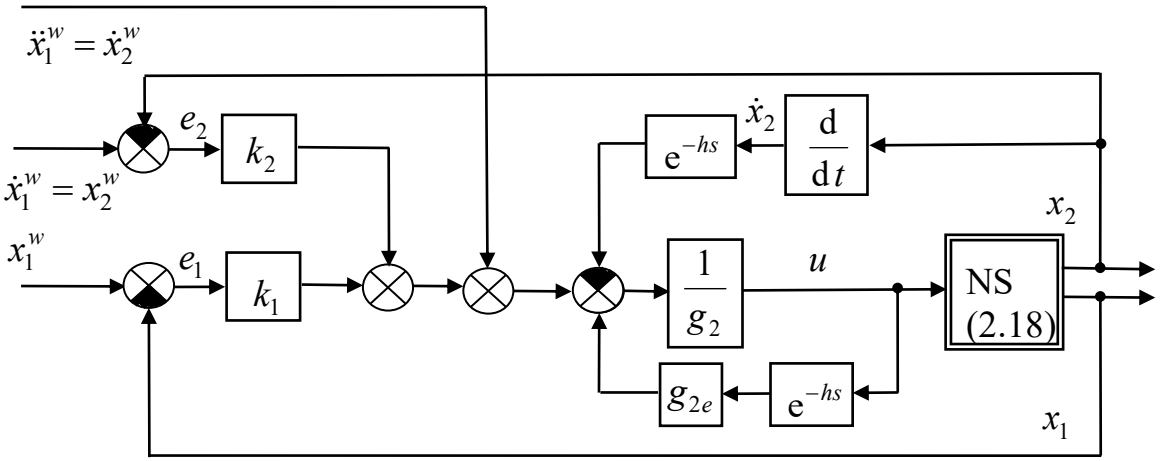
2 – je dostupná derivace $\dot{x}_1^w$,

3 – není dostupná žádná derivace.

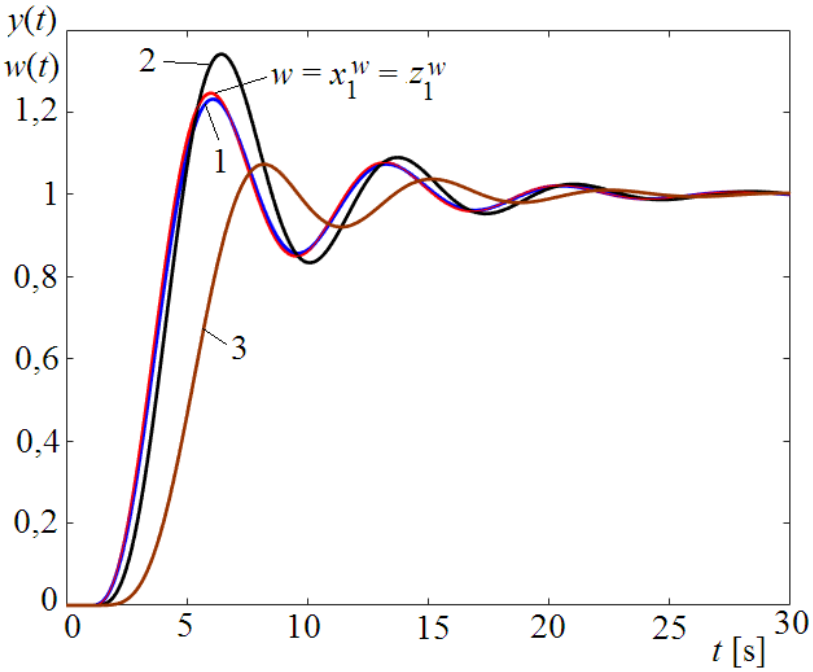
Vidíme, že odpovídající průběhy jsou téměř shodné.

Pro ověření robustnosti byla v řízeném nelineárním systému [viz (2.16), obr. 2.4 a 2.5] zaměněna funkce $\sin(z_1)$ funkcí $\cos(z_1)$, viz obr. 2.14. Číslování průběhů je stejné jako na předchozích obrázcích. Vidíme, že robustnost řízení využívající malé dopravní zpoždění je velmi dobrá.

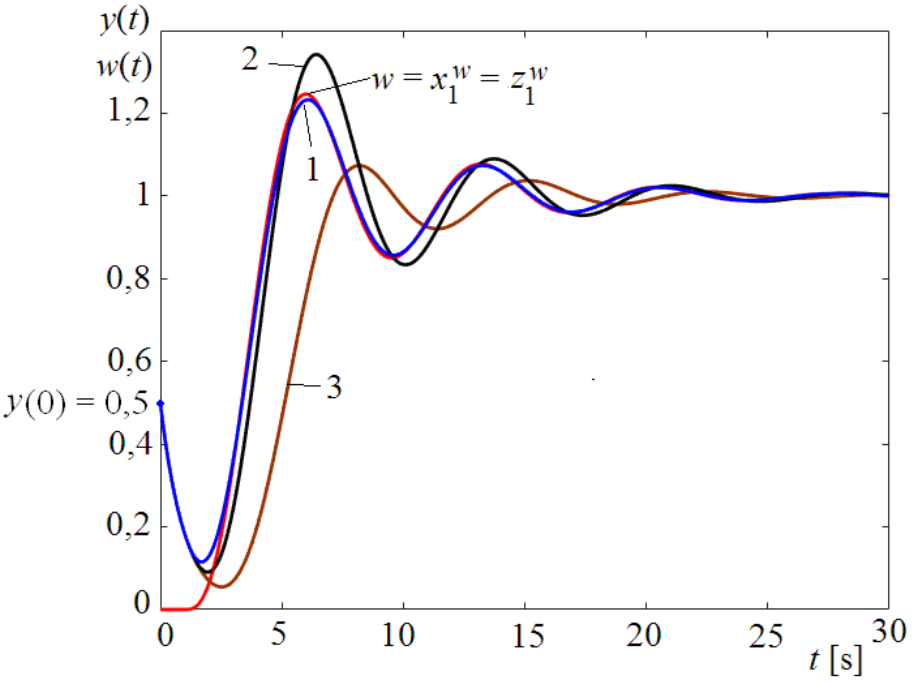
Průběhy na obr. 2.12 – 2.14 byly získány pro $h = 0{,}1$ s. Při snížení hodnoty h kvalita sledování se výrazně zvýší.



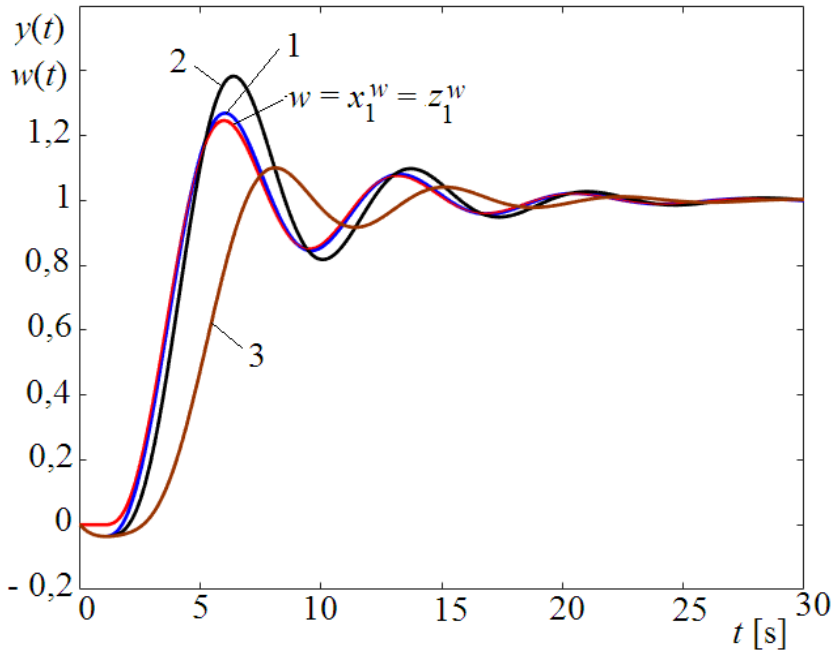
Obr. 2.11 Schéma systému řízení – příklad 2.4



Obr. 2.12 Sledování zadaného průběhu při nulových počátečních podmínkách – příklad 2.4



Obr. 2.13 Sledování zadaného průběhu při nenulové počáteční podmínce – příklad 2.4



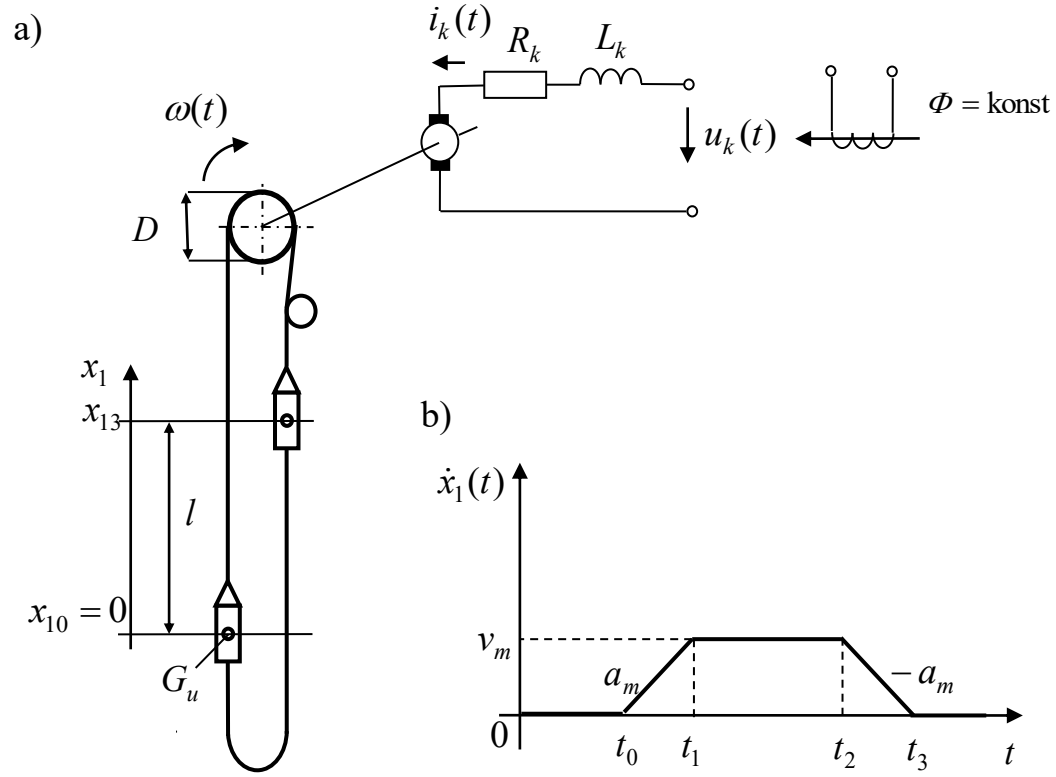
Obr. 2.14 Sledování zadaného průběhu při záměně funkce $\sin z_1$ funkcí $\cos z_1$ – příklad 2.4

Příklad 2.5

U těžního stroje s třecím kotoučem a vyrovnávacím lanem na obr. 2.15a je třeba přemístit klec s nákladem o užitečné tíze G_u z úrovně $x_1(t_0) = 0$ na úroveň $x_1(t_3) = l$. Přemístění klece má být provedeno v souladu s lichoběžníkovým rychlostním diagramem na obr. 2.15b. Druhá klec je prázdná, těžní stroj je

poháněn stejnosměrným motorem s konstantním cizím buzením (indukčnost kotvy L_k je zanedbatelně malá).

Význam symbolů v zadání a na obr. 2.15: $i_k(t)$ – proud obvodu kotvy [A], u_k – řídicí napětí obvodu kotvy [V], L_k – indukčnost kotvy [H], R_k – odpor kotvy [Ω], Φ – magnetický tok [Wb], $\omega(t)$ – úhlová rychlost [rad.s^{-1}], G – celková tíha (tíha prázdných klecí + tíha hlavního vyrovnávacího lana + užitečná tíha G_u) [N], G_u – užitečná tíha nákladu [N], l – výška přemístění [m], D – průměr třecího kotouče [m], v_m – maximální (jmenovitá) rychlost klece [m.s^{-1}], a_m – maximální zrychlení (zpomalení) klece [m.s^{-2}], $x_1(t)$ – poloha klece [m].



Obr. 2.15 Těžní stroj: a) zjednodušené schéma, b) zadaný průběh rychlosti klece – příklad 2.5

Řešení:

Při řešení předpokládáme řadu zjednodušení, která však z hlediska návrhu řízení nemají zásadní význam.

Celkový náhradní moment setrvačnosti pohonu těžního stroje je dán vztahem

$$J_c = J_m + \frac{G}{g}\frac{D^2}{4}, \tag{2.83}$$

kde J_c je celkový náhradní moment setrvačnosti soustavy (kotva + třecí a vodicí kotouč) [kg.m^2], g – tíhové zrychlení [m.s^{-2}].

Moment zátěže může být vyjádřen závislostí

$$M_z = \alpha_0 G_u \frac{D}{2} + \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_1^2, \tag{2.84}$$

kde α_0 [-], α_1 [kg.m.s^{-1}], α_2 [kg] jsou součinitelé odporu vzduchu.

Dynamika pohonu je popsána diferenciální rovnicí momentové rovnováhy

$$J_c \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = k_m i_k - m_z \tag{2.85}$$

a diferenciální rovnicí obvodu kotvy

$$L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + R_k i_k = k_m \omega, \tag{2.86}$$

kde k_m je činitel magnetického toku [V.s] ([N.m.A^{-1}]).

Použijeme označení

$$x_2 = \omega = \frac{2}{D}\dot{x}_1, \qquad u = u_k \tag{2.87}$$

a za předpokladu, že $L_k = 0$ ze vztahů (2.83) – (2.87) dostaneme matematický model těžního stroje

$$\dot{x}_1 = a x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -a_0 - a_1 x_2 - a_2 x_2^2 + g_2 u,$$

kde

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{D}{2}, \\ a_0 &= \alpha_0 \frac{G_u D}{2J_c}, \\ a_1 &= \frac{2k_m^2 + \alpha_1 D R_k}{2R_k J_c}, \\ a_2 &= \alpha_2 \frac{D^2}{4J_c}, \\ g_2 &= \frac{k_m}{R_k J_c}. \end{aligned}\right\} \tag{2.88}$$

Z matematického modelu těžního stroje vyplývá, že je to standardní nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g_2 u, \end{aligned}\right\} \tag{2.89a}$$

kde

$$f_2(x_2) = -a_0 - a_1 x_2 - a_2 x_2^2 . \tag{2.89b}$$

Konstanty a se můžeme snadno zbavit, např. zavedením nové proměnné $x_1' = x_1/a$. Systém je rovněž řiditelný, protože $g_2 > 0$.

Protože řízený standardní nelineární systém je 2. řádu, navrhneme řízení (2.12)

$$u = \frac{1}{g_2}[\dot{x}_2^w + \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{e} - f_2(x_2)], \tag{2.90}$$

které zajistí, aby uzavřený systém řízení byl popsán matematickým modelem

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{e}_1 + 2\xi_0\omega_0\dot{e}_1 + \omega_0^2 e_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_2 = \dot{e}_1, \\ &\dot{e}_2 + 2\xi_0\omega_0 e_2 + \omega_0^2 e_1 = 0, \;\; e_1 = x_1^w - x_1, \; e_2 = x_2^w - x_2, \\ &k_1 = \omega_0^2, \quad k_2 = 2\xi_0\omega_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

kde ω_0 je úhlový kmitočet netlumených kmitů, ξ_0 – koeficient poměrného tlumení.

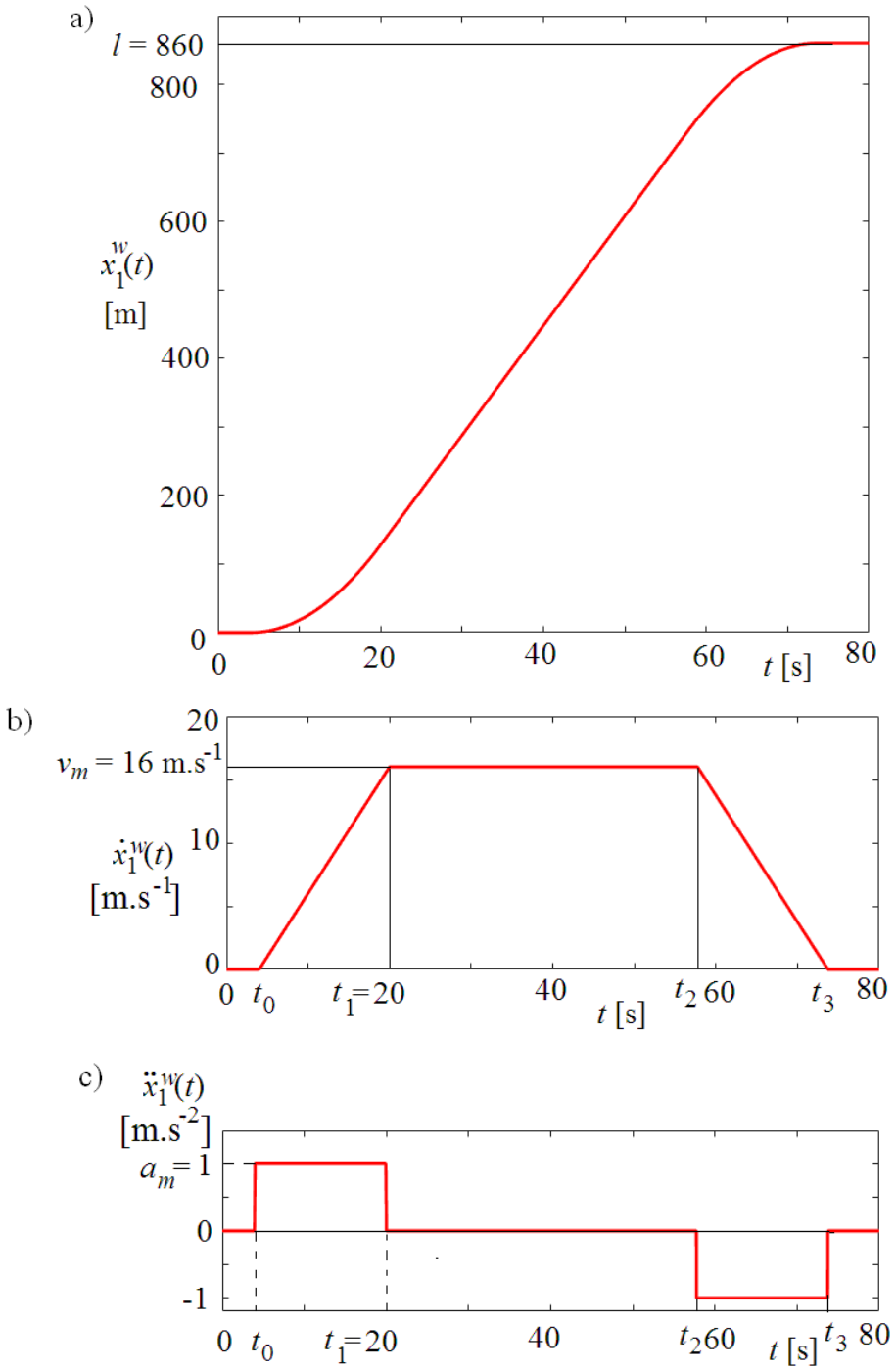
Nyní navrhneme řízení využívající malé dopravní zpoždění h.

Na základě druhé rovnice v (2.89a) můžeme psát

$$f_2(x_2) = \dot{x}_2 - g_2 u \Rightarrow$$

$$f_2(x_2) \approx f_{2e}(x_2) = \dot{x}_2(t-h) - g_{2e} u(t-h). \qquad (2.92)$$

Čas je uveden pouze ve výrazech obsahujících malé dopravní zpoždění h.



Obr. 2.16 Průběhy požadovaných veličin: a) poloha klece, b) rychlost klece, c) zrychlení klece – příklad 2.5

Po dosazení (2.92) do (2.90) a uvažování (2.91) dostaneme

$$u = \frac{1}{g_{2e}}[\dot{x}_2^w + k_1 e_1 + k_2 e_2 - \dot{x}_2(t-h) + g_{2e}u(t-h)] \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{g_{2e}}[\dot{x}_2^w + \omega_0^2 e_1 + 2\xi_0\omega_0 e_2 - \dot{x}_2(t-h) + g_{2e}u(t-h)] , \qquad (2.93)$$

kde g_{2e} je odhad g_2 (v našem případě je to konstanta, při simulaci volíme $g_{2e} = g_2$).

Schéma systému řízení je podobné jako na obr. 2.11.

Požadovaný rychlostní diagram na obr. 2.15b je lichoběžníkový. Mezi požadovanou polohou x_1^w, rychlostí $\dot{x}_1^w$ a zrychlením $\ddot{x}_1^w$ platí vztahy

$$x_1^w(t) = \int_0^t \dot{x}_1^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \dot{x}_1^w(t) = \int_0^t \ddot{x}_1^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau , \qquad (2.94)$$

a proto lze psát (viz obr. 2.16)

$$x_1^w(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_0 \\ \dfrac{v_m(t-t_0)^2}{2(t_1-t_0)} & t_0 \le t < t_1 \\ \dfrac{v_m}{2}(2t - t_0 - t_1) & t_1 \le t < t_2 \\ \dfrac{v_m}{2}\left[\dfrac{(t_3-t)^2}{t_3-t_2} + 2t_2 - t_0 - t_1\right] & t_2 \le t < t_3 \\ \dfrac{v_m}{2}(t_3 - t_0 + t_2 - t_1) & t_3 \le t \end{cases} , \qquad (2.95)$$

$$\dot{x}_1^w(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_0 \\ \dfrac{v_m(t-t_0)}{t_1-t_0} & t_0 \le t < t_1 \\ v_m & t_1 \le t < t_2 \\ \dfrac{v_m(t_3-t)}{t_3-t_2} & t_2 \le t < t_3 \\ 0 & t_3 \le t \end{cases} , \qquad (2.96)$$

$$\ddot{x}_1^w(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_0 \\ a_m & t_0 \le t < t_1 \\ 0 & t_1 \le t < t_2 \\ -a_m & t_2 \le t < t_3 \\ 0 & t_3 \le t \end{cases}, \tag{2.97}$$

Dále platí vztahy

$$a_m = \frac{v_m}{t_1 - t_0} = \frac{v_m}{t_3 - t_2}, \tag{2.98}$$

$$l = \int_{t_0}^{t_3} \dot{x}_1^w(t)\,\mathrm{d}t = v_m[(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1)]. \tag{2.99}$$

Nyní již můžeme snadno určit hledané časové úseky pro maximální rychlost v_m a maximální zrychlení a_m klece.

Ze vztahů (2.98) a (2.99) dostaneme

$$t_1 - t_0 = t_3 - t_2 = \frac{v_m}{a_m}, \tag{2.100}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{v_m} - (t_1 - t_0). \tag{2.101}$$

Pro simulační ověření navrženého robustního řízení využívajícího malé dopravní zpoždění byly použity hodnoty parametrů: $l = 860$ m, $D = 4$ m, $J_m = 35.10^3$ kg.m^2, $v_m = 16$ m.s^{-1}, $a_m = 1$ m.s^{-2}, $G = 650.10^3$ N, $G_u = 150.10^3$ N, $k_m = 74{,}6$ V.s (N.m.A^{-1}), $R_k = 6.10^{-3}$ Ω, $\alpha_0 = 1{,}07$; $\alpha_1 = 750$ kg.m.s^{-1}, $\alpha_2 = 50$ kg, $t_0 = 4$ s, $t_1 = 20$ s, $t_2 = 57{,}75$ s, $t_3 = 73{,}75$ s, $\omega_0 = 2$ rad.s^{-1}, $\xi_0 = 1$.

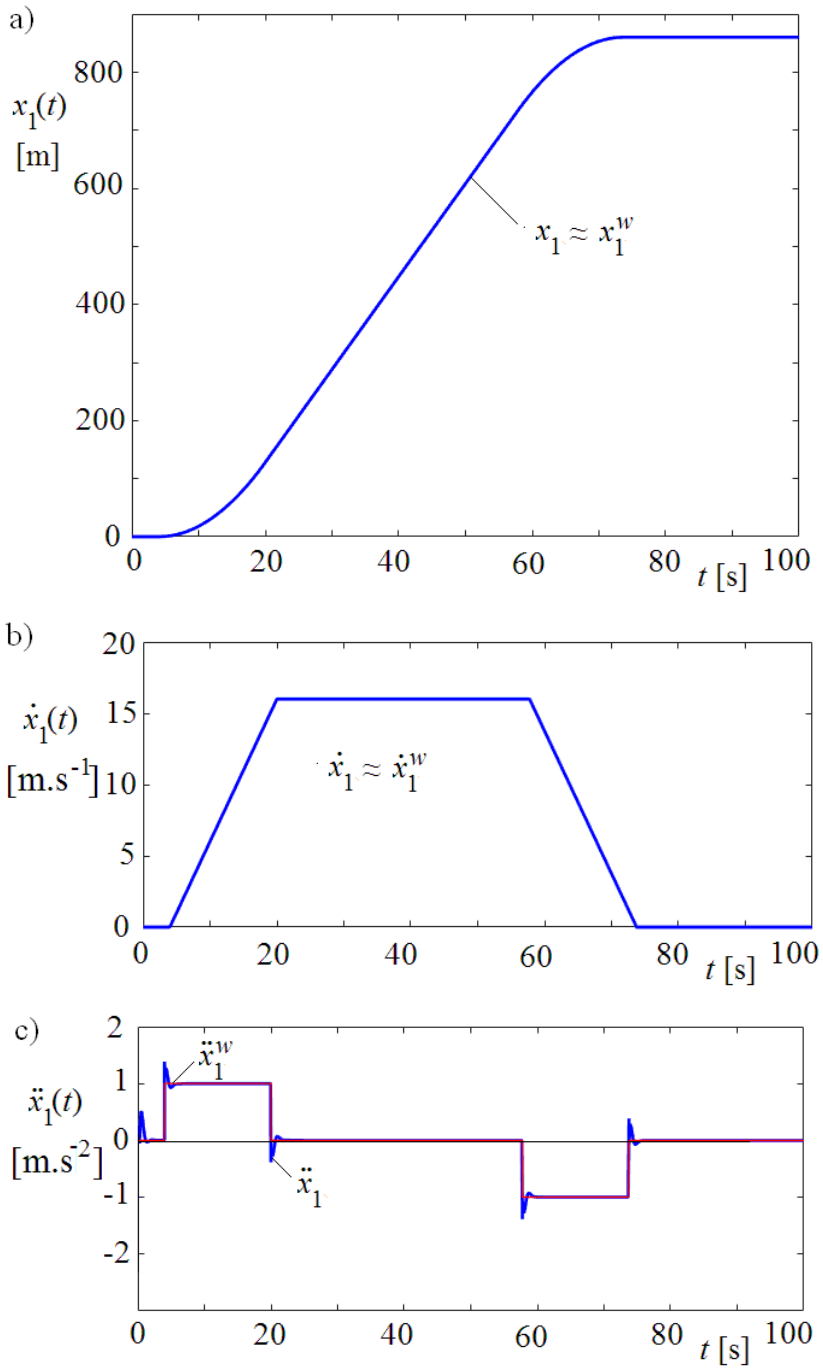
Stejnosměrný motor s konstantním cizím buzením má jmenovité hodnoty parametrů: $P_N = 3000$ kW, $U_N = 650$ V, $I_N = 5000$ A, $n_N = 77$ min^{-1}, $M_N = 372{,}8.10^3$ N.m, $\eta_N = 0{,}925$. (P – výkon, U – napětí, I – proud, n – otáčky, M – moment).

Na základě výše uvedených hodnot byly vypočteny koeficienty (2.88) pro $G_u = 150.10^3$ N: $J_c \doteq 300{,}04.10^3$ kg.m^2, $a = 2$ m, $a_0 \doteq 1{,}07$ s^{-2}, $a_1 \doteq 3{,}096$ s^{-1}, $a_2 \doteq 0{,}67.10^{-3}$, $g_2 \doteq 41{,}44.10^{-3}$ s^{-2}.V^{-1}, $u_0 \doteq 25{,}81$ V.

Počáteční řízení u_0 bylo vypočteno ze vztahu (2.90) pro ustálený stav a $x_1(0) = 0$, tj.

$$u_0 = \frac{a_0}{g_0}. \tag{2.102}$$

Jeho úkolem je udržet zatíženou klec na úrovni $x_1(0) = 0$.



Obr. 2.17 Průběhy stavových veličin: a) poloha klece, b) rychlost klece, c) zrychlení klece – příklad 2.5

Řízení (2.93) bylo použito pro malé dopravní zpoždění $h = 0{,}01$ s a zatížení klece $G_u = 150.10^3$ N. Protože se v průbězích objevily oscilace, byly použity filtry. Pro zpožděné řízení $u(t-h)$ byl použit filtr

$$\frac{1}{0{,}5s+1} \tag{2.103a}$$

a pro vlastní řízení

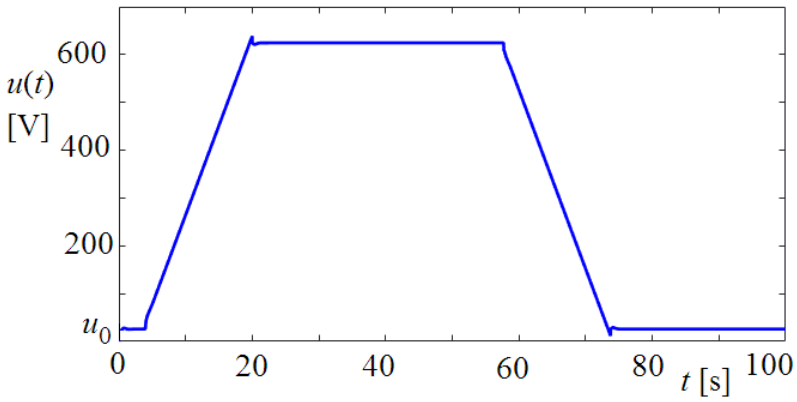
$$\frac{1}{0{,}1s+1}. \tag{2.103b}$$

Získané průběhy stavových veličin, tj. polohy x_1, rychlosti $\dot{x}_1 = x_2$ a zrychlení $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ jsou na obr. 2.17. Průběh robustního řízení (2.93) je na obr. 2.18.

Průběhy se viditelně nezměnily i pro prázdnou klec, tj. $G_u = 0$. Je tedy zřejmé, že řízení využívající malé dopravní zpoždění je vysoce robustní.

Zajímavé a současně velmi důležité je, že robustní řízení (2.93) pracovalo správně i při zastoupení malého dopravního zpoždění h proporcionálním členem se setrvačností 1. řádu

$$\mathrm{e}^{-hs} \approx \frac{1}{hs+1}. \tag{2.104}$$



Obr. 2.18 Průběh řízení – příklad 2.5

Příklad 2.6

Pro koncentrační směšovač (obr. 2.10) z příkladu 2.2 je třeba navrhnout řízení využívající malé dopravní zpoždění a ověřit jeho robustnost pro zadané číselné parametry: $x_1^w = 1$ m, $x_2^w = 1{,}25$ kmol.m^{-3}, $k_{11} = 0{,}02$ s^{-1}, $k_{22} = 0{,}04$ s^{-1}, $c_1 = 1$ kmol.m^{-3}, $c_2 = 2$ kmol.m^{-3}, $S = 1$ m^2, $a = 0{,}02$ m$^{\frac{5}{2}}$.s^{-1}, $x_1(0) = 0{,}5$ m, $x_2(0) = 1$ kmol.m^{-3}.

Řešení:

V příkladě 2.2 bylo navrženo řízení (2.34). Protože jde o běžnou regulaci, tj. o stabilizační řízení, derivace $\dot{\boldsymbol{x}}^w$ není uvažována [$\boldsymbol{D}_a = \mathbf{I} \Rightarrow \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}(x_1)]. \tag{2.105}$$

Na základě rovnice (2.32a) můžeme psát

$$\boldsymbol{f}(x_1) = \dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

a v souladu s (2.78)

$$\boldsymbol{f}(x_1) \approx \boldsymbol{f}_{ae}(x_1) = \dot{\boldsymbol{x}}(t-h) - \boldsymbol{G}_{ae}\boldsymbol{u}(t-h). \tag{2.106}$$

Z důvodu zjednodušení zápisu čas t je uvažován pouze ve výrazech obsahujících malé dopravní zpoždění h.

Konstantní matici $\boldsymbol{G}_{ae}$ zvolíme na základě matice (2.32b), např. pro $x_1 = x_1^w = 1$ m a $x_2 = 1$ kmol.m^{-3} (z důvodu jednoduchosti), tj.

$$\boldsymbol{G}_{ae} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{G}_{ae}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

Pro řízení (2.105) s využitím přibližného vztahu (2.106) platí

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_{ae}^{-1}[\boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e} - \dot{\boldsymbol{x}}(t-h) + \boldsymbol{G}_{ae}\boldsymbol{u}(t-h)] \tag{2.108a}$$

a po uvažování (2.107) a (2.34b)

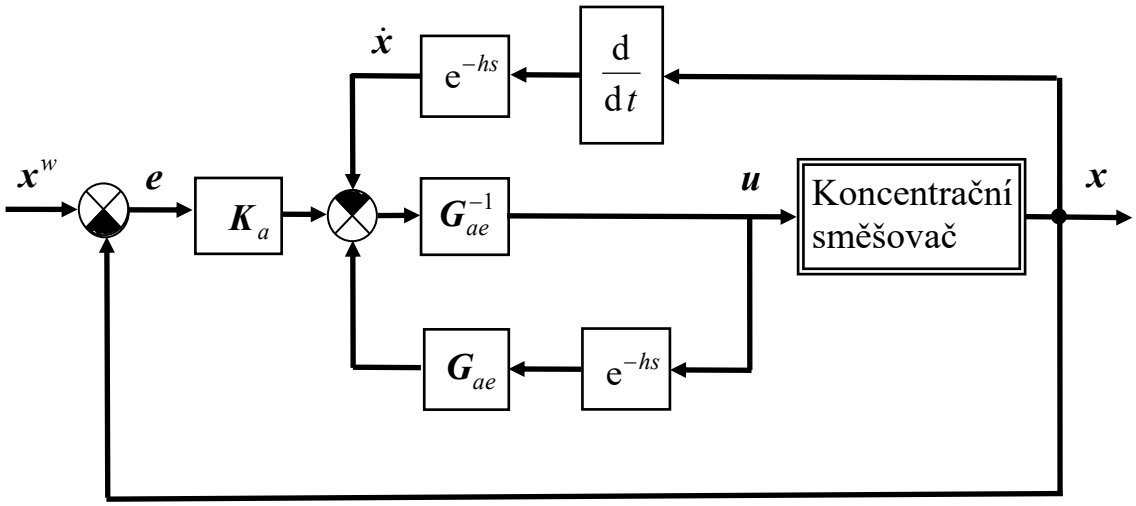
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-h) \\ u_2(t-h) \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.108b}$$

Z (2.108) dostaneme

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= k_{11}e_1 - k_{22}e_2 - \dot{x}_1(t-h) + \dot{x}_2(t-h) + u_1(t-h), \\ u_2 &= k_{22}e_2 - \dot{x}_2(t-h) + u_2(t-h). \end{aligned}\right\} \tag{2.108c}$$

Blokové schéma řízení koncentračního směšovače je na obr. 2.19.

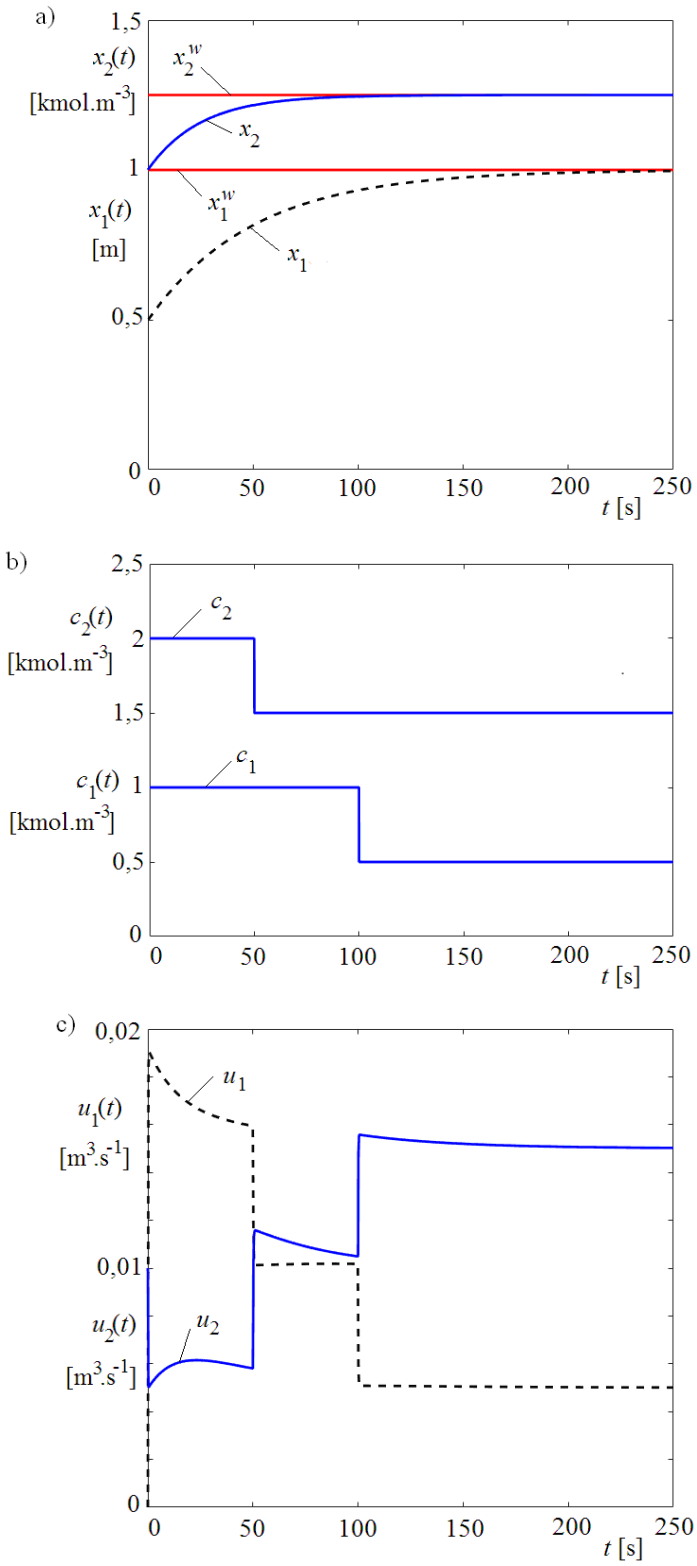
Ověření splnění podmínky (2.79) pro všechny intervalové změny x_1, x_2, c_1 a c_2 je pracné, a proto bude provedeno pouze simulační ověření.



Obr. 2.19 Řízení koncentračního směšovače – příklad 2.6

Při simulaci byly použity číselné hodnoty parametrů uvedené v zadání příkladu. Protože v průbězích vystupovaly oscilace, byla u všech zpožděných veličin použita filtrace s časovými konstantou $T_f = 0{,}1$ s.

Výsledky simulace jsou na obr. 2.20. Z průběhů koncentrace x_2 i výšky hladiny x_1 vyplývá, že řízení je velmi robustní. Téměř shodné výsledky byly získány po zastoupení malého dopravního zpoždění h proporcionálním členem se setrvačnou časovou konstantou h.



Obr. 2.20 Koncentrační směšovač: a) průběh výsledné koncentrace x_2 a výšky hladiny x_1, b) skokové změny koncentrací c_1 a c_2, c) průběhy průtoků u_1 a u_2 – příklad 2.6

2.2.2 Řízení s vysokým zesílením

Řízení na základě modelu je velmi obecné. Pokud požadovaný model uzavřeného systému řízení je lineární, tak při jeho vhodné volbě může minimalizovat i kvadratický účelový funkcionál (viz podkapitola 2.1). Proto dále budeme předpokládat, že pro standardní nelineární systém [viz (1.1) – (1.4)]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.109}$$

je třeba navrhnout takové sledovací řízení $\boldsymbol{u}^{\times}$, které zajistí, aby uzavřený systém byl popsán matematickým modelem

$$\dot{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u}^{\times}) - \boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0, \tag{2.110a}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}^{w} - \boldsymbol{x}, \tag{2.110b}$$

kde struktura funkce $\boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{e})$ je stejná, jako struktura funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ve vztahu (2.109) s jediným globálně asymptoticky stabilním rovnovážným stavem

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}. \tag{2.111}$$

Označme požadovaný agregovaný model uzavřeného systému řízení (2.110) jako

$$\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}^{\times}) = \boldsymbol{0}, \tag{2.112a}$$

kde

$$\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}^{\times}) = \dot{\boldsymbol{e}}_a(\boldsymbol{u}^{\times}) - \boldsymbol{f}_a^{w}(\boldsymbol{e}). \tag{2.112b}$$

Požadovaným agregovaným modelem budeme často nazývat pouze levou část rovnice, tj. $\boldsymbol{m}^{w}$.

Je zřejmé, že platí [viz (2.109), (2.110a) a (2.112)]

$$\underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}^{w} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^{\times}}_{\dot{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u}^{\times})} - \boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}, \tag{2.113a}$$

resp.

$$\underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}_a^{w} - \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^{\times}}_{\dot{\boldsymbol{e}}_a(\boldsymbol{u}^{\times})} - \boldsymbol{f}_a^{w}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}. \tag{2.113b}$$

Pro řiditelný standardní nelineární systém (2.109), tj. při existenci inverzní matice $\boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})$, řízení $\boldsymbol{u}^{\times}$ můžeme určit přímo z (2.113b)

$$\boldsymbol{u}^{\times} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})[\dot{\boldsymbol{x}}_a^{w} - \boldsymbol{f}_a^{w}(\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x})]. \tag{2.114}$$

Obdrželi jsme stejné řízení jako (2.41).

Zásadní problém je v tom, že použití řízení (2.114) [(2.41)] vyžaduje znalost přesného matematického modelu řízeného standardního nelineárního systému (2.109), co v reálných podmínkách je nesplnitelné. Z tohoto důvodu pro určení řízení $\boldsymbol{u}^{\times}$ použijeme průběžný výpočet využívající iterační metodu pevného bodu.

Uvažujme požadovaný agregovaný model uzavřeného systému řízení (2.112) a připočtěme k oběma stranám výraz $\boldsymbol{Ju}$, tj.

$$\boldsymbol{Ju} + \boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Ju} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}),$$

resp.

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}_k),\ k = 0,1,2,\ldots,\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(0), \tag{2.115}$$

kde $\boldsymbol{J}$ je vhodně zvolená regulární čtvercová matice řádu m $(\det \boldsymbol{J} \neq 0)$, $\boldsymbol{u}_0$ – počáteční řízení.

Za předpokladu, že matice $\boldsymbol{J}$ je vhodně zvolena a že proměnné funkcí $\boldsymbol{f}_a$, $\boldsymbol{f}_a^{w}$ a matice $\boldsymbol{G}_a$ se během iteračního výpočtu mění dostatečně pomalu, řešení rekurentní diferenční rovnice (2.115) bude konvergovat k pevnému bodu $\boldsymbol{u}^{\times}$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}^{\times}. \tag{2.116}$$

Zvolíme-li za matici $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}_k) = \left.\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_k}, \tag{2.117}$$

tj. Jacobiovu matici funkce $\boldsymbol{m}^{w}$, obdržíme známou Newtonovu-Raphsonovu iterační metodu řešení nelineárních rovnic. Jacobiovu matici určíme na základě vztahů (2.112b) a (2.113b)

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}_k) = -\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}), \tag{2.118}$$

pak řízení $\boldsymbol{u}^{\times}$ získáme v jednom iteračním kroku.

V obecném případě, pokud matice $\boldsymbol{J}$ nebude Jacobiovou maticí, iterační proces může být nekonečný a dokonce může divergovat.

Určování řízení pomocí rekurentní diferenční rovnice (2.115) není vhodné, a proto ji zastoupíme obyčejnou diferenciální rovnicí, tj.

$$\frac{\boldsymbol{u}_{k+1}-\boldsymbol{u}_k}{\frac{1}{\lambda}} = -\lambda \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{m}^w(\boldsymbol{u}_k), \tag{2.119}$$

pro $\lambda \to \infty$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}(\tau)}{\mathrm{d}\,\tau} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^w[\boldsymbol{u}(\tau)],\ \boldsymbol{\Theta} = -\lambda \boldsymbol{J}^{-1},\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0\,. \tag{2.120}$$

Je zřejmé, že pro vhodně zvolenou regulární čtvercovou matici $\boldsymbol{J}$ platí

$$\lim_{\tau\to\infty} \boldsymbol{u}(\tau) = \boldsymbol{u}^{\times}. \tag{2.121}$$

Vzhledem k tomu, že řešení diferenciální rovnice (2.120) musí probíhat značně rychleji, než jsou časové změny proměnných u funkcí $\boldsymbol{f}_a$, $\boldsymbol{f}_a^w$ a matice $\boldsymbol{G}_a$, je vhodné zavést dva časy. Skutečný čas *t* a „rychlý“ čas

$$\tau = \beta t,\ \beta >> 1. \tag{2.122}$$

Průběh času τ je dán parametrem β, jehož velikost je úměrná velikosti λ ve vztahu (2.120), tj. absolutní velikosti prvků čtvercové matice $\boldsymbol{\Theta}$.

Vyšetříme stabilitu ustáleného řešení (2.121) na základě linearizované diferenciální rovnice (2.120) za předpokladu, že všechny proměnné funkcí $\boldsymbol{f}_a$, $\boldsymbol{f}_a^w$ a matice $\boldsymbol{G}_a$ jsou konstantní. Linearizaci provedeme v okolí ustáleného řešení $\boldsymbol{u}^{\times}$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta\boldsymbol{u}(\tau)}{\mathrm{d}\,\tau} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{u}(\tau),\ \Delta\boldsymbol{u}(\tau) = \boldsymbol{u}(\tau) - \boldsymbol{u}^{\times}, \tag{2.123a}$$

kde [viz (2.118)]

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^w(\boldsymbol{u})]}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}). \tag{2.123b}$$

Asymptotická stabilita ustáleného řešení $\boldsymbol{u}^{\times}$ bude zajištěna, budou-li mít kořeny charakteristického mnohočlenu

$$\det(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) = \det[s\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})] \tag{2.124}$$

záporné reálné části.

Zvolíme-li v (2.120)

$$\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}), \tag{2.125}$$

pak matice $\boldsymbol{A}$ bude diagonální se zápornými reálnými prvky, tj. kořeny charakteristického mnohočlenu (2.124) budou záporné reálné. Řešení diferenciální rovnice (2.120) bude asymptoticky stabilní. V obecném případě je třeba vycházet z charakteristického mnohočlenu (2.124).

Pro průběžné určování řízení $\boldsymbol{u}^{\times}(t)$ je vhodnější zastoupit řešení diferenciální rovnice (2.120) integrací

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{m}^{w}[\boldsymbol{u}(\tau)]\,\mathrm{d}\,\tau + \boldsymbol{u}(0)\,, \tag{2.126}$$

kde počáteční řízení $\boldsymbol{u}(0)$ můžeme určit z ustáleného rovnovážného stavu, např. z agregované rovnice (2.113b)

$$\begin{aligned} &-\boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(0)] - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(0)]\boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{f}_a^{w}[\boldsymbol{e}(0)] = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{G}_a^{-1}[\boldsymbol{x}(0)]\big\{-\boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(0)] - \boldsymbol{f}_a^{w}[\boldsymbol{e}(0)]\big\} = \\ &\quad = -\boldsymbol{G}_a^{-1}[\boldsymbol{x}(0)]\big\{\boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(0)] + \boldsymbol{f}_a^{w}[\boldsymbol{e}(0)]\big\}. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Počáteční řízení $\boldsymbol{u}(0)$ může být určeno velmi hrubě, protože řízení (2.126) má integrační charakter. Při nevhodném počátečním řízení $\boldsymbol{u}(0)$ při „startu“ je třeba počítat s možnými velkými a prudkými změnami vlastního řízení i dalších veličin, co z praktického hlediska může být nepřípustné.

Za předpokladu, že matice $\boldsymbol{\Theta}$ v (2.126) bude konstantní, můžeme psát

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\int_0^t \boldsymbol{m}^{w}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \boldsymbol{u}(0)\,. \tag{2.128}$$

Ve skutečnosti podmínka, aby všechny proměnné funkcí $\boldsymbol{f}_a$, $\boldsymbol{f}_a^{w}$, matice $\boldsymbol{G}_a$ a $\boldsymbol{\Theta}$ byly konstantní, nemůže být nikdy striktně splněna. Může být však přibližně splněna, bude-li výpočet řízení $\boldsymbol{u}^{\times}(t)$ probíhat podstatně rychleji, než jsou časové změny proměnných $\boldsymbol{x}(t)$ a $\boldsymbol{x}^{w}(t)$. Znamená to, že výpočet musí proběhnout během takového časového intervalu, během kterého lze předpokládat

$$\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}^{w}(t) \approx \text{konst}\,. \tag{2.129}$$

Lze toho dosáhnout vhodnou volbou matice $\boldsymbol{\Theta}$ a především dostatečně vysokou hodnotou „zesílení“ λ. Výrazného urychlení lze dosáhnout volbou matice $\boldsymbol{\Theta}$ blízké k matici $-\lambda\boldsymbol{J}^{-1}$, tj. $\lambda\boldsymbol{G}_a^{-1}$ [viz vztahy (2.120) a (2.125)]. Je to důležité v singulárních případech, jako např. v příkladu 2.8. Pokud jsou správně přiřazeny řídicí proměnné (akční veličiny) k odpovídajícím dílčím podsystémům, pak často matice $\boldsymbol{\Theta}$ může být konstantní diagonální, a proto dále se budeme zabývat především těmito případy.

Matematický model řízeného standardního nelineárního systému (2.109) musí být známý alespoň částečně z důvodu volby řádu n (a dílčích řádů n_j, tj. relativních stupňů r_j) požadovaného modelu uzavřeného systému řízení a vhodné matice $\boldsymbol{\Theta}$ zajišťující stabilitu a rychlost konvergence.

Velmi důležité je, že jako integrand ve vztahu pro řízení (2.128) ***vystupuje požadovaný agregovaný model uzavřeného systému řízení*** (2.112).

Je vhodné vztah (2.128) zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{u}(0), \tag{2.130a}$$

kde

$$\boldsymbol{m}(t) = \int_0^t \boldsymbol{m}^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.130b}$$

a

$$\boldsymbol{m}^w(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_a(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)], \tag{2.130c}$$

kde $\boldsymbol{\Theta}$ je diagonální konstantní matice

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}[\,\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m\,]. \tag{2.130d}$$

Příklad 2.7

U nelineárního systému (2.16)

$$\dot{z}_1 = -z_1 + z_2,$$
$$\dot{z}_2 = -\sin(z_1) + 2u$$

z příkladu 2.1 je třeba použít sledovací řízení s vysokým zesílením, které zajistí, aby uzavřený systém řízení měl matematický model (v nových proměnných pro $z_1 = x_1$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -k_1 e_1 - k_2 e_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.131a}$$

kde

$$k_1 = \omega_0^2, \;\; k_2 = 2\xi_0\omega_0, \tag{2.131b}$$

ω_0 – úhlový kmitočet netlumených kmitů, ξ_0 – koeficient poměrného tlumení.

Řešení:

Daný nelineární systém nemá standardní tvar, a proto využijeme dílčí výsledky z příkladu 2.1.

Po transformaci daný systém má standardní tvar (2.18), tj.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\boldsymbol{x}) + g_2 u, \end{aligned}\right\} \tag{2.132a}$$

kde

$$f_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 - \sin(x_1), \quad g_2 = 2 \tag{2.132b}$$

a původní proměnné jsou dány vztahy (2.19)

$$z_1 = x_1, \qquad z_2 = x_1 + x_2.$$

Pro

$$\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{d}_a^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

požadovaný model (2.131) v agregovaném tvaru je

$$m^w = \dot{e}_2 + k_1 e_1 + k_2 e_2 \quad \Rightarrow$$

$$m^w = \ddot{e}_1 + 2\xi_0\omega_0\dot{e}_1 + \omega_0^2 e_1. \tag{2.132c}$$

V souladu se vztahem (2.130) řízení s vysokým zesílením je

$$u^{\times}(t) = \Theta\int_0^t (\ddot{e}_1 + 2\xi_0\omega_0\dot{e}_1 + \omega_0^2 e_1)\,\mathrm{d}\,\tau + u(0) \;\Rightarrow \tag{2.133a}$$

$$u^{\times}(t) = \Theta\left\{\dot{e}_1(t) - \dot{e}_1(0) + 2\xi_0\omega_0[e_1(t) - e_1(0)] + \omega_0^2\int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right\} + u(0) \;\Rightarrow$$

$$u^{\times}(t) = K_P\left[e_1(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + T_D\dot{e}_1(t)\right] + u^{\times}(0), \tag{2.133b}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} &K_P = 2\Theta\xi_0\omega_0, \qquad T_I = \frac{2\xi_0}{\omega_0}, \quad T_D = \frac{1}{2\xi_0\omega_0}, \\ &u^{\times}(0) = u(0) - \Theta\dot{e}_1(0) - 2\xi_0\omega_0\Theta e_1(0). \end{aligned}\right\} \tag{2.133c}$$

Vidíme, že pokud standardní nelineární systém je 2. řádu, pak lze pro sledovací řízení s výhodou použít standardní regulátor PID.

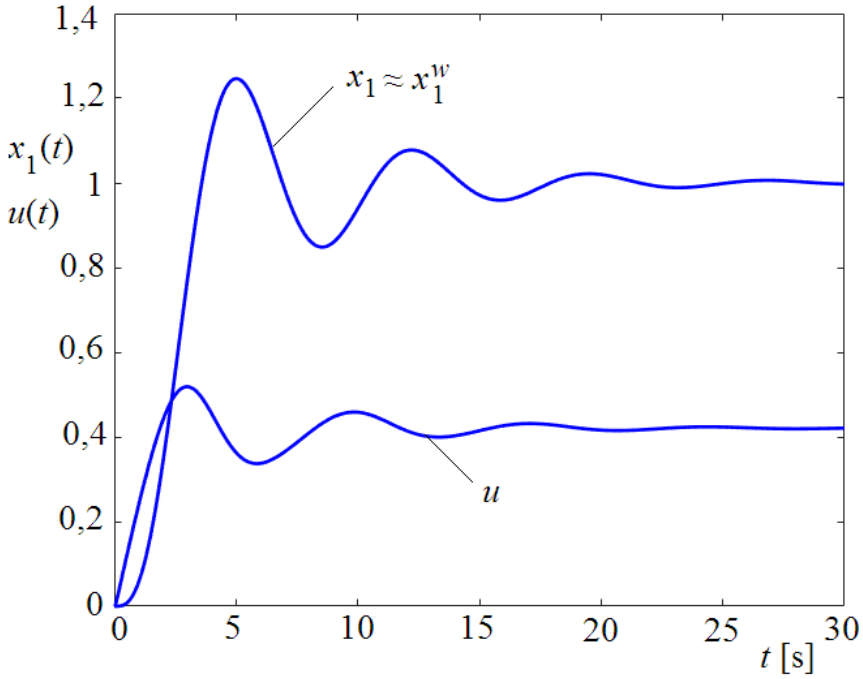
Pro ověření navrženého řízení s vysokým zesílením (2.133) použijeme sledování přechodové charakteristiky lineárního členu 3. řádu (2.23) z příkladu 2.1 (přechodová charakteristika je použita z důvodu nulových počátečních podmínek do 2. řádu včetně).

Na obr. 2.21 jsou pro $\Theta = 10$, $\xi_0 = 1$, $\omega_0 = 1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$ a $u^{\times}(0) = 0$ ukázány průběhy x_1^w, x_1 a u při nulové počáteční podmínce $x_1(0) = 0$ a na obr. 2.22 tytéž průběhy pro počáteční podmínku $x_1(0) = 0{,}5$.

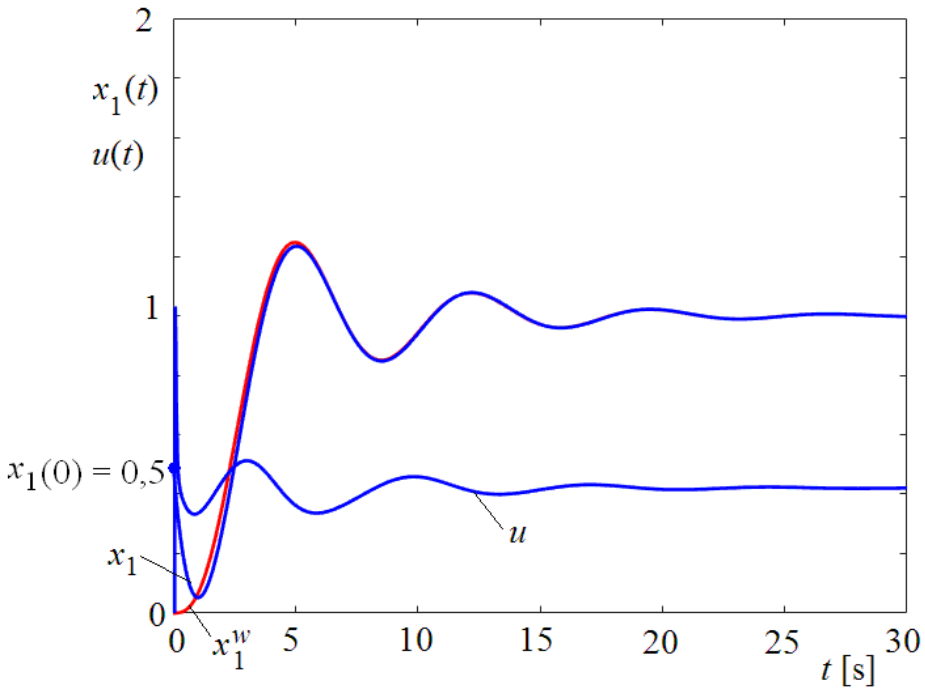
Je zřejmé, že navržené sledovací řízení je velmi kvalitní. Průběhy na obr. 2.21 a 2.22 byly získány pro $\Theta = 10$, ale již pro $\Theta > 2$ je řízení přijatelné.

Je třeba si uvědomit, že navržené robustní řízení s vysokým zesílením pracuje bez znalosti modelu řízeného nelineárního systému. V podstatě využívá pouze znalost jeho řádu.

Zajímavé je porovnání výsledků příkladů 2.1, 2.4 a 2.7.



Obr. 2.21 Sledování zadané přechodové charakteristiky pro $x_1(0) = 0$ – příklad 2.7



Obr. 2.22 Sledování zadané přechodové charakteristiky pro $x_1(0) = 0{,}5$ – příklad 2.7

Příklad 2.8

Pro standardní nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0),\\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0),\\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + 3x_1 u, & x_3(0),\\ y &= x_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.134)$$

je třeba navrhnout řízení s vysokým zesílením, které zajistí, aby výstupní veličina $y = x_1$ sledovala sinusoidální průběh

$$w(t) = x_1^w(t) = \sin(\omega t)\,. \qquad (2.135)$$

Řešení:

Standardní nelineární systém (2.134) je 3. řádu, a proto základní agregační matice má tvar

$$\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{d}_a^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a agregovaný nelineární systém (2.134) tedy je

$$\dot{x}_3 = f_3(\boldsymbol{x}) + g_3(x_1)u\,, \tag{2.136a}$$

kde

$$f_3(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2, \qquad g_3(x_1) = 3x_1\,. \tag{2.136b}$$

Standardní nelineární systém (2.134) je řiditelný pro

$$g_3(x_1) = 3x_1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x_1 \neq 0\,. \tag{2.137}$$

Požadovaný matematický model uzavřeného systému řízení navrhneme ve tvaru (mezní aperiodický průběh)

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2\,,\\ \dot{e}_2 &= e_3\,,\\ \dot{e}_3 &= -k_1 e_1 - k_2 e_2 - k_3 e_3\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.138a}$$

kde

$$k_1 = \omega_0^3, \quad k_2 = 3\omega_0^2, \quad k_3 = 3\omega_0\,. \tag{2.138b}$$

Agregovaný požadovaný model je

$$m^w = \dot{e}_3 + k_3 e_3 + k_2 e_2 + k_1 e_1 \;\Rightarrow$$

$$m^w = \dddot{e}_1 + k_3 \ddot{e}_1 + k_2 \dot{e}_1 + k_1 e_1\,. \tag{2.139}$$

Na základě vztahů (2.130a,b) můžeme psát

$$u^{\times}(t) = \Theta \int_0^t m^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u(0) =$$

$$= \Theta\left\{ \ddot{e}_1(t) - \ddot{e}_1(0) + k_3[\dot{e}_1(t) - \dot{e}_1(0)] + k_2[e_1(t) - e_1(0)] + k_1 \int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} + u(0) \Rightarrow$$

$$u^{\times}(t) = \Theta[\ddot{e}_1 + k_3 \dot{e}_1 + k_2 e_1 + k_1 \int_0^t e_1\,\mathrm{d}\tau] + u^{\times}(0)\,,$$

resp.

$$u^{\times}(t) = \Theta[e_3 + k_3 e_2 + k_2 e_1 + k_1 \int_0^t e_1\,\mathrm{d}\tau] + u^{\times}(0)\,.$$

Za předpokladu, že k dispozici není žádná derivace sledovaného průběhu $w(t) = x_1^w(t)$ [viz (2.135)], řízení s vysokým zesílením bude mít výsledný tvar

$$u^{\times}(t) = \Theta[k_1 \int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + k_2 e_1(t) - k_3 x_2(t) - x_3(t)] + u^{\times}(0)\,. \tag{2.140}$$

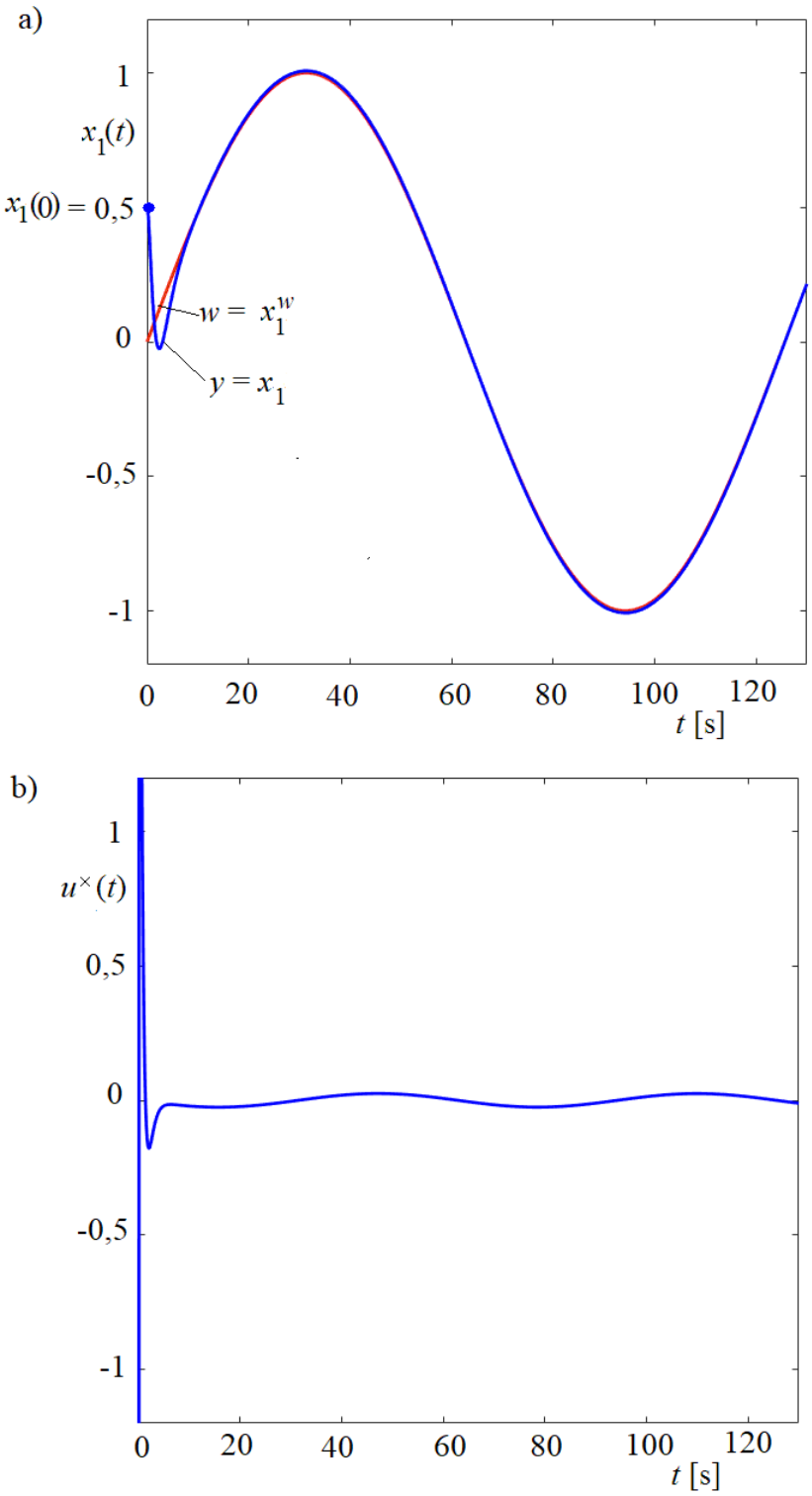
Podmínka řiditelnosti (2.137) způsobuje singularitu spočívající ve změně znaménka u řízení (2.140) při přechodu $x_1(t) = 0$. Zvolíme-li Θ konstantní, pak řízení (2.140) pracuje dobře pouze pro $x_1(t) > 0$. Pro $x_1(t) < 0$ systém řízení je nestabilní.

Zvolíme-li $\Theta = -\lambda J^{-1}$, tj. $\Theta = \lambda / x_1$, pak řízení (2.140) spolehlivě pracuje pro libovolnou počáteční podmínku $x_1(0) \neq 0$, pouze je třeba omezit velikost řízení pro $|x_1(0)| << 1$.

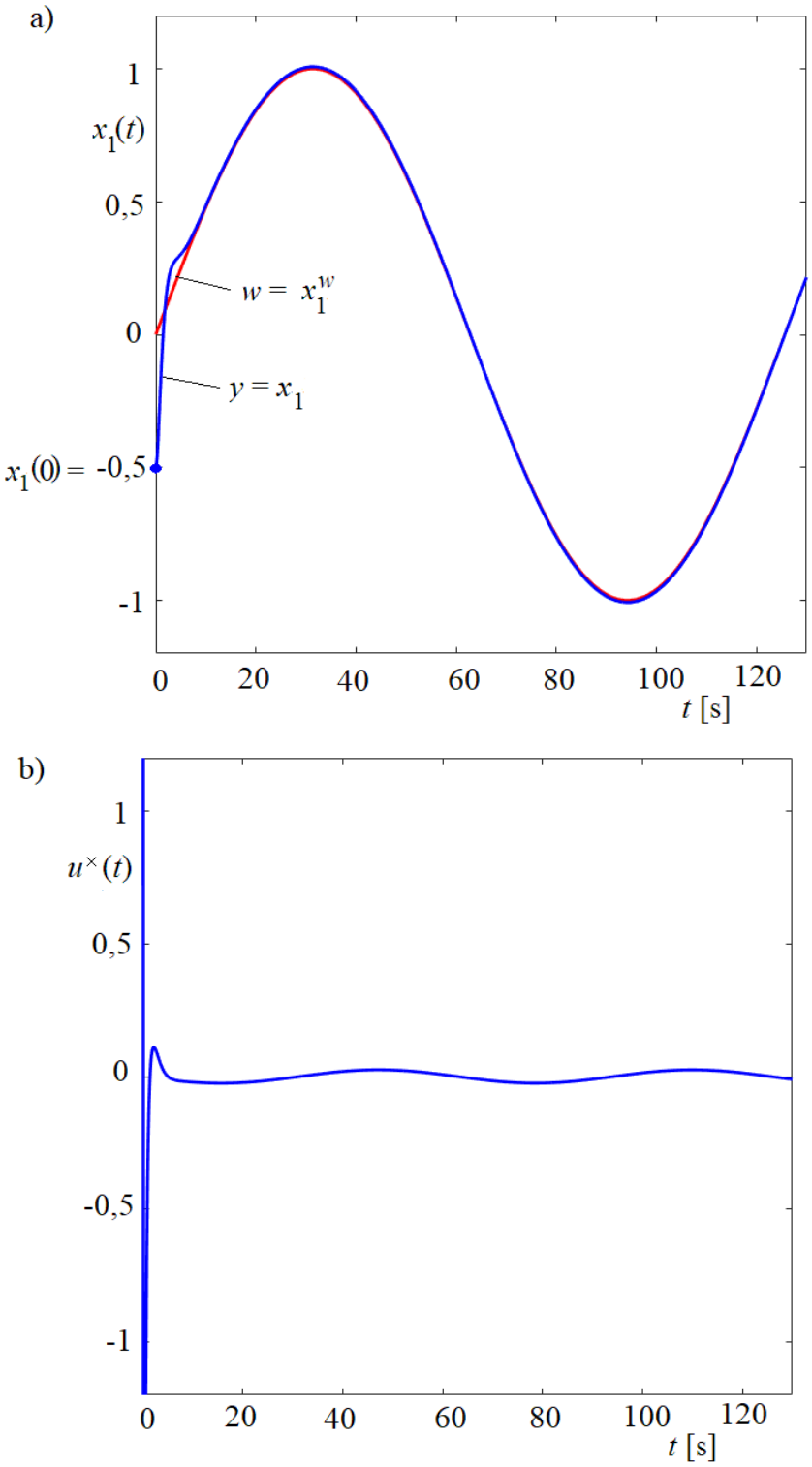
Je zřejmé, že má-li výstupní veličina $y = x_1$ sledovat sinusoidální průběh $w = x_1^w$ (2.135), musí být dynamika systému řízení (2.138) dostatečně rychlá vzhledem k úhlovému kmitočtu ω, tj. $\omega_0 >> \omega$.

Výsledky simulace pro $\omega_0 = 1$ rad.s^{-1}, $\omega = 0{,}05$ rad.s^{-1}a $u^{\times}(0) = 0$ jsou pro $x_1(0) = 0{,}5$ na obr. 2.23a pro $x_1(0) = -0{,}5$ na obr. 2.24. V obou případech

$$\Theta = \frac{10}{x_1}. \tag{2.141}$$



Obr. 2.23 Sledování sinusoidálního průběhu pro $x_1(0) = 0{,}5$: a) průběhy $w = x_1^w$ a $y = x_1$, b) průběh řízení – příklad 2.8



Obr. 2.24 Sledování sinusoidálního průběhu pro $x_1(0) = -0{,}5$: a) průběhy $w = x_1^w$ a $y = x_1$, b) průběh řízení – příklad 2.8

Příklad 2.9

Pro koncentrační směšovač (obr. 2.10) z příkladu 2.2 je třeba navrhnout řízení s vysokým zesílením a ověřit ho pro číselné hodnoty parametrů z příkladu 2.6 a skokové změny koncentrací c_1 a c_2.

Řešení:

Požadovaný model navrženého uzavřeného systému řízení předpokládáme ve tvaru (agregovaný model je shodný s celkovým modelem)

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 + k_{11} e_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 + k_{22} e_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \; \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{m}^w = \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e}\,, \tag{2.142a}$$

kde [viz také (2.34b)]

$$-\boldsymbol{K}_a = \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 0 \\ 0 & -k_{22} \end{bmatrix},\; \dot{\boldsymbol{e}}_a = \dot{\boldsymbol{e}}\,. \tag{2.142b}$$

V souladu se vztahem (2.128) řízení s vysokým zesílením je dáno

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta} \int_0^t \boldsymbol{m}^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\Theta} \int_0^t [\dot{\boldsymbol{e}}(\tau) + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{u}(0)\,. \tag{2.143}$$

Pro konstantní diagonální matici $\boldsymbol{\Theta}$ můžeme psát

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}[\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{K}_a \int_0^t \boldsymbol{e}(\tau)\,\mathrm{d}\tau] + \boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{e}(0)\,,$$

resp. ve složkovém vyjádření

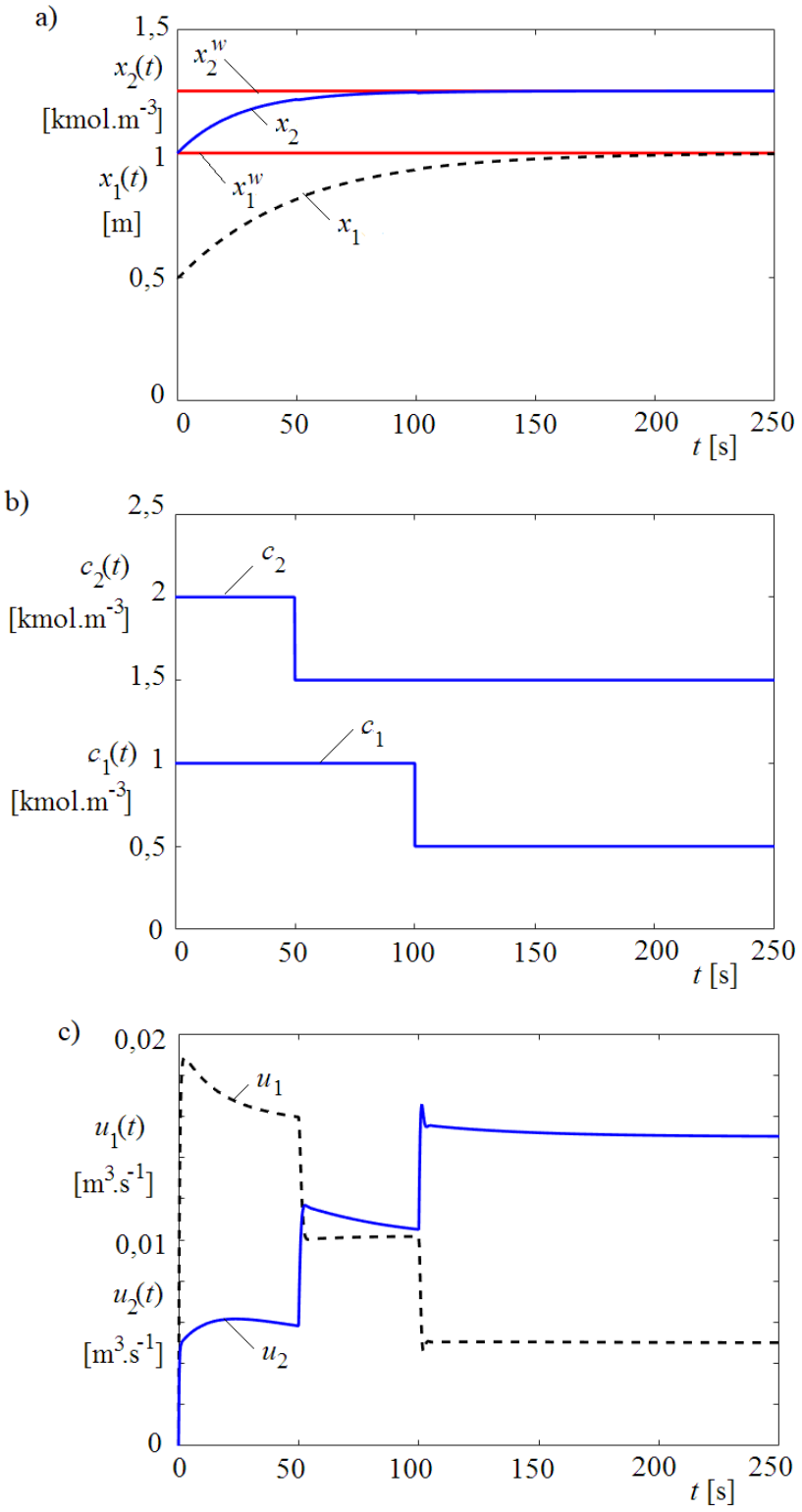
$$\left.\begin{aligned} u_1^{\times}(t) &= \Theta_1[e_1(t) + k_{11} \int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau] + u_1(0) - \Theta_1 e_1(0), \\ u_2^{\times}(t) &= \Theta_2[e_2(t) + k_{22} \int_0^t e_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau] + u_2(0) - \Theta_2 e_2(0). \end{aligned}\right\} \tag{2.144}$$

Vidíme, že řízení s vysokým zesílením vede na decentralizované řízení s konvenčními regulátory PI.

Při simulaci byly uvažovány stejné hodnoty parametrů koncentračního směšovače a stejné změny koncentrací c_1 a c_2 z důvodu možnosti porovnat výsledky na obr. 2.25 s výsledky na obr. 2.20 z příkladu 2.6.

Při simulaci se zjednodušeně předpokládalo, že $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{0}$ a $\Theta_1 = \Theta_2 = 2$. Při vyšších hodnotách zesílení Θ_1 a Θ_2 kvalita řízení byla rovněž vyšší.

Ze srovnání výsledků simulace z příkladů 2.6 a 2.9 vyplývá, že v obou případech je řízení kvalitní a vysoce robustní. Výhodou řízení s vysokým zesílením je možnost použití konvenčních regulátorů.



Obr. 2.25 Koncentrační směšovač: a) průběh výsledné koncentrace x_2 a výšky hladiny x_1, b) skokové změny koncentrací c_1 a c_2, c) průběhy průtoků u_1 a u_2 – příklad 2.9

Příklad 2.10

Je třeba navrhnout řízení s vysokým zesílením pro standardní nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, && x_1(0), \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 x_3 - x_2 + u_1 + u_2, && x_2(0), \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + (1 + x_2^2) u_2, && x_3(0), \end{aligned}\right\} \tag{2.145a}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_3, \end{aligned}\right\} \tag{2.145b}$$

jehož cílem je sledovat zadané sinusoidální průběhy

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a_1 \sin(\omega_1 t), \\ w_2 &= a_2 \sin(\omega_2 t), \end{aligned}\right\} \tag{2.146}$$

kde a_1 a a_2 jsou amplitudy, ω_1 a ω_2 – úhlové kmitočty.

Řešení:

Pro nelineární systém (2.145) platí:

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2]^T,\ \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T,\ \boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T,$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [x_2, x_1 x_2 x_3 - x_2, -x_3]^T,$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 + x_2^2 \end{bmatrix},$$

tj. $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 3$, $m = 2$.

Pro základní agregační matici [viz (1.13)]

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.147}$$

dostaneme

$$\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{x} = [x_2, x_3]^T,$$

$$\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 - x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Protože

$$\det \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + x_2^2 \end{vmatrix} = 1 + x_2^2 \neq 0 \Rightarrow$$

standardní nelineární systém (2.145) je (plně) řiditelný.

Požadovaný matematický model uzavřeného systému řízení zvolíme lineární

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -k_1 e_1 - k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3, \end{aligned}\right\} \tag{2.148}$$

tj.

$$\dot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}, \tag{2.149a}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -k_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -k_3 \end{array}\right], \tag{2.149b}$$

kde

$$k_1 = \omega_0^2, \; k_2 = 2\xi_0\omega_0, \; k_3 = \frac{1}{T_3}, \tag{2.149c}$$

ω_0 je úhlový kmitočet netlumených kmitů, ξ_0 – koeficient poměrného tlumení, T_3 – časová konstanta.

Agregovaný požadovaný model tedy je

$$\boldsymbol{m}^w = \dot{\boldsymbol{e}}_a - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e}) = \dot{\boldsymbol{e}}_a + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{e}, \tag{2.150a}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_a = \boldsymbol{D}_a \dot{\boldsymbol{e}} = [\dot{e}_2, \dot{e}_3]^T, \; -\boldsymbol{K}_a = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix}. \tag{2.150b}$$

Robustní řízení s vysokým zesílením v souladu se vztahem (2.130) je

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\int_0^t \boldsymbol{m}^{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\Theta}\int_0^t (\dot{\boldsymbol{e}}_a + \boldsymbol{K}_a\boldsymbol{e})\,\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{u}(0), \tag{2.151}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}[\,\Theta_1, \Theta_2\,].$$

Jeho složkové vyjádření pro první složku má tvar

$$u_1^{\times}(t) = \Theta_1\int_0^t (\dot{e}_2 + k_2 e_2 + k_1 e_1)\,\mathrm{d}\tau + u_1(0) =$$

$$= \Theta_1\left\{\dot{e}_1(t) - \dot{e}_1(0) + k_2[e_1(t) - e_1(0)] + k_1\int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} + u_1(0),$$

$$u_1^{\times}(t) = K_{P1}\left[e_1(t) + \frac{1}{T_{I1}}\int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_{D1}\dot{e}_1(t)\right] + u_1^{\times}(0), \tag{2.152a}$$

kde

$$K_{P1} = 2\xi_0\Theta_1\omega_0, \quad T_{I1} = \frac{2\xi_0}{\omega_0}, \quad T_{D1} = \frac{1}{2\xi_0\omega_0}. \tag{2.152b}$$

$$u_1^{\times}(0) = u_1(0) - \Theta_1\dot{e}_1(0) - 2\xi_0\Theta_1\omega_0 e_1(0). \tag{2.152c}$$

Podobně pro druhou složku řízení můžeme psát

$$u_2^{\times}(t) = \Theta_2\int_0^t (\dot{e}_3 + k_3 e_3)\,\mathrm{d}\tau + u_2(0) =$$

$$= \Theta_2\left[e_3(t) - e_3(0) + k_3\int_0^t e_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] + u_2(0),$$

$$u_2^{\times}(t) = K_{P2}\left[e_3(t) + \frac{1}{T_{I2}}\int_0^t e_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] + u_2^{\times}(0), \tag{2.153a}$$

$$K_{P1} = \Theta_2, \quad T_{I2} = T_3, \tag{2.153b}$$

$$u_2^{\times}(0) = u_2(0) - \Theta_2 e_3(0). \tag{2.153c}$$

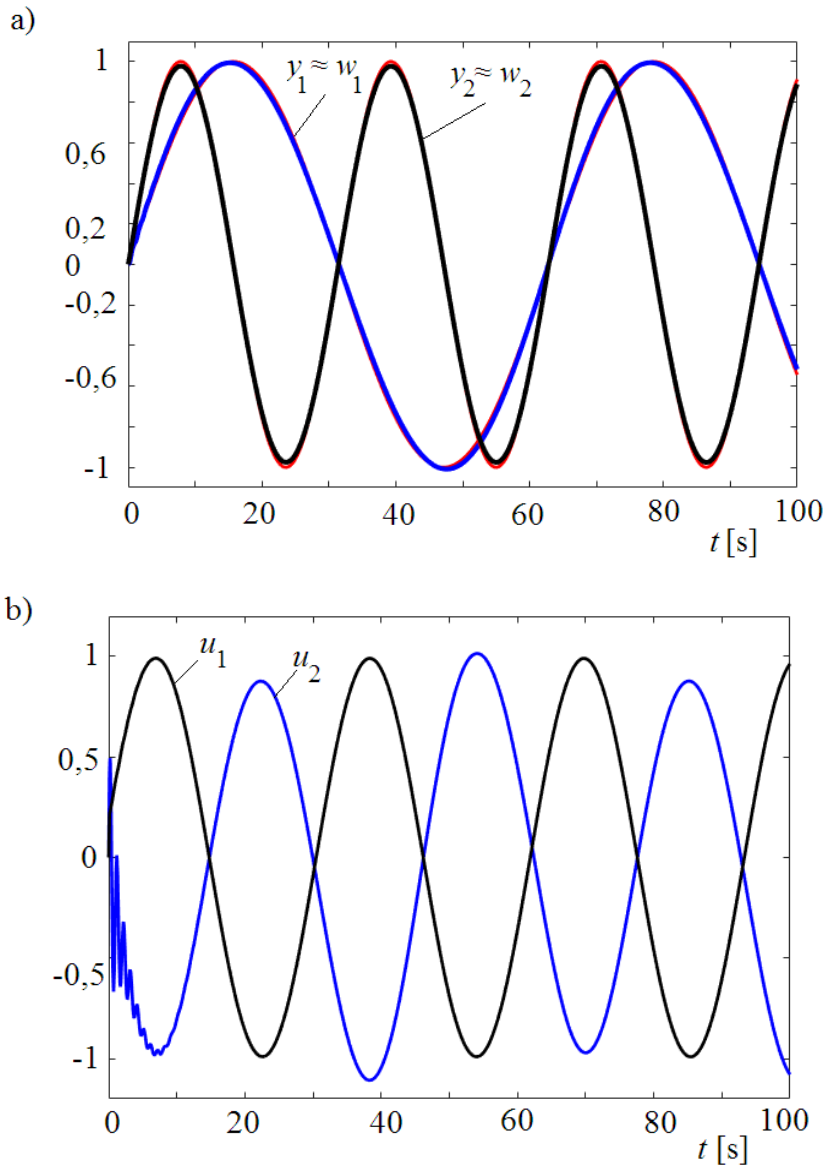
Vidíme, že robustní řízení s vysokým zesílením v tomto případě vede na konvenční algoritmy regulace PID a PI.

Na obr. 2.26a jsou ukázány žádané sinusoidální průběhy $w_1 = x_1^w$ a $w_2 = x_3^w$ (červeně) a průběhy $y_1 = x_1$ (modře) a $y_2 = x_3$ (černě) získané pro hodnoty: $u_1^{\times}(0) = u_2^{\times}(0) = 0$, $a_1 = a_2 = 1$, $\omega_1 = 0{,}1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, $\omega_2 = 0{,}2\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, $K_{P1} = 40$, $T_{I1} = 0{,}5\,\mathrm{s}$, $T_{D1} = 0{,}25\,\mathrm{s}$ ($\Theta_1 = 10$, $\xi_0 = 1$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad.s^{-1}}$), $K_{P2} = 40$, $T_{I2} = 0{,}5\,\mathrm{s}$ ($\Theta_2 = 40$, $T_3 = 0{,}5\,\mathrm{s}$).

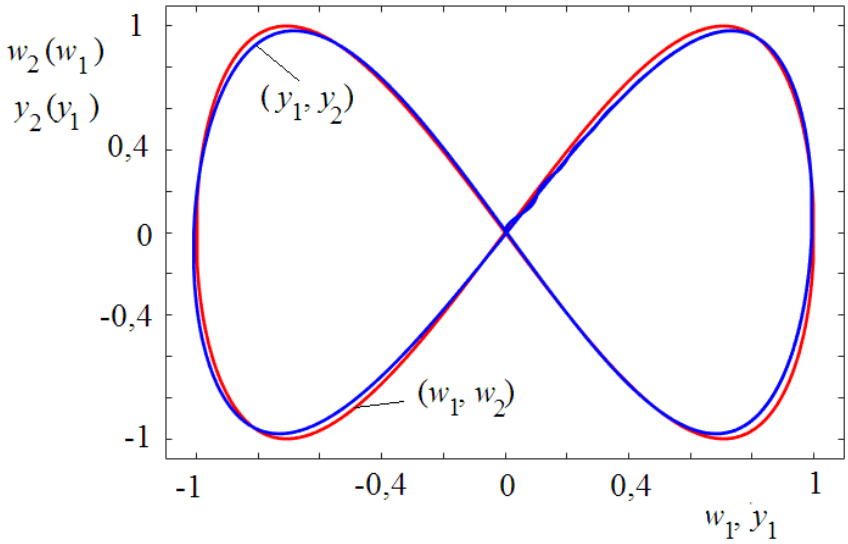
Z obr. 2.26a je zřejmé, že sledování zadaných sinusoidálních průběhů je poměrně dobré. Může být podstatně zlepšeno zvýšením hodnot Θ_1 a Θ_2, tj. zesílení K_{P1} a K_{P2}.

Odpovídající průběhy řídicích veličin u_1 (modře) a u_2 (černě) jsou na obr. 2.26b. Počáteční průběhy jsou kmitavé a jsou způsobeny neuvažováním počátečních řízení $u_1^{\times}(0)$ a $u_2^{\times}(0)$.

Lissajousův obrazec pro úhlové kmitočty $\omega_2 = 2\omega_1$ zadané w_1, w_2 (červeně) a získané y_1, y_2 (modře) průběhy jsou na obr. 2.27.



Obr. 2.26 Sledování zadaných sinusoidálních průběhů: a) zadané $w_1(t) = x_1^w(t)$, $w_2(t) = x_3^w(t)$ a získané $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = x_3(t)$ průběhy, b) odpovídající průběhy řízení $u_1(t)$ a $u_2(t)$ – příklad 2.10



Obr. 2.27 Lissajousův obrazec pro úhlové kmitočty $\omega_2 = 2\omega_1$ – příklad 2.10

2.2.3 Řízení v klouzavém režimu 1

Řízení s vysokým zesílením je velmi robustní, ale současně má i některé nepříjemné vlastnosti. Nepředpokládá se omezení řídicích proměnných, co v reálných systémech neplatí.

Uvažujme vztahy (2.126), (2.120), (2.125) a pak robustní řízení s vysokým zesílením je [viz také (2.130)]

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \lambda \boldsymbol{G}_a^{-1} \boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{u}(0)\,, \tag{2.154a}$$

$$\boldsymbol{m}(t) = \int_0^t \boldsymbol{m}^{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{2.154b}$$

Některé problémy lze řešit nekonečně vysokou hodnotou $\lambda \to \infty$ a omezením řídicích proměnných, tj. pro každou složku řízení u_j^+ platí [je uvažováno pouze symetrické omezení (obr. 2.28)]

$$u_j^+(t) = \begin{cases} u_j^m & m_j > 0 \\ 0 & m_j = 0, \quad u_j^m > 0. \\ -u_j^m & m_j < 0 \end{cases} \tag{2.155}$$

Vztah (2.155) můžeme pomocí znaménkové funkce sign zapsat ve tvaru (obr. 2.28)

$$u_j^+(t) = u_j^m \operatorname{sign}(m_j) + u_j(0)\,, \tag{2.156a}$$

kde

$$\text{sign}(m_j) = \begin{cases} 1 & m_j > 0 \\ 0 & m_j = 0 \\ -1 & m_j < 0 \end{cases}, \tag{2.156b}$$

resp.

$$\boldsymbol{u}^{sl}(t) = \boldsymbol{G}_a^{-1}\boldsymbol{U}\mathbf{sign}[\boldsymbol{m}(t)] + \boldsymbol{u}(0), \tag{2.157a}$$

$$\boldsymbol{m}(t) = \int_0^t \boldsymbol{m}^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.157b}$$

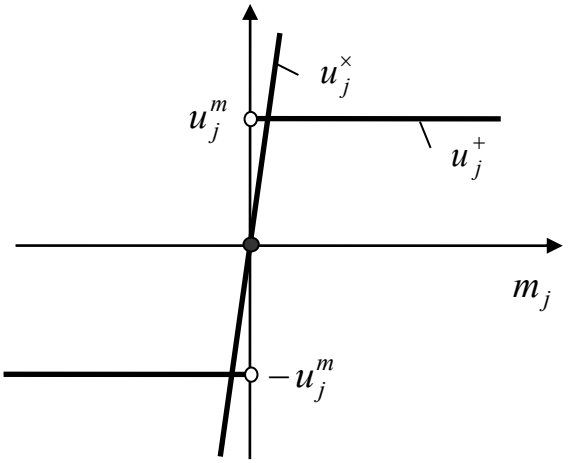
$$\boldsymbol{U} = \text{diag}[u_1^m, u_2^m, \ldots, u_m^m], \tag{2.157c}$$

$$\mathbf{sign}(\boldsymbol{m}) = [\text{sign}(m_1), \text{sign}(m_2), \ldots, \text{sign}(m_m)]^T. \tag{2.157d}$$

Jak je ukázáno v oddíle 2.2.4, jde o ***integrační klouzavé řízení***.

Alespoň přibližná znalost inverzní matice $\boldsymbol{G}_a^{-1}$ je vždy žádoucí. Při správném přiřazení řídicích proměnných odpovídajícím dílčím podsystémům, lze často předpokládat, že je diagonální a hodnoty jejích diagonálních prvků jsou pak uvažovány v hodnotách u_j^m.

Počáteční řízení $\boldsymbol{u}(0)$ budeme často z důvodu zjednodušení považovat za nulové (i když se to projeví počátečními rychlými a nepříjemnými změnami řízení).



Obr. 2.28 Přechod od řízení s vysokým zesílením $u_j^{\times}$ ke klouzavému řízení u_j^+

Obdržené řízení (2.157) pracuje v tzv. ***klouzavém režimu*** (módu) a proto ho budeme nazývat ***řízením v klouzavém režimu*** nebo zjednodušeně ***klouzavým řízením***. Zajišťuje, že všechny trajektorie směřují ke ***klouzavé*** (***přepínací***) ***ploše*** (***křivce***)

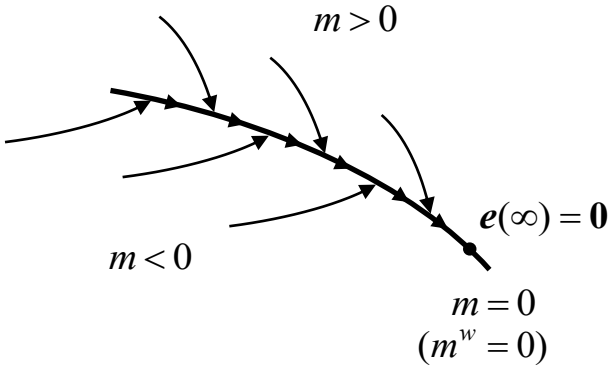
$$\boldsymbol{m} = \mathbf{0} \tag{2.158}$$

a zůstanou na ní (klouzají po ní), tj. [viz (2.154) a (2.110)]

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m}^w = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{m}^w = \dot{\boldsymbol{e}}_a - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e}) = \mathbf{0}\,. \tag{2.159}$$

Vidíme, že dané řízení realizuje požadovaný model uzavřeného systému řízení. Pohyb se zastaví pro $t \to \infty$ v rovnovážném stavu [viz (2.40b)]

$$\boldsymbol{e}(\infty) = \mathbf{0}. \tag{2.160}$$



Obr. 2.29 Geometrická interpretace klouzavého řízení

Pro jednorozměrový případ geometrická interpretace je na obr. 2.29.

Je zřejmé, že aby všechny trajektorie směřovaly ke křivce $m = 0$, musí platit

$$m > 0 \;\Rightarrow\; \dot{m} < 0,$$
$$m < 0 \;\Rightarrow\; \dot{m} > 0.$$

Tyto podmínky můžeme zapsat ve tvaru jediné podmínky

$$m \cdot \dot{m} < 0\,. \tag{2.161}$$

Podmínku (2.161) lze vyjádřit v ekvivalentním tvaru

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m^2 < 0\,. \tag{2.162}$$

Protože platí

$$m^2 = |m|^2,$$

lze $|m|$ $(m \neq 0)$ považovat za „vzdálenost“ od $m = 0$, proto podmínka (2.162) vyjadřuje tu skutečnost, že pro rostoucí čas se *m* zmenšuje, tj. blíží se k 0, tj. ke klouzavé křivce, viz (2.158).

Tyto úvahy mohou být přímo rozšířeny i na mnohorozměrový případ, tj.

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m}^T\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m}^w < 0\,, \tag{2.163}$$

kde výraz

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m} \tag{2.164}$$

může být považován za Ljapunovovu funkci.

Nespojitá funkce sign z důvodu velmi rychlého (teoreticky nekonečně rychlého) přepínání z jedné krajní hodnoty na druhou krajní hodnotu (chattering) je nejčastěji nahrazována spojitými aproximacemi (obr. 2.30):

a) nehladká aproximace

$$\mathrm{sat}\left(\frac{m_j}{\varepsilon_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{m_j}{\varepsilon_j} & \text{pro} \quad \dfrac{m_j}{\varepsilon_j} \le 1 \\ \mathrm{sign}\left(\dfrac{m_j}{\varepsilon_j}\right) & \text{pro} \quad \left|\dfrac{m_j}{\varepsilon_j}\right| > 1 \end{cases}, \tag{2.165}$$

b) hladká aproximace

$$\mathrm{tgh}\left(\frac{m_j}{\varepsilon_j}\right) = \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}, \qquad a = \mathrm{e}^{\frac{m_j}{\varepsilon_j}}, \tag{2.166}$$

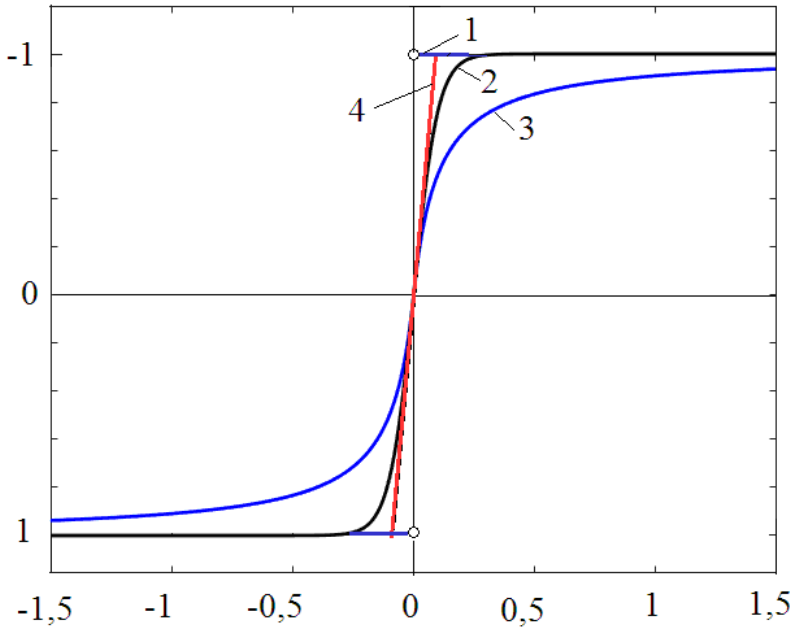
c) hladká aproximace

$$\mathrm{asign}(m_j, \varepsilon_j) = \frac{m_j}{|m_j| + \varepsilon_j}, \tag{2.167}$$

kde sat je funkce nasycení, ε_j – malé kladné číslo.

Všechny uvedené aproximace mají pro $m_j = 0$ společnou tečnu se sklonem $1/\varepsilon_j$ (obr. 2.30) a platí pro ně

$$\lim_{\varepsilon_j \to 0}\left[\text{sat}\left(\frac{m_j}{\varepsilon_j}\right)\right] = \lim_{\varepsilon_j \to 0}\left[\text{tgh}\left(\frac{m_j}{\varepsilon_j}\right)\right] = \\ = \lim_{\varepsilon_j \to 0}\left[\text{asign}(m_j, \varepsilon_j)\right] = \text{sign}(m_j). \tag{2.168}$$



Obr. 2.30 Spojité aproximace nespojité funkce sign:
$1 - \text{sign}(m_j)$, $2 - \text{tgh}\left(\frac{m_j}{\varepsilon_j}\right)$, $3 - \text{asign}(m_j, \varepsilon_j)$, $4 - \text{sat}\left(\frac{m_j}{\varepsilon_j}\right)$

Příklad 2.11

Pro nelineární systém

$$\dot{x} = x^3 - \sqrt{|x|} + 2u \tag{2.169}$$

je třeba navrhnout klouzavé řízení, které zajistí požadovaný model uzavřeného systému řízení

$$\dot{e} + ae = 0, \quad a > 0, \tag{2.170a}$$

tj.

$$m^w = \dot{e} + ae. \tag{2.170b}$$

Řešení:

Je zřejmé, že nelineární systém (2.169) je standardní a řiditelný ($n = m = 1$), tj.

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + gu, \\ &f(x) = x^3 - \sqrt{|x|},\ \ g = 2. \end{aligned}\right\} \tag{2.171}$$

V souladu se vztahem (2.157) můžeme psát

$$u^{sl} = \frac{1}{g} u^m \operatorname{sign}(m),\ \ g = 2, \tag{2.172a}$$

kde

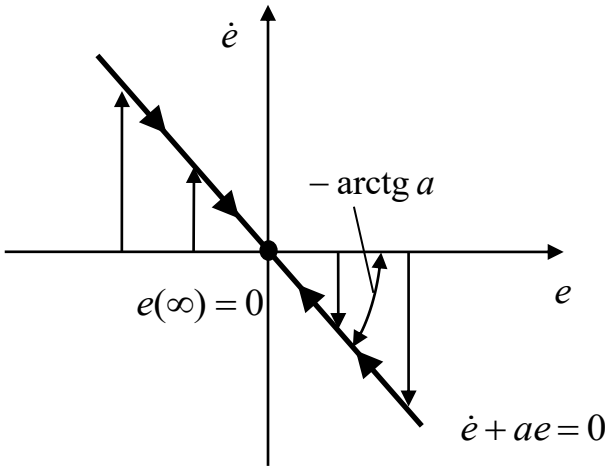
$$m = \int_0^t m^w \,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (\dot{e} + ae)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{2.172b}$$

Klouzavá (přepínací) křivka ve stavové rovině $(e, \dot{e})$ je dána vztahem (2.158), viz též obr. 2.29. Protože platí

$$m(t) = 0, \text{ tj. } \int_0^t m^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{pro} \quad t > 0 \Rightarrow$$

$$\dot{m}(t) = m^w(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t > 0\,. \tag{2.173}$$

Vidíme, že přepínání a následné „klouzání“ nastává v souladu s požadovaným modelem (2.170), viz obr. 2.31.



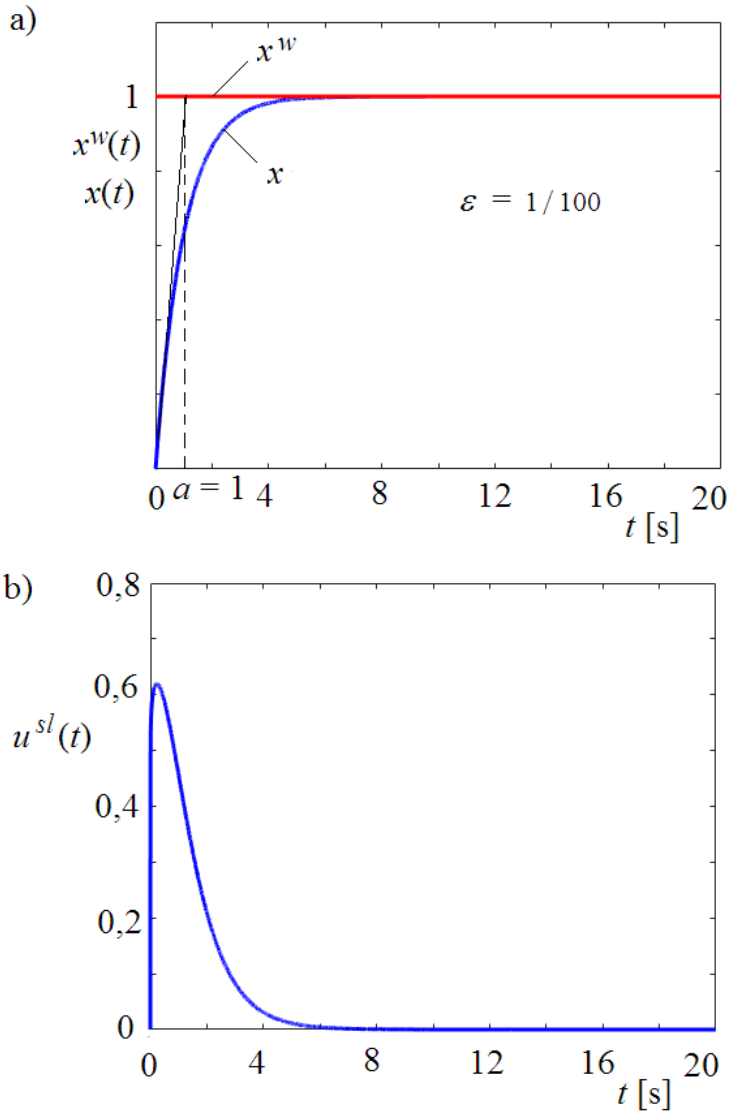
Obr. 2.31 Geometrická interpretace klouzavé (přepínací) křivky – příklad 2.11

Pro simulaci byla zvolena hodnota $a = 1$ a funkce $\operatorname{sign}(m)$ byla aproximována funkcí nasycení $\operatorname{sat}(m/\varepsilon)$ pro různé hodnoty malého kladného čísla ε. Hodnota (amplituda) nasycení řízení $u^m = 1{,}5$ byla určena experimentálně s ohledem na předpokládané maximální hodnoty x^w.

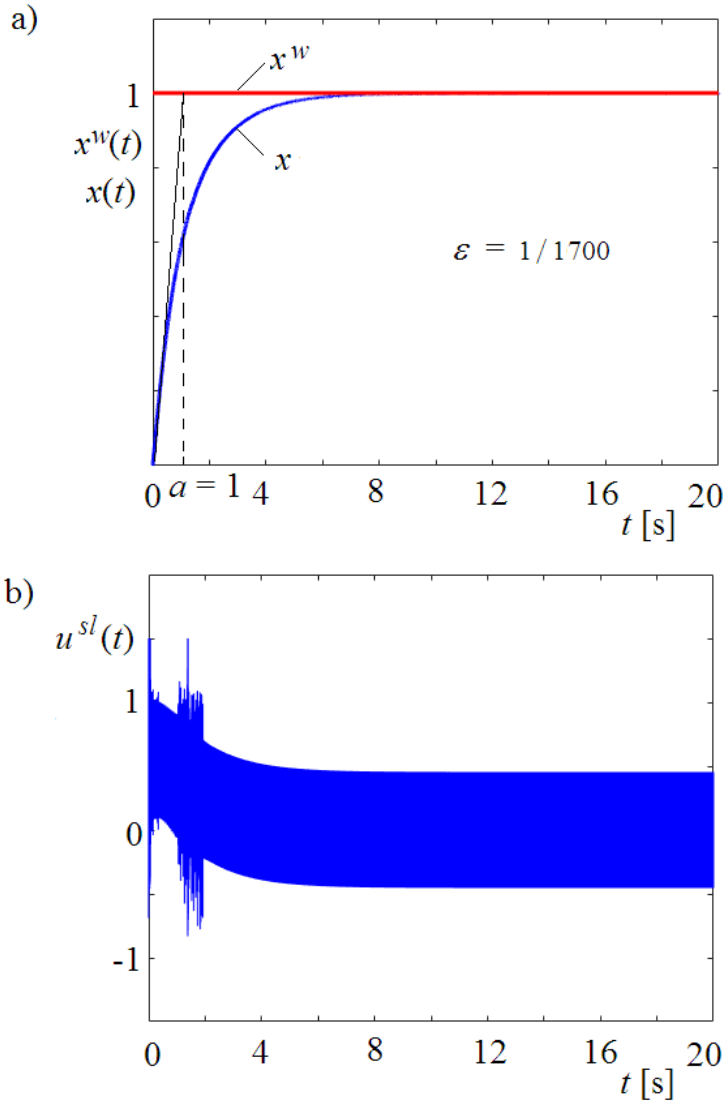
Na obr. 2.32a a 2.33a jsou odezvy uzavřeného systému řízení na jednotkový skok (jde o stabilizační řízení)

$$x^w(t) = \eta(t) \tag{2.174}$$

a odpovídající průběhy řízení u^{sl} jsou na obr. 2.32b a 2.33b, kde $\eta(t)$ je jednotková Heavisideova funkce.



Obr. 2.32 Stabilizační řízení pro $\varepsilon = 1/100$ – průběh: a) stavu x, b) řízení u^{sl} – příklad 2.11



Obr. 2.33 Stabilizační řízení pro $\varepsilon = 1/1700$ – průběh: a) stavu x, b) řízení u^{sl} – příklad 2.11

Obr. 2.32 ukazuje výsledky simulace pro $\varepsilon = 1/100$. Vidíme, že klouzavé řízení nenastalo a že v podstatě jde o řízení s vysokým zesílením a omezením. Řízení dokonce omezení (nasycení) nedosáhlo a jeho průběh je vyhovující.

Pro $\varepsilon = 1/1700$ klouzavý režim již vystupuje (obr. 2.33).

Vidíme, že klouzavé řízení se dostane přirozenou cestou z řízení s vysokým zesílením zvyšováním zesílení a omezením výstupu.

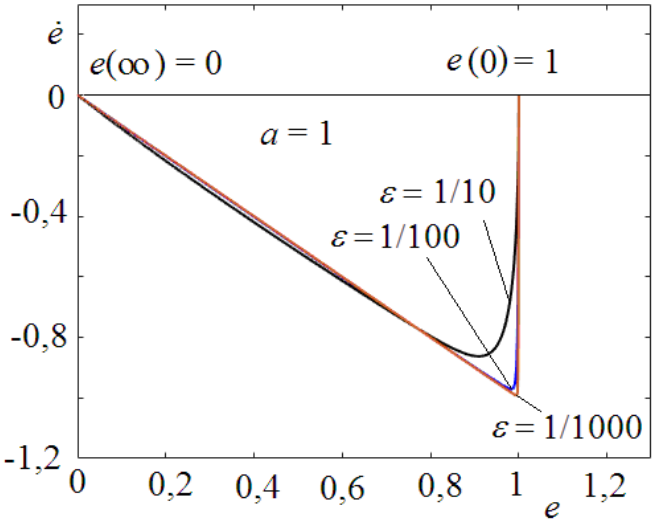
Ze srovnání řízení u^{sl} na obr. 2.32b a 2.33b vyplývá, že v tomto případě řízení s vysokým zesílením je pro praxi výhodnější, protože je také vysoce robustní, ale neničí akční orgán jeho vysokou aktivitou při přepínání.

Průběhy stavové trajektorie pro $a=1$, $e(0)=1$ a různé hodnoty ε jsou na obr. 2.34 (porovnej s obr. 2.31). Pro velmi nízké hodnoty ε v klouzavém režimu průběh stavové trajektorie je velmi nepřehledný. V klouzavém režimu doba dosažení klouzavé křivky je konečná.

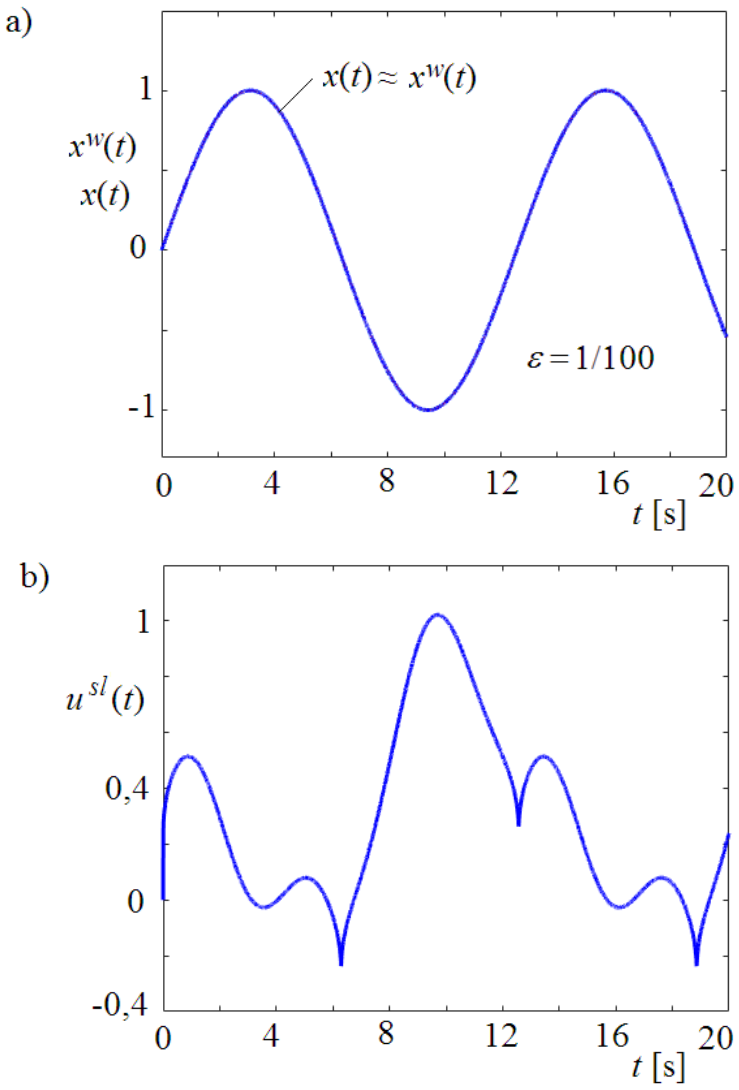
Sledování sinusoidálního signálu

$$x^w(t)=\sin(0{,}5t) \tag{2.175}$$

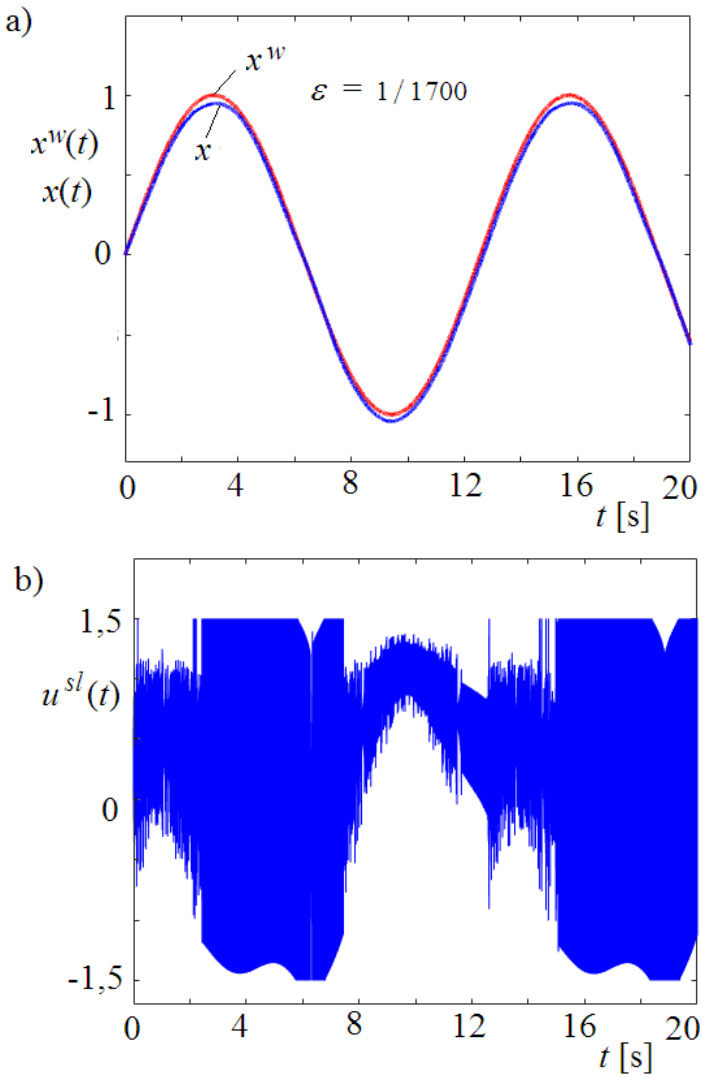
je na obr. 2.35 a 2.36. Obr. 2.35a a 2.36a ukazují, že klouzavé řízení v tomto případě je výrazně méně kvalitní. Totéž se týká i průběhů řízení u^{sl} na obr. 2.35b a 2.36b.



Obr. 2.34 Průběhy stavové trajektorie pro různé hodnoty ε – příklad 2.11

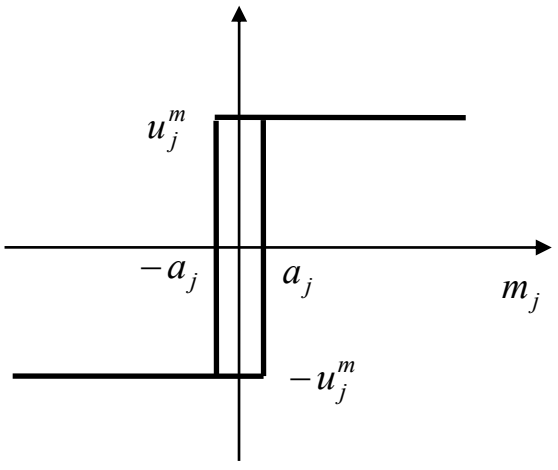


Obr. 2.35 Sledovací řízení pro $\varepsilon = 1/100$ – průběh: a) stavu x, b) řízení u^{sl} – příklad 2.11

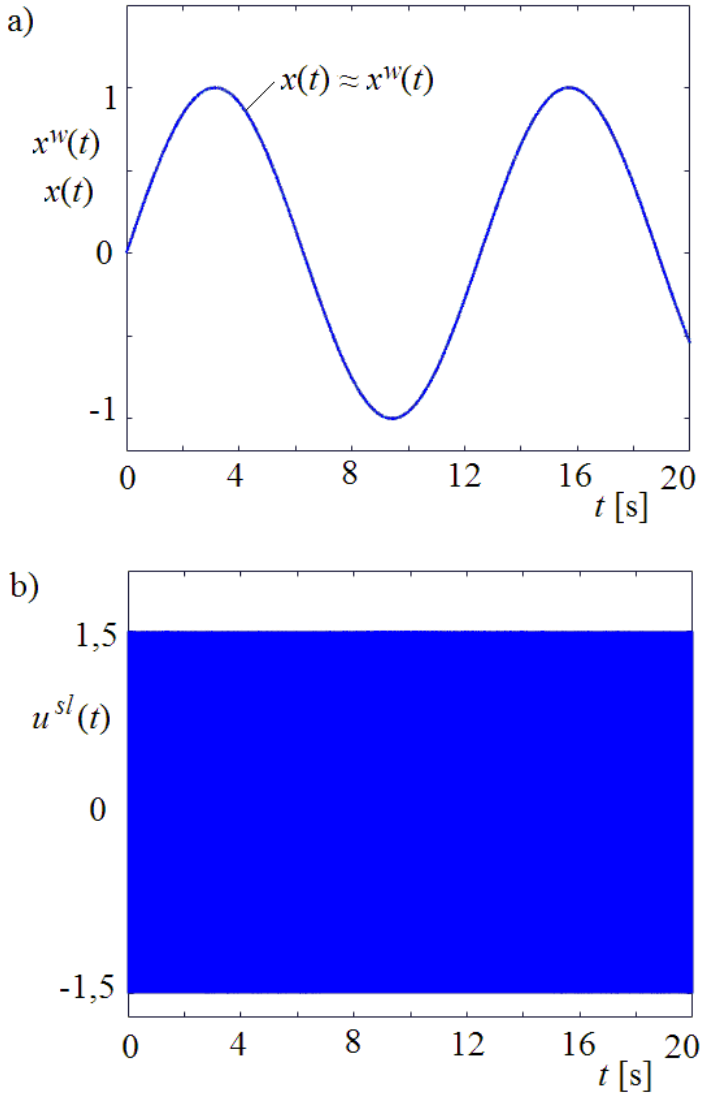


Obr. 2.36 Sledovací řízení pro $\varepsilon = 1/1700$ – průběh: a) stavu x, b) řízení u^{sl} – příklad 2.11

Vznik řízení v klouzavém režimu závisí na kroku řešení, použité metodě řešení diferenciálních rovnic a realizaci funkce sign.

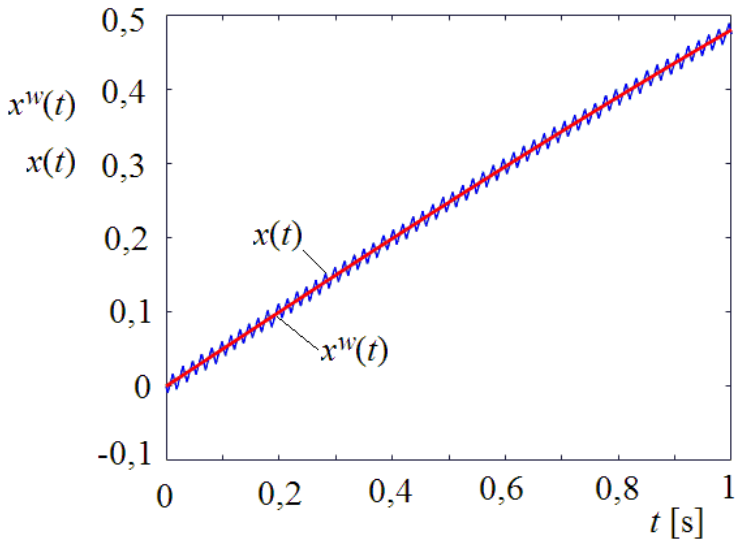


Obr. 2.37 Reléový člen s hysterezí realizující reálnou funkci sign – příklad 2.11



Obr. 2.38 Klouzavé řízení při použití reléového členu s hysterezí pro $a = 0$ a 0,01: a) průběh stavu x, b) průběh klouzavého řízení u^{sl} – příklad 2.11

Obr. 2.38 ukazuje průběh stavu x a řízení u^{sl} při použití reléového členu s hysterezí pro $u_m = 1{,}5$; $a = 0$ a $a = 0{,}01$. Pro oba případy se průběhy při daném rozlišení shodují. Detail průběhu stavu pro $a = 0{,}01$ je na obr. 2.39.



Obr. 3.39 Detail průběhu stavu x (modře) pro $a = 0{,}01$ – příklad 2.11

Využijeme nyní Ljapunovovu funkci (2.164) k odhadu hodnot u_j^m.

Aby uzavřený systém řízení s klouzavým řízením byl stabilní, pak musí platit [viz (2.163)]

$$\dot{V} = \boldsymbol{m}^T \boldsymbol{m}^w < 0,$$

tj.

$$\dot{V} = \boldsymbol{m}^T [\dot{\boldsymbol{e}}_a - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e})] = \boldsymbol{m}^T [\underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w - \underbrace{\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}}_{\dot{\boldsymbol{x}}_a} - \boldsymbol{f}_a^w(\boldsymbol{e})}_{\dot{\boldsymbol{e}}_a}] < 0 .$$

Pro [viz (2.155)]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^+ \tag{2.176}$$

dostaneme

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{m} m_j [\dot{x}_{aj}^w - f_{aj}(\boldsymbol{x}) - u_j^+ - f_{aj}^w(\boldsymbol{e})] < 0 .$$

Označme

$$\left| \dot{x}_{aj}^w - f_{aj}(\boldsymbol{x}) - f_{aj}^w(\boldsymbol{e}) \right| < z_j \le u_j^m \tag{2.177}$$

a dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m} m_j (z_j - u_j^+) < 0 \;\Rightarrow\; m_j (z_j - u_j^+) < 0,$$

tj. dostatečnou podmínkou zápornosti sumy sčítanců je zápornost každého sčítance.

Protože $z_j > 0$, nejméně příznivý případ je

$$|m_j| z_j < m_j u_j^+ \;\Rightarrow\; u_j^+ > \frac{|m_j|}{m_j} z_j .$$

Platí

$$\operatorname{sign}(m_j) = \frac{m_j}{|m_j|} = \frac{|m_j|}{m_j}, \tag{2.178}$$

a proto v souladu se vztahy (2.157), (2.176) a (2.177) můžeme psát

$$u_j^+ = u_j^m \operatorname{sign}(m_j),$$

resp.

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{U} \mathbf{sign}(\boldsymbol{m}), \tag{2.179a}$$

kde

$$\mathbf{sign}(\boldsymbol{m}) = [\operatorname{sign}(m_1), \operatorname{sign}(m_2), \ldots, \operatorname{sign}(m_m)]^T . \tag{2.179b}$$

$$\boldsymbol{U} = \operatorname{diag}[u_1^m, u_2^m, \ldots, u_m^m]^T . \tag{2.179c}$$

Ze vztahu (2.177) je zřejmé, že u_j^m závisí na $\boldsymbol{x}^w$ a $\boldsymbol{x}$ (případně $\dot{x}_{aj}^w$), ale z důvodu jednoduchosti se volí nejčastěji konstantní.

V konkrétních případech z důvodu nepříjemně vysoké aktivity řízení, tj. přepínání, je nespojitá funkce sign nahrazována reléovým členem s hysterezí (obr. 2.37), případně jejími spojitými náhradami (2.165) – (2.167).

Příklad 2.12

Pro transformovaný nelineární systém (2.132a,b) z příkladu 2.7 je třeba navrhnout klouzavé řízení zajišťující požadovaný model systému řízení (2.132c).

Řešení:

Klouzavé řízení získáme z řízení s vysokým zesílením jeho zvýšením na ∞. Proto můžeme využít řízení (2.133) ve tvaru algoritmu PID z příkladu 2.7.

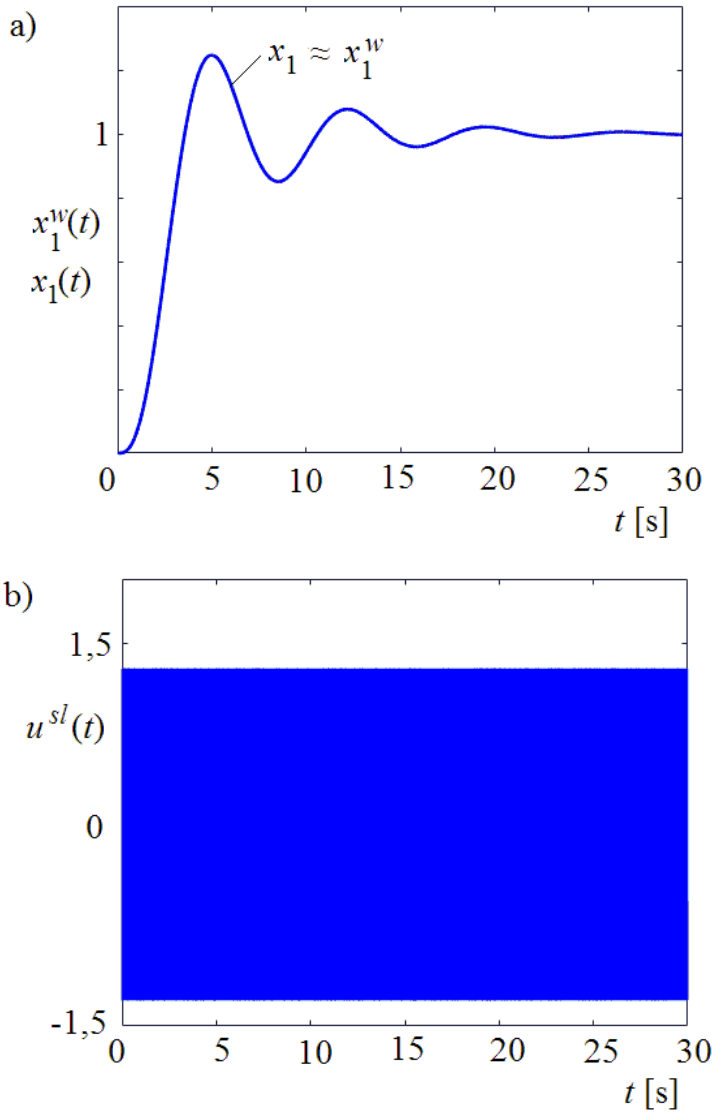
Zesílení K_P ve vztahu (2.133) zastoupíme v souladu se vztahem (2.179) funkcí sign a dostaneme

$$u^{sl}(t) = \frac{1}{g_2} u^m \operatorname{sign}\left[e_1(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_D \dot{e}_1(t) \right] + u^{\times}(0)\,, \tag{2.180a}$$

kde

$$g_2 = 2,\ T_I = \frac{2\xi_0}{\omega_0},\ T_D = \frac{1}{2\xi_0\omega_0},\ \xi_0 = 1,\ \omega_0 = 1\,\mathrm{rad.s^{-1}}. \tag{2.180b}$$

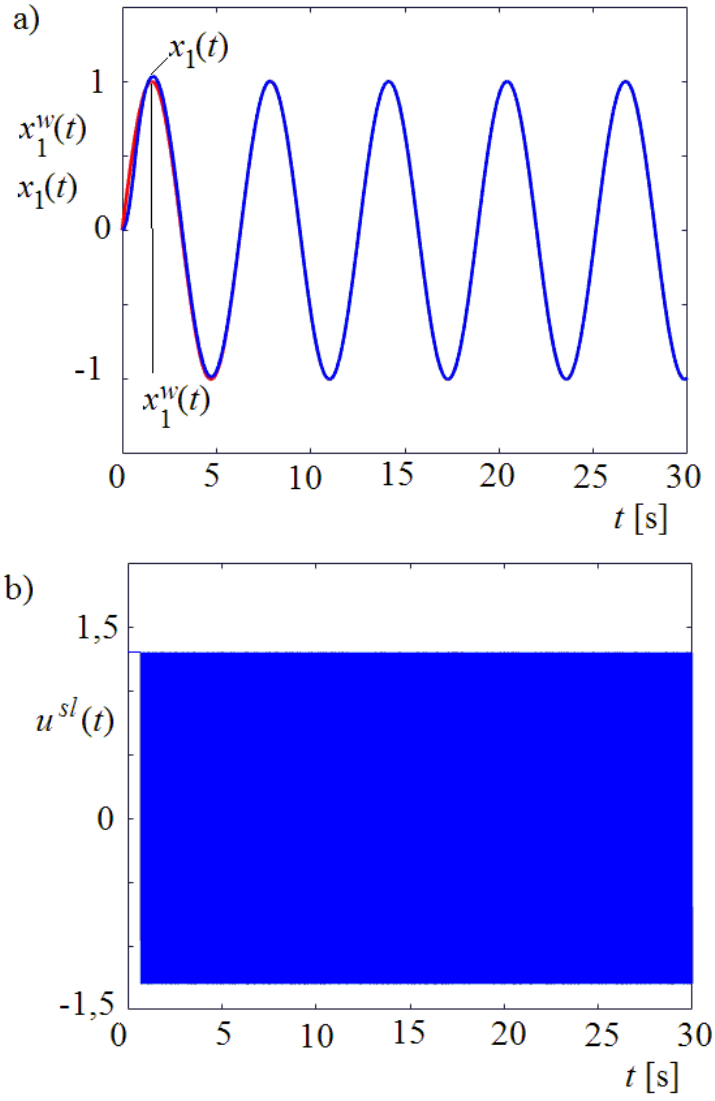
Hodnota $u^m = 1{,}3$ byla určena experimentálně.



Obr. 2.40 Sledování přechodové charakteristiky x_1^w: a) průběh stavu x_1, b) průběh klouzavého řízení u^{sl} – příklad 2.12

Pro ověření klouzavého řízení (2.180) bylo použito sledování přechodové charakteristiky lineárního členu 3. řádu (2.23) z příkladu 2.1 při nulových počátečních podmínkách. Funkce sign byla realizována reléovým členem (obr. 2.37) pro $a = 0$. Výsledky simulace pro $u^{\times}(0) = 0$ jsou na obr. 2.40 (srovnej s obr. 2.21).

Je zřejmé, že klouzavé řízení (2.180) zajišťuje kvalitní sledování (obr. 2.40a), ale průběh klouzavého řízení (obr. 2.40b) ukazuje na jeho vysokou aktivitu, která může být v konkrétních případech nepřípustná.



Obr. 2.41 Sledování sinusoidálního průběhu x_1^w – červeně: a) průběh stavu x_1 – modře, b) průběh klouzavého řízení u^{sl} – příklad 2.12

Na obr. 2.41 je ukázáno sledování sinusoidálního průběhu

$$x_1^w(t) = a\sin(\omega t),\ \ a = 1,\ \ \omega = 1\,\text{rad.s}^{-1}. \tag{2.181}$$

Na obr. 2.41a vidíme, že sledování začíná být kvalitní přibližně po půlperiodě, tj. po čase π s. Zajímavý je počáteční průběh klouzavého řízení na obr. 2.41b. Nejdříve je použita maximální hodnota $u^m = 1{,}3$ a pak po krátkém čase nastane klouzavý režim.

Příklad 2.13

U nelineárního systému (2.145) z příkladu 2.10 je třeba použít klouzavé řízení, které zajistí sledování sinusoidálních průběhů (2.146).

Řešení:

Protože řízení s vysokým zesílením začne pracovat v klouzavém režimu pro nekonečně vysoké zesílení, proto můžeme použít přímo řízení (2.152) a (2.153) z příkladu 2.10, kde zesílení K_{P1} a K_{P2} u algoritmů PID a PI zastoupíme funkcí sign, tj.

$$u_1^{sl}(t) = u_1^m\,\text{sign}\left[e_1(t) + \frac{1}{T_{I1}}\int_0^t e_1(\tau)\,\text{d}\tau + T_{D1}\dot{e}_1(t)\right] + u_1^{\times}(0) \tag{2.182a}$$

$$T_{I1} = \frac{2\xi_0}{\omega_0},\ T_{D1} = \frac{1}{2\xi_0\omega_0}; \tag{2.182b}$$

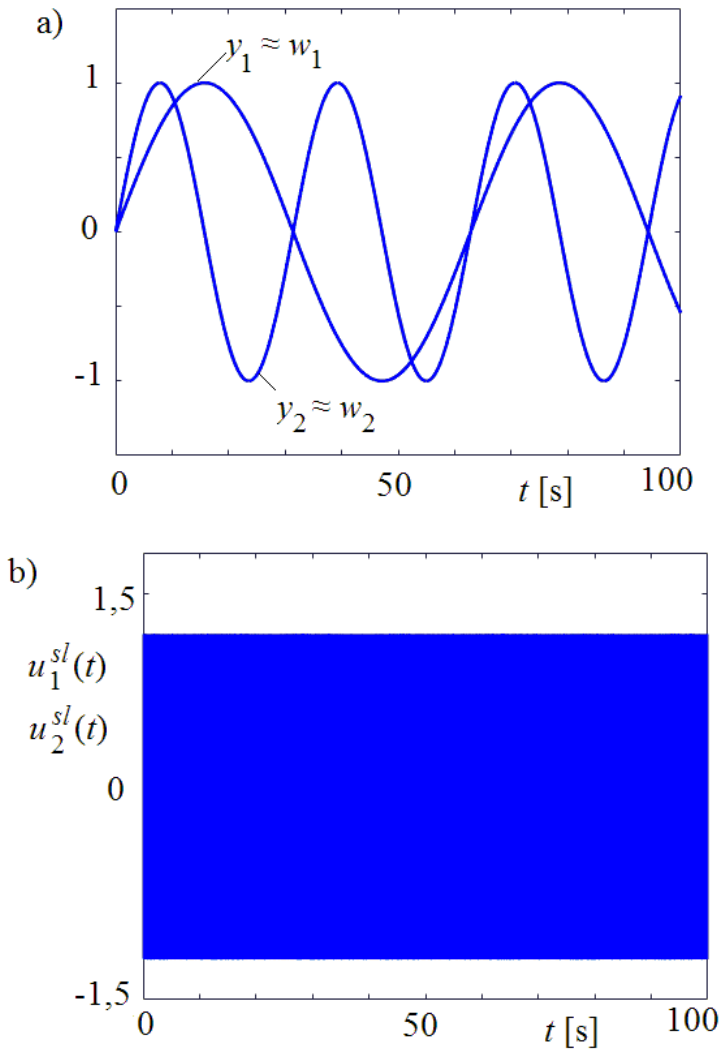
$$u_2^{sl}(t) = u_2^m\,\text{sign}\left[e_3(t) + \frac{1}{T_{I2}}\int_0^t e_3(\tau)\,\text{d}\tau\right] + u_2^{\times}(0), \tag{2.183a}$$

$$T_{I2} = T_3. \tag{2.183b}$$

Při simulaci funkce sign byly zastoupeny reléovými členy (obr. 2.37) pro $a_1 = a_2 = 0$ a byly použity hodnoty parametrů: $\omega_1 = 0{,}1$ rad.s^{-1}, $\omega_2 = 0{,}2$ rad.s^{-1}, $\xi_0 = 1$, $\omega_0 = 2$ rad.s^{-1}, $T_{I1} = T_{I2} = T_3 = 0{,}5$ s, $u_1^{\times}(0) = u_2^{\times}(0) = 0$.

Nasycení $u_1^m = u_2^m = 1{,}2$ byla určena experimentálně.

Výsledky simulace jsou na obr. 2.42. Rovněž v tomto případě sledování obou sinusoidálních průběhů je kvalitní (obr. 2.42a).



Obr. 2.42 Sledování sinusoidálních průběhů w_1 a w_2: a) průběhy $y_1 = x_1$ a $y_2 = x_2$, b) průběhy klouzavých řízení u_1^{sl} a u_2^{sl} – příklad 2.13

Jak již bylo řečeno, klouzavé řízení vznikne z řízení s vysokým zesílením uvažováním omezení a maximálním zvýšením zesílení. Pro nekonečně vysoké zesílení a omezení se obdrží nespojitá funkce sign a pro konečné zesílení a omezení se obdrží spojitá funkce sat.

Někdy je výhodné použít hladkou funkci asign nebo tgh.

Vždy je třeba zvážit, zda použít řízení s vysokým zesílením nebo řízení pracující v klouzavém režimu, viz příklad 2.11.

Řízení s vysokým zesílením a řízení pracující v klouzavém režimu jsou velmi robustní. V podstatě efektivně pracují s téměř neznámým řízeným systémem. Patří mezi metody řízení známé jako „model-free control“ (řízení bez znalosti modelu). I tyto metody většinou vyžadují znalost dílčích řádů n_j, tj.

relativních stupňů r_j (protože pracujeme se standardními systémy $n_j = r_j$, viz podkapitola 1.4).

Znalost dílčích řádů n_j (relativních stupňů r_j) je velmi důležitá, protože pokud dílčí řád skutečného podsystému n_j (r_j) je vyšší než dílčí řád n_j (r_j) modelu, pak mohou nastat problémy se zajištěním stability uzavřeného systému řízení, viz příklad 2.14. Proto je velmi důležité, aby dílčí řády n_j (dílčí relativní stupně r_j) byly určeny, pokud je to možné, přesně.

Příklad 2.14

Pro lineární systém (regulovanou soustavu) s přenosem

$$G_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} \tag{2.184}$$

je třeba navrhnout stabilizační řízení s vysokým zesílením a řízení pracující v klouzavém režimu, které zajistí požadovaný model navrženého systému řízení (regulačního obvodu) ve tvaru přenosu

$$G_{wy_w}(s) = \frac{Y_w(s)}{W(s)} = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}, \tag{2.185}$$

kde Y a Y_w jsou obrazy výstupních veličin y a y_w, U – obraz řídicí (akční) veličiny u, W – obraz žádané veličiny w, T_0 a T_w – časové konstanty, ξ_0 a ξ_w – koeficienty poměrného tlumení, k_1 – koeficient přenosu.

Řízený lineární systém (2.184) představuje např. jednoduchý mechanický systém (hmotnost – tlumič – pružina) a vystupuje ve všech mechanických systémech jako základní lineární model.

Parametry lineárního systému a požadovaného modelu: $T_0 = 2\,\mathrm{s}$, $T_w = 1\,\mathrm{s}$, $\xi_0 \in [0,1]$, $\xi_w = 1/\sqrt{2} \doteq 0{,}707$, $k_1 = 1$.

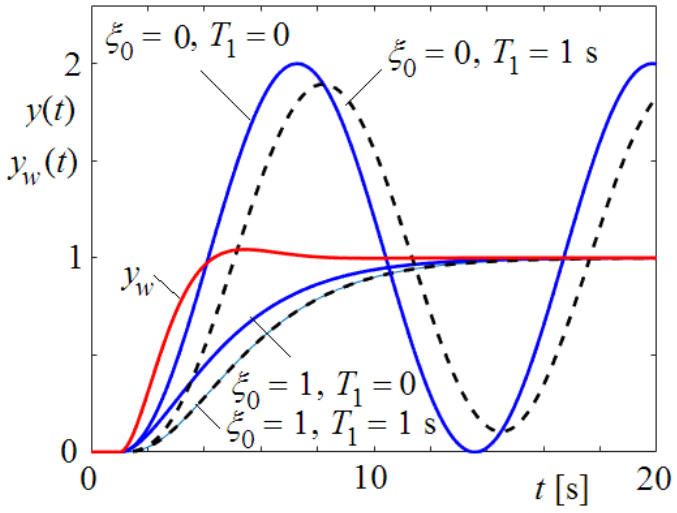
Navržené řízení musí zajistit požadovaný model (2.185) při změnách koeficientu poměrného tlumení ξ_0 a při uvažování parazitní (nemodelované) dynamiky popsané přenosem

$$\frac{1}{T_1 s + 1}, \tag{2.186}$$

kde T_1 je časová konstanta ($T_1 = 1\,\mathrm{s}$).

Řešení:

Mezní přechodové charakteristiky řízeného systému (2.184) bez a s parazitní dynamikou (2.186) jsou na obr. 2.43.



Obr. 2.43 Přechodové charakteristiky řízeného systému a požadovaného modelu uzavřeného systému řízení (červeně) y_w – příklad 2.14

Na obr. 2.43 je také ukázána přechodová charakteristika požadovaného uzavřeného systému řízení y_w (červeně).

Přenos lineárního řízeného systému (2.184) vyjádříme stavově

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_0^2}x_1 - \frac{2\xi_0}{T_0}x_2 + \frac{k_1}{T_0^2}u, \\ y &= x_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.187}$$

Podobně stavově vyjádříme i přenos požadovaného modelu (2.185)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_w^2}x_1 - \frac{2\xi_w}{T_w}x_2 + \frac{1}{T_w^2}w, \\ y_w &= x_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.188}$$

Agregovaný požadovaný model dostaneme z (2.188), tj.

$$m^w = -\dot{x}_2 - \frac{2\xi_w}{T_w}x_2 + \frac{1}{T_w^2}e_1, \qquad e_1 = w - x_1, \tag{2.189a}$$

resp.

$$m^w = -\ddot{x}_1 - \frac{2\xi_w}{T_w}\dot{x}_1 + \frac{1}{T_w^2}e_1. \tag{2.189b}$$

Řízení s vysokým zesílením v souladu se vztahem (2.130) je

$$u^{\times}(t) = \Theta \int_0^t m^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u(0) =$$

$$= \Theta \int_0^t [-\ddot{x}_1 - \frac{2\xi_w}{T_w}\dot{x}_1 + \frac{1}{T_w^2}e_1]\,\mathrm{d}\tau + u(0) =$$

$$= \Theta \left\{ \dot{x}_1(0) - \dot{x}_1(t) + \frac{2\xi_w}{T_w}[x_1(0) - x_1(t)] + \frac{1}{T_w^2}\int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} + u(0),$$

tj.

$$u^{\times}(t) = K_P\left(-x_1 + \frac{1}{T_I}\int_0^t e_1\,\mathrm{d}\tau - T_D\dot{x}_1 \right) + u^{\times}(0), \tag{2.190a}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} K_P &= 2\Theta\frac{\xi_w}{T_w}, \qquad T_I = 2\xi_w T_w,\ \ T_D = \frac{T_w}{2\xi_w}, \\ u^{\times}(0) &= u(0) + \Theta\left[\dot{x}_1(0) + \frac{2\xi_w}{T_w}x_1(0) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.190b}$$

Vidíme, že řízení s vysokým zesílením (2.190) je podobné algoritmu regulace PID.

Průběhy výstupní veličiny y pro $\Theta = 100$, $\xi_0 \in [0,1]$ a $T_1 = 0$ [tj. není uvažována parazitní dynamika (2.186)] jsou na obr. 2.44a a průběhy řízení s vysokým zesílením $u^{\times}$ pro mezní hodnoty koeficientu poměrného tlumení $\xi_0 = 0$ a 1 jsou na obr. 2.44b. Počáteční řízení $u^{\times}(0)$ není uvažováno.

Je zřejmé, že navržené řízení je velmi robustní.

Klouzavé řízení se formálně dostane z řízení s vysokým zesílením (2.190) zastoupením zesílením K_P funkcí sign (použijeme reléový člen na obr. 2.37 pro $a = 0$) a uvažováním omezení $u^m = 4$ (určeno experimentálně), tj.

$$u^{sl}(t) = u^m \operatorname{sign}\left(-x_1 + \frac{1}{T_I}\int_0^t e_1\,\mathrm{d}\tau - T_D\dot{x}_1 \right) + u^{\times}(0). \tag{2.191}$$

Průběhy výstupní veličiny y bez uvažování parazitní dynamiky ($T_1 = 0$), $a = 0, u^m = 4, \xi_0 \in [0,1]$ jsou na obr. 2.45a.

Odpovídající průběhy klouzavého řízení u^{sl} jsou na obr. 2.45b. Rovněž i v tomto případě počáteční řízení $u^{\times}(0)$ nebylo uvažováno. Znovu vidíme, že navržené klouzavé řízení je velmi robustní.

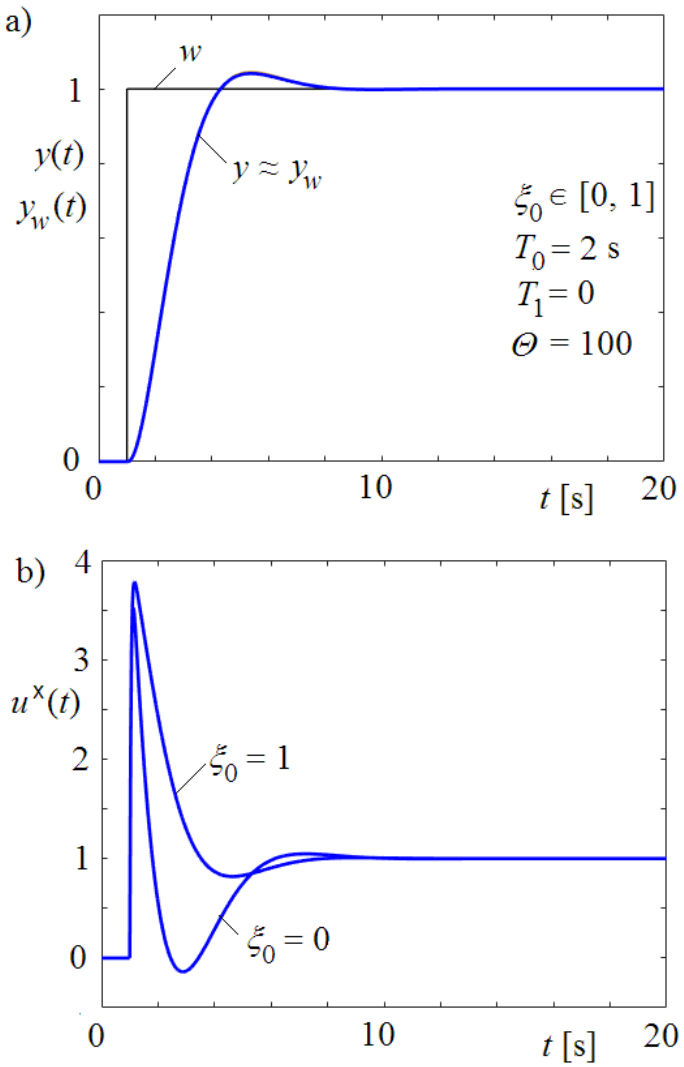
Bohužel při uvažování parazitní dynamiky to již neplatí.

Přenos řízeného lineárního systému (2.184) s uvažováním parazitní dynamiky (2.186) je

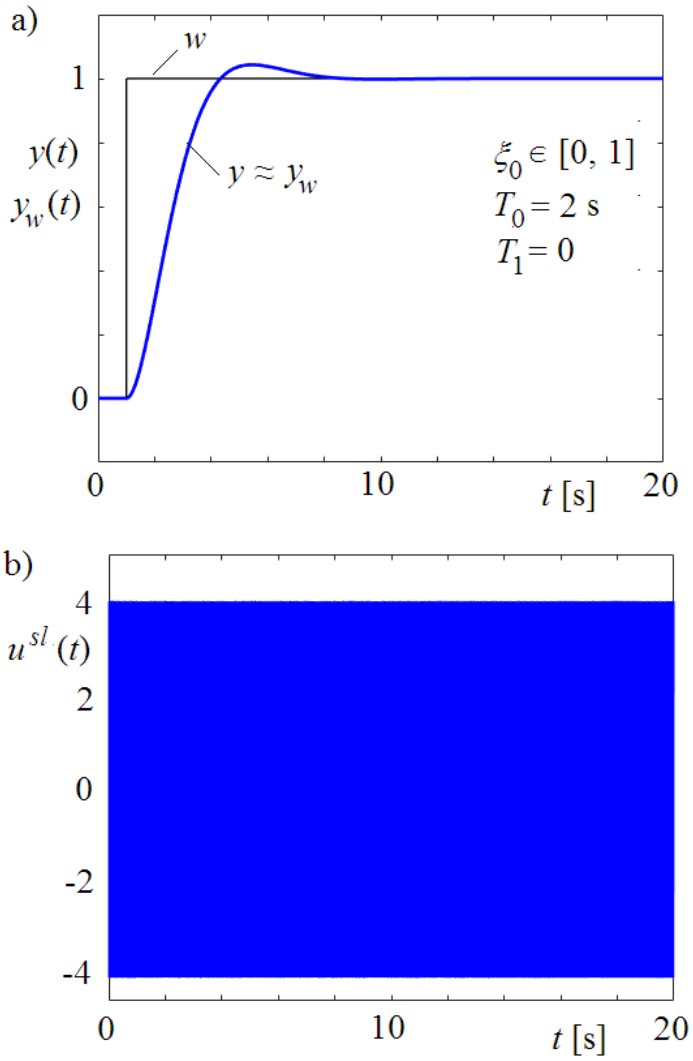
$$G_{uy}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_1}{(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1)(T_1s+1)} \tag{2.192a}$$

a jeho stavové vyjádření

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2,\\
\dot{x}_2&=x_3,\\
\dot{x}_3&=-\frac{1}{T_0^2T_1}x_1-\frac{2\xi_0T_0+T_1}{T_0^2T_1}x_2-\frac{2\xi_0T_1+T_0}{T_0T_1}x_3+\frac{k_1}{T_0^2T_1}u,\\
y&=x_1.
\end{aligned}\right\} \tag{2.192b}$$



Obr. 2.44 Stabilizační řízení s vysokým zesílením – průběhy: a) výstupních veličin y, b) mezních řízení $u^{\times}$ – příklad 2.14

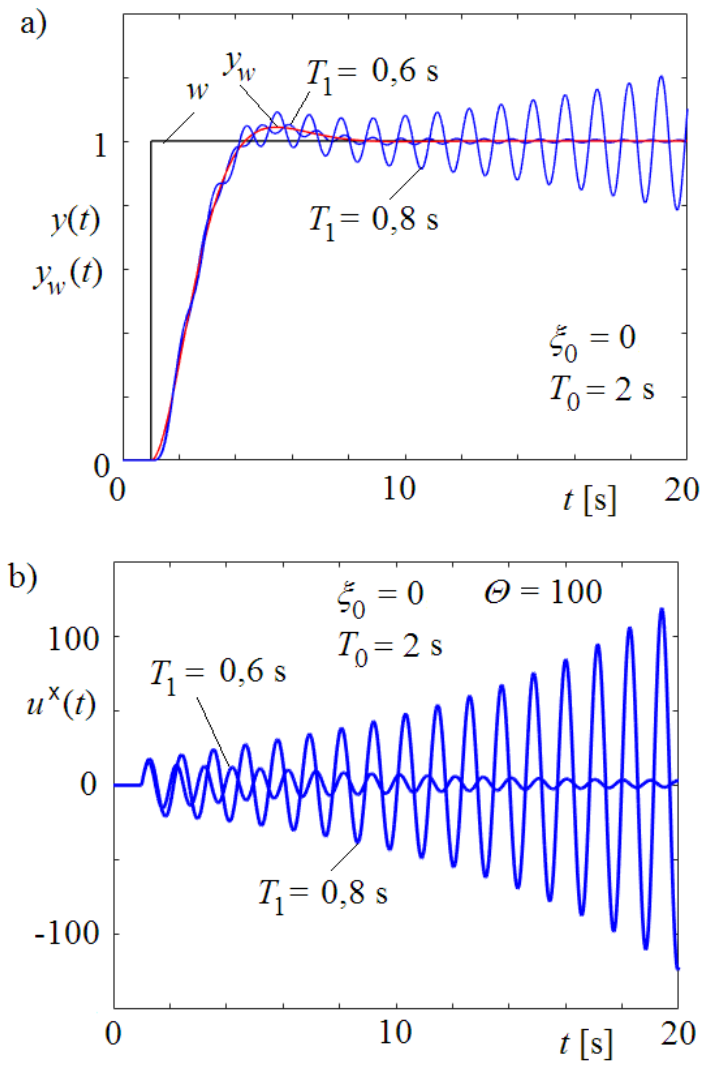


Obr. 2.45 Stabilizační řízení v klouzavém režimu – průběhy: a) výstupních veličin y, b) klouzavého řízení u^{sl} – příklad 2.14

Na obr. 2.46a jsou průběhy výstupní veličiny y pro $\xi_0 = 0$ při parazitní časové konstantě $T_1 = 0{,}6\,\text{s}$ a 0,8 s. V prvém případě průběh je stabilní, ale ve druhém případě je již nestabilní. Odpovídající průběhy řízení s vysokým zesílením $u^{\times}$ jsou na obr. 2.46b.

Pro klouzavé řízení s funkcí sign a $u^m = 4$ nestabilní průběh vystupuje již pro $T_1 = 0{,}5\,\text{s}$.

Pro lineární řízený systém je možné mez stability určit analyticky jak pro řízení s vysokým zesílením, tak pro klouzavé řízení s funkcí sign bez omezení (tj. pro dostatečně vysokou hodnotu u^m).



Obr. 2.46 Stabilizační řízení s vysokým zesílením – průběhy: a) výstupních veličin y, b) řízení $u^{\times}$ – příklad 2.14

Řízený systém (2.192) je lineární. Rovněž řízení (2.190) je lineární (počáteční řízení není uvažováno, protože na stabilitu nemá vliv), a proto charakteristická rovnice uzavřeného systému řízení je

$$s[T_0^2 T_1 s^3 + (2\xi_0 T_0 T_1 + T_0^2)s^2 + (2\xi_0 T_0 + T_1)s + 1] + k_1 K_P (T_D s^2 + s + \frac{1}{T_I}) = 0\,.$$

Označme

$$\beta = \frac{1}{k_1 K_P}$$

a po úpravě dostaneme charakteristický mnohočlen

$$N(s) = \beta T_0^2 T_1 s^4 + \beta(2\xi_0 T_0 T_1 + T_0^2)s^3 + \\ + [\beta(2\xi_0 T_0 + T_1) + T_D]s^2 + (1+\beta)s + \frac{1}{T_I}. \tag{2.193}$$

Pro ověření stability použijeme Hurwitzovo kritérium. Nemůžeme přímo položit $\beta \to 0$ ($K_P \to \infty$), protože by došlo k redukci stupně charakteristického mnohočlenu a tím k zanedbání dvou jeho kořenů. Pak dostaneme nutnou a postačující podmínku asymptotické stability [nutno uvažovat vztahy (2.190b)]

$$\frac{2\xi_0 T_1 + T_0}{T_0 T_1} > \frac{2\xi_w}{T_w}. \tag{2.194}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že průběhy na obr. 2.46 této podmínce vyhovují.

Někdy může být výhodné použití robustního řízení v kombinaci s odpovídajícím nerobustním řízením. Např. na začátku procesu řízení vlastnosti řízeného nelineárního systému jsou známé, ale později může dojít k jejich změně způsobené měnícím se zatížením, opotřebením atd. Pak může být vhodné použití lineární konvexní kombinace

$$\boldsymbol{u}^c = \alpha \boldsymbol{u}^n + (1-\alpha)\boldsymbol{u}^r, \tag{2.195}$$

kde $\boldsymbol{u}^n$ je nerobustní řízení (viz podkapitola 2.1), $\boldsymbol{u}^r$ – některé robustní řízení (viz oddíly 2.2.1 – 2.2.3) a α může být časovou funkcí

$$\alpha = \alpha(t) \in [0,1], \tag{2.196}$$

přičemž na začátku $\alpha(0) = 1$ a pro $t > 0$ monotónně klesá.

V tomto případě bude rovněž zaručen beznárazový start robustního řízení.

Často se můžeme setkat s případem, kdy jsou k dispozici „nominální“ vlastnosti řízeného systému, pak je možné použít kombinované řízení ve tvaru

$$\boldsymbol{u}^c = \boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{u}^r. \tag{2.197}$$

Ve všech těchto případech dochází k podstatnému snížení hodnot amplitud u_j^m.

Příklad 2.15

Je třeba navrhnout kombinované řízení nelineárního servomotoru s převodovkou

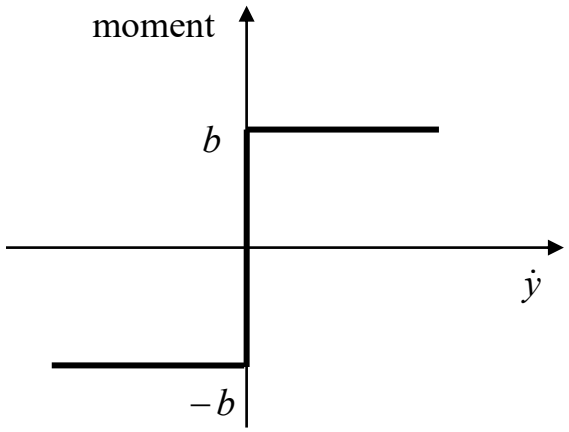
$$J\ddot{y} + b\,\mathrm{sign}(\dot{y}) = k_1 u, \tag{2.198}$$

kde y je úhlová výchylka výstupní hřídele [rad], J – moment setrvačnosti pohybujících se částí redukovaný na výstupní hřídel [kg.m^2], b – moment tření

[kg.m^2.rad.s^{-2}], u – řídicí napětí [V], k_1 – koeficient přenosu [kg.m^2.V^{-1}.rad.s^{-2}]. Nelinearita

$$b\,\mathrm{sign}(\dot{y})$$

je způsobena suchým (Coulombovým) třením (obr. 2.47).



Obr. 2.47 Nelinearita tření u servomotoru s převodovkou – příklad 2.15

Úkolem servomechanismu je sledovat sinusoidální průběh

$$w = x_1^w = a\sin(\omega_1 t) \tag{2.199}$$

v souladu s požadovaným modelem uzavřeného systému řízení, tj. celého servomechanismu

$$T_0^2\ddot{e}_1 + 2\xi_0 T_0 e_1 + e_1 = 0, \qquad e_1 = w - y = x_1^w - x_1, \tag{2.200}$$

kde a je amplituda [rad], ω_1 – úhlový kmitočet [rad.s^{-1}], T_0 – časová konstanta [s], ξ_0 – koeficient tlumení, e_1 – odchylka [rad].

Řešení:

Matematický model servomotoru s převodovkou (2.198) vyjádříme stavově

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g_2 u, \\ y &= x_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.201a}$$

kde

$$f_2(x_2) = -\frac{b}{J}\mathrm{sign}(x_2), \qquad g_2 = \frac{k_1}{J}. \tag{2.201b}$$

Podobně i požadovaný model (2.200) vyjádříme stavově

$$\dot{e}_1 = e_2,$$
$$\dot{e}_2 = -\frac{1}{T_0^2} e_1 - \frac{2\xi_0}{T_0} e_2. \tag{2.202}$$

Základní agregační matice je

$$\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{d}_a^T = [0,1].$$

Agregovaný požadovaný model celého servomechanismu má tedy tvar ($m^w = 0$)

$$m^w = \dot{e}_2 + \frac{2\xi_0}{T_0} e_2 + \frac{1}{T_0^2} e_1 \;\Rightarrow$$
$$m^w = \ddot{e}_1 + \frac{2\xi_0}{T_0} \dot{e}_1 + \frac{1}{T_0^2} e_1. \tag{2.203}$$

Robustní řízení s vysokým zesílením v souladu se vztahem (2.130) bude [viz (2.133)]

$$u^{\times}(t) = \Theta \int_0^t m^w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u(0) = \Theta \int_0^t \left(\ddot{e}_1 + \frac{2\xi_0}{T_0} \dot{e}_1 + \frac{1}{T_0^2} e_1 \right) \mathrm{d}\tau + u(0) \;\Rightarrow$$
$$u^{\times}(t) = K_P \left(e_1 + \frac{1}{T_I} \int_0^t e_1\,\mathrm{d}\tau + T_D \dot{e}_1 \right) + u^{\times}(0), \tag{2.204a}$$

kde

$$K_P = \frac{2\Theta\xi_0}{T_0},\; T_I = 2\xi_0 T_0,\; T_D = \frac{T_0}{2\xi_0},$$
$$u^{\times}(0) = u(0) - \Theta \dot{e}_1(0) - \frac{2\Theta\xi_0}{T_0} e_1(0). \tag{2.204b}$$

Klouzavé řízení dostaneme z (2.204) formálně zastoupením zesílení K_P znaménkovou funkcí sign, tj.

$$u^{sl} = u^m \operatorname{sign} \left(e_1 + \frac{1}{T_I} \int_0^t e_1\,\mathrm{d}\tau + T_D \dot{e}_1 \right), \tag{2.205}$$

kde hodnota u^m se nejjednodušeji určí experimentálně, ale může být také odhadnuta analyticky pomocí Ljapunovovy funkce. Počáteční řízení není uvažováno.

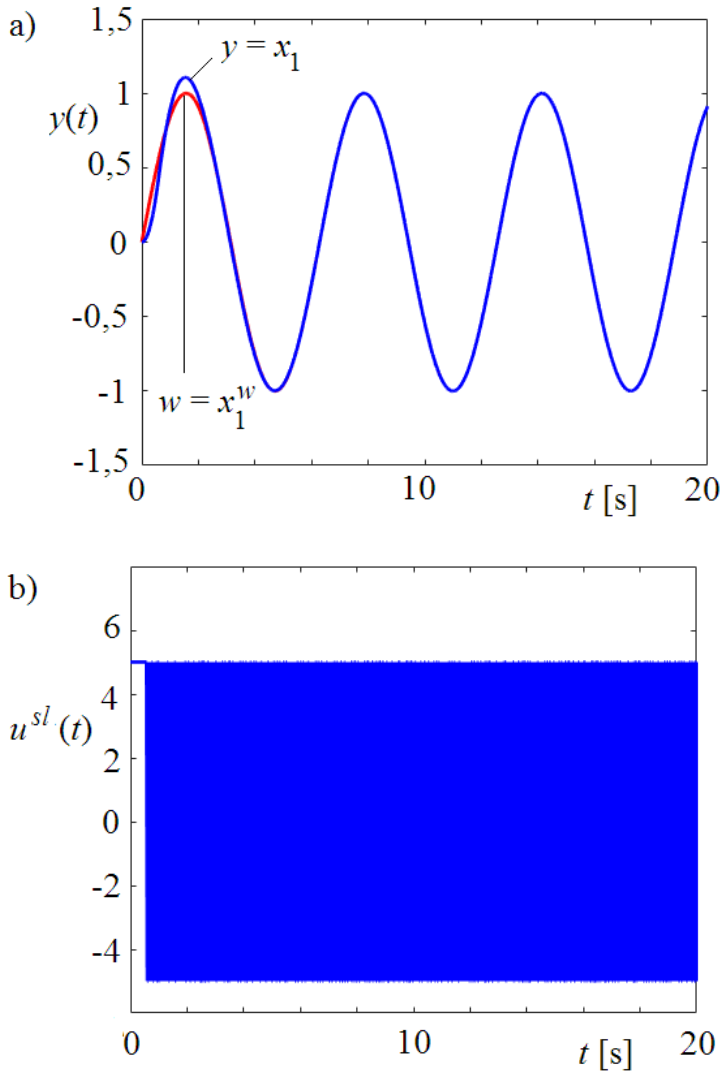
V tomto případě je třeba brát v úvahu, že obdržená hodnota u^m zajišťuje stabilitu, ale nemusí zaručit požadovanou kvalitu procesu řízení.

Pro nerobustní řízení využijeme vztah (2.12)

$$u^n = \frac{1}{g_2}\left(\dot{x}_2^w + \frac{2\xi_0}{T_0} e_2 + \frac{1}{T_0^2} e_1 \right) - \frac{1}{g_2} f_2(x_2) .$$

Po dosazení (2.201b) a úpravě dostaneme

$$u^n = \frac{J}{k_1}\left(\ddot{x}_1^w + \frac{2\xi_0}{T_0} \dot{e}_1 + \frac{1}{T_0^2} e_1 \right) + \frac{b}{k_1} \operatorname{sign}(\dot{x}_1) . \tag{2.206}$$



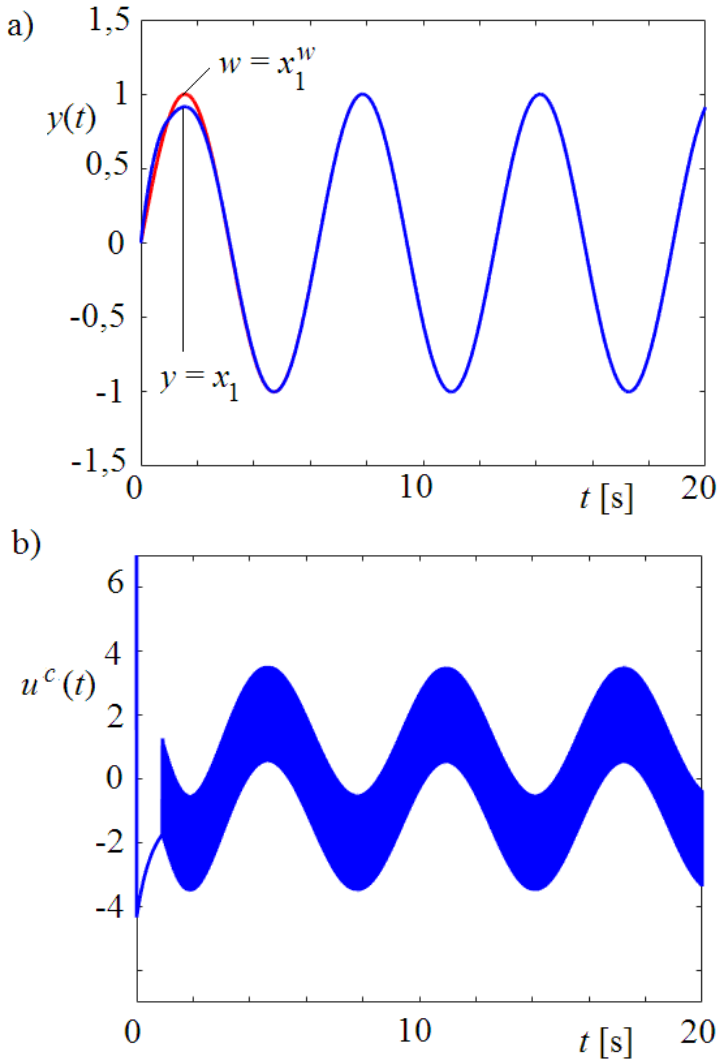
Obr. 2.48 Sledování sinusoidálního průběhu pomocí klouzavého řízení – průběh: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^{sl} – příklad 2.15

Pro parametry požadovaného modelu servomechanismu $T_0 = 1\,\text{s}$, $\xi_0 = 1$ a nominální parametry nelineárního servomotoru s převodovkou $J = 2(3)$ kg.m^2, $b = 0{,}1(0{,}15)$ kg.m^{2}rad.s^{-2}, $k_1 = 1(1{,}5)$ kg.m^2.V^{-1}.rad.s^{-2} byly provedeny simulace. V závorkách jsou odhadnuté reálné hodnoty.

Na obr. 2.48a je ukázáno sledování sinusoidálního průběhu (2.199) pro $a=1$, $\omega_1=1\,\text{rad.s}^{-1}$ a na obr. 2.48b odpovídající klouzavé řízení (2.205) pro experimentálně určenou hodnotu $u^m=5\,\text{V}$.

Výsledky simulace pro kombinované řízení (2.197) využívající jak klouzavé řízení (2.205), tak nerobustní řízení (2.206) jsou na obr. 2.49. V tomto případě hodnota u^m mohla být snížena na 1,5 V.

Při vyšších hodnotách u^m kvalita sledování se zvýší.



Obr. 2.49 Sledování sinusoidálního průběhu pomocí kombinovaného řízení – průběh: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^c – příklad 2.15

2.2.4 Řízení v klouzavém režimu 2

V předchozím oddíle 2.2.3 jsme ke klouzavému řízení došli z řízení s vysokým zesílením (přičemž toto zesílení bylo zvýšeno do nekonečna) a uvažováním omezení na řízení.

Požadovaný dílčí model uzavřeného systému řízení byl uvažován stejného řádu n_j (stejného relativního stupně, tj. $r_j = n_j$). Tento přístup ke klouzavému řízení je původní.

Klasický přístup k návrhu klouzavého řízení předpokládá, že řád dílčího požadovaného modelu je o 1 menší než je řád odpovídajícího dílčího řízeného systému, tj. $n_j - 1$ (resp. $r_j - 1$). Dochází zde k redukci řádu.

Nejdříve se budeme zabývat řiditelnými jednorozměrovými řízenými systémy [viz (1.29)]

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)u, \end{aligned}\right\} \tag{2.207a}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u, \tag{2.207b}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \\ \boldsymbol{f} &= [x_2, x_3, \ldots, f_n]^T, \\ \boldsymbol{g} &= [0,0, \ldots, g_n]^T. \end{aligned}\right\} \tag{2.207c}$$

Při návrhu sledovacího klouzavého řízení se nejdříve navrhne klouzavá (přepínací) plocha

$$\sigma(\boldsymbol{e}) = 0, \qquad \boldsymbol{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]^T, \tag{2.208a}$$

kde

$$e_i = x_i^w - x_i, \;\; \dot{e}_{i-1} = e_i. \tag{2.208b}$$

Klouzavá plocha (2.208) se nejčastěji volí lineární ve tvaru

$$\begin{aligned} &\sigma(\boldsymbol{e}) = 0, \\ &\sigma(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{e} = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_{n-1} e_{n-1} + e_n = \\ &\qquad = k_1 e_1 + k_2 \dot{e}_1 + \ldots + k_{n-1} e_1^{(n-2)} + e_1^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{2.209a}$$

kde

$$\boldsymbol{k} = [k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 1]^T. \tag{2.209b}$$

Z důvodu zjednodušení se volí $k_n = 1$.

Klouzavá plocha (2.209) vyjadřuje v podstatě vlastnosti požadovaného modelu redukovaného řádu $n-1$ (relativního stupně $r-1$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= -k_1 e_1 - k_2 e_2 - \ldots - k_{n-1} e_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.210a}$$

tj.

$$e_1^{(n-1)} + k_{n-1} e_1^{(n-2)} + \ldots + k_2 \dot{e}_1 + k_1 e_1 = 0\,. \tag{2.210b}$$

Je samozřejmostí, že požadovaný model (2.210) musí být asymptoticky stabilní a že klouzavá plocha (2.210b) je dána posledním řádkem v (2.210a).

Nyní je třeba navrhnout řízení, které zajistí, aby libovolný stav $\boldsymbol{x}$ se vždy přibližoval ke klouzavé ploše σ.

Je zřejmé, že můžeme použít stejné úvahy jako v předchozím oddíle 2.2.3 s tím, že klouzavou plochu *m* nyní zastoupíme klouzavou plochou σ.

Pak v souladu s obr. 2.29 a vztahy (2.161) můžeme psát

$$\sigma > 0 \;\Rightarrow\; \dot{\sigma} < 0,$$
$$\sigma < 0 \;\Rightarrow\; \dot{\sigma} > 0,$$

tj.

$$\sigma \cdot \dot{\sigma} < 0\,. \tag{2.211}$$

Tuto podmínku můžeme zapsat analogicky jako (2.162), tj.

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma^2 < 0\,. \tag{2.212a}$$

resp.

$$\dot{V} = \sigma \cdot \dot{\sigma} < -\eta|\sigma|\,, \tag{2.212b}$$

kde η je kladné číslo, V – Ljapunovova funkce.

Řízení, které zajistí, aby stav $\boldsymbol{x}$ se vždy přibližoval ke klouzavé ploše $\sigma = 0$, předpokládáme ve tvaru

$$u^{sl} = \frac{u^m}{g_n(\boldsymbol{x})}\operatorname{sign}(\sigma)\,. \tag{2.213}$$

Hodnotu u^m je možné určit na základě Ljapunovovy funkce (2.212).

Uvažujme vztah (2.211) pro lineární klouzavou plochu (2.209) a řízený nelineární systém

$$\sigma \cdot \dot{\sigma} = \sigma \boldsymbol{k}^T \dot{\boldsymbol{e}} = \sigma \boldsymbol{k}^T [\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) u^{sl}] =$$
$$= \sigma \boldsymbol{k}^T [\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] - \sigma g_n(\boldsymbol{x}) u^{sl}] < 0.$$

Označme

$$\left| \boldsymbol{k}^T [\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] \right| = z \le u^m \tag{2.214}$$

a pak můžeme psát

$$\sigma[z - g_n(\boldsymbol{x}) u^{sl}] < 0 .$$

Nejméně příznivý případ je

$$|\sigma| z - \sigma g_n(\boldsymbol{x}) u^{sl} < 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{z}{g_n(\boldsymbol{x})} \frac{|\sigma|}{\sigma} < u^{sl} \;\Rightarrow$$

$$u^{sl} = \frac{u^m}{g_n(\boldsymbol{x})} \operatorname{sign}(\sigma) .$$

Dostali jsme stejný vztah jako (2.213).

Vidíme, že odhad hodnoty u^m můžeme dostat na základě Ljapunovovy funkce. Je to ale hodnota, která sice zajistí stabilitu řídicího procesu, ale nemusí zajistit jeho požadovanou kvalitu.

I když klouzavé řízení (2.213) může pracovat samostatně, nejčastěji se používá v kombinaci s tzv. ***ekvivalentním řízením*** u^{eq}, tj.

$$u^c = u^{sl} + u^{eq}, \tag{2.215}$$

kde klouzavé řízení u^{sl} zajišťuje pohyb stavu $\boldsymbol{x}$ ke klouzavé ploše, případně jeho návrat na ni, když ji opustí. Ekvivalentní řízení u^{eq} zajišťuje setrvání stavu $\boldsymbol{x}$ na klouzavé ploše a pohyb (klouzání) po ní.

Ekvivalentní řízení u^{eq} můžeme určit ze vztahu

$$\dot{\sigma}(\boldsymbol{e}) = 0 . \tag{2.216}$$

Pro lineární klouzavou plochu (2.209) dostaneme

$$\dot{\sigma}(\boldsymbol{e}) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{k}^T[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u^{eq}] =$$

$$= \boldsymbol{k}^T[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] - g_n(\boldsymbol{x})u^{eq} \Rightarrow$$

$$k_1\dot{e}_1 + k_2\dot{e}_2 + \cdots + k_{n-1}\dot{e}_{n-1} + \dot{x}_n^w - f_n(\boldsymbol{x}) - g_n(\boldsymbol{x})u^{eq} = 0 \Rightarrow$$

$$u^{eq} = \frac{1}{g_n(\boldsymbol{x})}[k_1\dot{e}_1 + k_2\dot{e}_2 + \cdots + k_{n-1}\dot{e}_{n-1} + \dot{x}_n^w - f_n(\boldsymbol{x})]. \tag{2.217}$$

V souladu se vztahy (2.213), (2.215) a (2.217) výsledné kombinované klouzavé řízení je

$$u^c = \frac{1}{g_n(\boldsymbol{x})}\left\{u^m \operatorname{sign}(\sigma) + [k_1\dot{e}_1 + k_2\dot{e}_2 + \cdots + k_{n-1}\dot{e}_{n-1} + \dot{x}_n^w - f_n(\boldsymbol{x})]\right\}. \tag{2.218}$$

Příklad 2.16

Je třeba navrhnout klasické klouzavé řízení servomotoru s převodovkou s matematickým modelem (2.201) z příkladu 2.15.

Řešení:

Protože řízený nelineární systém (2.201) je 2. řádu ($n = r = 2$), řád požadovaného redukovaného modelu, tj. pro $n - 1 = 1$ klouzavá plocha (křivka) bude

$$\sigma = 0, \tag{2.219a}$$

kde

$$\sigma = e_2 + \frac{1}{T_1}e_1 = \dot{e}_1 + \frac{1}{T_1}e_1, \tag{2.219b}$$

T_1 je časová konstanta.

Klouzavé řízení u^{sl} bez ekvivalentního řízení u^{eq} v souladu se vztahy (2.213), (2.201) a (2.219) je

$$u^{sl} = \frac{u^m}{g_2}\operatorname{sign}(\sigma) = \frac{J}{k_1}u^m \operatorname{sign}\left(\dot{e}_1 + \frac{1}{T_1}e_1\right). \tag{2.220}$$

Odhadneme hodnotu u^m na základě vztahu (2.214)

$$\left|\boldsymbol{k}^T[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]\right| = z \le u^m$$

tj.

$$z = \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1^w - x_2 \\ \dot{x}_2^w - f_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1^w - x_2 \\ \dot{x}_2^w + \frac{b}{J}\operatorname{sign}(x_2) \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{T_1}(\dot{x}_1^w - \dot{x}_1) + \ddot{x}_1^w + \frac{b}{J}\operatorname{sign}(\dot{x}_1) \right|. \tag{2.221}$$

Protože platí (2.199)

$$w = x_1^w = a\sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x}_1^w = a\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_1^w = -a\omega^2\sin(\omega t)\ .$$

Pro hodnoty: $a = 1$, $\omega_1 = 1\,\text{rad.s}^{-1}$, $T_1 = 1\,\text{s}$, $b = 0{,}1\,\text{kg.m}^2\text{.rad.s}^{-2}$ a $J = 2\,\text{kg.m}^2$ můžeme přibližně odhadnout

$$\left|\dot{x}_1^w - \dot{x}_1\right|_{\max} = 0{,}4;\ \left|\ddot{x}_1^w\right|_{\max} = 1;\ \left|\frac{b}{J}\operatorname{sign}(\dot{x}_1)\right|_{\max} = 0{,}05,$$

tj.

$$z = 0{,}4 + 1 + 0{,}05 \Rightarrow u^m \approx 1{,}5\,\text{V}.$$

Tato hodnota zajistí sice stabilitu, ale kvalita sledování zadaného sinusoidálního průběhu (2.199) je velmi nízká, viz obr. 2.50. Klouzavý režim nenastal.

Značně kvalitnější sledování se získá např. pro $u^m = 5\,\text{V}$, jak je ukázáno na obr. 2.51.

Ekvivalentní řízení u^{eq} pro lineární klouzavou křivku (2.219) získáme na základě vztahu (2.217), tj.

$$u^{eq} = \frac{1}{g_2}[k_1\dot{e}_1 + \dot{x}_2^w - f_2(\boldsymbol{x})] = \frac{J}{k_1}\left[\frac{1}{T_1}(\dot{x}_1^w - x_2) + \dot{x}_2^w + \frac{b}{J}\operatorname{sign}(x_2)\right] =$$

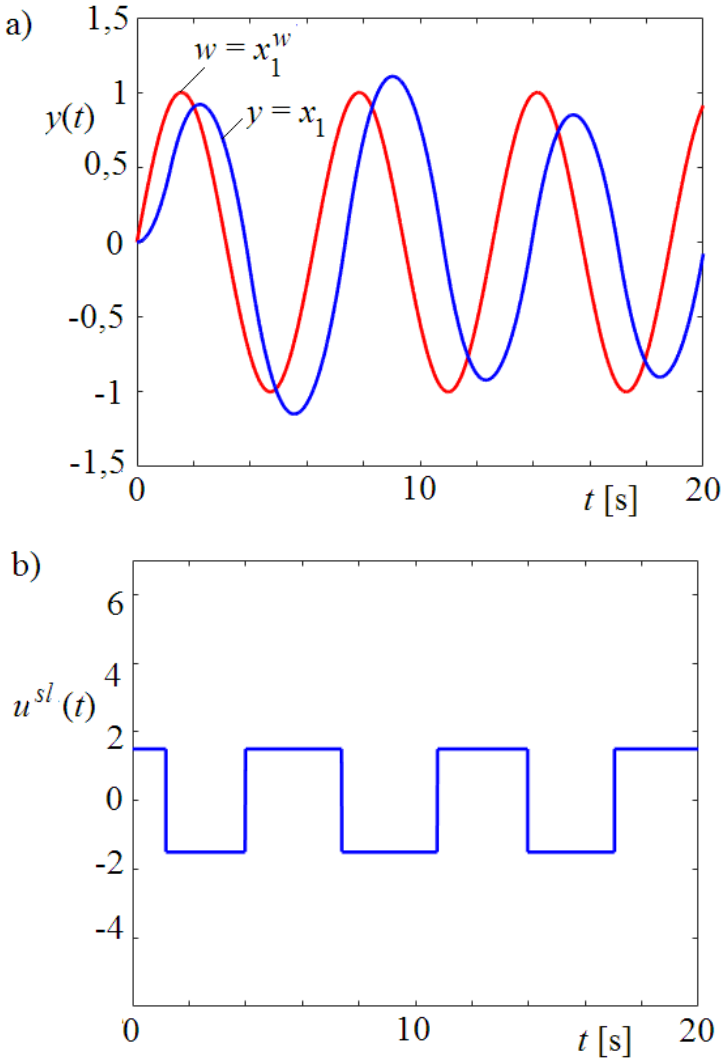
$$= \frac{J}{k_1}\left[\frac{1}{T_1}\dot{e}_1 + \ddot{x}_1^w + \frac{b}{J}\operatorname{sign}(\dot{x}_1)\right]. \tag{2.222}$$

Klouzavé řízení v kombinaci s ekvivalentním řízením v souladu se vztahy (2.218), (2.220) a (2.222) bude

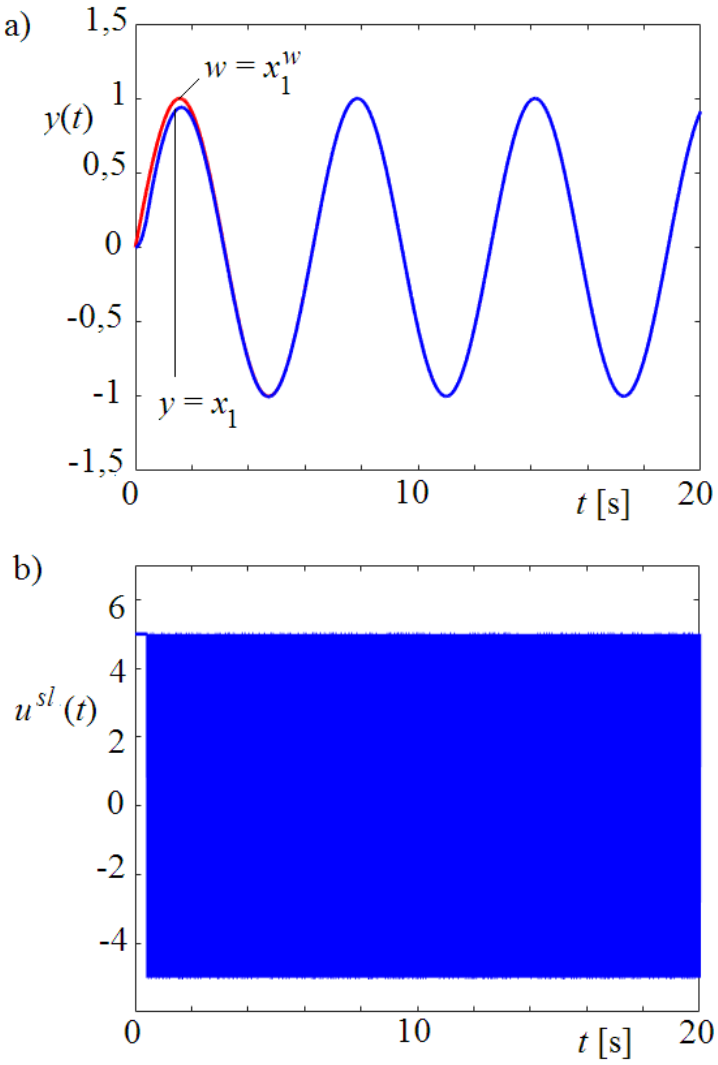
$$u^c = \frac{J}{k_1}\left[u^m \operatorname{sign}\left(\dot{e}_1 + \frac{1}{T_1}e_1\right) + \frac{1}{T_1}\dot{e}_1 + \ddot{x}_1^w + \frac{b}{J}\operatorname{sign}(\dot{x}_1)\right]. \tag{2.223}$$

Výsledky simulace pro kombinované klasické klouzavé řízení jsou na obr. 2.52. V tomto případě byla použita hodnota $u^m = 1{,}5\,\text{V}$.

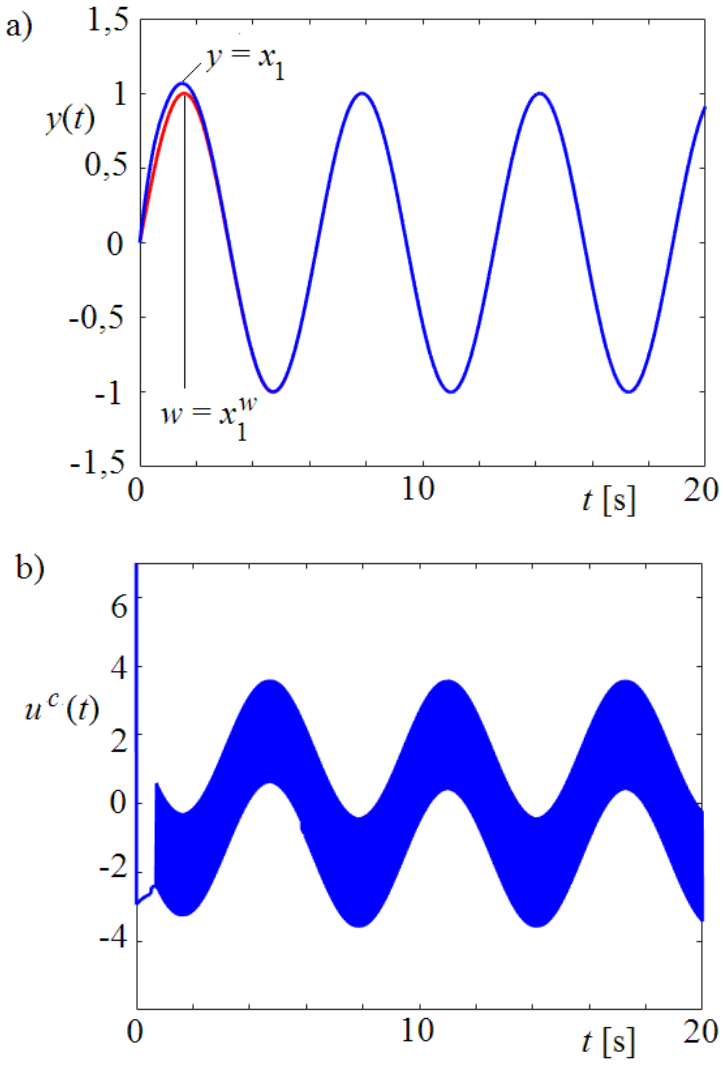
I když klasické kombinované klouzavé řízení dává podstatně vyšší kvalitu sledování, je také podstatně složitější a vyžaduje alespoň přibližnou znalost matematického modelu řízeného systému.



Obr. 2.50 Sledování sinusoidálního průběhu pomocí klasického klouzavého řízení – průběhy: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^{sl} – příklad 2.16



Obr. 2.51 Sledování sinusoidálního průběhu pomocí klasického klouzavého řízení – průběhy: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^{sl} – příklad 2.16



Obr. 2.52 Sledování sinusoidálního průběhu pomocí klasického kombinovaného řízení – průběhy: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^c – příklad 2.16

V současné době existuje velmi mnoho modifikací klouzavého řízení a je jim věnováno mnoho publikací. Z tohoto důvodu se budeme zabývat pouze základními modifikacemi.

Řád klouzavého řízení k je dán počtem vztahů

$$\underbrace{\sigma = 0,\ \dot{\sigma} = 0, \ldots, \sigma^{(n-1)}}_{k} = 0, \tag{2.224}$$

které jsou využívány v řídicím algoritmu.

Vyšší řád klouzavého řízení potlačuje jeho přílišnou aktivitu (chattering). Nejčastěji se používají klouzavá řízení prvního řádu (standardní) a druhého řádu.

Mezi klouzavá řízení prvního řádu patří integrační klouzavé řízení, u kterého klouzavá plocha

$$\sigma = 0,\ \sigma = \int_0^t m^w(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \tag{2.225}$$

je dána integrálem z požadovaného modelu uzavřeného systému řízení, který je stejného řádu jako řízený systém.

Vidíme, že ***integrační klouzavé řízení*** (2.225) ***je klouzavé řízení z předchozího oddílu*** 2.2.3.

Mezi klouzavá řízení druhého řádu patří „twisting“ algoritmus

$$u^{sl} = u^m \operatorname{sign}(\sigma) + b_1 \operatorname{sign}(\dot{\sigma}),\ u^m \geq b_1 > 0 \tag{2.226}$$

a velmi populární „super-twisting“ algoritmus

$$u^{sl} = a_1 \sqrt{|\sigma|}\operatorname{sign}(\sigma) + a_2 \int_0^t \operatorname{sign}(\sigma)\,\mathrm{d}\,\tau,\ a_1 > a_2 > 0. \tag{2.227}$$

Příklad 2.17

Pro servomotor s převodovkou z příkladu 2.15 (viz též příklad 2.16) je třeba navrhnout klouzavé řízení druhého řádu („twisting“ a „super twisting“ algoritmy) pro sledování zadaného sinusoidálního průběhu (2.199) bez uvažování ekvivalentního řízení.

Řešení:

V příkladě 2.16 byla navržena klouzavá křivka (2.219)

$$\sigma = \dot{e}_1 + \frac{1}{T_1} e_1,$$

a proto „twisting“ algoritmus klouzavého řízení je dán vztahem (2.226)

$$u^{sl} = u^m \operatorname{sign}(\sigma) + b_1 \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) \Rightarrow$$

$$u^{sl} = u^m \operatorname{sign}\left(\dot{e}_1 + \frac{1}{T_1} e_1\right) + b_1 \operatorname{sign}\left(\ddot{e}_1 + \frac{1}{T_1}\dot{e}_1\right). \tag{2.228}$$

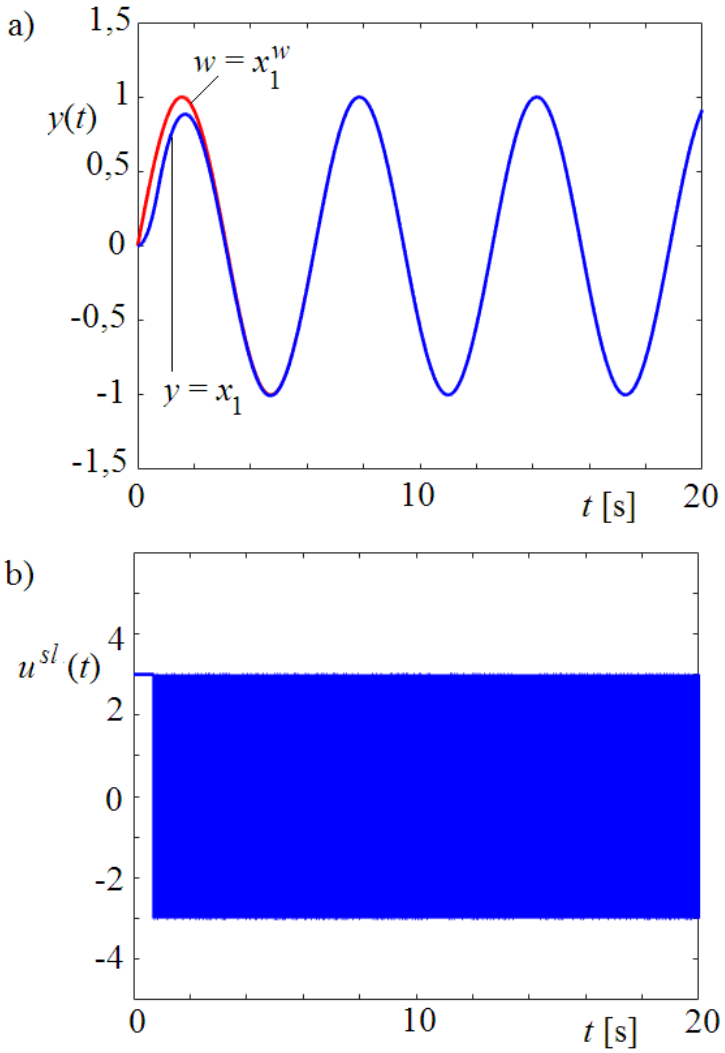
Podobně „super-twisting“ algoritmus klouzavého řízení je dán vztahem (2.227)

$$u^{sl} = a_1\sqrt{|\sigma|}\,\mathrm{sign}(\sigma) + a_2\int_0^t \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{d}\tau \;\Rightarrow$$

$$u^{sl} = a_1\sqrt{\left|\dot{e}_1 + \frac{1}{T_1}e_1\right|}\,\mathrm{sign}\left(\dot{e}_1 + \frac{1}{T_1}e_1\right) + a_2\int_0^t \mathrm{sign}\left(\dot{e}_1 + \frac{1}{T_1}e_1\right)\mathrm{d}\tau\,. \qquad (2.229)$$

Při simulaci byly použity stejné hodnoty parametrů servomotoru a sledovaného průběhu jako v příkladě 2.15 a 2.16: $a = 1$, $\omega_1 = 1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, $T_1 = 1\,\mathrm{s}$, $b = 0{,}1\,\mathrm{kg.m^2.rad.s^{-2}}$ a $J = 2\,\mathrm{kg.m^2}$.

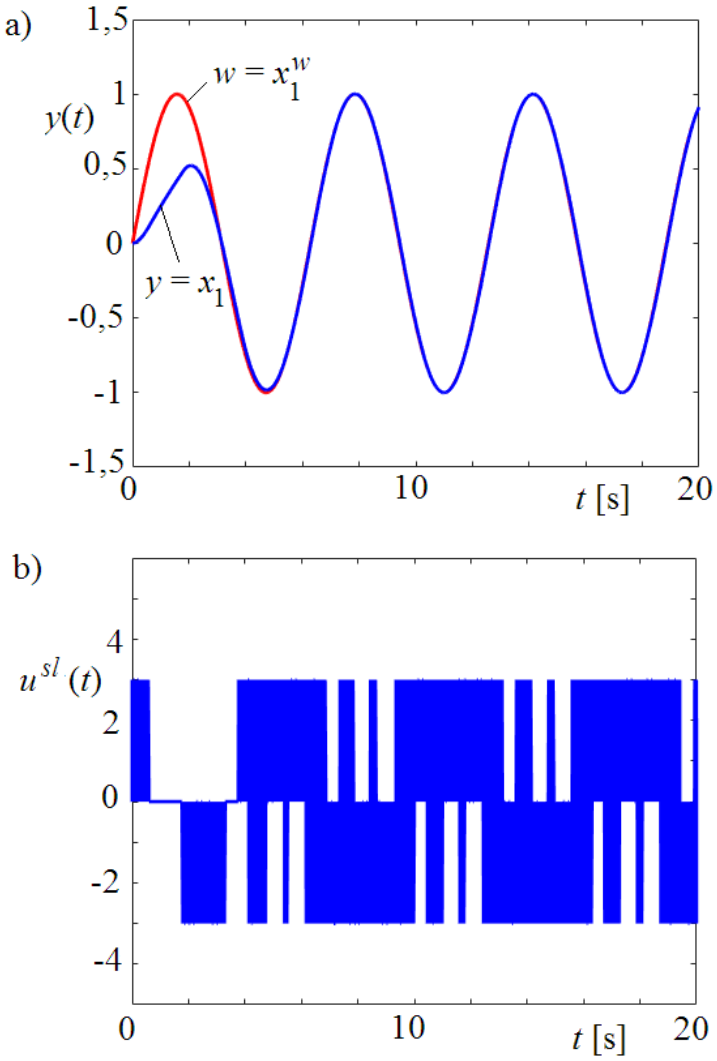
Při použití standardního klouzavého řízení (prvního řádu) pro $u^m = 1{,}5\,\mathrm{V}$ ($b_1 = 0$) je kvalita sledování sinusoidálního průběhu velmi nízká (obr. 2.50). Pro $u^m = 3\,\mathrm{V}$ ($b_1 = 0$) se kvalita sledování podstatně zvýší, jak je to ukázáno na obr. 2.53.



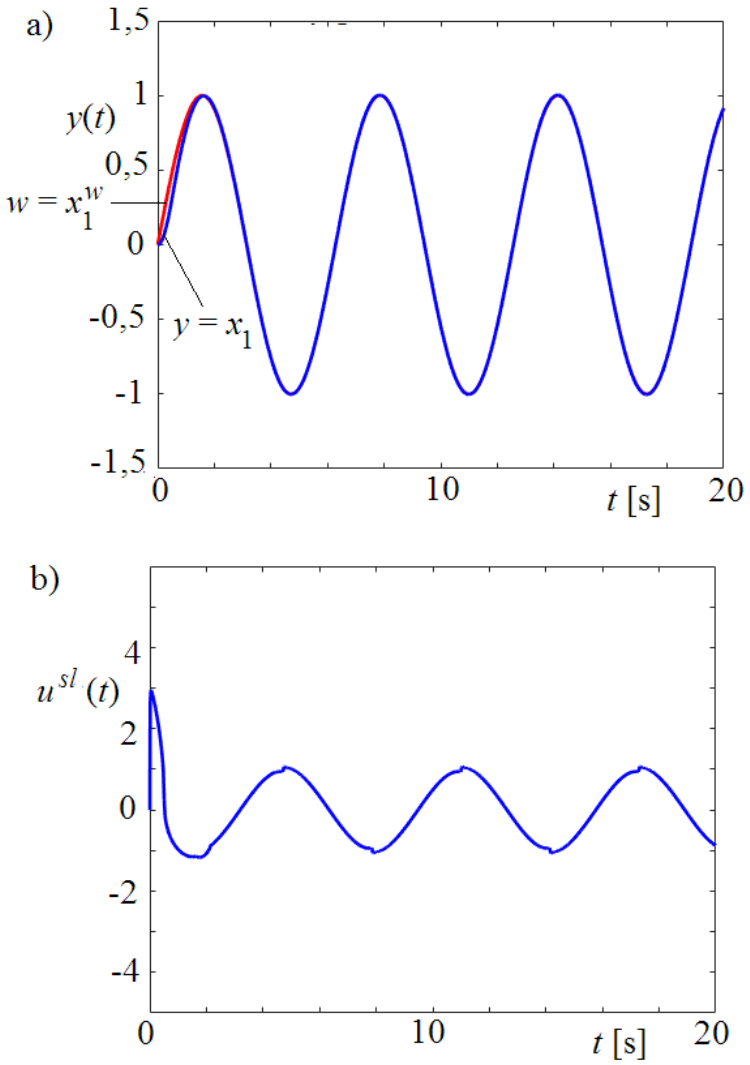
Obr. 2.53 Sledování sinusoidálního průběhu standardním klouzavým řízením – průběhy: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^{sl} – příklad 2.17

Použijeme-li „twisting“ algoritmus řízení (2.228) pro $u^m = 1{,}5\,\mathrm{V}$ a $b_1 = 1{,}5\,\mathrm{V}$, pak kvalita sledování se zvýší (obr. 2.54a). Současně dojde ke snížení aktivity klouzavého řízení, viz obr. 2.53b a 2.54b.

Významného snížení aktivity klouzavého řízení lze dosáhnout použitím „super-twisting“ algoritmu řízení (2.229) pro hodnoty $a_1 = 9\,\mathrm{V}$ a $a_2 = 1{,}5\,\mathrm{V}$, viz obr. 2.55.



Obr. 2.54 Sledování sinusoidálního průběhu „twisting“ algoritmem klouzavého řízení – průběhy: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^{sl} – příklad 2.17



Obr. 2.55 Sledování sinusoidálního průběhu „super-twisting“ algoritmem klouzavého řízení – průběhy: a) výstupní veličiny y, b) řízení u^{sl} – příklad 2.17

Uvažujme nyní mnohorozměrový nelineární systém s matematickým modelem ve standardním tvaru (1.1) – (1.4)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.230}$$

klasické klouzavé řízení v tomto případě v analogii s (2.213) má tvar

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \tag{2.231a}$$

kde

$$\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}) = [\mathrm{sign}(\sigma_1), \mathrm{sign}(\sigma_2), \ldots, \mathrm{sign}(\sigma_m)]^T, \tag{2.231b}$$

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}[u_1^m, u_2^m, \ldots, u_m^m], \tag{2.231c}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m]^T. \tag{2.231d}$$

Pro jednotlivé dílčí podsystémy se navrhnou dílčí klouzavé plochy

$$\sigma_j = 0 \tag{2.232}$$

a pak výrazy

$$u_j^m \operatorname{sign}(\sigma_j) \tag{2.233}$$

ve vztahu (2.231) mohou být zastoupeny i jinými zvolenými modifikacemi klouzavého řízení, např. (2.225) – (2.227).

Jednotlivé dílčí klouzavé plochy (2.232) se nejčastěji volí lineární [viz (2.209)]

$$\begin{aligned}\sigma_j(\boldsymbol{e}) &= k_{jq_{j-1}+1}e_{q_{j-1}+1} + k_{jq_{j-1}+2}e_{q_{j-1}+2} + \ldots + k_{jq_j-1}e_{q_j-1} + e_{q_j} = \\ &= k_{jq_{j-1}+1}e_{q_{j-1}+1} + k_{jq_{j-1}+2}\dot{e}_{q_{j-1}+1} + \ldots + k_{jq_j-1}e_{q_{j-1}+1}^{(n_j-2)} + e_{q_{j-1}+1}^{(n_j-1)}.\end{aligned} \tag{2.234}$$

Protože každá dílčí klouzavá plocha (2.232) představuje dílčí lineární podsystém redukovaného řádu $n_j - 1$, proto odpovídající charakteristický mnohočlen

$$N_j(s) = k_{jq_{j-1}+1} + k_{jq_{j-1}+2}s + \ldots + k_{jq_j-1}s^{n_j-2} + s^{n_j-1} \tag{2.235}$$

musí mít asymptoticky stabilní kořeny, tj. se zápornými reálnými částmi.

Je zřejmé, že dílčí klouzavé plochy v tomto případě tvoří klouzavou plochu

$$\underset{(m,1)}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{e}) = \underset{(m,1)}{\mathbf{0}}, \qquad \underset{(m,1)}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{e}) = \underset{(m,n)}{\boldsymbol{K}}\,\underset{(n,1)}{\boldsymbol{e}}, \tag{2.236}$$

kde v každém řádku matice $\boldsymbol{K}$ je n_j kladných prvků a zbývající prvky jsou nulové, tj.

$$\begin{aligned} k_{ji} &> 0 \qquad \text{pro} \quad q_{j-1} < i \le q_j, \\ k_{ji} &= 0 \qquad \text{pro} \quad i \le q_{j-1} \ \text{ nebo } \ i > q_j. \end{aligned} \tag{2.237a}$$

Z důvodu zjednodušení se volí

$$k_{jq_j} = 1. \tag{2.237b}$$

Ekvivalentní řízení $\boldsymbol{u}^{eq}$ zajišťuje pohyb stavu $\boldsymbol{x}$ (odchylky $\boldsymbol{e}$) na klouzavé ploše, a proto může být určeno z rovnice

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{0}, \tag{2.238}$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e})}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e})}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}[\dot{\boldsymbol{x}}^{w} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^{eq}] \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e})}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}[\dot{\boldsymbol{x}}^{w} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^{eq}] = \boldsymbol{0}. \tag{2.239}$$

Pro lineární klouzavou plochu (2.236) se dostane

$$\boldsymbol{K}[\dot{\boldsymbol{x}}^{w} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] - \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^{eq} = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u}^{eq} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}[\dot{\boldsymbol{x}}^{w} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})], \tag{2.240}$$

protože platí

$$\underset{(m,n)}{\boldsymbol{K}}\,\underset{(n,m)}{\boldsymbol{G}}\,(\boldsymbol{x}) = \underset{(m,m)}{\boldsymbol{G}_a}\,(\boldsymbol{x}). \tag{2.241}$$

Poslední rovnost (2.241) vyplývá ze struktury matic $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{G}$ [porovnej strukturu matice $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{D}$, tj. vztahy (2.237) a (2.46)].

Příklad 2.18

Je třeba navrhnout klasické klouzavé řízení pro nelineární systém (2.145) z příkladu 2.10 (viz též příklad 2.13)

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1x_2x_3 - x_2 + u_1 + u_2,$$
$$\dot{x}_3 = -x_3 + (1 + x_2^2)u_2,$$
$$y_1 = x_1,$$
$$y_2 = x_3,$$

které zajistí sledování sinusoidálních průběhů (2.146)

$$w_1 = a_1 \sin(\omega_1 t),$$
$$w_2 = a_2 \sin(\omega_2 t).$$

Řešení:

Využijeme výsledky z příkladu 2.10. Řízený nelineární systém je standardní a řiditelný: $n_1 = r_1 = 2$, $n_2 = r_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 3$, $q_1 = 2$, $q_2 = n = 3$.

Za předpokladu, že řízení u_1 a u_2 jsou správně přiřazena k dílčím podsystémům a matice $\boldsymbol{G}_a$ je nesingulární, lze předpokládat, že klasické řízení je dáno vztahem

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{U}\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \tag{2.242a}$$

kde

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}[\,u_1^m, u_2^m\,], \tag{2.242b}$$

$$\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}) = [\mathrm{sign}(\,\sigma_1), \mathrm{sign}(\,\sigma_2)]^T. \tag{2.242c}$$

Stejný předpoklad byl učiněn i v příkladech 2.10 a 2.13.

Nyní navrhneme dílčí klouzavé plochy:

$$n_1 = r_1 = 2,\ \sigma_1 = 0,\quad \sigma_1 = \frac{1}{T_1}e_1 + e_2 = \frac{1}{T_1}e_1 + \dot{e}_1, \tag{2.243a}$$

$$n_2 = r_2 = 1,\ \sigma_2 = 0,\quad \sigma_2 = e_3, \tag{2.243b}$$

tj.

$$\sigma(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} k_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix},\ k_{11} = \frac{1}{T_1}. \tag{2.243c}$$

Klasické klouzavé řízení v souladu se vztahem (2.242) a (2.243) je

$$\left.\begin{aligned} u_1^{sl} &= u_1^m\,\mathrm{sign}(\,\sigma_1) = u_1^m\,\mathrm{sign}\left(\frac{1}{T_1}e_1 + \dot{e}_1\right), \\ u_2^{sl} &= u_2^m\,\mathrm{sign}(\,\sigma_2) = u_2^m\,\mathrm{sign}\,(e_3). \end{aligned}\right\} \tag{2.244}$$

Výsledky simulace pro $a_1 = a_2 = 1$, $\omega_1 = 0{,}1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, $\omega_2 = 0{,}2\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, $T_1 = 1\,\mathrm{s}$ a stejné hodnoty $u_1^m = u_2^m = 1{,}2$ jako v příkladě 2.13 jsou na obr. 2.56 (porovnej s obr. 2.42a). Vidíme, že sledování obou sinusoidálních průběhů je velmi kvalitní, i když jsme neznali o řízeném nelineárním systému nic, než dílčí řády n_1 a n_2.

Průběh řízení u_1^{sl} a u_2^{sl} je v podstatě stejný jak na obr. 2.42b.

Pokud matice $\boldsymbol{G}$, tj. $\boldsymbol{G}_a$ je známá, pak ji lze využít (viz příklad 2.10)

$$\boldsymbol{G}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{G}_a^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,\boldsymbol{G}_a}{\det \boldsymbol{G}_a} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{1 + x_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{1 + x_2^2} \end{bmatrix}. \tag{2.245}$$

V tomto případě klasické klouzavé řízení v souladu se vztahy (2.231), (2.244) a (2.245) je dáno

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{1+x_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{1+x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^m & 0 \\ 0 & u_2^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{sign}\left(\dfrac{1}{T_1}e_1 + \dot{e}_1\right) \\ \mathrm{sign}\,(e_3) \end{bmatrix}. \tag{2.246}$$

Vidíme, že klouzavé řízení (2.246) vyžaduje nejenom znalost matice $\boldsymbol{G}_a$, ale je podstatně složitější a pro praktickou realizaci značně náročnější než klouzavé řízení (2.244).

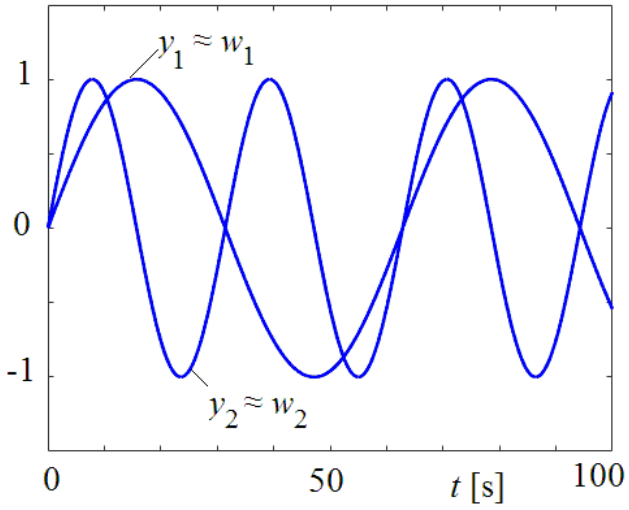
Podobně můžeme určit i ekvivalentní řízení $\boldsymbol{u}^{eq}$ pomocí vztahu (2.240)

$$\boldsymbol{u}^{eq} = \boldsymbol{G}_a^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}[\dot{\boldsymbol{x}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{1+x_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{1+x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^w & -x_2 \\ x_2^w & -x_1x_2x_3 + x_2 \\ x_3^w & x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{1+x_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{1+x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{x}_2^w - x_1x_2x_3 + x_2 \\ \dot{x}_3^w + x_3 \end{bmatrix}. \tag{2.247}$$

Znovu vidíme, že rovněž ekvivalentní řízení (2.247) je složité a pro praktickou realizaci velmi náročné a navíc musíme znát matematický model řízeného systému, co bývá největší problém.



Obr. 2.56 Sledování zadaných sinusoidálních průběhů – příklad 2.18

3 MECHANICKÉ SYSTÉMY

V příkladě 1.7 bylo ukázáno, že typický mechanický systém řádu $2n$ (robot, manipulátor atd.) s n stupni volnosti může být popsán matematickým modelem

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}, \tag{3.1}$$

kde $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ je čtvercová symetrická kladně definitní matice setrvačnosti řádu n, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ – čtvercová matice Coriolisových, odstředivých a viskózních sil řádu n, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ – vektor tíhových sil dimenze n, $\boldsymbol{q}$ – vektor zobecněných (konfiguračních) proměnných dimenze n, $\boldsymbol{v}$ – vektor poruchových proměnných dimenze n, $\boldsymbol{u}$ – vektor zobecněných sil (řídicích proměnných) dimenze $n = m$.

Je zřejmé, že $n_j = r_j = 2$ a že $i = 1,2,\ldots,2n$, $j = 1,2,\ldots,n = m$.

Bylo rovněž ukázáno, že mechanický systém (3.1) je řiditelný a že vždy může být transformován na standardní tvar [viz (1.46)], a proto mohou být použity všechny předchozí přístupy k návrhu řízení. V této kapitole bude ukázáno, že pro mechanické systémy s matematickým modelem (3.1) postupy návrhu mohou být částečně zjednodušeny.

Při sestavování matematických modelů mechanických systémů se s výhodou využívají Eulerovy-Lagrangeovy diferenciální rovnice druhého druhu (Lagrangeova metoda)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_j} = u_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n, \tag{3.2}$$

kde q_j jsou zobecněné (konfigurační) proměnné, u_j – zobecněné síly, n – počet zobecněných proměnných = počet stupňů volnosti, R_d – Rayleighová disipativní (ztrátová) funkce, L – Lagrangeova funkce.

Rayleighová funkce je dána vztahem

$$R_d = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_j \dot{q}_j^2 \tag{3.3}$$

a Lagrangeova funkce je definována jako rozdíl celkové kinetické energie E_k a celkové potenciální energie E_p

$$L = E_k - E_p, \tag{3.4}$$

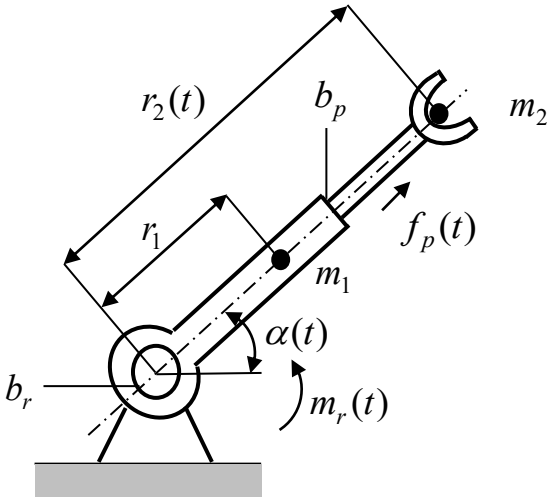
$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j \dot{q}_j^2, \tag{3.5}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j q_j^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j g \Delta_j, \tag{3.6}$$

kde b_j jsou koeficienty viskózního tření, c_j – koeficienty tuhosti, $I_j = m_j$ pro posuvný pohyb (m_j – hmotnosti), $I_j = J_j$ pro rotační pohyb (J_j – momenty setrvačnosti), Δ_j – změny poloh hmotných bodů m_j v tíhovém poli, g – tíhové zrychlení.

Příklad 3.1

Pro robot s kinematickou strukturou RP (R – rotace, P – posuv) na obr. 3.1 odvodíme jeho zjednodušený matematický model bez uvažování pohonů a převodů, kde m_1 je soustředěná hmotnost otočného ramena [kg], m_2 – soustředěná hmotnost posuvného ramena [kg], r_1 – vzdálenost hmotného bodu m_1 od osy otáčení [m], $r_2(t)$ – vzdálenost hmotného bodu m_2 od osy otáčení [m], $\alpha(t)$ – úhel natočení otočného ramena [rad], b_r – koeficient viskózního tření otočného ramena [kg.m^2.rad^{-1}.s^{-1}], b_p – koeficient viskózního tření posuvného ramena [kg.s^{-1}], $m_r(t)$ – hnací moment otočného ramena [N.m], $f_p(t)$ – hnací síla posuvného ramena [N].



Obr. 3.1 Zjednodušené schéma robotu RP

Řešení:

Použijeme Lagrangeovu metodu pro $n=2$, $q_1(t)=\alpha(t)$, $q_2(t)=r_2(t)$, $u_1(t)=m_r(t)$, $u_2(t)=f_p(t)$ a v souladu se vztahy (3.2) – (3.6) dostaneme:

$$E_k=\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\alpha}^2(t)+\frac{1}{2}m_2r_2^2(t)\dot{\alpha}^2(t)+\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2(t),$$

$$E_p=m_1gr_1\sin[\alpha(t)]+m_2gr_2(t)\sin[\alpha(t)],$$

$$R_d=\frac{1}{2}b_r\dot{\alpha}^2(t)+\frac{1}{2}b_p\dot{r}_2^2(t),$$

$$L=E_k-E_p=\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\alpha}^2(t)+\frac{1}{2}m_2r_2^2(t)\dot{\alpha}^2(t)+\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2(t)+$$
$$-m_1gr_1\sin[\alpha(t)]-m_2gr_2(t)\sin[\alpha(t)],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\frac{\partial R_d}{\partial\dot{\alpha}}=m_r\ \Rightarrow$$

$$[m_1r_1^2+m_2r_2^2(t)]\ddot{\alpha}(t)+2m_2r_2(t)\dot{r}_2(t)\dot{\alpha}(t)+b_r\dot{\alpha}(t)+$$
$$+[m_1r_1+m_2r_2(t)]g\cos[\alpha(t)]=m_r(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial r_2}+\frac{\partial R_d}{\partial\dot{r}_2}=f_p\ \Rightarrow$$

$$m_2\ddot{r}_2(t)+b_p\dot{r}_2(t)-m_2\dot{\alpha}^2(t)r_2(t)+m_2g\sin[\alpha(t)]=f_p(t).$$

Výsledné vztahy zapíšeme ve tvaru (3.1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}m_1r_1^2+m_2r_2^2(t) & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{\alpha}(t)\\ \ddot{r}_2(t)\end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}}+\underbrace{\begin{bmatrix}2m_2r_2(t)\dot{r}_2(t)+b_r & 0\\ -m_2\dot{\alpha}(t)r_2(t) & b_p\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\alpha}(t)\\ \dot{r}_2(t)\end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}}+$$
$$+\underbrace{\begin{bmatrix}[m_1r_1+m_2r_2(t)]g\cos[\alpha(t)]\\ m_2g\sin[\alpha(t)]\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})}=\underbrace{\begin{bmatrix}m_r(t)\\ f_p(t)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}}. \tag{3.7}$$

Pokud budou uvažovány pohony a převody, pak výsledná struktura matematického modelu bude stejná.

Skupina nelineárních systémů s matematickým modelem ve tvaru (3.1) je velmi široká, a proto i když mohou být k návrhu řízení použity předchozí

metody, ukážeme takové přístupy, které nevyžadují transformaci matematického modelu (3.1) na standardní tvar.

Matematický model (3.1) je vhodné zapsat ve tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}\,, \tag{3.8a}$$

kde

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})]\,. \tag{3.8b}$$

Protože matice $\boldsymbol{M}$ je čtvercová symetrická kladně definitní, proto její inverze $\boldsymbol{M}^{-1}$ vždy existuje.

Nyní můžeme formulovat úlohu řízení:

Je třeba navrhnout takové zpětnovazební řízení $\boldsymbol{u}^*(t)$, které zajistí sledování žádané trajektorie $\boldsymbol{q}^w(t)$ pro $t \geq 0$ trajektorií $\boldsymbol{q}(t)$ tak, aby uzavřený systém řízení byl popsán matematickým modelem

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \\ &\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{q}^w - \boldsymbol{q}, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

kde funkce $\boldsymbol{f}^w$ je obecně nelineární vektorová funkce dimenze *n*, která musí vyhovovat podmínce

$$\boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{3.10}$$

a uzavřený systém řízení (3.9) musí být v jediném rovnovážném stavu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{0} \tag{3.11}$$

globálně asymptoticky stabilní.

Požadovaný model uzavřeného systému řízení se nejčastěji volí lineární ve tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\boldsymbol{K}_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\varepsilon}\,, \text{ tj. } \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = -\boldsymbol{K}_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{3.12a}$$

resp.

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}\,, \tag{3.12b}$$

kde matice $\boldsymbol{K}_0$ a $\boldsymbol{K}_1$ jsou diagonální matice řádu *n* s kladnými prvky (nutná podmínka stability).

Vidíme, že lineární požadovaný model uzavřeného systému řízení (3.12) představuje *n* vzájemně nezávislých dílčích podsystémů 2. řádu ($n_j = r_j = 2$).

3.1 Řízení využívající malé dopravní zpoždění pro mechanické systémy

Řízení využívající malé dopravní zpoždění je podrobněji popsáno v oddíle 2.2.1 a v příloze D.

Uvažujme matematický model mechanického systému (3.1) ve tvaru (3.8)

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}\,, \tag{3.13a}$$

kde

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{v}]\,. \tag{3.13b}$$

Je zřejmé, že pro malé dopravní zpoždění h platí

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \approx \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \ddot{\boldsymbol{q}}(t-h) - \boldsymbol{M}_e^{-1}\boldsymbol{u}(t-h)\,, \tag{3.14}$$

kde $\boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ je odhad funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, $\boldsymbol{M}_e^{-1}$ – konstantní čtvercová matice řádu n, pro kterou platí

$$\left\| \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}_e - \mathbf{I} \right\| < 1\,. \tag{3.15}$$

Podmínka (3.15) zaručuje konvergenci

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t\to\infty}} \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\,. \tag{3.16}$$

Často je výhodné vycházet z upraveného matematického modelu (3.1)

$$\boldsymbol{M}_e\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{u} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{M}_e\ddot{\boldsymbol{q}}\,, \tag{3.17a}$$

kde

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = [\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{M}_e]\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{v}\,. \tag{3.17b}$$

Podobně jako v předchozím případě můžeme psát

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) \approx \boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{u}(t-h) - \boldsymbol{M}_e\ddot{\boldsymbol{q}}(t-h)\,. \tag{3.18}$$

Podmínka konvergence

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t\to\infty}} \boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) \tag{3.19}$$

je stejná jako (3.15).

Řízení s využitím malého dopravního zpoždění h je pak na základě podobnosti se vztahem (2.81) pro oba odhady dáno:

Odhad (3.14)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_e[\ddot{\boldsymbol{q}}^w - \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]\,. \tag{3.20}$$

Odhad (3.18)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_e[\ddot{\boldsymbol{q}}^w - \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})] + \boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\,. \tag{3.21}$$

Příklad 3.2

Pro robot z příkladu 3.1 je třeba navrhnout řízení využívající malé dopravní zpoždění, které zajistí požadovaný model uzavřeného systému řízení ve tvaru (předpokládají se mezní nekmitavé průběhy)

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}, \tag{3.22a}$$

kde

$$\boldsymbol{K}_1 = \mathrm{diag}\left[\frac{2}{T_1}, \frac{2}{T_2}\right],\ \boldsymbol{K}_0 = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{T_1^2}, \frac{1}{T_2^2}\right], \tag{3.22b}$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varepsilon}_1 + \frac{2}{T_1}\dot{\varepsilon}_1 + \frac{1}{T_1^2}\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_1 = \alpha^w - \alpha, \\ &\ddot{\varepsilon}_2 + \frac{2}{T_2}\dot{\varepsilon}_2 + \frac{1}{T_2^2}\varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_2 = r_2^w - r_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

T_1 a T_2 jsou vhodně zvolené časové konstanty.

Hodnoty parametrů robotu: $m_1 = 20$ kg; $m_2 = 10$ kg; $r_1 = 1$ m; $1{,}2\ \mathrm{m} \le r_2(t) \le 1{,}6$ m; $0 \le \alpha(t) \le \pi$; $b_r = 0{,}1$ kg.m^2.rad^{-1}.s^{-1}; $b_p = 0{,}1$ kg.s^{-1}.

Řešení:

Pro návrh řízení použijeme odhad (3.18), proto řízení bude mít tvar (3.21).

Konstantní matici $\boldsymbol{M}_e$ určíme na základě matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ matematického modelu (3.7). Protože $1{,}2 \le r_2(t) \le 1{,}6$, zvolíme např. $r_2 = \sqrt{2}$ a pak můžeme psát

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2(t) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{M}_e = \begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Protože obě matice $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{M}_e$ jsou diagonální, podmínku (3.15) můžeme snadno ověřit

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}_e - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2(2-r_2^2)}{m_1+m_2r_2^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}_e - \mathbf{I} \right\| < 1. \tag{3.25}$$

Rovnici (3.17a) napíšeme pro (3.24) a matematický model (3.7) vyjádříme složkově

$$\left.\begin{aligned} (m_1+2m_2)\ddot{\alpha}(t) + F_1 &= m_r(t), \\ m_2\ddot{r}_2(t) + F_2 &= f_p(t), \end{aligned}\right\} \tag{3.26a}$$

kde

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) \tag{3.26b}$$

a pak pro odhady v souladu s (3.18) můžeme psát

$$\left.\begin{aligned} F_1 &\approx F_{1e} = m_r(t-h) - (m_1+2m_2)\ddot{\alpha}^w(t-h), \\ F_2 &\approx F_{2e} = f_p(t-h) - m_2\ddot{r}_2^w(t-h). \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Řízení je pak na základě vztahů (3.21), (3.23) a (3.27) dáno

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= m_r(t) = (m_1+2m_2)[\ddot{\alpha}^w(t) + \frac{2}{T_1}\dot{\varepsilon}_1(t) + \frac{1}{T_1^2}\varepsilon_1(t)] + F_{1e}, \\ u_2(t) &= f_p(t) = m_2[\ddot{r}_2^w(t) + \frac{2}{T_2}\dot{\varepsilon}_2(t) + \frac{1}{T_2^2}\varepsilon_2(t)] + F_{2e}. \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Pro ověření navrženého řízení (3.28) použijeme požadovanou trajektorii v kartézských souřadnicích ve tvaru kružnice (obr. 3.2), kde je vykreslena polovina pracovního prostoru (v 1. kvadrantu, tj. $x \geq 0$, $y \geq 0$). Trajektorie z počátečního stavu $\boldsymbol{x}_0 = [1{,}2;0]^T$ k požadované (zadané) trajektorii není zadána.

Rovnice požadované trajektorie v kartézských souřadnicích v souladu s obr. 3.2 je

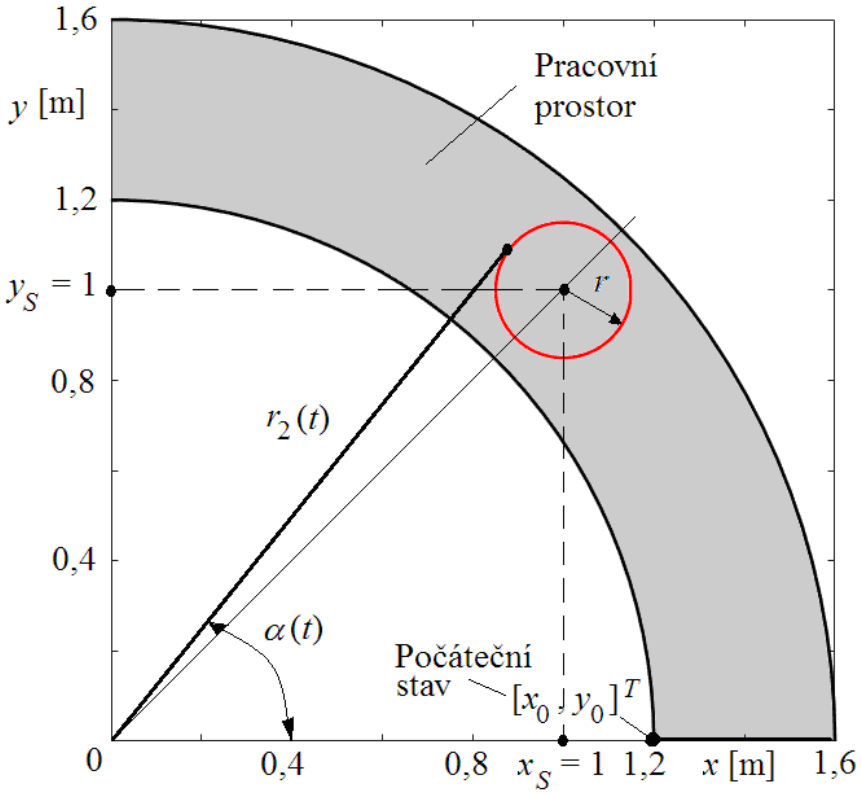
$$[x^w(t) - x_S]^2 + [y^w(t) - y_S]^2 = r^2, \tag{3.29}$$

kde x_S a y_S jsou souřadnice středu kružnice [m] o poloměru *r* [m].

Z důvodu generace požadované trajektorie, rovnici (3.29) vyjádříme parametricky (z důvodu jednoduchosti za parametr volíme čas *t*)

$$\left.\begin{aligned} x^w(t) &= r\cos(\omega t) + x_S, \\ y^w(t) &= r\sin(\omega t) + y_S, \end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

kde ω je úhlový kmitočet [rad.s^{-1}]. Jeho volba závisí na dynamických vlastnostech robotu.



Obr. 3.2 Požadovaná trajektorie koncovky robotu v pracovním kartézském prostoru – příklad 3.2

Pro robot musíme použít transformované proměnné v konfiguračním prostoru

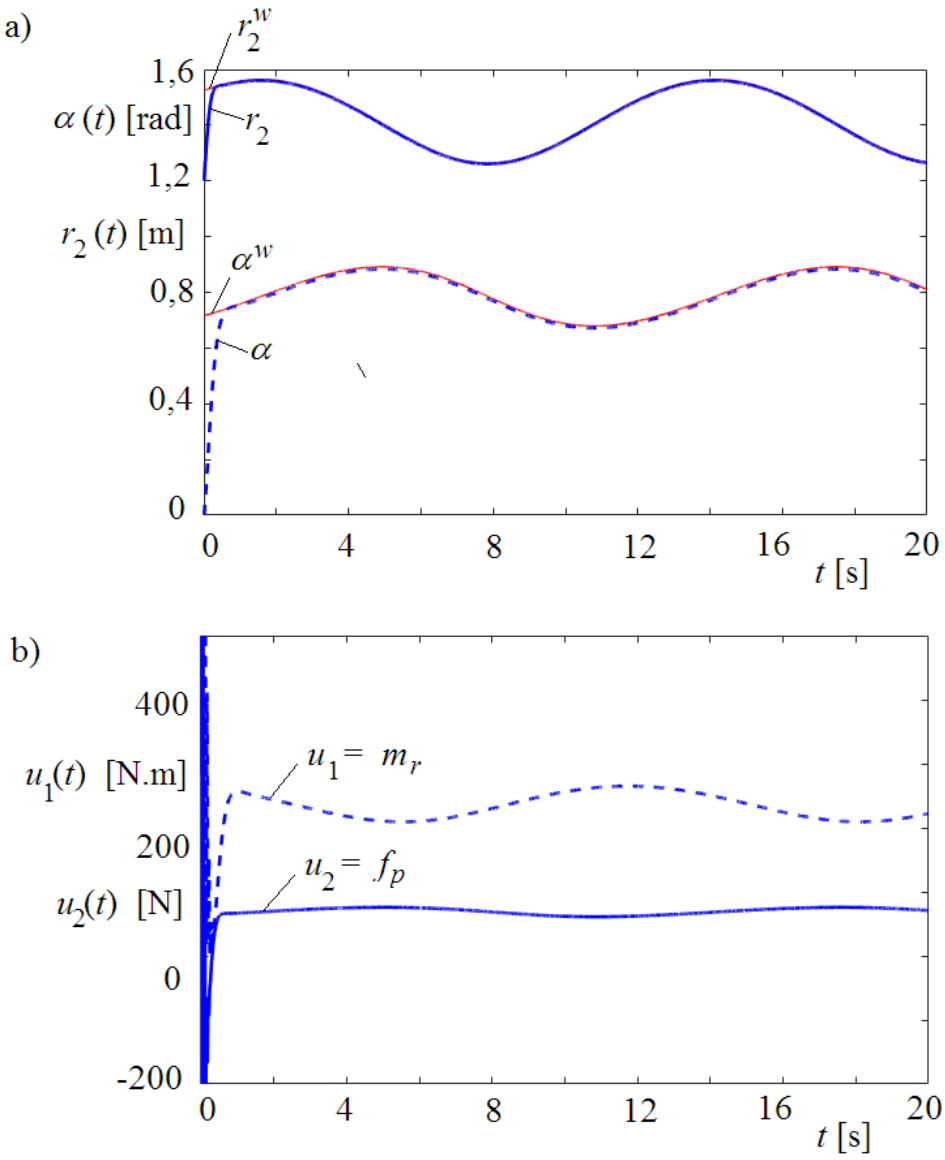
$$\left.\begin{aligned} q_1^w(t) &= \alpha^w(t) = \operatorname{arctg}\left[\frac{y^w(t)}{x^w(t)}\right], \quad \text{pro} \quad x^w(t) \geq 0, \\ q_2^w(t) &= r_2^w(t) = \sqrt{[x^w(t)]^2 + [y^w(t)]^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.31)$$

Skutečná trajektorie v kartézském prostoru (v našem případě v rovině) je dána souřadnicemi

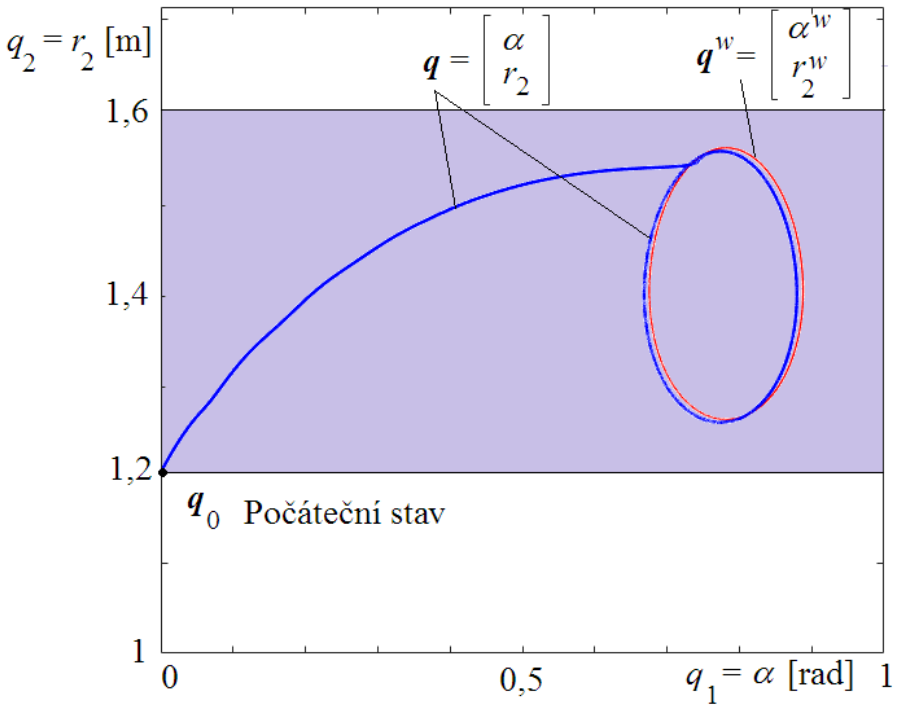
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= r_2(t)\cos[\alpha(t)], \\ y(t) &= r_2(t)\sin[\alpha(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Při simulaci místo malého dopravního zpoždění h byl použit setrvačný člen 1. řádu (2.104), viz oddíl 2.2.1. Druhá derivace byla filtrována setrvačným členem 1. řádu s přenosem

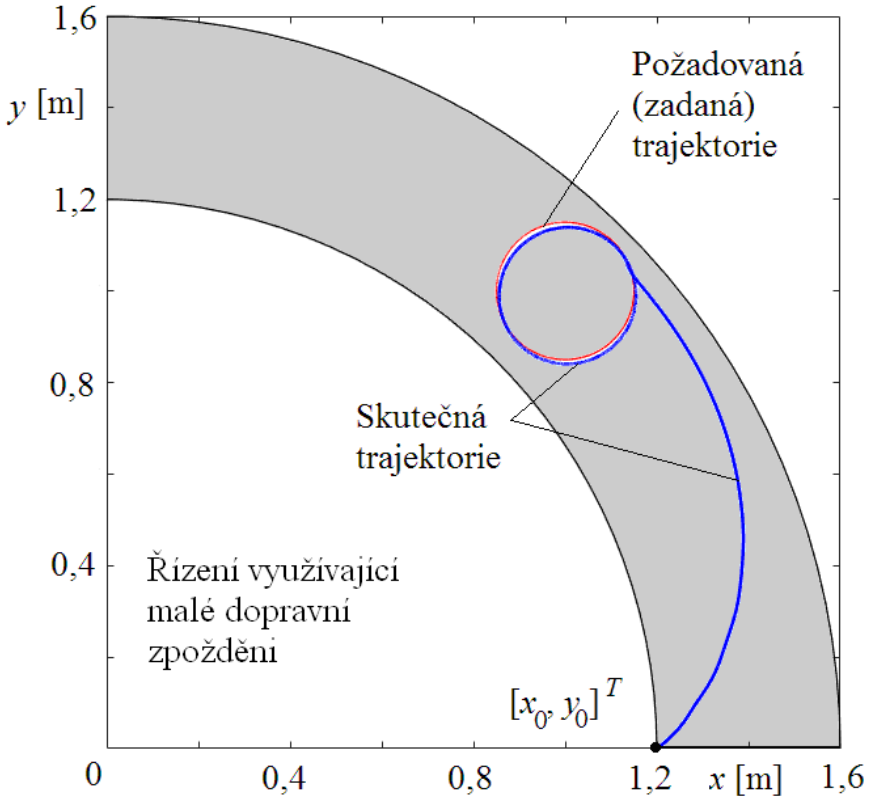
$$\frac{1}{5hs+1}. \tag{3.33}$$



Obr. 3.3 Sledování zadaných trajektorií v čase: a) průběhy proměnných, b) průběhy odpovídajících řízení – příklad 3.2



Obr. 3.4 Sledování zadané trajektorie v konfiguračních souřadnicích – příklad 3.2



Obr. 3.5 Sledování zadané trajektorie (kružnice) v kartézských souřadnicích – příklad 3.2

Výsledky simulace pro zadané parametry robotu a pro $x_S = y_S = 1$ m; $r = 0{,}15$ m; $\omega = 0{,}5$ rad.s^{-1}; $T_1 = 0{,}1$ s; $T_2 = 0{,}05$ s; $h = 0{,}005$ s jsou na obr. 3.3 a 3.4.

Obr. 3.3a ukazuje sledování transformovaných zadaných proměnných α^w a r_2^w proměnnými α a r_2, které vytvoří v konfiguračním prostoru (rovině) uzavřenou křivku (obr. 3.4) a v kartézském prostoru (rovině) zadanou kružnici (obr. 3.5).

Počáteční rázy řízení na obr. 3.3b jsou způsobeny neznalostí funkce $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{q}(0),\mathbf{0,0}]$ a neuvažováním počátečního řízení $\boldsymbol{u}(0)$, které by udržovalo robot pro $q_1(0) = \alpha(0) = 0$ a $q_2(0) = r_2(0) = 1{,}2$ m v rovnováze.

Kvalita řízení (sledování) závisí na hodnotách parametrů ω, T_1, T_2 a h. Nižším hodnotám odpovídá vyšší kvalita.

3.2 Řízení s vysokým zesílením pro mechanické systémy

Uvažujme matematický model mechanického systému (3.1), který zapíšeme ve tvaru (3.13), tj.

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}\,. \tag{3.34}$$

Jak již bylo řečeno, úlohou řízení je realizovat sledování žádané trajektorie $\boldsymbol{q}^w$ tak, aby uzavřený systém řízení byl popsán matematickým modelem (3.9)

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{q}^w - \boldsymbol{q}\,. \tag{3.35}$$

V případě znalosti přesného matematického modelu (3.34) můžeme psát

$$\underbrace{\ddot{\boldsymbol{q}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}}_{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{f}^w(\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tag{3.36}$$

a z této rovnice určit řízení

$$\boldsymbol{u}^{\times} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})[\ddot{\boldsymbol{q}}^w - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - \boldsymbol{f}^w(\varepsilon,\dot{\varepsilon})]\,. \tag{3.37}$$

Obdržené řízení vyžaduje znalost přesného matematického modelu (3.34) [tj. (3.1)]. Bohužel v reálných podmínkách nikdy přesný matematický model a případné poruchy neznáme. Je to tedy nerobustní řízení.

Pro určení řízení použijeme postup z oddílu 2.2.2.

Požadovaný matematický model uzavřeného systému řízení (3.35) zapíšeme ve tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{0} \tag{3.38a}$$

a označíme

$$\boldsymbol{m}^{w} = \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) . \tag{3.38b}$$

Ze vztahu (3.36) je zřejmé, že matematický model (3.38) obsahuje řízení $\boldsymbol{u}$, tj. $\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u})$.

Proto můžeme psát

$$\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \tag{3.39}$$

a tuto rovnici budeme řešit podobně jako v oddíle 2.2.2.

K oběma stranám rovnice (3.39) přičteme výraz $\boldsymbol{Ju}$, tj.

$$\boldsymbol{Ju} + \boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Ju} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}) \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}_k), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{3.40}$$

kde $\boldsymbol{J}$ je vhodně zvolena regulární čtvercová matice ($\det \boldsymbol{J} \neq 0$) řádu n.

Za předpokladu, že matice $\boldsymbol{J}$ je vhodně zvolena a že proměnné vystupující v maticích $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{M}$ a funkcích $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{f}^{w}$ se během výpočtu mění dostatečně pomalu, řešení rekurentní rovnice (3.40) bude konvergovat k pevnému bodu $\boldsymbol{u}^{\times}$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}^{\times}. \tag{3.41}$$

Zvolíme-li

$$\boldsymbol{J} = \left.\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_k} = -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q}), \tag{3.42}$$

tzn. že $\boldsymbol{J}$ je Jacobiova matice funkce $\boldsymbol{m}^{w}$, obdržíme známou Newtonovu-Raphsonovu iterační metodu řešení nelineárních rovnic. Výsledné řešení pak bychom obdrželi v jednom iteračním kroku a bude to řízení (3.37).

Bohužel matici $\boldsymbol{J}$ v reálných podmínkách nikdy neznáme přesně, a proto iterační proces může být nekonečný.

Určování řízení pomocí rekurentního vztahu (3.40) není vhodné, a proto rekurentní rovnici (3.40) zastoupíme obyčejnou diferenciální rovnicí (3.44), kterou získáme z diferenční rovnice

$$\frac{\boldsymbol{u}_{k+1} - \boldsymbol{u}_k}{\frac{1}{\lambda}} = -\lambda \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{m}^{w}(\boldsymbol{u}_k) . \tag{3.43}$$

Pro $\lambda \to \infty$ dostaneme odpovídající diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}(\tau)}{\mathrm{d}\,\tau} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^{w}[\boldsymbol{u}(\tau)],\ \boldsymbol{\Theta} = -\lambda\boldsymbol{J}^{-1},\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.44}$$

Je zřejmé, že pro vhodně zvolenou regulární čtvercovou matici $\boldsymbol{J}$ platí

$$\lim_{\tau\to\infty} \boldsymbol{u}(\tau) = \boldsymbol{u}^{\times}. \tag{3.45}$$

Vzhledem k tomu, že řešení diferenciální rovnice (3.34) musí probíhat značně rychleji, než jsou změny proměnných u matic $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{M}^{-1}$ a funkcí $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{f}^{w}$, je vhodné zavést dva časy. Skutečný čas t a "rychlý" čas

$$\tau = \beta t,\quad \beta >> 1. \tag{3.46}$$

Průběh času τ je dán parametrem β, jehož velikost je úměrná velikosti λ ve vztahu (3.43), tj. absolutní velikosti prvků čtvercové matice $\boldsymbol{\Theta}$. Rovnice (3.44) po uvažování (3.38b) a dosazení (3.34) bude mít tvar

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}(\tau)}{\mathrm{d}\,\tau} = -\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{M}^{-1}[\boldsymbol{q}(t)]\boldsymbol{u}(\tau) + \boldsymbol{\Theta}\left\{\ddot{\boldsymbol{q}}^{w}(t) - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)] - \boldsymbol{f}^{w}[\boldsymbol{\varepsilon}(t),\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)]\right\}. \tag{3.47}$$

Protože čas τ probíhá podstatně rychleji než skutečný čas t, lze výrazy závislé na čase t při výpočtu považovat za přibližně konstantní, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}(\tau)}{\mathrm{d}\,\tau} = -\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{u}(\tau) + \boldsymbol{\Theta}(\ddot{\boldsymbol{q}}^{w} - \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^{w}). \tag{3.48}$$

Diferenciální rovnice (3.48) je lineární, a proto o stabilitě řešení rozhoduje její charakteristický mnohočlen

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{M}^{-1}). \tag{3.49}$$

Matice $\boldsymbol{M}$ je symetrická kladně definitní, a proto matice $\boldsymbol{M}^{-1}$ bude rovněž symetrická kladně definitní a její charakteristická (vlastní) čísla budou reálná kladná. Bude-li matice $\boldsymbol{\Theta}$ symetrická kladně definitní, pak charakteristická čísla součinu $\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{M}^{-1}$ budou reálná kladná, tj. charakteristický mnohočlen (3.49) bude mít reálné záporné (asymptoticky stabilní) kořeny.

Pro průběžné určování řízení $\boldsymbol{u}^{\times}$ je vhodné zastoupit řešení diferenciální rovnice (3.44) integrací

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}^{w}[\boldsymbol{u}(\tau)]\,\mathrm{d}\,\tau + \boldsymbol{u}(0). \tag{3.50}$$

Za předpokladu, že matice $\boldsymbol{\Theta}$ je konstantní, můžeme psát

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\int_0^t \boldsymbol{m}^{w}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \boldsymbol{u}(0), \tag{3.51a}$$

resp.

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{u}(0)\,, \tag{3.51b}$$

$$\boldsymbol{m}(t) = \int_0^t \boldsymbol{m}^{w}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\,.$$

Je vhodné, aby čtvercová matice $\boldsymbol{\Theta}$ byla blízká k matici [viz (3.42) a (3.44)]

$$\lambda \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\,. \tag{3.52}$$

V běžných případech $\boldsymbol{\Theta}$ může být diagonální

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}[\,\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n\,] \tag{3.53}$$

s dostatečně vysokými hodnotami kladných prvků Θ_i.

Počáteční řízení $\boldsymbol{u}(0)$ zajišťuje počáteční rovnováhu a lze ho určit experimentálně nebo odhadnout na základě vztahu (3.1) pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{q}(0)] = \boldsymbol{u}(0)\,. \tag{3.54}$$

Uvažujme nyní diagonální matici $\boldsymbol{\Theta}$, vztah (3.51) a požadovaný matematický model uzavřeného systému řízení (3.38b) a dostaneme

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\int_0^t [\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{f}^{w}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})]\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{u}(0)\,. \tag{3.55}$$

Pro lineární požadovaný matematický model (3.12), pak obdržíme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{\times}(t) &= \boldsymbol{\Theta}\int_0^t (\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{u}(0) = \\ &= \boldsymbol{\Theta}\left\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) + \boldsymbol{K}_1[\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(0)] + \boldsymbol{K}_0\int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau}\right\} + \boldsymbol{u}(0) = \\ &= \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{K}_I\int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{K}_D\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{u}^{\times}(0)\,,\end{aligned} \tag{3.56a}$$

kde

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}_P = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{K}_1,\ \ \boldsymbol{K}_I = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{K}_0,\ \ \boldsymbol{K}_D = \boldsymbol{\Theta},\\ &\boldsymbol{u}^{\times}(0) = \boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{\Theta}[\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\varepsilon}(0) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0)].\end{aligned} \tag{3.56b}$$

Řízení s vysokým zesílením (3.56) zapíšeme složkově

$$u_j^{\times}(t) = K_{Pj}\varepsilon_j + K_{Ij}\int_0^t \varepsilon_j \,\mathrm{d}\tau + K_{Dj}\dot{\varepsilon}_j + u_j^{\times}(0) =$$

$$= K_{Pj}(\varepsilon_j + \frac{1}{T_{Ij}}\int_0^t \varepsilon_j \,\mathrm{d}\tau + T_{Dj}\dot{\varepsilon}_j) + u_j^{\times}(0),\ \ j = 1,2,\ldots,n \tag{3.57a}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} &K_{Pj} = \Theta_j K_{1j},\ K_{Ij} = \Theta_j K_{0j},\ K_{Dj} = \Theta_j, \\ &u_j^{\times}(0) = u_j(0) - \Theta_j[K_{1j}\varepsilon_j(0) + \dot{\varepsilon}_j(0)], \end{aligned}\right\} \tag{3.57b}$$

resp.

$$T_{Ij} = \frac{K_{1j}}{K_{0j}},\ T_{Dj} = \frac{1}{K_{1j}}. \tag{3.57c}$$

Vidíme, že pro mechanické systémy dílčí řízení s vysokým zesílením vede na algoritmus PID.

Příklad 3.3

Pro robot z příkladu 3.1 je třeba navrhnout řízení s vysokým zesílením, které splní zadání z příkladu 3.2.

Řešení:

Řízení s vysokým zesílením pro mechanické systémy, tj. pro robot z příkladu 3.1 je dáno pro $n = 2$ vztahem (3.57) [pro požadovaný model uzavřeného systému řízení (3.23)]

$$u_1^{\times}(t) = K_{P1}\varepsilon_1 + K_{I1}\int_0^t \varepsilon_1 \,\mathrm{d}\tau + K_{D1}\dot{\varepsilon}_1 + u_1^{\times}(0),$$

$$K_{P1} = \Theta_1 K_{11} = \frac{2\Theta_1}{T_1},\ K_{I1} = \Theta_1 K_{01} = \frac{\Theta_1}{T_1^2},\ K_{D1} = \Theta_1,$$

$$u_0^{\times}(0) = u_1(0) - \frac{2\Theta_1}{T_1}\varepsilon_1(0) - \Theta_1\dot{\varepsilon}_1(0),$$

$$u_2^{\times}(t) = K_{P2}\varepsilon_2 + K_{I2}\int_0^t \varepsilon_2 \,\mathrm{d}\tau + K_{D2}\dot{\varepsilon}_2 + u_2^{\times}(0),$$

$$K_{P2} = \Theta_2 K_{12} = \frac{2\Theta_2}{T_2},\ K_{I2} = \Theta_2 K_{02} = \frac{\Theta_2}{T_2^2},\ K_{D2} = \Theta_2,$$

$$u_2^{\times}(0) = u_2(0) - \frac{2\Theta_2}{T_2}\varepsilon_2(0) - \Theta_2\dot{\varepsilon}_2(0).$$

Při simulaci byly použity stejné parametry robotu a stejná zadaná trajektorie jako v příkladě 3.2.

Sledování zadané trajektorie pro $\Theta_1 = \Theta_2 = 500$, $T_1 = 0{,}1$ s; $T_2 = 0{,}05$ s při neuvažování a uvažování počátečního řízení $\boldsymbol{u}^{\times}(0)$ je na obr. 3.6 a 3.7.

V obou případech sledování zadané kružnice je poměrně dobré, ale v případě neuvažování počátečního řízení $\boldsymbol{u}^{\times}(0)$ průběh trajektorie z počátečního stavu k zadané kružnici je nepřijatelný.

Proto dále bylo již počáteční řízení $\boldsymbol{u}^{\times}(0)$ uvažováno.

Jeho odhad byl získán ze vztahů (3.7) a (3.54) pro $q_1(0) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = \ddot{\alpha}(0) = 0$, $q_2(0) = r_2(0) = 1{,}2$ m; $\dot{r}_2(0) = \ddot{r}_2(0) = 0$, tj.

$$[m_1 r_1 + m_2 r_2(0)]g\cos[\alpha(0)] = m_r(0) = u_1(0) \approx 314 \text{ N.m},$$
$$m_2 g \sin[\alpha(0)] = f_p(0) = u_2(0) = 0$$

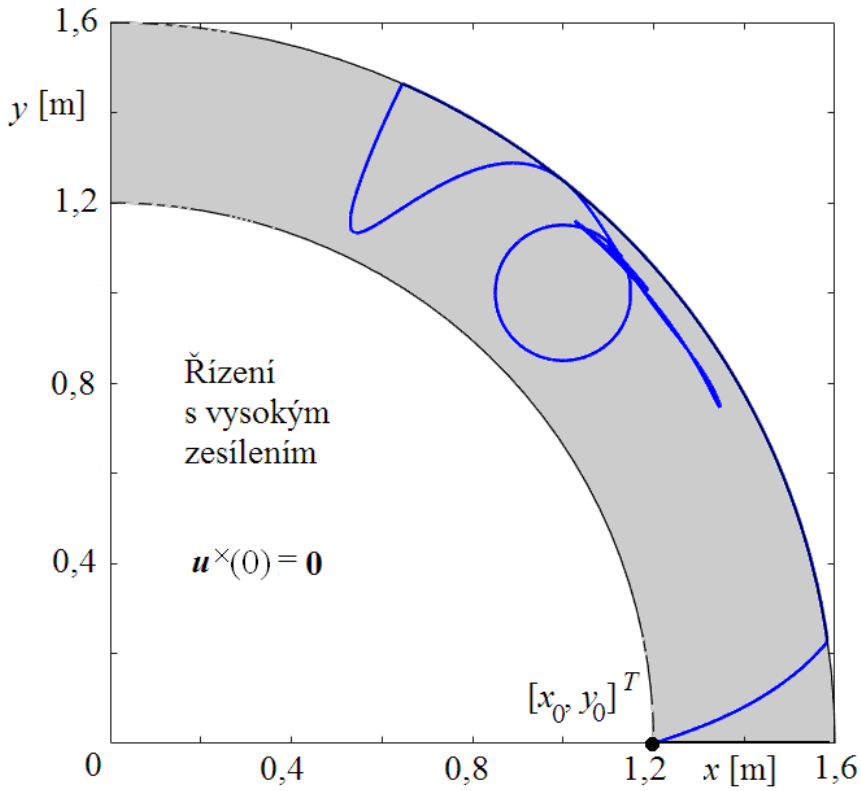
a dále pro $\varepsilon_1(0) \approx \frac{\pi}{4}$ rad a $\varepsilon_2(0) \approx 0{,}3$ m

$$u_1^{\times}(0) = u_1(0) - \frac{2\Theta_1}{T_1}\varepsilon_1(0) \approx -7540 \text{ N.m},$$

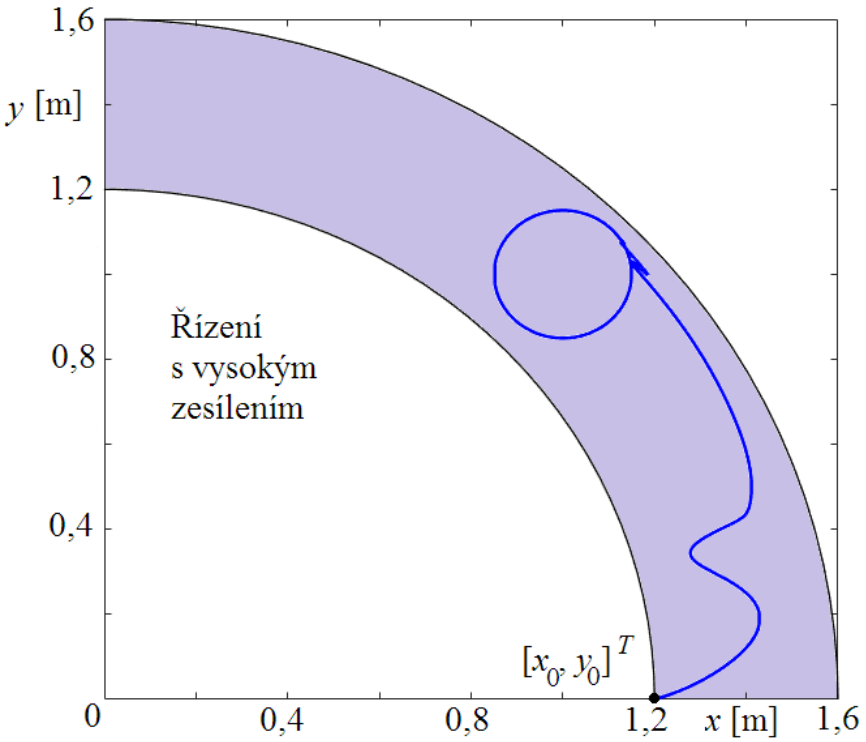
$$u_2^{\times}(0) = u_2(0) - \frac{2\Theta_2}{T_2}\varepsilon_2(0) \approx -6000 \text{ N}.$$

Protože průběh trajektorie od počátečního stavu $\boldsymbol{x}_0 = [1{,}2;0]^T$ k požadované trajektorii, tj. ke kružnici není dán, proto při změně podmínek řízení (počáteční řízení $\boldsymbol{u}^{\times}(0)$, hodnota Θ atd.) její průběh může být vždy jiný, viz obr. 3.6 a 3.7.

Časový průběh trajektorií a odpovídajících řízení je podobný jak na obr. 3.3.



Obr. 3.6 Sledování zadané trajektorie (kružnice) v kartézských souřadnicích při neuvažování počátečního řízení – příklad 3.3



Obr. 3.7 Sledování zadané trajektorie (kružnice) v kartézských souřadnicích při uvažování počátečního řízení – příklad 3.3

3.3 Integrační klouzavé řízení pro mechanické systémy

Uvažujme řízení s vysokým zesílením (3.51b), tj.

$$\boldsymbol{u}^{\times}(t) = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{u}(0)\,, \quad \boldsymbol{m}(t) = \int_0^t \boldsymbol{m}^{w}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\,. \tag{3.58}$$

V souladu se vztahem (2.157), vztahy (3.43) a (3.52) je klouzavé řízení dáno

$$\boldsymbol{u}^{sl}(t) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{U}\mathbf{sign}[\boldsymbol{m}(t)] + \boldsymbol{u}(0)\,. \tag{3.59}$$

Jak bylo ukázáno v podkapitole 2.2.3 jde o integrační klouzavé řízení.

Matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$, případně její odhad podstatným způsobem může urychlit konvergenci. Naštěstí u mechanických systémů není nutné ji uvažovat, protože u mechanických systémů přiřazení dílčích řízení (pohonů) k odpovídajícím dílčím podsystémům je vždy správné.

Proto u mechanických systémů integrační klouzavé řízení může být vyjádřeno vztahem

$$\boldsymbol{u}^{sl}(t) = \boldsymbol{U}\mathbf{sign}[\boldsymbol{m}(t)] + \boldsymbol{u}(0)\,, \tag{3.60}$$

kde kladné prvky u_j^m diagonálmí matice $\boldsymbol{U}$ jsou vhodně zvoleny a funkce **sign**, tj. její prvky mohou být nahrazeny aproximacemi (2.165) – (2.167). Tyto aproximace snižují aktivitu řízení. Integrační klouzavé řízení (3.60) formálně dostaneme zastoupením diagonální matice $\boldsymbol{\Theta}$ diagonální maticí $\boldsymbol{U}$ a funkcí **sign**. Proto pro požadovaný lineární model uzavřeného systému řízení (3.12) dostaneme [viz také (3.56)]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{sl}(t) &= \boldsymbol{U}\mathbf{sign}\left[\int_0^t (\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau}\right] + \boldsymbol{u}(0) = \\ &= \boldsymbol{U}\mathbf{sign}\left\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) + \boldsymbol{K}_1[\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(0)] + \boldsymbol{K}_0\int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau}\right\} + \boldsymbol{u}(0) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{u}^{sl}(t) = \boldsymbol{U}\mathbf{sign}(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{K}_0\int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\tau} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \boldsymbol{u}(0)\,. \tag{3.61}$$

U klouzavého řízení má smysl uvažovat jenom počáteční řízení $\boldsymbol{u}(0)$ a ne $\boldsymbol{u}^{\times}(0)$ [viz (3.54)], které zajišťuje počáteční rovnováhu.

Složkové vyjádření integračního klouzavého řízení (3.61) má tvar

$$u_j^{sl}(t) = u_j^m \operatorname{sign}\left(K_{Pj}\varepsilon_j + K_{Ij}\int_0^t \varepsilon_j \,\mathrm{d}\tau + K_{Dj}\dot{\varepsilon}_j \right) + u_j(0), \quad j = 1,2,\ldots,n\,. \quad (3.62)$$

Počáteční řízení $u_j(0)$ se často neuvažuje.

Příklad 3.4

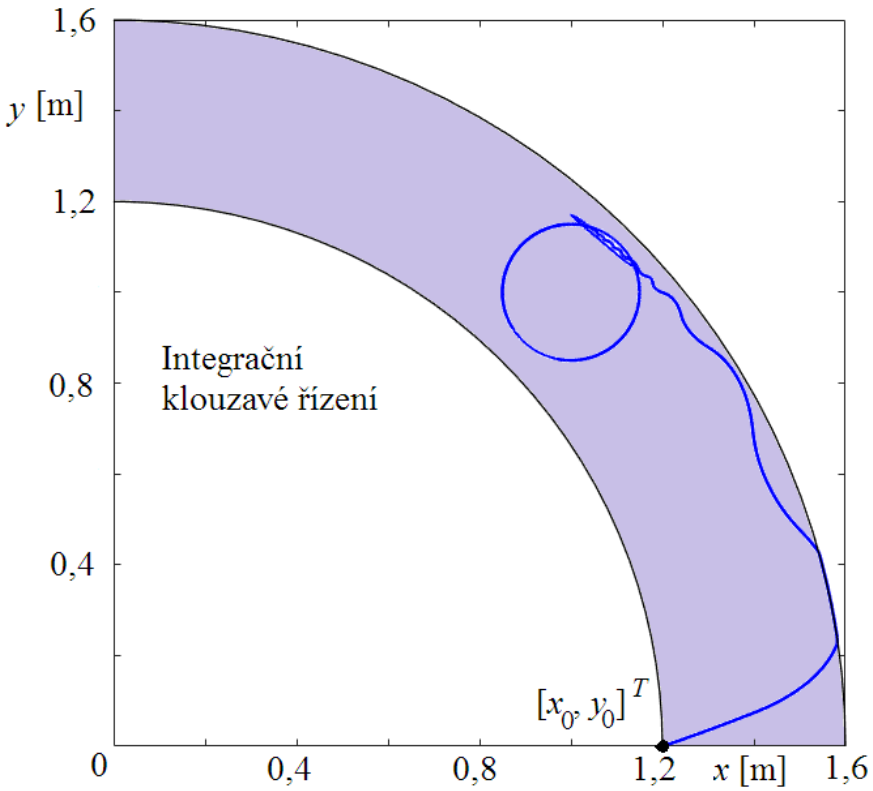
Pro robot z příkladu 3.1 je třeba navrhnout integrační klouzavé řízení, které zajistí splnění podmínek z příkladu 3.2.

Řešení:

Úloha řízení je stejná jako v předchozích příkladech 3.2 a 3.3.

Integrační klouzavé řízení je dáno vztahem (3.62) pro $K_{Pj} = \dfrac{2}{T_j}$, $K_{Ij} = \dfrac{1}{T_j^2}$ a $K_{Dj} = 1$ (j = 1, 2).

Počáteční řízení $\boldsymbol{u}(0)$ není uvažováno, protože na průběh trajektorie má zanedbatelný vliv.



Obr. 3.8 Sledování zadané trajektorie (kružnice) v kartézských souřadnicích – příklad 3.4

Při simulaci byly použity parametry robotu a zadané trajektorie z příkladu 3.2 a dále: $T_1 = 0{,}1$ s; $T_2 = 0{,}05$ s. Pro realizaci funkce **sign** byly použity reléové členy s hysterezí pro $a_1 = a_2 = 0$. Hodnoty $u_1^m = 10000$ N.m a $u_2^m = 10000$ N byly určeny experimentálně.

Sledování zadané trajektorie (kružnice) v kartézských souřadnicích je na obr. 3.8.

Časové průběhy konfiguračních proměnných jsou podobné jako na obr. 3.3a. Průběh řízení je typický pro klouzavé řízení, a proto není zajímavý.

3.4 Klasické klouzavé řízení pro mechanické systémy

Při použití klasického klouzavého řízení (řízení v klouzavén režimu 2) u machanických systémů s matematickým modelem (3.1) se navrhne klouzavá plocha nejčastěji ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{0}, \tag{3.63a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{q}^w - \boldsymbol{q}, \tag{3.63b}$$

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}[\, T_1, T_2, \ldots, T_n \,], \tag{3.63c}$$

kde $\boldsymbol{T}$ je diagonální matice časových konstant T_j.

Dílčí klouzavé plochy

$$T_j \dot{\varepsilon}_j + \varepsilon_j = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.64}$$

reprezentují charakteristické rovnice požadovaných dílčích matematických modelů.

V souladu s oddílem 2.2.4 klasické klouzavé řízení je dáno vztahem

$$\boldsymbol{u}^{sl} = \boldsymbol{U}\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \tag{3.65a}$$

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}[\, u_1^m, u_2^m, \ldots, u_n^m \,], \tag{3.65b}$$

$$\mathbf{sign}(\boldsymbol{\sigma}) = [\mathrm{sign}(\sigma_1), \mathrm{sign}(\sigma_2), \ldots, \mathrm{sign}(\sigma_n)]^T. \tag{3.65c}$$

Funkce sign může být aproximována vztahy (2.165) – (2.167). Pro zvýšení kvality klouzavého řízení může být použito ekvivalentní řízení, případně některé z mnoha modifikací vlastního klouzavého řízení.

Příklad 3.5

Pro robot z příkladu 3.1 je třeba navrhnout klasické klouzavé řízení, které zajistí splnění podmínek z příkladu 3.2.

Řešení:

Úloha řízení je stejná jako v předchozích příkladech 3.2 – 3.4.

Klasické klouzavé řízení v souladu se vztahem (3.65) je dáno

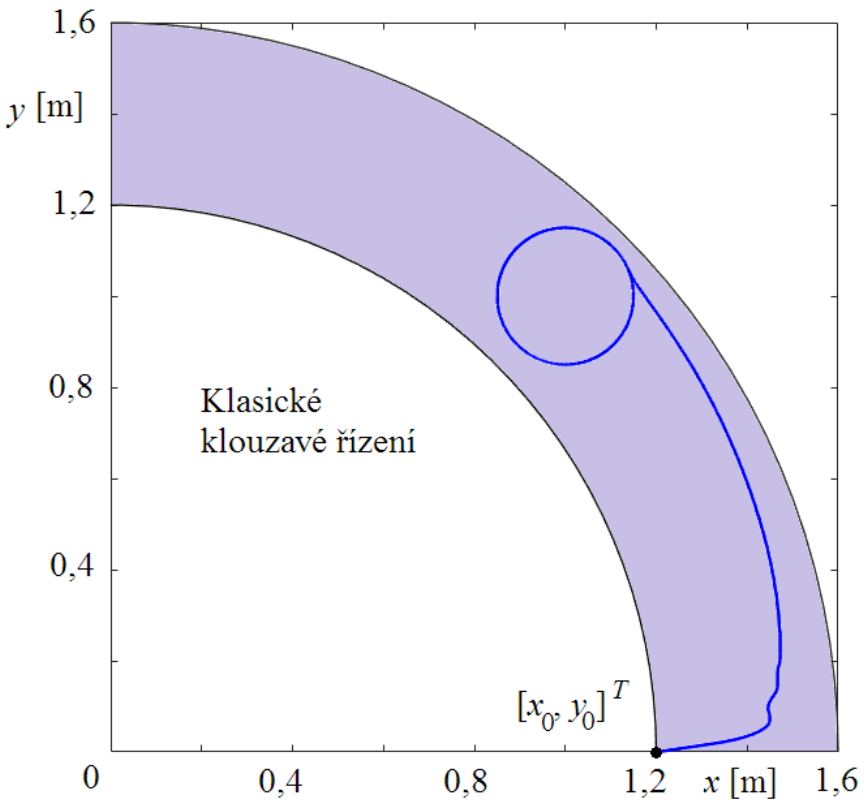
$$u_1^{sl} = u_1^m \operatorname{sign}(T_1\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = q_1^w - q_1, \tag{3.66a}$$

$$u_2^{sl} = u_2^m \operatorname{sign}(T_2\dot{\varepsilon}_2 + \varepsilon_2), \quad \varepsilon_2 = q_2^w - q_2\,. \tag{3.66b}$$

Při simulaci byly použity parametry robotu a zadané trajektorie z příkladu 3.2 a dále $T_1 = 0{,}1$ s; $T_2 = 0{,}05$ s. Hodnoty $u_1^m = 10000$ N.m a $u_2^m = 10000$ N byly určeny experimentálně.

Výsledky simulace jsou na obr. 3.9. Sledování požadované trajektorie, tj. kružnice je kvalitní. Trajektorie z počátečního stavu $\boldsymbol{x}_0 = [1{,}2;0]^T$ nebyla zadána.

Průběhy řízení jsou typické pro klouzavý režim, a proto nejsou ukázány.



Obr. 3.9 Sledování zadané trajektorie (kružnice) v kartézských souřadnicích – příklad 3.5

4 ZÁVĚR

Odborná monografie řeší základy návrhu řízení nelineárních dynamických systémů, které mohou být popsány matematickými modely ve standardním tvaru, nebo na tento tvar mohou být upraveny. Hlavní pozornost je věnována především robustnímu řízení. Aplikační příklady nejsou triviální. Byly zvoleny tak, aby nebyly příliš složité a umožnily pochopit vlastní návrh řízení a jeho vlastnosti a zároveň aby ukázaly použitelnost popsaných metod návrhu řízení a také, aby vhodně ilustrovaly jejich nejdůležitější vlastnosti. Kvalita navržených řízení byla posuzována pouze vizuálně a ve většině případů může být jednoduše zvýšena vhodným doladěním. Podstatného zvýšení kvality řízení lze dosáhnout rovněž kombinací robustního a nerobustního řízení.

I když jsou uvažovány časově invariantní dynamické systémy bez působení poruchových veličin, robustní řízení je použitelné i pro časově variantní dynamické systémy s působením poruchových veličin. V případě znalosti matematického modelu a měřitelnosti poruchových veličin může být pro tyto systémy použito i nerobustní řízení.

Problematice nelineárních systémů jsou věnovány publikace [Čelikovský 2006; Huba 2003; Khalil 2002, Razím, Štecha 1997; Sastry 1999; Slotine, Li 1991; Vítečková, Víteček 2019]. Transformace na modely standardního tvaru je stručně uvedena v monografii [Zítek, Víteček 1999]. Publikace [Noskievič 1999; Zítek 1990] se zabývají tvorbou matematických modelů dynamických systémů a jejich simulací. Modelování a řízení mechanických a elektromechanických systémů, robotů a manipulátorů je popsáno v [Liu, Wang 2012; Spong, Hutchinson, Vidyasagar 2020; Utkin, Guldner 2009].

Řízení využívající malé dopravní zpoždění i s rozšířením na adaptivní řízení je popsáno v [Roy, Kar 2020].

Odborná monografie je soběstačná, a proto k jejímu studiu nejsou potřebné žádné další publikace.

PŘÍLOHA A – Agregační matice

Agregační matice jsou typu (*m*, *n*) a ***používají se u nelineárních systémů, jejichž matematický model má standardní tvar*** (1.1) – (1.4). Jejich název vyplývá z toho, že ze stavových proměnných agregují do vybraných proměnných vlastnosti dílčích podsystémů.

Základní agregační matice

Základní agregační matice $\boldsymbol{D}_a$ je typu (*m*, *n*). V každém řádku má pouze jednu jedničku na pozici q_j odpovídající nefázové rovnici, viz (A.1). Je to nefázová rovnice, která je poslední z rovnic popisujících *j*-tý dílčí podsystém. Na zbývajících pozicích jsou nuly.

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \dots & q_1 & q_1+1 & \dots & q_2 & q_2+1 & \dots & n \end{array} \\ \boldsymbol{D}_a = \left[d_{ji}^{a}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ m \end{array},$$

$$\dim \boldsymbol{D}_a = (m,n) \tag{A.1}$$

Výstupní agregační matice

Výstupní agregační matice $\boldsymbol{D}_h$ je typu (*m*, *n*). V každém řádku má pouze jednu jedničku na pozici $q_{j-1}+1$ ($q_0 = 0$) odpovídající první fázové rovnici následující po nefázové rovnici q_{j-1}, viz (A.2). Je to první fázová rovnice *j*-tého dílčího podsystému. Na zbývajících pozicích jsou nuly.

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \dots & q_1 & q_1+1 & \dots & q_2 & q_2+1 & \dots & n \end{array} \\ \boldsymbol{D}_h = \left[d_{ji}^{h}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array},$$

$$\dim \boldsymbol{D}_h = (m,n) \tag{A.2}$$

Agregační matice

Agregační matice $\boldsymbol{D}$ je typu (m, n). V každém j-tém řádku je n_j kladných čísel [ve vztahu (A.3) reprezentovaných křížkem × a jedničkou], která určují dynamické vlastnosti j-tého dílčího podsystému. Určují vlastně dílčí charakteristické mnohočleny s jedničkou u nejvyšší mocniny, viz (A.3). Na zbývajících pozicích jsou nuly.

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{D} = \left[d_{ji}\right] = \\ \\ \\ \\ \\ \dim \boldsymbol{D} = (m,n) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 2 & \ldots & q_1 & q_1+1 & \ldots & q_2 & q_2+1 & \ldots & n & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \times & \times & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{array} \end{array} , \qquad (A.3)$$

Z výše uvedených tří agregačních matic nejčastější použití má základní agregační matice $\boldsymbol{D}_a$.

Je třeba si pamatovat, že platí (viz podkap. 1.1)

$$q_j = q_{j-1} + n_j, \quad q_0 = 0, \quad q_m = n = \sum_{j=1}^{m} n_j \,. \qquad (A.4)$$

PŘÍLOHA B – Striktní trojúhelnikový tvar matematického modelu

Obecnější striktní trojúhelníkový tvar než (1.31) má matematický model

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= f_1'(z_1) + g_1'(z_1)z_2,\\
\dot{z}_2 &= f_2'(z_1,z_2) + g_2'(z_1,z_2)z_3,\\
\dot{z}_3 &= f_3'(z_1,z_2,z_3) + g_3'(z_1,z_2,z_3)z_4,\\
&\vdots\\
\dot{z}_n &= f_n'(z_1,z_2,\ldots,z_n) + g_n'(z_1,z_2,\ldots,z_n)u,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.1)}$$

kde f_i' a g_i' jsou spojité diferencovatelné (dostatečně hladké) funkce.

Příklad B.1

Nelineární systém

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= f_1'(z_1) + g_1'(z_1)z_2,\\
\dot{z}_2 &= f_2'(z_1,z_2) + g_2'(z_1,z_2)u
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.2)}$$

je třeba transformovat na standardní tvar.

Řešení:

Budeme používat zjednodušený zápis a zavedeme nové proměnné

$$x_1 = z_1, \qquad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1. \qquad \text{(B.3a)}$$

Z první rovnice (B.2) vypočteme

$$z_2 = g_1'^{-1}(\dot{z}_1 - f_1'), \qquad \text{(B.3b)}$$

pak první rovnici derivujeme podle času a dostaneme

$$\ddot{z}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_1' + g_1'z_2) = \dot{f}_1' + \dot{g}_1'z_2 + g_1'\dot{z}_2.$$

Po dosazení za z_2, $\dot{z}_2$ a úpravě obdržíme

$$\ddot{z}_1 = \underbrace{\dot{f}_1' + \dot{g}_1'[g_1'^{-1}(\dot{z}_1 - f_1')] + g_1'f_2'}_{f_2} + \underbrace{g_1'g_2'}_{g_2}u$$

a po uvažování nových proměnných (B.3)

$$\dot{x}_2 = \underbrace{\dot{f}_1' + \dot{g}_1'[g_1'^{-1}(\dot{x}_1 - f_1')] + g_1' f_2'}_{f_2(x_1, x_2)} + \underbrace{g_1' g_2'}_{g_2(x_1, x_2)} u\,, \tag{B.4}$$

kde

$$\dot{f}_1' = \frac{\partial f_1'}{\partial z_1}\dot{z}_1 = \frac{\partial f_1'}{\partial x_1}\dot{x}_1,$$

$$\dot{g}_1' = \frac{\partial g_1'}{\partial z_1}\dot{z}_1 = \frac{\partial g_1'}{\partial x_1}\dot{x}_1.$$

V souladu s (B.3) a (B.4) dostaneme hledaný standardní tvar

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u. \end{aligned}\right\} \tag{B.5}$$

PŘÍLOHA C – Lieova derivace a zpětnovazební linearizace

Při zpětnovazební linearizaci může být vhodné použití ***Lieovy derivace*** skalární funkce $h(\boldsymbol{x})$ podél (ve směru) vektorové funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ definované vztahem

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}), \qquad \text{(C.1)}$$

$$\dim \boldsymbol{x} = \dim \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = n, \ \dim h(\boldsymbol{x}) = 1,$$

kde $h(\boldsymbol{x})$ je dostatečně hladká skalární funkce vektoru $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – hladká vektorová funkce vektoru $\boldsymbol{x}$.

Skalární funkce $h(\boldsymbol{x})$ se také nazývá ***skalární pole***, protože každému $\boldsymbol{x}$ přiřazuje hodnotu (skalár). Podobně vektorová funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ se často nazývá ***vektorové pole***, protože každému $\boldsymbol{x}$ přiřazuje vektor.

Derivace skalární funkce $h(\boldsymbol{x})$ podle vektoru $\boldsymbol{x}$ je ***gradient***

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla h(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right], \qquad \text{(C.2)}$$

který ***v těchto textech vždy považujeme za řádkový vektor***.

Pro vektorové funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ $[\dim \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \dim \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \dim \boldsymbol{x}]$

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \ L_g h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),$$

platí

$$L_g L_f h(\boldsymbol{x}) = L_g \left[L_f h(\boldsymbol{x}) \right] = \frac{\partial [L_f h(\boldsymbol{x})]}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(C.3)}$$

V případě, že $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, můžeme psát

$$L_f L_f h(\boldsymbol{x}) = L_f^2 h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial [L_f h(\boldsymbol{x})]}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(C.4)}$$

Je zřejmé, že platí

$$L_f^{r+1} h(\boldsymbol{x}) = L_f L_f^r h(\boldsymbol{x}), \quad L_f^0 h(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}), \ r = 0,1,\ldots. \qquad \text{(C.5)}$$

Příklad C.1

Pro nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{C.6}$$

byla určena Ljapunovova funkce $V(\boldsymbol{x})$. Je třeba určit její derivaci podle času *t*.

Řešení:

Pro derivaci Ljapunovovy funkce podle času platí

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \;\Rightarrow$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = L_f V(\boldsymbol{x}). \tag{C.7}$$

Vidíme, že derivace Ljapunovovy funkce $V(\boldsymbol{x})$ podle času *t* pro nelineární systém (C.6) je Lieova derivace Ljapunovovy funkce $V(\boldsymbol{x})$ podél vektorové funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Uvažujme jednorozměrový nelineární systém

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u, \\ y &= h(\boldsymbol{x}), \end{aligned}\right\} \tag{C.8a}$$

$$\dim \boldsymbol{x} = \dim \boldsymbol{f} = \dim \boldsymbol{g} = n,\ \dim y = \dim h = \dim u = 1 \tag{C.8b}$$

a derivujme výstupní proměnnou *y* podle času

$$\dot{y} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{L_f h} + \underbrace{\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u}_{L_g h} \;\Rightarrow$$

$$\dot{y} = L_f h + (L_g h)u. \tag{C.9}$$

Výstupní veličinu *y* budeme derivovat tak dlouho, až $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$, tj.

$$\left.\begin{aligned}
\dot{y} &= L_f h + \underbrace{(L_g h)}_{=0} u \\
\ddot{y} &= L_f^2 h + \underbrace{(L_g L_f h)}_{=0} u \\
&\vdots \\
y^{(r)} &= L_f^r h + \underbrace{(L_g L_f^{r-1} h)}_{\neq 0} u
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C.10)}$$

Pokud při r-té derivaci výstupní proměnné y podle času t se objeví řízení (vstupní proměnná) u, pak hodnota r je ***relativní stupeň*** daného systému (C.8), viz podkapitola 1.4.

Jednorozměrový nelineární systém má relativní stupeň r, když

$$L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad \text{a} \quad L_g L_f^k h(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{pro} \quad k < r-1. \qquad \text{(C.11)}$$

Protože vlastnosti nelineárních systémů mohou být pouze lokální, proto i relativní stupeň r platí pouze pro daný stav $\boldsymbol{x}$ a jeho blízké okolí.

Je zřejmé, že relativní stupeň r závisí na funkci h.

Pokud $r < n$, pak u lineárních systémů v přenosu vystupuje $n - r$ nul, které mohou být stabilní i nestabilní.

U nelineárních systémů pro $r < n$ vystupuje tzv. ***vnitřní dynamika***, která se neprojevuje na výstupu (není pozorovatelná) a která rovněž může být stabilní i nestabilní. Tato problematika u nelineárních systémů je složitá a překračuje rámec těchto textů.

Naštěstí u standardních nelineárních systémů vždy platí $r = n$, tj. problém vnitřní dynamiky nevystupuje (viz podkapitola 1.4).

Příklad C.2

S využitím Lieovy derivace je třeba určit relativní stupeň r nelineárního systému (2.16) z příkladu 2.1

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) u, \\
y &= h(\boldsymbol{z}),
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C.12a)}$$

kde

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z} = [z_1, z_2]^T, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = [-z_1 + z_2, -\sin(z_1)]^T, \\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) = [0,2]^T, \quad h(\boldsymbol{z}) = z_1. \end{aligned} \tag{C.12b}$$

Řešení:

Postupně budeme derivovat výstupní proměnnou y podle času t a dostaneme

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{z}} \dot{\boldsymbol{z}} = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{f}}_{L_f h} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{g} u}_{L_g h} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_1 + z_2 \\ -\sin(z_1) \end{bmatrix}}_{L_f h} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{L_g h = 0} u \Rightarrow$$

$$\dot{y} = L_f h = -z_1 + z_2,$$

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}(L_f h)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \boldsymbol{z}} \dot{\boldsymbol{z}} = \underbrace{\frac{\partial (L_f h)}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{f}}_{L_f^2 h} + \underbrace{\frac{\partial (L_f h)}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{g} u}_{L_g L_f h} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_1 + z_2 \\ -\sin(z_1) \end{bmatrix}}_{L_f^2 h} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{L_g L_f h} u \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = z_1 - z_2 - \sin(z_1) + 2u\,. \tag{C.13}$$

Protože řízení u se objeví při 2. derivaci, proto relativní stupeň nelineárního systému (C.12) je $r = 2$.

Uvažujme jednorozměrový nelineární systém (C.8) a vztahy (C.10), které rozšíříme o výstupní proměnnou

$$y = L_f^0 h = h$$

a zavedeme nové stavové proměnné, tj.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y = L_f^0 h, \\ x_2 &= \dot{y} = L_f^1 h, \\ x_3 &= \ddot{y} = L_f^2 h, \\ &\vdots \\ x_r &= y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h, \\ \dot{x}_r &= y^{(r)} = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h) u. \end{aligned}\right\} \tag{C.14}$$

Protože

$$L_g L_f^{r-1} h \neq 0, \tag{C.15}$$

můžeme použít řízení [viz poslední řádek v (C.14)]

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (u^0 - L_f^r h) \tag{C.16}$$

a dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_r &= u^0. \end{aligned}\right\} \tag{C.17}$$

Vidíme, že došlo ke zpětnovazební linearizaci vstup-výstup pro $y = x_1$.

Protože v těchto textech předpokládáme pouze standardní nelineární systémy, případně systémy, které se na ně dají transformovat, platí $r = n$. V tomto případě relativní stupeň *r* je roven řádu nelineárních systémů *n*. Jinak by zpětnovazební linearizace byla částečná a vystupovala by zde vnitřní dynamika. Protože $r = n$ zpětnovazební linearizace vstup-výstup je současně linearizací vstup-stav.

Protože při zpětnovazební linearizaci byly zavedeny nové stavové proměnné a při řízení jsou přímo měřeny nebo pomocí pozorovatele nepřímo zjišťovány původní stavové proměnné, je třeba najít mezi nimi převodní vztahy.

Příklad C.3

Je třeba zpětnovazebně linearizovat nelineární systém (C.12) z předchozího příkladu C.2.

Řešení:

Využijeme výsledky z předchozího příkladu C.2. Protože $r = n = 2$, lineární řízení (C.16) je

$$u = \frac{1}{L_g L_f h}(u^0 - L_f^2 h),$$

kde

$$L_f^2 h = z_1 - z_2 - \sin(z_1), \quad L_g L_f h = 2,$$

tj.

$$u = \frac{1}{2}[u^0 - z_1 + z_2 + \sin(z_1)]. \tag{C.18}$$

V souladu se vztahy (C.14) zavedeme nové stavové proměnné

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y} = -z_1 + z_2, \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = z_1 - z_2 - \sin(z_1) + 2u. \end{aligned}\right\} \tag{C.19}$$

Po dosazení řízení (C.18) dostaneme

$$\dot{x}_2 = u^0 \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u^0. \end{aligned}\right\} \tag{C.20}$$

Je zřejmé, že vztahy mezi původními a novými stavovými proměnnými můžeme snadno určit na základě (C.19)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= -z_1 + z_2 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{aligned} z_1 &= x_1, \\ z_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}\right. \tag{C.21}$$

Z obou příkladů vyplývá, že použitím Lieovy derivace se vlastní úpravy a výpočty nezjednoduší, ale umožní obecný zápis, viz relativní stupeň (C.11) a zpětnovazební linearizační řízení (C.16).

Výhodou Lieovy derivace kromě možnosti obecného vyjádření relativního stupně a zpětnovazební linearizace je, že pro $r = n$ se současně se zpětnovazební linearizací obchází transformace na standardní tvar [porovnej se vztahem (1.29a) z příkladu 1.4]

$$f_n(\boldsymbol{x}) = L_f^n h(\boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad g_n(\boldsymbol{x}) = L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x}). \tag{C.22}$$

Pro mnohorozměrové nelineární systémy si uvedeme pouze výsledné vztahy pro zpětnovazební linearizaci vstup-výstup.

Je uvažován čtvercový nelineární systém ve tvaru (1.55)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{z}) u_j, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}), \end{aligned}\right\} \tag{C.23a}$$

$$\dim \boldsymbol{z} = \dim \boldsymbol{f} = \dim \boldsymbol{g}_j = n, \ \dim \boldsymbol{u} = \dim \boldsymbol{y} = \dim \boldsymbol{h} = m \tag{C.23b}$$

kde $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}_j$ a $\boldsymbol{h}$ jsou obecně nelineární vektorové funkce, přičemž $\boldsymbol{h}$ je dostatečně hladká.

Pak lze psát

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \underset{(m,1)}{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) + \underset{(m,m)}{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{z}) \underset{(m,1)}{\boldsymbol{u}}, \tag{C.24a}$$

kde

$$\underset{(m,1)}{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\boldsymbol{z}) \\ L_f^{r_2} h_2(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(\boldsymbol{z}) \end{bmatrix}, \tag{C.24b}$$

$$\underset{(m,m)}{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\boldsymbol{z}) & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\boldsymbol{z}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\boldsymbol{z}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\boldsymbol{z}) & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(\boldsymbol{z}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\boldsymbol{z}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\boldsymbol{z}) & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_m(\boldsymbol{z}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\boldsymbol{z}) \end{bmatrix}. \tag{C.24c}$$

Je-li čtvercová matice $\boldsymbol{B}$ řádu m regulární, tj.

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{z}) = m \ \Leftrightarrow \ \det \boldsymbol{B}(\boldsymbol{z}) \neq 0, \tag{C.25}$$

pak řízení

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}^{-1}(z)[\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{a}(z)] \tag{C.26}$$

zajistí pro

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r < n \tag{C.27}$$

částečnou zpětnovazební linearizaci vstup-výstup. V tomto případě část nelineárního systému vytváří nepozorovatelnou vnitřní dynamiku a vzniká náročný problém zajištění její stability.

Pokud (tj. $r_1 = n_1,\ r_2 = n_2, \ldots, r_m = n_m$)

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r = n \tag{C.28}$$

řízení (C.26) zajistí (plnou) zpětnovazební linearizaci vstup-výstup (stav) a problém vnitřní dynamiky nevznikne.

V tomto případě původní nelineární systém při zpětnovazební linearizaci byl současně transformován na standardní tvar s novými stavovými proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$, které se přiřadí k výstupním proměnným pro (C.28), tj. $r = n$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(n_1)} &= y_1^{(n_1)}, \\ x_{q_1+1}^{(n_2)} &= y_2^{(n_2)}, \\ &\vdots \\ x_{q_m-1}^{(n_m)} &= y_m^{(n_m)}. \end{aligned}\right\} \tag{C.29}$$

Po zpětnovazební linearizaci vstup-výstup (stav) [tj. po použití řízení (C.26)] se dostane systém n-tého řádu s m podsystémy skládající se ze sériově řazených integrátorů, viz vztahy (1.21) – (1.23) a obr. 1.2.

Pokud byly zavedeny nové stavové proměnné x_i, pak je třeba najít vztahy mezi nimi a původními stavovými proměnnými z_i, které u řízeného nelineárního systému jsou získávány přímo měřením nebo nepřímo pozorováním (estimací).

Je třeba si uvědomit, že po zpětnovazební linearizaci vlastní řízení je navrhováno na základě nových stavových proměnných x_i.

Příklad C.4

U nelineárního systému (2.145) z příkladu 2.10

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \end{aligned}\right\} \tag{C.30a}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1x_2x_3 - x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1+x_2^2 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{C.30b}$$

je třeba provést zpětnovazební linearizaci vstup-výstup (stav) pomocí Lieovy derivace.

Řešení:

Na základě vztahů (C.24) – (C.26) můžeme psát

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial h_1}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 = \underbrace{x_2}_{L_f h_1},$$

$$\ddot{y}_1 = \dot{x}_2 = \underbrace{x_1x_2x_3 - x_2}_{L_f^2 h_1} + \underbrace{u_1}_{(L_{g_1}L_f h_1)u_1} + \underbrace{u_2}_{(L_{g_2}L_f h_1)u_2} \Rightarrow r_1 = n_1 = 2,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial h_2}{\partial x_3}\dot{x}_3 = \underbrace{-x_3}_{L_f h_2} + \underbrace{(1+x_2^2)}_{L_{g_2}L_f h_2}u_2 \Rightarrow r_2 = n_2 = 1.$$

Vidíme, že relativní stupeň nelineárního systému (C.30) je $r = r_1 + r_2 = n_1 + n_2 = n = 2 + 1 = 3$.

Je to zřejmé, protože nelineární systém (C.30) je ve standardním tvaru. Z tohoto důvodu se nemusely měnit stavové proměnné x_1, x_2 a x_3.

Nyní již můžeme určit zpětnovazební linearizační řízení (C.26), kde

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(\boldsymbol{x}) \\ L_f^2 h_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2x_3 - x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}, \tag{C.31a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f h_1(\boldsymbol{x}) & L_{g_2}L_f h_1(\boldsymbol{x}) \\ L_{g_1}L_f h_2(\boldsymbol{x}) & L_{g_2}L_f h_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+x_2^2 \end{bmatrix}, \tag{C.31b}$$

tj.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{1+x_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{1+x_2^2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 - x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \right\}. \tag{C.32}$$

Použitím řízení (C.32) u nelineárního systému (C.30) dojde ke zpětnovazební linearizaci vstup-výstup (stav)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_1^0, \\ \dot{x}_3 &= u_2^0, \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_3. \end{aligned}\right\} \tag{C.33}$$

Linearizovaný systém je tvořen dvěma lineárními podsystémy. První se skládá ze dvou sériově zapojených integrátorů a druhý z jednoho integrátoru.

Ze srovnání s příkladem 2.10 vyplývá, že platí

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x}), \tag{C.34}$$

proto podmínkou řiditelnosti nelineárního systému (C.30) je regularita matice $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ [viz (C.25)].

PŘÍLOHA D – Podmínky pro využití malého dopravního zpoždění při řízení

Ukážeme, že řízení využívající malé dopravní zpoždění (TDC) zajistí pro agregovaný řízený systém [viz (1.14), (1.16), (2.76)

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)] + \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{u}(t) \tag{D.1}$$

vlastnosti uzavřeného systému řízení vyjádřené požadovaným agregovaným modelem [viz (2.38)]

$$\dot{\boldsymbol{e}}_a(t) = \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]. \tag{D.2}$$

Pokud matematický model agregovaného řízeného systému (D.1) je známý, pak takové nerobustní řízení je dáno vztahem [viz (2.41)]

$$\boldsymbol{u}(t) = \underbrace{\boldsymbol{G}_a^{-1}[\boldsymbol{x}(t)]\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]\right\}}_{1} - \underbrace{\boldsymbol{G}_a^{-1}[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)]}_{2}, \tag{D.3}$$

kde první výraz zajistí požadované vlastnosti a druhý výraz zajistí zpětnovazební linearizaci.

Pomocí malého dopravního zpoždění h lze odhadnout nelinearitu [viz (2.78)]

$$\boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)] \approx \boldsymbol{f}_{ae}[\boldsymbol{x}(t)] = \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \boldsymbol{G}_{ae}\boldsymbol{u}(t-h), \tag{D.4}$$

kde $\boldsymbol{G}_{ae}$ je vhodně zvolená konstantní čtvercová matice řádu m, která je (hrubým) odhadem matice $\boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]$.

Nyní použijeme řízení (D.3) u řízeného systému (D.1) pro odhad (D.4) a dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)] + \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]\right\} + \\ - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) + \underbrace{\boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{u}(t-h)}_{\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)]}.\end{aligned}$$

Protože pro $h \to 0$ platí

$$\boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t-h)] \to \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)], \tag{D.5}$$

tj.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t-h)]\boldsymbol{u}(t-h) = \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)] \to \\ &\to \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{u}(t-h) = \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)],\end{aligned} \tag{D.6}$$

lze psát

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)] + \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]\right\} +$$
$$+ \underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h)}_{\left\{\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h)} - \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)].$$

Po úpravě dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = \left\{\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) + \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)] - \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)] +$$
$$+ \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]\right\}. \tag{D.7}$$

Protože pro $h \to 0$ platí

$$\boldsymbol{x}_a(t-h) \to \boldsymbol{x}_a(t), \quad \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)] \to \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t)], \tag{D.8}$$

můžeme psát

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = \left\{\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) + \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]\right\} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)]\right\} \Rightarrow$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_a(t) = \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t)].$$

Vidíme, že řízení (D.3) pro odhad (D.4) skutečně realizuje požadovaný agreovaný model uzavřeného systému řízení (D.2). Nyní si ukážeme, jaké podmínce musí vyhovovat odhad $\boldsymbol{G}_{ae}$.

Uvažujme vztah (D.7) pro čas *t* zpožděný o *h*, tj.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) = \left\{\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t-h)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-2h) + \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-h)] +$$
$$- \boldsymbol{f}_a[\boldsymbol{x}(t-2h)] + \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t-h)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_a^w(t-h) - \boldsymbol{f}_a^w[\boldsymbol{e}(t-h)]\right\}$$

a odečteme od vztahu (D.7). Protože platí (D.5) a (D.8), lze psát

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) = \left\{\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\}[\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-2h)] \tag{D.9}$$
$$\left\|\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h)\right\| \le \left\|\left\{\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\}\right\| \cdot \left\|\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-2h)\right\|.$$

Aby platilo

$$\left\|\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h)\right\| < \left\|\dot{\boldsymbol{x}}_a(t-h) - \dot{\boldsymbol{x}}_a(t-2h)\right\|,$$

musí platit

$$\left\|\mathbf{I} - \boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1}\right\| = \left\|\boldsymbol{G}_a[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{G}_{ae}^{-1} - \mathbf{I}\right\| < 1. \tag{D.10}$$

LITERATURA

1. ČELIKOVSKÝ, S. *Nelineární systémy*. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006, 212 str., ISBN 80-01-03435-6
2. HUBA, M. *Nelineárne systémy*. Vydavatelství STU, Bratislava, 2003, 412 str., ISBN 80-227-1908-0
3. KHAHIL, H. *Nonlinear Systems*. Third Edition. Prentice-Hall, New Jersey, 2002, 750 str., ISBN 0-13-067389-7
4. LIU, J., WANG, X. *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems.* Springer-Verlag, Heildelberg, 2012, 355 str., ISBN 978-3-642-20907-9
5. NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů*. Montanex a.s., Ostrava, 1999, 276 str., ISBN 80-7225-030-2
6. RAZÍM, M., ŠTECHA, J. *Nelineární systémy*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997, 204 str., ISBN 80-01-01663-3
7. ROY, S., KAR, I. N. *Adaptive-Robust Control with Limited Knowledge on Systems Dynamics.* Springer Nature, Singapore, 2020, 144 str., ISBN 978-981-15-0640-6
8. SASTRY, S. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, New York, 1999, 667 str., ISBN 0-387-98513-1
9. SLOTINE, J. E., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliff, New Jersey, 1991, 461 str., ISBN 0-13-040890-9
10. SPONG, M. W., HUTCHINSON, S., VIDYASAGAR, M. *Robot Modeling and Control.* Second Edition. John Wiley and Sons, 2020, 583 str., ISBN 978-1-119-52399-4
11. UTKIN, V., GULDNER, J., SHI, J. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems.* Second Edition. CRC Press – Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2009, 485 str., ISBN 978-1-4200-6560-2
12. VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Základy automatické regulace.* 2. rozšířené vydání (2. dotisk). Ostrava, 244 str., 2019, ISBN 978-80-248-1924-2
13. VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Nelineární systémy. Analýza.* VŠB-TU Ostrava, 2019, 171 str., ISBN 978-80-248-4302-5
14. ZÍTEK, P. *Simulace dynamických systémů*. SNTL, Praha, 1990, 420 str., ISBN 80-03-00330-X
15. ZÍTEK, P., VÍTEČEK, A. *Návrh řízení podsystémů se zpožděními a nelinearitami.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999, 165 str., ISBN 80-01-01939-X

Název: Nelineární systémy. Decentralizované řízení

Autor: Miluše Vítečková, Antonín Víteček

Vydavatel: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Edice: Inženýrská informatika

Pořadí vydání: První

Rok vydání: 2024

Počet stran: 182

Vydáno elektronicky

Publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7678-232-7