

Vysoká škola báňská
Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra automatizační techniky a řízení

**Prezentační modul v prostředí internetu pro
analýzu a syntézu řízení pomocí Delta
transformace**

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Ing. Miluše Vítečková, CSc.

Autor: Václav Chytil

Ostrava: 31.5.2002

Obsah

Seznam použitých symbolů a zkratk	3
1 Základní vlastnosti D-transformace	5
1.1 Delta operátor	5
1.2 D-transformace	5
1.3 Základní vlastnosti D-transformace	6
2 Delta modely	12
2.1 Popis dynamických systémů pomocí delta modelů	12
2.2 Příklady	15
3 Stabilita lineárních dynamických systémů	19
3.1 Bilineární transformace	20
3.2 Algebraická kritéria stability	21
3.3 Přímá kontrola pomocí podmínek	22
3.4 Příklady	23
4 Syntéza lineárních regulačních obvodů	28
4.1 Metoda inverze dynamiky	28
4.2 Příklady	31
Literatura	33
TAB.1. DEFINIČNÍ VZTAHY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI	1
TAB.2. ZÁKLADNÍ SLOVNÍK	3

Seznam použitých symbolů a zkratek

A	koeficient
a_i	koeficient charakteristického polynomu $N(v)$
A_δ	stavová matice systému u delta stavového modelu
B	koeficient
B_δ	stavová matice (vektor) řízení u delta stavového modelu
C	konstanta
c	výstupní matice (vektor) systému delta stavového modelu
C	integrační hranice – vnitřek oblasti konvergence $X(\gamma)$ a obklopuje jednou všechny singularity $X(\gamma)$ v kladném směru
D	operátor přímé D-transformace
D^{-1}	operátor zpětné D-transformace
e	základ přirozeného logaritmu $e \approx 2,7182$
e	regulační odchylka
$g(kT)$	originál diskretní impulsní funkce
$G(\gamma)$	obraz diskretní impulsní funkce
G	přenos
G_R	obraz přenosu regulátoru
G_S	obraz přenosu soustavy
$k(kT)$	originál diskretní přechodové funkce
$H(\gamma)$	obraz diskretní přechodové funkce
I	jednotková matice
Im	imaginární část komplexního čísla
j	imaginární jednotka, $j = \sqrt{-1}$
k	relativní diskretní čas ($k = 0, 1, 2, \dots$)
k_i	koeficient přenosu
k_P	zesílení regulátoru
kT	diskretní čas
\lim	limita
L	operátor přímé L-transformace
L^{-1}	operátor zpětné L-transformace
m	řád pravé strany diferenční rovnice, stupeň polynomu M
M	polynom v čitateli přenosu
n	řád levé strany diferenční rovnice, stupeň polynomu N
N	polynom ve jmenovateli přenosu, charakteristický polynom
Re	reálná část komplexního čísla
s	komplexní proměnná L-transformace
t	spojitý čas
T	vzorkovací perioda, časová konstanta
T_0, T_1	setrvačné časové konstanty
T_d	dopravní zpoždění
T_D	derivační časová konstanta
T_I	integrační časová konstanta
T_w	setrvačná časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu
u	vstupní signál, akční veličina
U	obraz vstupního signálu, obraz akční veličiny
v	poruchová veličina, komplexní proměnná bilineární transformace
v_i	kořeny transformovaného polynomu $N(v)$
V	obraz poruchové veličiny

w	žádaná veličina
W	obraz žádané veličiny
$x(kT)$	originál diskrétní časové funkce
$X(\gamma)$	D-obraz komplexní funkce definované v oblasti komplexní proměnné
y	výstupní signál, regulovaná veličina
Y	obraz výstupního signálu, obraz regulované veličiny
z	komplexní proměnná Z-transformace
α, β	konstanty závislé na překmitu
α_i	koeficienty levé strany delta diferenční rovnice
β_j	koeficienty pravé strany delta diferenční rovnice
γ	komplexní proměnná D-transformace
γ_i	póly přenosu, kořeny charakteristického polynomu $N(\gamma)$
δ	delta operátor
$\delta(kT)$	diskrétní Diracův impuls
$\eta(kT)$	diskrétní Heavisideův skok
κ	překmit
ω	úhlový kmitočet
ω_0	netlumený úhlový kmitočet
ξ_0	koeficient poměrného tlumení
A/Č	analogově-číslicový převodník
AR	analogový regulátor
Č/A	číslicově-analogový převodník
ČR	číslicový regulátor
LSDS	lineární stacionární dynamický systém
P	proporcionální regulátor
PD	proporcionálně-derivační regulátor
PI	proporcionálně-integrační regulátor
PID	proporcionálně-integračně-derivační regulátor

1 Základní vlastnosti D-transformace

1.1 Delta operátor

Pro popis jednotlivých delta modelů zavádíme delta operátor. Definujeme jej jako relativní dopřednou diferenci

$$\delta x(kT) = \frac{\Delta x(kT)}{T} = \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} \quad (1.1)$$

kde $\{x(kT)\}$ je diskretní časová funkce, k je relativní diskretní čas a T je vzorkovací perioda.

Výhodou delta operátoru je, že pro $T \rightarrow 0$ přechází na operátor derivace zprava $\frac{dx}{dt}$.

Z tohoto hlediska může delta operátor přispět ke sjednocení spojité a diskretní teorie. Další výhodou je odolnost algoritmů používaných pro analýzu a syntézu proti ztrátě dobré numerické podmíněnosti vlivem zvyšující se frekvence vzorkování.

1.2 D-transformace

D-transformace je matematický aparát, který nám umožňuje snadný popis, analýzu a syntézu diskretních systémů. Je určitou modifikací Z-transformace.

Pro definici D-transformace si zavedeme novou komplexní proměnnou

$$\gamma = \frac{z-1}{T} \quad (1.2)$$

kde z je komplexní proměnná Z-transformace. Potom přímou D-transformaci definujeme (viz [Mindeková 1996]) jako

$$D\{x(kT)\} = X(\gamma) = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(1+\gamma T)^{-k} \quad (1.3)$$

a inverzní D-transformaci jako

$$x(kT) = D^{-1}\{X(\gamma)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(\gamma)(1+\gamma T)^{k-1} d\gamma \quad (1.4)$$

Aby diskretní časová funkce $x(kT)$ byla originálem, musí být:

nulová pro záporné k , tj.

$$x(kT) = \begin{cases} x(kT) & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{pro } k < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

- exponenciálního řádu, tzn. musí platit nerovnost

$$|x(kT)| \leq M e^{a_0 k T} \quad \text{kde } M > 0, a_0 \in (-\infty; \infty), k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

První podmínku splníme vynásobením dané diskretní časové funkce diskretním Heavisideovým skokem definovaným

$$\eta = (kT) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{pro } k < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Srovnáním definičních vztahů pro přímou Z-transformaci a D-transformaci obdržíme následující vztahy mezi D-obrazem a Z-obrazem:

$$X(z) = \frac{1}{T} X(\gamma) \Big|_{\gamma = \frac{z-1}{T}} \quad (1.8)$$

L-transformaci můžeme z D-transformace obdržet jednoduchým nastavením vzorkovací periody na nulu. To je velmi užitečná vlastnost D-transformace, neboť nám umožňuje podat sjednocenou transformační teorii, která současně zahrnuje jak diskrétní tak spojité případy.

Odvození:

Do výrazu $\gamma = \frac{z-1}{T}$ dosadíme vztah mezi L a Z-transformací

$$\boxed{z = e^{Ts}} \quad (1.9)$$

potom pro limitní přechod platí:

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow 0} \gamma = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{Ts} - 1}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} s e^{Ts} = s} \quad (1.10)$$

tedy

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow 0} X(\gamma) = X(s)} \quad (1.11)$$

1.3 Základní vlastnosti D-transformace

1.3.1 Linearita

$$\begin{aligned} D\{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)\} &= T \sum_{k=0}^{\infty} [a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)] (1 + \gamma T)^{-k} = \\ &= a_1 T \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kT) (1 + \gamma T)^{-k} \pm a_2 T \sum_{k=0}^{\infty} x_2(kT) (1 + \gamma T)^{-k} = a_1 X_1(\gamma) \pm a_2 X_2(\gamma) \end{aligned}$$

$$\boxed{D\{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)\} = a_1 X_1(\gamma) \pm a_2 X_2(\gamma)} \quad (1.12)$$

1.3.2 Posuv v časové oblasti vpravo (zpoždění)

zpoždění o vzorkovací periodu T

$$D\{x[(k-1)T]\} = T \sum_{k=0}^{\infty} x[(k-1)T] (1 + \gamma T)^{-k}$$

položíme-li $i = k - 1$, potom

$$D\{x[(k-1)T]\} = T \sum_{i=-1}^{\infty} x(iT) (1 + \gamma T)^{-i-1}$$

Aby funkce $x(iT)$ mohla být originálem, musí být pro záporný čas nulová, tzn. $x(-T) = 0$.

Výše uvedený výraz lze potom napsat:

$$D\{x[(k-1)T]\} = T \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) (1 + \gamma T)^{-i-1}$$

Dalšími úpravami obdržíme:

$$\begin{aligned} D\{x[(k-1)T]\} &= T \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) (1 + \gamma T)^{-i} (1 + \gamma T)^{-1} = \\ &= (1 + \gamma T)^{-1} T \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) (1 + \gamma T)^{-i} = \frac{1}{1 + \gamma T} X(\gamma) \end{aligned}$$

$$\boxed{D\{x[(k-1)T]\} = \frac{1}{1 + \gamma T} X(\gamma)} \quad (1.13)$$

b) zpoždění o mT , viz [Mindeková 1996]

$$\boxed{D\{x[(k-m)T]\} = (1 + \gamma T)^{-m} X(\gamma)} \quad (1.14)$$

kde

m je libovolné přirozené číslo

1.3.3 Posuv v časové oblasti vlevo (předstih)

a) předstih o vzorkovací periodu T

$$D\{x[(k+1)T]\} = T \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+1)T](1+\gamma T)^{-k}$$

Položíme-li $i = k+1$, potom

$$\begin{aligned} D\{x[(k+1)T]\} &= T \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)(1+\gamma T)^{-i+1} - T(1+\gamma T)x(0) = \\ &= (1+\gamma T)T \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)(1+\gamma T)^{-i} - T(1+\gamma T)x(0) = \\ &= (1+\gamma T)X(\gamma) - T(1+\gamma T)x(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{D\{x[(k+1)T]\} = (1+\gamma T)X(\gamma) - T(1+\gamma T)x(0)} \quad (1.15)$$

b) předstih o mT , viz [Mindeková 1996]

$$\boxed{D\{x[(k+m)T]\} = (1+\gamma T)^m X(\gamma) - T \sum_{k=0}^{m-1} x(kT)(1+\gamma T)^{m-k}} \quad (1.16)$$

kde m je libovolné přirozené číslo

1.3.4 Obraz dopředné difference

a) difference 1. řádu

$$D\{\Delta x(kT)\} = D\{x[k+1]T - x(kT)\}$$

Využitím vlastnosti linearity D-transformace (1.12):

$$\begin{aligned} D\{\Delta x(kT)\} &= D\{x[(k+1)T]\} - D\{x(kT)\} = \\ &= (1+\gamma T)X(\gamma) - T(1+\gamma T)x(0) - X(\gamma) = \gamma T X(\gamma) - T(1+\gamma T)x(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{D\{\Delta x(kT)\} = \gamma T X(\gamma) - T(1+\gamma T)x(0)} \quad (1.17)$$

b) difference n -tého řádu, viz [Mindeková 1996]

$$\boxed{D\{\Delta^n x(kT)\} = (\gamma T)^n X(\gamma) - T(1+\gamma T) \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma T)^{n-i-1} \Delta^i x(0)} \quad (1.18)$$

1.3.5 Obraz zpětné difference

a) difference 1. řádu

$$\begin{aligned} D\{\nabla x(kT)\} &= D\{x(kT) - x[(k-1)T]\} = D\{x(kT)\} - D\{x[(k-1)T]\} = \\ &= X(\gamma) - \frac{1}{1+\gamma T} X(\gamma) = \frac{\gamma T}{1+\gamma T} X(\gamma) \end{aligned}$$

$$\boxed{D\{\nabla x(kT)\} = \frac{\gamma T}{1+\gamma T} X(\gamma)} \quad (1.19)$$

b) difference n -tého řádu, viz [Mindeková 1996]

$$\boxed{D\{\nabla^n x(kT)\} = \left(\frac{\gamma T}{1+\gamma T} \right)^n X(\gamma)} \quad (1.20)$$

1.3.6 Obraz dopředné sumace

Dopředná sumace je dána vztahem:

$$y(kT) = T \sum_{i=0}^{k-1} x(iT)$$

Předpokládáme, že $y(0) = 0$. Odvození obrazu dopředné sumace pomocí dopředné difference $\Delta y(kT)$:

$$\Delta y(kT) = y[(k+1)T] - y(kT) = T \sum_{i=0}^k x(iT) - T \sum_{i=0}^{k-1} x(iT) = Tx(kT)$$

Provedeme-li D-transformaci vztahu $\Delta y(kT) = Tx(kT)$, obdržíme:

$$\gamma TY(\gamma) = TX(\gamma)$$

$$\text{potom } Y(\gamma) = \frac{1}{\gamma} X(\gamma)$$

$$\boxed{D \left\{ T \sum_{i=0}^{k-1} x(iT) \right\} = \frac{1}{\gamma} X(\gamma)} \quad (1.21)$$

1.3.7 Obraz zpětné sumace

Zpětná sumace je dána vztahem:

$$y(kT) = T \sum_{i=0}^k x(iT)$$

Obraz zpětné sumace určíme pomocí zpětné difference $\nabla y(kT)$:

$$\nabla y(kT) = y(kT) - y[(k-1)T] = T \sum_{i=0}^k x(iT) - T \sum_{i=0}^{k-1} x(iT) = Tx(kT)$$

Provedeme-li D-transformaci vztahu $\nabla y(kT) = Tx(kT)$, obdržíme:

$$\frac{\gamma T}{1 + \gamma T} Y(\gamma) = TX(\gamma)$$

potom

$$Y(\gamma) = \frac{1 + \gamma T}{\gamma} X(\gamma)$$

$$\boxed{D \left\{ T \sum_{i=0}^k x(iT) \right\} = \frac{1 + \gamma T}{\gamma} X(\gamma)} \quad (1.22)$$

1.3.8 Obraz delta difference

a) delta difference 1. řádu

$$\begin{aligned} D\{\delta x(kT)\} &= T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} (1 + \gamma T)^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+1)T] (1 + \gamma T)^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) (1 + \gamma T)^{-k} = \\ &= \frac{1}{T} (1 + \gamma T) X(\gamma) - (1 + \gamma T) x(0) - \frac{1}{T} X(\gamma) = \gamma X(\gamma) - (1 + \gamma T) x(0) \\ \boxed{D\{\delta x(kT)\} &= \gamma X(\gamma) - (1 + \gamma T) x(0)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

b) delta difference n -tého, řádu viz [Mindeková 1996]

$$\boxed{D\{\delta^n x(kT)\} = \gamma^n X(\gamma) - (1 + \gamma T) \sum_{i=0}^{n-1} \gamma^{n-i-1} \delta^i x(0)} \quad (1.24)$$

1.3.9 Konvolutorní součet

Konvolutorní součet můžeme zapsat následovně:

$$y(kT) = T \sum_{i=0}^k u(iT) g[(k-i)T] = T \sum_{i=0}^k g(iT) u[(k-i)T] = g(kT) * u(kT) = u(kT) * g(kT)$$

Pro odvození obrazu konvolutorního součtu si nejprve upravíme vztah pro jeho výpočet:

$$y(kT) = T \sum_{i=0}^k u(iT)g[(k-i)T] = T \sum_{i=0}^{\infty} u(iT)g[(k-i)T] - T \sum_{i=k+1}^{\infty} u(iT)g[(k-i)T]$$

Výraz $T \sum_{i=k+1}^{\infty} u(iT)g[(k-i)T]$ je roven nule, protože argument u funkce $g[(k-i)T]$ je záporný.

Aby funkce $g[(k-i)T]$ mohla být originálem, musí být pro záporný čas nulová. potom

$$y(kT) = T \sum_{i=0}^{\infty} u(iT)g[(k-i)T]$$

Provedeme-li D-transformaci předchozího vztahu, obdržíme:

$$\begin{aligned} D \left\{ T \sum_{i=0}^{\infty} u(iT)g[(k-i)T] \right\} &= T \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[T \sum_{i=0}^{\infty} u(iT)g[(k-i)T] \right] (1 + \gamma T)^{-k} \right\} = \\ T \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ u(iT) \left[T \sum_{k=0}^{\infty} g[(k-i)T] (1 + \gamma T)^{-k} \right] \right\} &= T \sum_{i=0}^{\infty} u(iT) (1 + \gamma T)^{-i} G(\gamma) = U(\gamma)G(\gamma) \\ \boxed{D \left\{ T \sum_{i=0}^k u(iT)g[(k-i)T] \right\}} &= U(\gamma)G(\gamma) = G(\gamma)U(\gamma) \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.3.10 Počáteční hodnota v časové oblasti

Z definičního vzorce D-transformace (1.3) dostaneme přímo vztah pro výpočet počáteční hodnoty v časové oblasti:

$$\boxed{x(0) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X(\gamma)} \quad (1.26)$$

1.3.11 Koncová hodnota v časové oblasti

Z definičního vzorce (1.3) obdržíme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{T} X(\gamma)$$

Využitím již dříve odvozené korespondence (1.17) a výše uvedeného vztahu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta x(kT) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{T} [\gamma T X(\gamma) - T(1 + \gamma T)x(0)]$$

Protože platí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta x(kT) = x(\infty) - x(0)$$

pak po úpravě dostaneme hledaný výraz pro výpočet koncové hodnoty v časové oblasti:

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma X(\gamma)} \quad (1.27)$$

1.3.12 Derivace v oblasti komplexní proměnné

K odvození využijeme definičního vzorce (1.3). Derivací tohoto vztahu podle komplexní proměnné γ obdržíme:

$$\frac{dX(\gamma)}{d\gamma} = -T \sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT)(1+\gamma T)^{-k-1} = -\frac{1}{1+\gamma T} D\{kTx(kT)\}$$

potom:

$$D\{kTx(kT)\} = -(1+\gamma T) \frac{dX(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{dX(\gamma)}{d\gamma} - \gamma T \frac{dX(\gamma)}{d\gamma} \quad (1.28)$$

1.3.13 Hodnota sumy v časové oblasti

Z definičního vzorce D-transformace (1.3) po úpravě vyplývá:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) = \frac{1}{T} \lim_{\gamma \rightarrow 0} X(\gamma)$$

Provedeme-li derivaci vzorce (1.3) podle komplexní proměnné γ , obdržíme:

$$\frac{dX(\gamma)}{d\gamma} = -T \sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT)(1+\gamma T)^{-k-1}$$

po úpravě:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT) &= -\frac{1}{T} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{dX(\gamma)}{d\gamma} \\ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) &= \frac{1}{T} \lim_{\gamma \rightarrow 0} X(\gamma) \\ \sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT) &= -\frac{1}{T} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{dX(\gamma)}{d\gamma} \end{aligned} \quad (1.29)$$

1.3.14 Operace podle nezávislého parametru

Při odvozování dále uvedených vztahů se vychází ze vztahů pro Z-transformaci a došlo se k těmto závěrům, viz [Mindeková 1996]:

$$\begin{aligned} D\{x(kT, a)\} &= X(\gamma, a) \\ D\{\lim_{a \rightarrow a_0} x(kT, a)\} &= \lim_{a \rightarrow a_0} X(\gamma, a) \\ D\left\{\frac{\partial x(kT, a)}{\partial a}\right\} &= \frac{\partial X(\gamma, a)}{\partial a} \\ D\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(kT, a) da\right\} &= \int_{a_1}^{a_2} X(\gamma, a) da \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.3.15 Obraz periodické funkce (perioda = mT)

$$D\{x(kT) + x[(k-m)T] + x[(k-2m)T] + \dots\} = X(\gamma) [1 + (1+\gamma T)^{-m} + (1+\gamma T)^{-2m} + \dots] = \frac{1}{1 - (1+\gamma T)^{-m}} X(\gamma)$$

Odvození bylo provedeno na základě vztahu (1.14) a vlastnosti následující geometrické řady, viz [Bartsch 1987]:

$$1 + v + v^2 + \dots = \frac{1}{1-v}, \text{ kde pro náš případ } v = (1+\gamma T)^{-m}.$$

$$D\{x(kT) + x[(k-m)T] + x[(k-2m)T] + \dots\} = \frac{1}{1 - (1+\gamma T)^{-m}} X(\gamma) \quad (1.31)$$

1.3.16 Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti

$$D\{e^{\mp akT} x(kT)\} = T \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mp akT} x(kT) (1 + \gamma T)^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [(1 + \gamma T) e^{\pm aT}]^{-k} =$$

$$= T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) (1 + uT)^{-k} = X(u)$$

Zavedeme substituci:

$$1 + uT = (1 + \gamma T) e^{\pm aT}$$

tedy

$$u = \frac{1}{T} [e^{\pm aT} - 1] + \gamma e^{\pm aT}$$

$$\boxed{D\{e^{\mp akT} x(kT)\} = X\left[\frac{1}{T} [e^{\pm aT} - 1] + \gamma e^{\pm aT}\right]} \quad (1.32)$$

1.3.17 Změna měřítka (podobnost)

Dosazením za $e^{aT} = c$ do vztahu (1.32) obdržíme

$$D\{c^k x(kT)\} = X\left[\frac{1}{T} \left(\frac{1}{c} - 1\right) + \frac{1}{c} \gamma\right] = X\left[\frac{1 - c + \gamma T}{cT}\right]$$

$$\boxed{D\{c^k x(kT)\} = X\left[\frac{1 - c + \gamma T}{cT}\right]} \quad (1.33)$$

Výše uvedené základní vlastnosti D-transformace jsou shrnuty formou tabulky jako příloha.

2 Delta modely

Pomocí delta modelů můžeme provést popis chování lineárních stacionárních dynamických systémů se vstupní veličinou $u(kT)$ a výstupní veličinou $y(kT)$.



Obr. 2-1 LSDS s jedním vstupem a jedním výstupem

2.1 Popis dynamických systémů pomocí delta modelů

2.1.1 Lineární delta diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Delta diferenční rovnice jsou určeny pro popis vlastností lineárních stacionárních dynamických systémů (LSDS) v časové oblasti:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \delta^i y(kT) = \sum_{j=0}^m \beta_j \delta^j u(kT) \quad (2.1)$$

kde α_i, β_j jsou konstantními koeficienty

$$\delta^i y(kT) = \frac{1}{T} (\delta^{i-1} y[(k+1)T] - \delta^{i-1} y(kT)), \quad \text{pro } i=0 \text{ platí: } \delta^0 y(kT) = y(kT),$$

$$\delta^i u(kT) = \frac{1}{T} (\delta^{i-1} u[(k+1)T] - \delta^{i-1} u(kT)), \quad \text{pro } i=0 \text{ platí: } \delta^0 u(kT) = u(kT).$$

Počáteční podmínky:

$$y(0), \delta y(0), \delta^2 y(0), \dots, \delta^{n-1} y(0),$$

$$u(0), \delta u(0), \delta^2 u(0), \dots, \delta^{m-1} u(0).$$

Celkem tedy máme $n+m$ počátečních podmínek.

Protože výstupní signál nemůže předbíhat vstupní signál, zavádíme tzv. podmínky fyzikální realizovatelnosti:

$n = m$ slabá podmínka,

$n > m$ silná podmínka.

Statická charakteristika $y = \frac{\beta_0}{\alpha_0} u, \quad \alpha_0 \neq 0.$

Pro spojitý systém: $T \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} \delta^i x(kT) \rightarrow \frac{d^i x(t_k)}{dt^i} \\ x(kT) \rightarrow x(t_k) \end{array} \right.$

2.1.2 D-přenos $G(\gamma)$

D-přenos popisuje vlastnosti LSDS v oblasti komplexní proměnné γ . Je dán poměrem obrazu výstupní veličiny $Y(\gamma)$ k obrazu vstupní veličiny $U(\gamma)$ při nulových počátečních podmínkách.

Provedeme D-transformaci rovnice (2.1), pro nulové počáteční podmínky, dostaneme následující rovnici:

$$\alpha_n \gamma^n Y(\gamma) + \dots + \alpha_1 \gamma Y(\gamma) + \alpha_0 Y(\gamma) = \beta_m \gamma^m U(\gamma) + \dots + \beta_1 \gamma U(\gamma) + \beta_0 U(\gamma)$$

po úpravě:

$$Y(\gamma) [\alpha_n \gamma^n + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0] = U(\gamma) [\beta_m \gamma^m + \dots + \beta_1 \gamma + \beta_0].$$

D-přenos má potom tvar:

$$G(\gamma) = \frac{Y(\gamma)}{U(\gamma)} = \frac{D\{y(kT)\}}{D\{u(kT)\}} = \frac{\beta_m \gamma^m + \dots + \beta_1 \gamma + \beta_0}{\alpha_n \gamma^n + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0} \quad (2.2)$$

Počáteční podmínky:

nulové

Podmínky fyz. realizovatelnosti:

$n = m$ slabá podmínka,

$n > m$ silná podmínka.

Statická charakteristika:

$$y = \left[\lim_{\gamma \rightarrow 0} G(\gamma) \right] u, \quad \alpha_0 \neq 0$$

L – přenos vyjádřený pomocí komplexní proměnné s :

$$G(s) = \lim_{T \rightarrow 0} G(\gamma) \Big|_{\gamma=s}$$

Z – přenos vyjádřený pomocí komplexní proměnné z :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{1}{T} Y(\gamma)}{\frac{1}{T} U(\gamma)} \Big|_{\gamma=\frac{z-1}{T}} = G(\gamma) \Big|_{\gamma=\frac{z-1}{T}}$$

2.1.3 Diskrétní impulsní (váhová) funkce $g(kT)$

Diskrétní impulsní funkce $g(kT)$ popisuje vlastnosti LSDS v časové oblasti. Je to odezva diskrétního dynamického systému na diskrétní vstupní signál ve tvaru diskrétního Diracova impulsu $\delta(kT)$. Jejím grafickým znázorněním je impulsní charakteristika.

Pro vstupní signál $u(kT)$ určíme jeho odpovídající obraz $U(\gamma)$:

$$\delta(kT) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0 \end{cases}, \quad U(\gamma) = 1.$$

Pro obraz výstupní veličiny platí:

$$Y(\gamma) = G(\gamma)U(\gamma) = G(\gamma).$$

Vyjádření v diskrétní časové oblasti získáme jako:

$$g(kT) = D^{-1}\{G(\gamma)\} \quad (2.3)$$

Počáteční podmínky: nulové

Podmínky fyz. realizovatelnosti: $g(kT) = 0$ pro $k < 0$ slabá podmínka
 $g(kT) = 0$ pro $k \leq 0$ silná podmínka

Statická charakteristika: $y = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} T \sum_{i=0}^k g(iT) \right] u.$

2.1.4 Diskrétní přechodová funkce $h(kT)$

Diskrétní přechodová funkce popisuje vlastnosti LSDS v časové oblasti. Je to odezva dynamického systému na vstupní signál ve tvaru Heavisideova skoku. Jejím, grafickým vyjádřením je přechodová charakteristika.

Pro vstupní signál $\eta(kT)$ určíme jeho odpovídající obraz $U(\gamma)$:

$$\eta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k \geq 0 \\ 0 & \text{pro } k < 0 \end{cases}, \quad U(\gamma) = \frac{1 + \gamma T}{\gamma}.$$

Pro obraz výstupní veličiny platí:

$$H(\gamma) = Y(\gamma) = G(\gamma)U(\gamma) = \frac{1 + \gamma T}{\gamma} G(\gamma).$$

Vyjádření v diskrétní časové oblasti získáme jako:

$$h(kT) = D^{-1} \{H(\gamma)\} = D^{-1} \left\{ \frac{1 + \gamma T}{\gamma} G(\gamma) \right\} \quad (2.4)$$

Počáteční podmínky: nulové

Podmínky fyz. realizovatelnosti: $h(kT) = 0$ pro $k < 0$ slabá podmínka

$h(kT) = 0$ pro $k \leq 0$ silná podmínka

Statická charakteristika: $y = [\lim_{k \rightarrow \infty} h(kT)] u$

Vztah mezi impulsní a přechodovou funkcí:

v oblasti komplexní proměnné:

$$H(\gamma) = \frac{1 + \gamma T}{\gamma} G(\gamma) \leftrightarrow G(\gamma) = \frac{\gamma}{1 + \gamma T} H(\gamma)$$

v časové oblasti:

$$h(kT) = T \sum_{i=0}^k g(iT) \leftrightarrow g(kT) = \frac{1}{T} \{h(kT) - h[(k-1)T]\}$$

2.1.5 Diskrétní kmitočtový přenos

Diskrétní kmitočtový přenos popisuje vlastnosti LSDS v kmitočtové oblasti. Jeho grafickým znázorněním je amplitudofázová kmitočtová charakteristika. Diskrétní kmitočtový přenos obdržíme dosazením následujícího výrazu do přenosu $G(\gamma)$ (2.2) za komplexní proměnnou γ

$$\gamma = \frac{e^{jT\omega} - 1}{T} \quad (2.5)$$

kmitočtový přenos je tedy dán vztahem:

$$G\left(\frac{e^{jT\omega} - 1}{T}\right) = G(\gamma) \Big|_{\gamma = \frac{e^{jT\omega} - 1}{T}} \quad (2.6)$$

Vztah (2.5) můžeme dále zjednodušit použitím Padého rozvoje s uvažováním prvních dvou členů

$$\gamma = \frac{e^{jT\omega} - 1}{T} = \frac{e^{\frac{jT\omega}{2}} - 1}{T} \approx \frac{1 + \frac{jT\omega}{2} - 1}{1 - \frac{jT\omega}{2}} = \frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}$$

potom:

$$G\left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}\right) = G(\gamma) \Big|_{\gamma = \frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}} = \frac{\beta_m \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}\right)^m + \dots + \beta_1 \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}\right) + \beta_0}{\alpha_n \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}\right)^n + \dots + \alpha_1 \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}\right) + \alpha_0} \quad (2.7)$$

Počáteční podmínky: nulové

Podmínky fyzikální realizovatelnosti: $n = m$ slabá podmínka
 $n > m$ silná podmínka

Statická charakteristika: $y = \left[\lim_{\omega \rightarrow 0} G \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2} j\omega} \right) \right] u, \alpha_0 \neq 0$

2.1.6 Delta stavový model

Delta stavový model popisuje vlastnosti LSDS v časové oblasti. Na rozdíl od předchozích modelů se jedná o vnitřní popis dynamických systémů. Pro jeden systém můžeme obdržet mnoho různých stavových modelů.

$$\boxed{\delta \mathbf{x}(kT) = \mathbf{\tilde{A}}_{\delta} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}_{\delta} u(kT)} \quad (2.8)$$

$$\boxed{y(kT) = \mathbf{c}_{\delta}^T \mathbf{x}(kT) + d_{\delta} u(kT)} \quad (2.9)$$

kde

$$\mathbf{A}_{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{n-1}], \quad d = 0$$

$d = 0$ jen pro $n > m$

Rovnice (2.8) je tzv. stavová rovnice, která vyjadřuje dynamiku systému. Rovnice (2.9) je rovnice výstupní.

Počáteční podmínky: $\mathbf{x}(0)$, celkem tedy máme n počátečních podmínek

Podmínky fyz. realizovatelnosti: $d \neq 0$ slabá podmínka
 $d = 0$ silná podmínka

Statická charakteristika: $y = [-\mathbf{c}^T \mathbf{A}_{\delta}^{-1} \mathbf{b}_{\delta} + d] u, \det \mathbf{A}_{\delta} \neq 0$

2.2 Příklady

Příklad 1) delta modely

Pro lineární delta diferenční rovnici ve tvaru

$$T^2 \delta^2 y(kT) + 2,5T \delta y(kT) + 1,5625 y(kT) = u(kT)$$

s nulovými počátečními podmínkami určete

- D-přenos
- diskrétní impulsní charakteristiku
- diskrétní přechodovou charakteristiku
- amplitudofázovou kmitočtovou charakteristiku
- delta stavový model

Řešení:

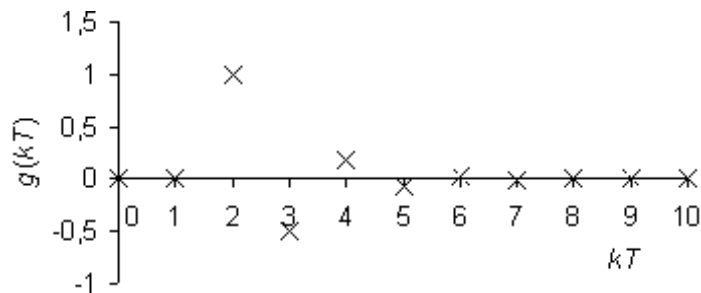
a) D-přenos:

$$G(\gamma) = \frac{1}{T^2 \gamma^2 + 2,5T\gamma + 1,5625} = \frac{1}{(T\gamma + 1,25)^2} = \frac{1}{(h + 0,25)^2} \quad (2.10)$$

kde $h = 1 + \gamma T$

b) diskrétní impulsní charakteristika:

$$g(kT) = D^{-1}\{G(\gamma)\} = D^{-1}\left\{\frac{1}{T} \frac{T}{(h + 0,25)^2}\right\} = \frac{1}{T} \binom{k-1}{1} (-0,25)^{k-2} = \underline{\underline{\frac{1}{T} (k-1) (-0,25)^{k-2}}}$$



Obr. 2-2 Impulsní charakteristika

c) diskrétní přechodová charakteristika:

$$h(kT) = D^{-1}\{H(\gamma)\} = D^{-1}\left\{\frac{1 + \gamma T}{\gamma} G(\gamma)\right\} = D^{-1}\left\{\frac{h}{\gamma} G(\gamma)\right\}$$

dosadíme z (2.10) a provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{H(\gamma)}{h} = \frac{1}{\gamma(h + 0,25)^2} = \frac{A}{\gamma} + \frac{B}{(h + 0,25)} + \frac{C}{(h + 0,25)^2}$$

$$1 = A(h + 0,25)^2 + B\gamma(h + 0,25) + C\gamma$$

nyní určíme konstanty A , B a C :

$$\gamma = 0: 1 = A(h + 0,25)^2 \Rightarrow A = 0,64$$

$$h = -0,25: 1 = C\gamma \Rightarrow C = -0,8T$$

$$h = 1 + \gamma T = -0,25$$

$$\gamma = \frac{-1,25}{T}$$

$$\gamma = 1: 1 = 0,64(h + 0,25)^2 + B(h + 0,25) - 0,8T \Rightarrow B = -0,64T$$

dosadíme koeficienty A , B a C , obraz $H(\gamma)$ zpětně vynásobíme h a provedeme zpětnou D-transformaci:

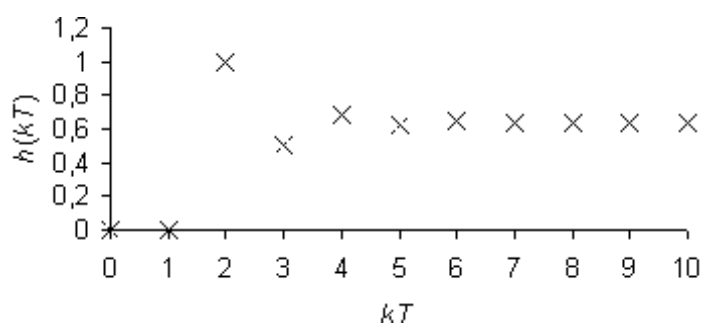
$$D^{-1}\left\{0,64 \frac{h}{\gamma}\right\} = 0,64\eta(kT)$$

$$D^{-1} \left\{ -0,64 \frac{Th}{h+0,25} \right\} = -0,64(-0,25)^k$$

$$D^{-1} \left\{ -0,8 \frac{Th}{(h+0,25)^2} \right\} = -0,8k(-0,25)^{k-1}$$

po sečtení dílčích výsledků je výsledný vztah:

$$h(kT) = \underline{\underline{0,64 - 0,64(-0,25)^k - 0,8k(-0,25)^{k-1}}}$$



Obr. 2-3 Přejchodová charakteristika

d) amplitudofázová kmitočtová charakteristika:

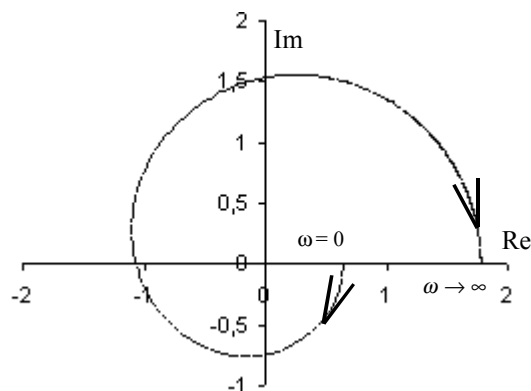
$$G \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2} j\omega} \right) = G(\gamma) \Big|_{\gamma = \frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2} j\omega}} = \frac{1}{T^2 \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2} j\omega} \right)^2 + 2,5T \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2} j\omega} \right) + 1,5625}$$

po úpravě dostaneme výsledný vztah:

$$G \left(\frac{j\omega}{1 - \frac{T}{2} j\omega} \right) = \frac{\frac{0,5625}{16} T^4 \omega^4 - \frac{5,875}{4} T^2 \omega^2 - 1,5625}{\left(-\frac{0,5625}{4} T^2 \omega^2 + 1,5625 \right)^2 + (0,9375T\omega)^2} + j \frac{0,375T^3 \omega^3 - 2,5T\omega}{\left(-\frac{0,5625}{4} T^2 \omega^2 + 1,5625 \right)^2 + (0,9375T\omega)^2}$$

Tab. 2-1 Určení průsečíků s reálnou a imaginární osou

ω	0	1,0469	2,582	6,378	∞
Re	0,6	0	-1	0	1,778
Im	0	-0,762	0	1,533	0



Obr. 2-4 Amplitudofázová kmitočtová charakteristika

e) delta stavový model:
přenos (2.10) upravíme na tvar:

$$G(\gamma) = \frac{\frac{1}{T^2}}{\gamma^2 + \frac{2,5}{T}\gamma + \frac{1,5625}{T^2}} \quad (2.11)$$

pak lze určit delta stavový model přímo z již upraveného přenosu (2.11)

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T^2} \\ -\frac{1,5625}{T^2} & -\frac{2,5}{T} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_\delta^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix} ; \quad d = 0$$

3 Stabilita lineárních dynamických systémů

Stabilita lineárních dynamických systémů je především vlastnost těchto systémů. Stabilitu lze definovat: *lineární dynamický systém je stabilní právě tehdy, když na omezený vstupní signál dostaneme omezený výstupní signál.*

Pro odvození podmínky stability vycházíme z lineární diferenční rovnice:

$$\alpha_n \delta^n y(kT) + \dots + \alpha_1 \delta y(kT) + \alpha_0 y(kT) = \beta_m \delta^m u(kT) + \dots + \beta_1 \delta u(kT) + \beta_0 u(kT) \quad (3.1)$$

Uvažujeme nulové počáteční podmínky.

Po D-transformaci rovnice (3.1) obdržíme:

$$\alpha_n \gamma^n Y(\gamma) + \dots + \alpha_1 \gamma Y(\gamma) + \alpha_0 Y(\gamma) = \beta_m \gamma^m U(\gamma) + \dots + \beta_1 \gamma U(\gamma) + \beta_0 U(\gamma) \quad (3.2)$$

Po úpravě:

$$Y(\gamma) [\alpha_n \gamma^n + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0] = U(\gamma) [\beta_m \gamma^m + \dots + \beta_1 \gamma + \beta_0] \quad (3.3)$$

D-přenos má potom tvar:

$$G(\gamma) = \frac{Y(\gamma)}{U(\gamma)} = \frac{M(\gamma)}{N(\gamma)} = \frac{\beta_m \gamma^m + \dots + \beta_1 \gamma + \beta_0}{\alpha_n \gamma^n + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0} \quad (3.4)$$

Obraz řešení má tvar:

$$Y(\gamma) = \frac{M(\gamma)}{N(\gamma)} U(\gamma)$$

$$\text{kde } M(\gamma) = \beta_m \gamma^m + \dots + \beta_1 \gamma + \beta_0$$

$$N(\gamma) = \alpha_n \gamma^n + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0$$

Jak již bylo dříve zmíněno, stabilita je schopnost systému vrátit se do rovnovážného stavu po odeznění vstupního signálu $u(kT)$. Proto nemá pravá strana vliv na stabilitu. Z tohoto důvodu nás bude zajímat pouze řešení homogenní delta diferenční rovnice:

$$\alpha_n \delta^n y(kT) + \dots + \alpha_1 \delta y(kT) + \alpha_0 y(kT) = 0 \quad (3.5)$$

Po D-transformaci rovnice (3.5) obdržíme:

$$\alpha_n \gamma^n + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0 = 0 \quad (3.6)$$

tzv. charakteristickou rovnici (charakteristický polynom), kde kořeny $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ rozhodují o stabilitě řešení delta rovnice.

Obecné řešení rovnice (3.5) má tvar:

$$y(kT) = C_1 (1 + \gamma_1 T)^k + C_2 (1 + \gamma_2 T)^k + \dots + C_n (1 + \gamma_n T)^k \quad (3.7)$$

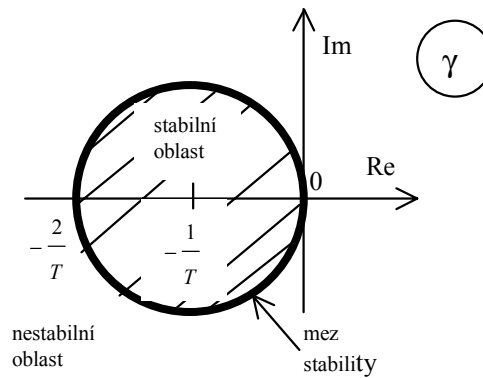
Systém je stabilní právě tehdy, když kořeny charakteristické rovnice leží uvnitř jednotkové kružnice. Tato podmínka platí pro $k \rightarrow \infty$, jestliže

$$|1 + \gamma_i T| < 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

což je **nutná a postačující podmínka stability**.

Jejím vyřešením obdržíme grafické znázornění oblasti stability:

$ 1 + \gamma_i T < 1$		
reálná část		imaginární část
$-1 - \gamma T < 1$	$1 + \gamma T < 1$	$\gamma T < 1$
$\gamma > -\frac{2}{T}$	$\gamma < 0$	$-\gamma T < 1$
		$\gamma < \frac{1}{T}$
		$\gamma > -\frac{1}{T}$



Obr. 3-1 Stabilní a nestabilní oblast

Z obrázku je patrné, že diskretní lineární systém je stabilní, leží-li všechny kořeny charakteristické rovnice (3.6) uvnitř kružnice o poloměru $\frac{1}{T}$ se středem v bodě $\left(-\frac{1}{T}, j0\right)$.

3.1 Bilineární transformace

Abychom mohli použít algebraická kritéria stability pro spojité dynamické systémy, jako např. Hurwitzovo kritérium, musíme pomocí bilineární transformace převést stabilní oblast komplexní roviny γ na stabilní oblast nové komplexní proměnné v . Jedná se zde o tzv. bilineární transformaci, která převede kružnici v komplexní rovině γ na imaginární osu v a vnitřek kružnice v komplexní rovině γ na levou polorovinu komplexní roviny v , viz (obr. 3-2)

Odvození výrazu pro bilineární transformaci [Boháč 1996]:

Srovnáním vztahů (1.2) a (1.9) obdržíme následující vztah:

$$e^{sT} = 1 + \gamma T \quad (3.9)$$

Provedeme Padého rozvoj exponenciální funkce e^{sT} s tím, že budeme uvažovat pouze první dva členy:

$$e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (3.10)$$

Po úpravách a zavedené substituci $s = v$, obdržíme:

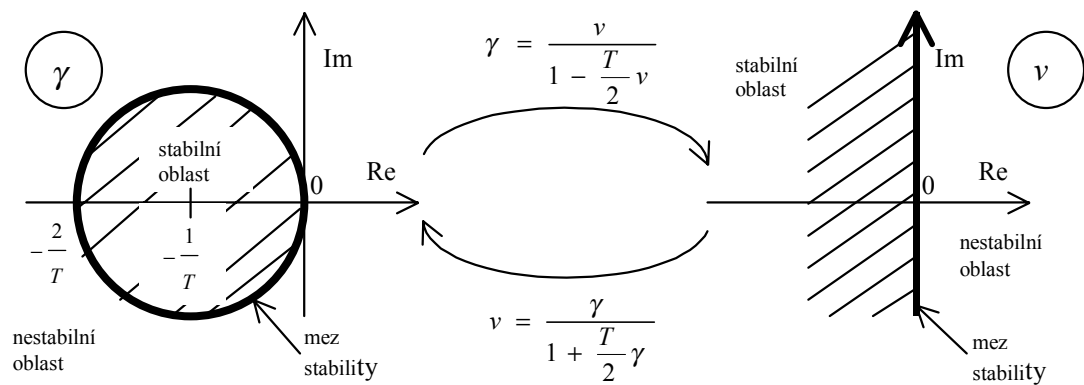
$$\gamma = \frac{v}{1 - \frac{T}{2}v} \quad (3.11)$$

Pomocí bilineární transformace transformujeme $N(\gamma) \rightarrow N(v)$

$$N(v) = N(\gamma) \Bigg|_{\gamma = \frac{v}{1 - \frac{T}{2}v}} \quad (3.12)$$

pro kterou platí nutná a postačující podmínka stability

$$\operatorname{Re} v_i < 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$



Obr. 3-2 Bilineární transformace

Po převedení stabilní oblasti pomocí bilineární transformace lze využít všechna známá kritéria pro kontrolu stability spojitých systémů. Tato kritéria nám umožňují rozhodnout o stabilitě regulačního obvodu (systému) bez výpočtu jeho pólů, resp. charakteristických čísel. Rozlišujeme algebraická a kmitočtová kritéria stability. Zde popíšeme dvě algebraická kritéria stability – Hurwitzovo kritérium stability a Routhovo-Schurovo kritérium stability.

Závěry [Balátě 1987], které přímo můžeme provést z daného tvaru charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu:

$$\alpha_n v^n + \dots + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \quad (3.14)$$

1. Nutnou podmínkou stability dynamických systémů je, aby koeficienty $\alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ charakteristické rovnice existovaly a měly stejné znaménko (Stodolova podmínka)
2. Je-li charakteristická rovnice 2. řádu a všechny tři koeficienty jsou stejného znaménka, potom je obvod vždy stabilní. První podmínka přechází v nutnou a postačující podmínku stability
3. Je-li charakteristická rovnice vyššího stupně než druhého a všechny koeficienty jsou nenulové a stejného znaménka, je stabilita dynamického systému závislá na velikosti jednotlivých koeficientů. Stabilita se potom musí řešit pomocí některého kritéria stability.

3.2 Algebraická kritéria stability

Tato kritéria vycházejí z charakteristické rovnice dynamického systému, resp. z charakteristického polynomu dynamického systému obvodu. Pomocí těchto kritérií můžeme rozhodnout, zda systém je stabilní nebo není stabilní, ale nedávají nám informaci do jaké míry je systém tlumený. Kritéria nemůžeme použít při vyšetřování stability systémů s dopravním zpožděním. Mezi algebraická kritéria stability řadíme Hurwitzovo kritérium a Routhovo-Schurovo kritérium.

3.2.1 Hurwitzovo kritérium stability

Velmi jednoduché kritérium. Je vhodné pro dynamické systémy, jejichž charakteristický polynom je nejvýše pátého stupně.

Pro toto kritérium platí:

1. Nutná Stodolova podmínka
všechny koeficienty charakteristické rovnice (3.14) musí být kladné
 $\alpha_i > 0$ pro $i = 0, 1, \dots, n$ (3.15)

2. Nutná a postačující podmínka: hlavní rohové subdeterminanty H_i pro $i = 2, 3, \dots, n-1$ musí být kladné
 $H_i > 0$ pro $i = 2, 3, \dots, n-1$ (3.16)

kde

$$H_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$H_n = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \alpha_{n-7} & \dots & 0 \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

α_i jsou koeficienty charakteristického polynomu $N(v)$

$$N(v) = \alpha_n v^n + \alpha_{n-1} v^{n-1} + \dots + \alpha_1 v + \alpha_0$$

3.2.2 Routhovo-Schurovo kritérium stability

Lze použít pro dynamické systémy, s libovolným stupněm charakteristického polynomu.

Postup:

1. Koeficienty charakteristického polynomu (3.14) vypíšeme vedle sebe od nejvyšší mocniny.
2. Každý druhý koeficient ($\alpha_{n-1}, \alpha_{n-3}, \dots$) podtrhneme a vynásobíme podílem prvních dvou koeficientů $\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right)$. Výsledek napíšeme o jeden koeficient vlevo pod předcházející řadu.
3. Tuto řadu koeficientů odečteme od předchozí a získáme novou řadu, která má o jeden koeficient méně.
4. Jsou-li všechny koeficienty nové posloupnosti kladné, opakujeme postup od bodu 2.
5. Je-li v nové řadě aspoň jeden koeficient záporný, výpočet ukončíme, neboť charakteristická rovnice má nestabilní kořen a systém je nestabilní.
6. Je-li aspoň jeden koeficient nulový, výpočet ukončíme, neboť charakteristická rovnice má nulový kořen a systém je na mezi stability.
7. Výše zmíněný postup opakujeme až k řadě tří koeficientů. Jsou-li koeficienty kladné, charakteristický polynom má stabilní kořeny a systém je stabilní.

Routhova-Schurova tabulka:

$$\begin{array}{c|c} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 & \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \\ \hline -(\alpha_n & \frac{\alpha_{n-3}\alpha_n}{\alpha_{n-1}} & \dots &) & & & \end{array}, \text{ kde } \alpha'_{n-2} = \alpha_{n-2} - \frac{\alpha_{n-3}\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \alpha_{n-1} & \alpha'_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \end{array}$$

3.3 Přímá kontrola pomocí podmínek

Způsob kontroly stability pomocí bilineární transformace a následného použití některého z kritérií známých pro kontrolu stability u spojitých systémů může být někdy zdlouhavý. Týká se to případů, kdy charakteristický polynom je vyššího řádu. Např. Hurwitzovo kritérium je pro vyšší řády nevhodné. Z těchto důvodů se hledaly způsoby přímé kontroly stability. [Petrov 1986] uvádí 3 podmínky, pomocí kterých lze přímo kontrolovat stabilitu lineárních delta diferenčních rovnic.

Lineární delta diferenční rovnice má tvar:

$$\alpha_n \delta^n y(kT) + \dots + \alpha_1 \delta y(kT) + \alpha_0 y(kT) = \beta_m \delta^m u(kT) + \dots + \beta_1 \delta u(kT) + \beta_0 u(kT) \quad (3.17)$$

Podle Petrova postačujícími podmínkami stability diskretních systémů se vzorkovací periodou T , popsanych výše uvedenou rovnicí, jsou následující 3 podmínky:

$$1. \frac{\alpha_{k-1} \alpha_{k+2}}{\left[\alpha_{k+1} - \alpha_k k \frac{T}{2} \right] \left[\alpha_k - \alpha_{k-1} (k-1) \frac{T}{2} \right]} < \lambda^* \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n-2 \quad (3.18)$$

$$2. \alpha_i \geq \alpha_{i-1} (i-1) \frac{T}{2} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.19)$$

$$3. \alpha_n - \alpha_{n-1} \frac{T}{2} + \alpha_{n-2} \frac{T^2}{4} \geq 0 \quad (3.20)$$

kde λ^* je kořen rovnice $\lambda(\lambda+1)^2 = 1$ ($\lambda^* \approx 0,465$)

Pro $T \rightarrow 0$ se podmínky stability (3.18)-(3.20) diskretních dynamických systémů stávají postačujícími podmínkami stability spojitých systémů.

Tyto podmínky lze zároveň použít pro volbu vzorkovací periody T , při přechodu od spojitých dynamických systémů na diskretní dynamické systémy.

3.4 Příklady

Příklad 1) Nutná a postačující podmínka stability

Zjistěte, zda dynamický systém daný přenosem je stabilní pro $T = 1s$.

$$G(\gamma) = \frac{2T\gamma + 0,5}{\gamma^2 + 0,8T\gamma + 0,6}$$

Řešení:

Dosadíme $T = 1s$:

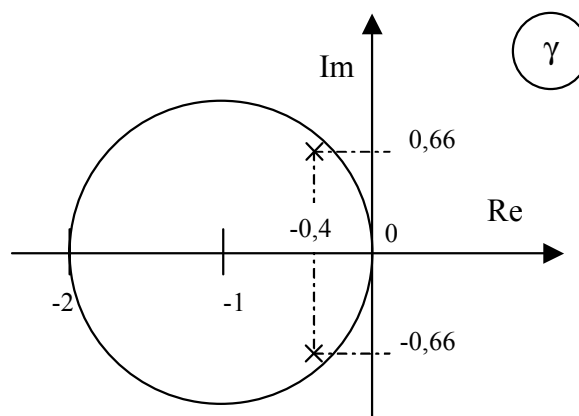
$$G(\gamma) = \frac{2\gamma + 0,5}{\gamma^2 + 0,8\gamma + 0,6}$$

Charakteristický polynom je:

$$N(\gamma) = \gamma^2 + 0,8\gamma + 0,6$$

kořeny charakteristického polynomu jsou:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-0,8 \pm \sqrt{0,8^2 - 2,4}}{2} = -0,4 \pm 0,66j$$



Obr. 3-3 Stabilní oblast

Z obrázku (Obr. 3-3) je patrné, že kořeny leží uvnitř jednotkové kružnice. Z toho vyplývá, že zadaný systém je stabilní.

Příklad 2) Hurwitzovo kritérium stability

Zjistěte, zda dynamický systém daný přenosem je stabilní pro $T = 1s$.

$$G(\gamma) = \frac{0,5T\gamma + 1}{T\gamma(2T\gamma + 1)^2 + 0,5} \quad (3.21)$$

Řešení:

Dosadíme $T = 1s$:

$$G(\gamma) = \frac{0,5\gamma + 1}{\gamma(2\gamma + 1)^2 + 0,5}$$

Nyní určíme výsledný tvar charakteristického polynomu:

$$N(\gamma) = \gamma(2\gamma + 1)^2 + 0,5$$

$$N(\gamma) = \gamma(4\gamma^2 + 4\gamma + 1) + 0,5$$

$$N(\gamma) = 4\gamma^3 + 4\gamma^2 + \gamma + 0,5$$

Po provedení bilineární transformace a dosazením $T = 1s$ dostaneme:

$$N(v) = 4 \left(\frac{v}{1 - \frac{v}{2}} \right)^3 + 4 \left(\frac{v}{1 - \frac{v}{2}} \right)^2 + \frac{v}{1 - \frac{v}{2}} + 0,5$$

$$N(v) = 4v^3 + 4v^2 \left(1 - \frac{v}{2} \right) + v \left(1 - \frac{v}{2} \right)^2 + 0,5 \left(1 - \frac{v}{2} \right)^3$$

Po úpravě má charakteristický polynom tvar:

$$N(v) = 2,188v^3 + 3,375v^2 + 0,250v + 0,5$$

Aby systém byl stabilní, musí být splněny dvě podmínky:

Stodolova podmínka (nutná podmínka stability):

$$\alpha_i > 0 \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, n$$

Pro náš případ:

$$\alpha_0 = 0,500 \quad \alpha_1 = 0,250$$

$$\alpha_2 = 3,375 \quad \alpha_3 = 2,188$$

Z toho vyplývá, že Stodolova podmínka je splněna.

Z Hurwitzova kritéria (3.16) vyplývá:

$$H_i > 0 \quad \text{pro } i = 2, 3, \dots, n-1$$

Pro náš případ stačí určit H_2 :

$$H_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_0 \\ \alpha_3 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,375 & 0,500 \\ 2,188 & 0,250 \end{vmatrix} = 3,375 \cdot 0,250 - 2,188 \cdot 0,500 = \underline{\underline{-0,250}}$$

Protože hodnota subdeterminantu H_2 není kladná, podmínka není splněna a systém je tedy nestabilní.

Příklad 3) Routhovo-Schurovo kritérium stability

Určete pomocí Routhova-Schurova kritéria, zda dynamický systém daný přenosem (3.21) je stabilní.

Řešení:

Pro zjištění, zda systém je stabilní, potřebujeme určit charakteristický polynom $N(\gamma)$, který poté transformujeme na charakteristický polynom $N(v)$ - postupujeme stejným způsobem jako v předchozím příkladu, kde jsme došli k závěru, že transformovaný charakteristický polynom $N(v)$ má tvar:

$$N(v) = 2,188v^3 + 3,375v^2 + 0,250v + 0,5$$

Nyní vypíšeme koeficienty charakteristického polynomu od nejvyšší mocniny vedle sebe a sestavíme Routhovu-Schurovu tabulku podle výše uvedeného postupu:

2,188	3,375	0,250	0,500	2,188
-(2,188		0,324)	3,375
0	3,375	-0,074	0,5	

Protože nám vyšel jeden koeficient záporný (-0,074), systém je nestabilní a výpočet ukončíme.

Příklad 4) Přímá kontrola pomocí podmínek

Zjistěte, zda dynamický systém daný přenosem je stabilní pro $T = 1s$.

$$G(\gamma) = \frac{Y(\gamma)}{U(\gamma)} = \frac{1,5\gamma^2 + 3\gamma + 1}{\gamma^3 + 3\gamma^2 + 3,5\gamma + 1} \quad (3.22)$$

Řešení:

Z přenosu určíme koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ a α_3 :

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = 3,5; \quad \alpha_2 = 3; \quad \alpha_3 = 1$$

Koeficienty dosadíme do podmínek (3.18), (3.19) a (3.20), kde $T = 1s$:

Podmínka (3.18):

$$k = 1: \frac{\alpha_0 \alpha_3}{\left[\alpha_2 - \alpha_1 k \frac{T}{2} \right] \left[\alpha_1 - \alpha_0 (k-1) \frac{T}{2} \right]} < \lambda^*$$

$$\frac{1 \cdot 1}{(3 - 3,500 \cdot 0,500) \cdot 3,500} < 0,465$$

$$\underline{\underline{0,229 < 0,465}}$$

Podmínka je splněna.

Podmínka (3.19):

$$\begin{array}{ll}
 i = 1: & \alpha_1 \geq \alpha_0(i-1)\frac{T}{2} \\
 & 3,500 \geq 1 \cdot 0 \cdot 0,500 \\
 & \underline{\underline{3,500 \geq 0}} \\
 i = 2: & \alpha_2 \geq \alpha_1(i-2)\frac{T}{2} \\
 & 3 \geq 3,500 \cdot 1 \cdot 0,500 \\
 & \underline{\underline{3 \geq 1,750}}
 \end{array}$$

Podmínka je splněna.

Podmínka (3.20):

$$\begin{array}{l}
 \alpha_3 - \alpha_2 \frac{T}{2} + \alpha_1 \frac{T^2}{4} \geq 0 \\
 1 - 3 \cdot 0,500 + 3,500 \cdot 0,250 \geq 0 \\
 \underline{\underline{0,375 \geq 0}}
 \end{array}$$

Podmínka je splněna.

Protože všechny tři podmínky jsou splněny, regulační obvod je stabilní.

Příklad 5)

Zjistěte, zda dynamický systém daný přenosem (3.22) je stabilní pomocí Hurwitzova kritéria stability a Routhova-Schurova kritéria stability.

Řešení:

Charakteristický polynom $N(\gamma)$ má tvar:

$$N(\gamma) = \gamma^3 + 3\gamma^2 + 3,5\gamma + 1$$

Po provedení bilineární transformace a úpravě dostaneme:

$$N(v) = 0,25v^3 + 0,25v^2 + 2v + 1 \quad (3.23)$$

a) Hurwitzovo kritérium stability:

Splnění Stodolovy podmínky:

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_2 = 0,25$$

$$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_3 = 0,25$$

Stodolova podmínka je splněna.

Z Hurwitzova kritéria (3.16) vyplývá:

Pro náš případ stačí určit H_2 :

$$H_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_0 \\ \alpha_3 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,25 & 1 \\ 0,25 & 2 \end{vmatrix} = 0,25 \cdot 2 - 0,25 \cdot 1 = \underline{\underline{0,25}}$$

Hodnota subdeterminantu H_2 je kladná.

Protože jsou obě podmínky Hurwitzova kritéria stability splněny, systém je stabilní.

b) Routhovo-Schurovo kritérium stability:

Vypíšeme koeficienty charakteristického polynomu a sestavíme Routhovu-Schurovu tabulku podle výše uvedeného postupu.

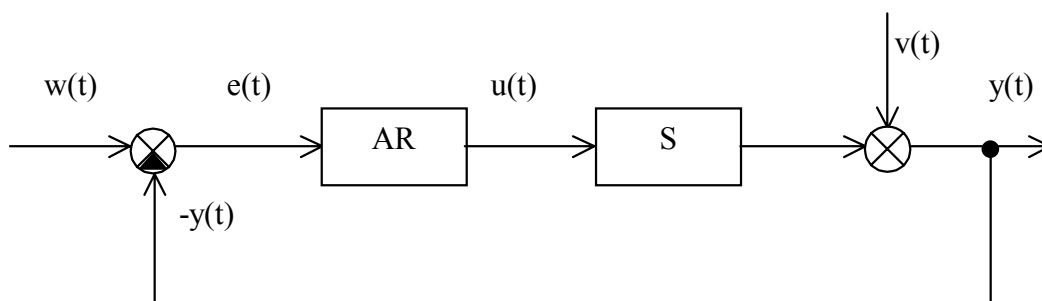
$$\begin{array}{cccc|c}
 0,25 & \underline{0,25} & 2 & \underline{1} & \underline{0,25} \\
 -(0,25 & & 1 &) & 0,25 \\
 \hline
 0 & 0,25 & 1 & 1 &
 \end{array}$$

Protože nám vyšly všechny koeficienty kladné, systém je stabilní.

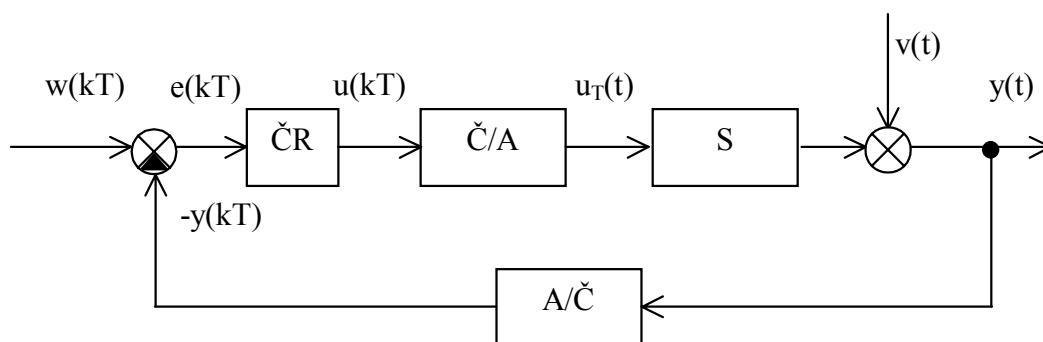
4 Syntéza lineárních regulačních obvodů

Syntézou lineárních regulačních obvodů se myslí nejen navržení struktury obvodu, ale i jeho parametrů. Přičemž takto navržený obvod, musí splňovat požadavky kladené na jeho regulaci.

Tato kapitola se bude zabývat syntézou klasických regulačních obvodů, které lze rozdělit na dvě hlavní části: regulátor a regulovanou soustavu.



Obr. 4-1 Regulační obvod s analogovým regulátorem



Obr. 4-2 Regulační obvod s číslicovým regulátorem

Syntézou se potom myslí volba vhodného regulátoru k zadané soustavě a jeho seřízení podle určitého kritéria.

Při syntéze regulačního obvodu musíme znát:

- Dynamické vlastnosti soustavy
- Předpokládaný průběh řídicí nebo poruchové veličiny a místo jejího vstupu do regulované soustavy (řídicí veličina je většinou konstantní, úkolem regulace je kompenzovat měnící se poruchové veličiny. Vstupní funkcí ve většině případů je jednotkový skok.)
- Požadavky na kvalitu regulace

Bude zde ukázána metoda inverze dynamiky. Tato metoda je jednoduchá a dostatečně přesná.

4.1 Metoda inverze dynamiky

Výhoda této metody [Vítečková 2000] spočívá ve snadném a rychlém seřízení standardních typů analogových a číslicových regulátorů pro základní druhy regulovaných soustav. Soustavy mohou být bez dopravního zpoždění nebo s dopravním zpožděním.

Typ regulátoru je doporučen z hlediska vlastností regulované soustavy a požadavku na nulovou regulační odchylku způsobenou skokovou změnou polohy žádané veličiny w , resp. poruchy v působící na výstupu regulované soustavy.

Budeme předpokládat, že regulované soustavy mají některý z následujících náhradních L-přenosů:

$$G_s(s) = \frac{k_1}{s} e^{-T_d s} \quad (4.1)$$

$$G_s(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s} \quad (4.2)$$

$$G_s(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-T_d s} \quad (4.3)$$

$$G_s(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_d s} \quad (4.4)$$

$$G_s(s) = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} e^{-T_d s} \quad (4.5)$$

$$0,5 < \xi_0 \leq 1$$

$$T_1 \geq T_2 > 0$$

$$T_d \geq 0$$

kde

k_1 - koeficient přenosu (rozměr = podíl rozměrů výstupní a vstupní veličiny, u integračních regulovaných soustav je nutno tento rozměr vynásobit čas⁻¹)

$\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ - netlumený úhlový kmitočet (čas⁻¹)

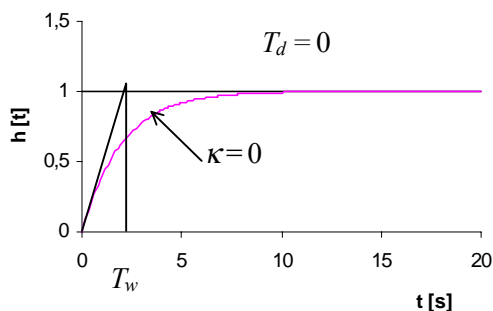
Pokud regulovaná soustava nemá ani jeden z výše uvedených tvarů, je nutné ji aproximovat. Postup aproximace regulovaných soustav náhradními přenosy je popsán viz [Vítečková 2000].

Dále budeme předpokládat, že budou použity pouze standardní typy analogových a číslicových regulátorů. Vycházíme z jejich značné univerzality a velkým rozšířením v technické praxi. Potom jsou doporučené regulátory konvenčního typu a trvalá regulační odchylka $e_w(\infty)$ způsobená skokovou změnou žádané veličiny w je nulová. Rovněž i trvalá regulační odchylka $e_v(\infty)$ způsobená skokovou změnou poruchy v je nulová za předpokladu, že porucha působí na výstupu regulované soustavy.

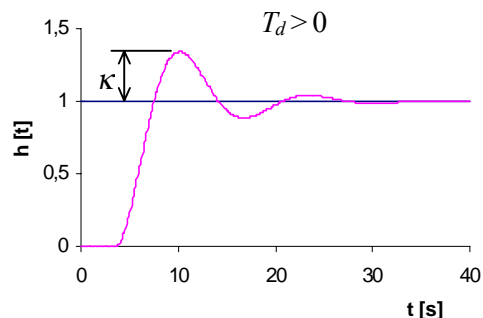
U regulovaných soustav s dopravním zpožděním se při seřízení regulátoru vychází z požadovaného relativního překmitu κ . Při mezním aperiodickém průběhu je $\kappa = 0$ a je minimalizována lineární regulační plocha viz [Vítečková 2000].

Nejprve je třeba vyjádřit vlastnosti regulované soustavy některým ze základních tvarů L-přenosů. Pak na základě tabulky 4.1 určíme pro danou regulovanou soustavu typ regulátoru a optimální hodnoty jeho stavitelných parametrů. Je zapotřebí uvažovat dva případy:

$$T_d > 0 \quad \text{a} \quad T_d = 0.$$



a)



b)

Obr. 4-3

Tab. 4-1

REGULOVANÁ SOUSTAVA	REGULÁTOR				ANALOGOVÝ	$T = 0$	
	TYP	k_R^*		T_I^*	T_D^*	ČÍSLICOVÝ	$T > 0$
		$T_d = 0$	$T_d > 0$				
1	$G_S(s) = \frac{k_1}{s} e^{-T_d s}$	P	$\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{a}{k_1}$	-	-	
2	$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s}$	PI	$\frac{2T_1^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_1^*}{k_1}$	$T_1 - \frac{T}{2}$	-	
3	$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-T_d s}$	PD	$\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{a}{k_1}$	-	$T_1 - \frac{T}{2}$	
4	$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_d s}$ $T_1 \geq T_2$	PID	$\frac{2T_1^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_1^*}{k_1}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$	
5	$G_S(s) = \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} e^{-T_d s}$ $0,5 \leq \xi_0 \leq 1$	PID	$\frac{2T_1^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_1^*}{k_1}$	$2\xi_0 T_0 - T$	$\frac{T_0}{2\xi_0} - \frac{T}{4}$	

Tab. 4-2

κ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
α	1,282	0,984	0,884	0,832	0,763	0,697	0,669	0,640	0,618	0,599	0,577
β	2,718	1,944	1,720	1,561	1,437	1,337	1,248	1,172	1,104	1,045	0,992

V tab. 4.1 je:

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d}.$$

Pro $T > 0$ tabulka 4.1 platí pro číslicové regulátory, pro $T = 0$ platí pro analogové regulátory.

V případě, kdy dopravní zpoždění $T_d > 0$, se nejdříve na základě požadovaného relativního překmitu $\kappa (0 \leq \kappa \leq 0,5)$ u přechodové charakteristiky $h_w(t)$ uzavřeného regulačního obvodu (obr. 4.3b) a (tab. 4.2) určí koeficient

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d}.$$

Pak teprve z (tab. 4.1) určíme optimální hodnoty stavitelných parametrů doporučeného regulátoru. Pokud dopravní zpoždění T_d je velmi malé, hodnotu určeného koeficientu a je třeba vhodně snížit s ohledem na omezení akční veličiny a maximální nastavitelnou hodnotou zesílení regulátoru $k_{R\max}$.

V případě $T_d = 0$ určíme hodnoty stavitelných parametrů přímo z (tab. 4.1) pro daný typ regulované soustavy. Požadovaný průběh přechodové charakteristiky $h_w(t)$ uzavřeného regulačního obvodu se v tomto případě předpokládá podle (obr. 4.3a). Časová konstanta T_w musí být zvolena s ohledem na omezení akční veličiny a maximální nastavitelnou hodnotou regulátoru $k_{R\max}$, u regulačního obvodu s číslicovým regulátorem musí platit $T_w > 0,3T$.

4.2 Příklady

Příklad 1)

Pro regulovanou soustavu s přenosem $G_s(\gamma)$ určete vhodný analogový i číslicový regulátor a seříd'te jej tak, aby přechodová charakteristika $h_w(kT)$ vykazovala překmit kolem $\kappa = 5\%$.

$$G_s(s) = \frac{1 - T_1 s}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)(T_5 s + 1)(T_6 s + 1)};$$

$$T_1 = 2s \quad T_4 = 1s$$

$$T_2 = 10s \quad T_5 = 0,5s$$

$$T_3 = 5s \quad T_6 = 0,2s$$

Řešení:

Převědeme zadaný přenos regulované soustavy na jeden ze základních tvarů uvedených v (tab. 4.1).

Volíme tvar:

$$G_s(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_d s}$$

pro převedení použijeme postupu uvedeném ve [Vítečková 2000]:

$$k_1 = 1 \quad T_1 = 10s \quad T_2 = 5s \quad T_d = T_4 + T_5 + T_6 + T_1 = 1 + 0,5 + 0,2 + 2 = 3,7s$$

pak náhradní přenos je:

$$G_s(s) = \frac{1}{(10s + 1)(5s + 1)} e^{-3,7s}$$

Z (tab. 4.1) je patrné, že pro naši soustavu je vhodný PID regulátor. Výpočet optimálních hodnot stavitelných parametrů PID regulátoru provedeme na základě vztahů opět podle (tab. 4.1).

Výpočet stavitelných parametrů pro PID regulátor:

a) analogový regulátor:

U analogového regulátoru uvažujeme $T = 0s$.

Pro relativní překmit $\kappa = 0,05$ z (tab. 4.2) odečteme příslušnou hodnotu α a β :

$$\alpha = 0,984$$

$$\beta = 1,944$$

potom:

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d} = \frac{1}{0,984 \cdot 0 + 1,944 \cdot 3,7} \doteq 0,139$$

Optimální hodnoty stavitelných parametrů určíme podle (tab. 4.1)

$$T_I^* = T_1 + T_2 - T = 10 + 5 - 0 = \underline{\underline{15s}}$$

$$k_P^* = \frac{a T_I^*}{k_1} = \frac{0,139 \cdot 15}{1} \doteq \underline{\underline{2,085}}$$

$$T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4} = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} - \frac{0}{4} \doteq \underline{\underline{3,333s}}$$

b) číslicový regulátor:

Velikost vzorkovací periody volíme tak, aby byla splněna podmínka $\frac{T}{T_d} < 0,3$:

$$T < 0,3 \cdot T_d; \quad T < 0,3 \cdot 3,70; \quad T < \underline{\underline{1,11s}}$$

zvolíme velikost vzorkovací periody $T = 1s$.

Hodnoty α a β jsou stejné jako pro analogový regulátor:

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T} = \frac{1}{0,984 \cdot 1 + 1,944 \cdot 3,7} \doteq \underline{\underline{0,122}}$$

optimální hodnoty stavitelných parametrů určíme podle (tab. 4.1):

$$T_I^* = T_1 + T_2 - T = 10 + 5 - 1 = \underline{\underline{14s}}$$

$$k_P^* = \frac{a T_I^*}{k_1} = \frac{0,122 \cdot 14}{1} \doteq \underline{\underline{1,708}}$$

$$T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4} = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} - \frac{1}{4} \doteq \underline{\underline{3,083s}}$$

Literatura

- BALÁTĚ, J. 1991. *Vybrané statě z automatického řízení*. Brno : skripta FS VUT, 1991.
- BARTSCH, H. J. 1987. *Matematické vzorce*. Praha : SNTL, 1987. 359 s. ISBN 80-214-0271-7.
- BROŽA, P. 2001. *Tvorba WWW stránek pro úplné začátečníky*. Praha : Computer Press, 2001.
- BOHÁČ, D. 1996. *Použití delta modelů v teorii automatického řízení*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 1996. Diplomová práce , ved. DP: Vítečková, M.
- CLARK, S. & PRUSSAK, P. 2000. *VBScript průvodce vývojáře*. Brno : UNIS Publishing, 2000. 780 s.
- CLARK, S., De DONATIS, B. & spol. 2000. *HTML a XHTML Kompletní průvodce*. Praha : Computer Press, 2000. 633 s. ISBN 80-7226-407-9.
- GEBAUEROVÁ, M. 1997. *Využití delta modelů v teorii automatického řízení*. Ostrava : FS VŠB-TU Ostrava, diplomová práce, ved. DP: Vítečková, M., 1997.
- HALATA, M. 2001. *Sbírka řešených příkladů z oblasti aplikované informatiky*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, kat. ATŘ-352, 2001. 47 s. Bakalářská práce, vedoucí práce: Farana, R. Dostupný z www: <URL: <http://www.fs.vsb.cz/books/ZakInfSbirka/Index.html>>.
- HALÁSEK, T. & VÍTEČKOVÁ, M. 2000. *Využití delta transformace a delta modelů v řízení*. Ostrava : VŠB – TU Ostrava, KATŘ 352, 12/ 2000. 48 s. Technická zpráva projektu FR VŠ G1/0734/2000.
- HATFIELD, B. 1997. *Visual Basic Script tvorba dokonalých www stránek*. 1. vydání. Praha : Grada Publishing, 1997. 400 s. ISBN 80-7169-486-X.
- FARANA, R. & KAČMÁŘ, D. 1996. *Tvorba HTML dokumentů*. Ostrava : FS VŠB – TU Ostrava, 1996.
- FARANA, R., SMUTNÝ, L. & VÍTEČEK, A. *Zpracování odborných textů z oblasti automatizace a informatiky*. dotisk 1. vyd. Ostrava : Katedra ATŘ, VŠB-TU Ostrava, 2001. 68 s. ISBN 80-78-737-6
- MIDDLETON, R. H. & GOODWIN, G. C. 1990. *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, Inc., 1990. ISBN 0-132-1-16650.
- MINÁR, K. 2000. *Prezentační a výukový modul pro oblast analýzy regulačních obvodů v prostředí Intranetu*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, kat. ATŘ-352, 2000. Bakalářská práce, vedoucí práce: Wagnerová, R. Dostupný z www: <URL: <http://www.fs.vsb.cz/books/Analyza/prvni.html>>.
- MINDEKOVÁ, D. 1996. *Použití delta modelů při syntéze lineárních regulačních obvodů*. Ostrava : FS VŠB-TU Ostrava, 1996, diplomová práce, ved. DP: Vítečková, M.
- PETROV, B. N. & SOKOLOV, N. I. & LIPATOV, A. V. 1986. *Sistemy avtomatičeskovo upravlenija objektami s peremennymi parametrami: Inženeryjne metody analiza i sinteza*. Moskva : Mašinostrojenije 1986.
- REMEŠ, R. 1999. *Počítačová podpora výuky v oblasti automatizace a řízení v prostředí internetu*. Ostrava : FS VŠB-TU Ostrava. Diplomová práce, ved. DP: Vítečková, M. Dostupný z www: <URL: <http://www.fs.vsb.cz/books/MatMet/ATR.htm>>.
- SCHEE, K. 1999. *Aplikace delta modelů pro analýzu a syntézu systémů řízení*. Ostrava : FS VŠB-TU Ostrava. Diplomová práce, ved. DP: Vítečková, M.
- SOVA, J. *Učebnice HTML* [online]. 2001 [cit. 2002-03-24]. Dostupný z www: <URL: <http://linux.programator.cz/projekty/html>>.
- SZTABLA, R. 1998. *Hypertextové učební texty v prostředí sítě INTRANET*. Ostrava : FS VŠB- TU Ostrava, 1998. Diplomová práce, ved. DP: Farana, R.
- VÍTEČKOVÁ, M. 2000. *Seřízení regulátorů metodou inverze dynamiky*. Ostrava : VŠB – TU Ostrava, 2000. ISBN 80-7078-628-0.

-
- WAGNEROVÁ, R. & VÍTEČKOVÁ, M. 2001. *Začlenění delta transformace do výuky bakalářského a magisterského studia*. Závěrečná zpráva grantového projektu FR VŠ MŠMT F1/0347/2001. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, prosinec 2001. 16s .+ 90 s. příloh.
- WAGNEROVÁ, R. & VÍTEČKOVÁ, M. 2002. *Využití delta transformace při analýze a syntéze regulačních obvodů*. In: *Workshop 2002 Fakulty strojní*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 17. 1. 2002, s. 201-204. ISBN 80-248-0051-9.

Příloha

TAB.1. DEFINIČNÍ VZTAHY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

	D-transformace
	Definiční vzorce
1	$X(\gamma) = D\{x(kT)\} = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(1 + \gamma T)^{-k}$
2	$x(kT) = D^{-1}\{X(\gamma)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(\gamma)(1 + \gamma T)^{k-1} d\gamma$ C – poloměr kružnice, uvnitř které leží všechny singulární body obrazu
3	Linearita $D\{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)\} = a_1 X_1(\gamma) \pm a_2 X_2(\gamma)$
4	Podobnost obrazů $D\{c^k x(kT)\} = X\left(\frac{\gamma T + 1 - c}{Tc}\right) \quad c \neq 0$
5	Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti $D\{x(kT)e^{\mp akT}\} = X\left[\frac{1}{T}(e^{\pm aT} - 1) + \gamma e^{\pm aT}\right]$
6	Konvoluce v časové oblasti $D\left\{T \sum_{i=0}^k x_1[(k-i)T]x_2(iT)\right\} =$ $= D\left\{T \sum_{i=0}^k x_2[(k-i)T]x_1(iT)\right\} =$ $= X_1(\gamma)X_2(\gamma) = X_2(\gamma)X_1(\gamma)$
7	Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění) $D\{x[(k-m)T]\} = (1 + \gamma T)^{-m} X(\gamma), \quad m \geq 0$
8	Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih) $D\{x[(k+m)T]\} =$ $= (1 + \gamma T)^m X(\gamma) - T \sum_{k=0}^{m-1} x(kT)(1 + \gamma T)^{m-k}$ $m \geq 0$
9	Diference v časové oblasti Dopředná diference n -tého řádu $D\{\Delta^n x(kT)\} = (\gamma T)^n X(\gamma) -$ $- T(1 + \gamma T) \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma T)^{n-i-1} \Delta^i x(0)$ Zpětná diference n -tého řádu $D\{\nabla^n x(kT)\} = \left(\frac{\gamma T}{1 + \gamma T}\right)^n X(\gamma)$

	D-transformace
	Sumace v časové oblasti
10	<p>Dopředná sumace</p> $D\left\{T\sum_{i=0}^{k-1}x(iT)\right\}=\frac{1}{\gamma}X(\gamma)$ <p>Zpětná sumace</p> $D\left\{T\sum_{i=0}^kx(iT)\right\}=\frac{1+\gamma T}{\gamma}X(\gamma)$
	Derivace v oblasti komplexní proměnné
11	$D\{kTx(kT)\}=-\frac{dX(\gamma)}{d\gamma}-\gamma T\frac{dX(\gamma)}{d\gamma}$
	Operace podle nezávislého parametru
12	$D\{x(kT,a)\}=X(\gamma,a)$
13	$D\{\lim_{a\rightarrow a_0}x(kT,a)\}=\lim_{a\rightarrow a_0}X(\gamma,a)$
14	$D\left\{\frac{\partial x(kT,a)}{\partial a}\right\}=\frac{\partial X(\gamma,a)}{\partial a}$
15	$D\left\{\int_{a_1}^{a_2}x(kT,a)da\right\}=\int_{a_1}^{a_2}x(\gamma,a)da$
	Obraz periodické funkce
16	$D\{x(kT)+x[(k-m)T]+x[(k-2m)T]+\dots\}=$ $=\frac{1}{1-(1+\gamma T)^{-m}}X(\gamma)$
	Hodnota sumy v časové oblasti
17	$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)=\frac{1}{T}\lim_{\gamma\rightarrow 0}X(\gamma)$
18	$\sum_{k=0}^{\infty}kTx(kT)=-\frac{1}{T}\lim_{\gamma\rightarrow 0}\frac{dX(\gamma)}{d\gamma}$
	Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
19	$x(0)=\lim_{k\rightarrow 0}x(kT)=\frac{1}{T}\lim_{\gamma\rightarrow\infty}X(\gamma)$
	Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
20	$x(\infty)=\lim_{k\rightarrow\infty}x(kT)=\lim_{\gamma\rightarrow 0}\gamma X(\gamma)$

TAB.2. ZÁKLADNÍ SLOVNÍK

	Originál $x(kT)$	Obraz $X(\gamma)$
1	$\delta(kT)$	1
2	$\eta(kT)$	$\frac{h}{\gamma}, h = 1 + \gamma T$
3	kT	$\frac{h}{\gamma^2}, h = 1 + \gamma T$
4	$\begin{cases} \binom{k-1}{n-1} (\mp a)^{k-n} & k \geq n \\ 0 \text{ pro } k < n & a \neq 0 \end{cases}$	$\frac{T}{(h \pm a)^n}, h = 1 + \gamma T$
5	$(\mp a)^k, a \neq 0$	$\frac{Th}{h \pm a}, h = 1 + \gamma T$
6	$a^k, a \neq 0$	$\frac{Th}{h - a}, h = 1 + \gamma T$
7	$\begin{cases} \binom{k}{n-1} a^{k-n+1}, & a \neq 0 & k \geq n-1 \\ 0 & & k < n-1 \end{cases}$	$\frac{Th}{(h - a)^n}, h = 1 + \gamma T$
8	$e^{\mp akT}$	$\frac{Th}{h - c}$ $c = e^{\mp aT}, h = 1 + \gamma T$
9	$kT e^{-akT}$	$\frac{cT^2 h}{(h - c)^2}$ $c = e^{-aT}, h = 1 + \gamma T$
10	$\sin(\omega kT)$	$\frac{Th \sin(\omega T)}{h^2 - 2h \cos(\omega T) + 1}$ $h = 1 + \gamma T$
11	$\cos(\omega kT)$	$T \frac{h^2 - h \cos(\omega T)}{h^2 - 2h \cos(\omega T) + 1}$ $h = 1 + \gamma T$