# 4 Konvenční typy lineárních diskrétních regulátorů a jejich modifikace

Základní funkcí regulátoru v regulačním obvodu je vytvářet akční veličinu $u$ na základě regulační odchylky $e = w - y$. Akční veličina má za úkol svým působením na regulovanou soustavu v každém časovém okamžiku zajišťovat to, aby byla regulační odchylka co nejmenší bez ohledu na poruchovou veličinu $v$.

Pro spojité regulátory P, I, PI, PD, PID budou uvedeny jejich číslicové verze, které se označují P (proporcionální), S (sumační), PS (proporcionálně sumační), PD (proporcionálně diferenční), PSD (proporcionálně sumačně diferenční).

## *4.1 Algoritmy číslicových regulátorů*

Od číslicového regulátoru požadujeme stejnou funkci jako od regulátoru spojitého, a proto vycházíme z rovnice spojitého PID regulátoru (4. 1).

$$u(t) = k_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \tag{4. 1}$$

Číslicovou verzi tohoto regulátoru získáme, když integrál nahradíme sumací (4. 2) a derivaci nahradíme zpětnou diferencí (4. 3).

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \to T \sum_{i=0}^{k} e(iT) \tag{4. 2}$$

$$\frac{de(t)}{dt} \to \frac{\nabla e(kT)}{T} \tag{4. 3}$$

Číslicový (diskrétní) regulátor je tedy dán obecným vztahem (4. 4).

$$u(kT) = k_P \left[ e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k} e(iT) + \frac{T_D}{T} \nabla e(kT) \right] \tag{4. 4}$$

kde $\nabla e(kT)$ je zpětná diference definovaná vztahem (4. 5).

$$\nabla e(kT) = e(kT) - e[(k-1)T] \tag{4. 5}$$

Tomuto algoritmu číslicového regulátoru se říká **polohový algoritmus**. Hodnota integrálu se získává **sumací** a hodnota derivace se získává pomocí **diference**. Proto se tyto regulátory nazývají **proporcionálně-sumačně-diferenční,** a označují zkratkou **PSD**. Setkáme se taky s označením **číslicové PID regulátory.** Polohový algoritmus se příliš často nepoužívá hlavně kvůli sumaci, která znamená komplikaci při výpočtu akční veličiny $u(kT)$ [Švarc, 2002].

Z-přenos polohového algoritmu PSD regulátoru tedy je

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k_P \left( 1 + \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \tag{4. 6}$$

Ostatní přenosy regulátorů a algoritmy jsou uvedeny v tab. 4. 1.

**Tab. 4. 1 Diskrétní regulátory**

| Regulátor | Diferenční rovnice – absolutní (polohové) vyjádření | Z-přenos |
|---|---|---|
| P | $u(kT)=k_P e(kT)$ | $G_R(z)=k_P$ |
| S (číslicový I) | $u(kT)=\frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k}e(iT)$ | $G_R(z)=\frac{T}{T_I}\cdot\frac{z}{z-1}$ |
| PS (číslicový PI) | $u(kT)=k_P\left[e(kT)+\frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k}e(iT)\right]$ | $G_R(z)=k_P\left(1+\frac{T}{T_I}\cdot\frac{z}{z-1}\right)$ |
| PD | $u(kT)=k_P\left[e(kT)+\frac{T_D}{T}\nabla e(kT)\right]$ | $G_R(z)=k_P\left(1+\frac{T_D}{T}\cdot\frac{z-1}{z}\right)$ |
| PSD (číslicový PID) | $u(kT)=k_P\left[e(kT)+\frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k}e(iT)+\frac{T_D}{T}\nabla e(kT)\right]$ | $G_R(z)=k_P\left(1+\frac{T}{T_I}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{T_D}{T}\cdot\frac{z-1}{z}\right)$ |

Nyní přejdeme k **přírůstkovému tvaru algoritmu** PSD regulátoru. Podle tohoto algoritmu se určuje nikoliv hodnota akční veličiny $u(kT)$ v daném okamžiku, ale pouze její změna, čili přírůstek oproti hodnotě $u[(k-1)T]$ akční veličiny v předchozím kroku. Přírůstkové algoritmy můžeme použít pouze tehdy, když je obsažena sumační činnost (S, PS, PSD), protože jenom u této činnosti vystupuje regulační odchylka $e(kT)$, viz (4. 9).

Diferenční rovnice PSD pro diskrétní čas $[(k-1)T]$ je vyjádřena vztahem (4. 7).

$$u[(k-1)T]=k_P\left[e[(k-1)T]+\frac{T}{T_I}\sum_{i=1}^{k-1}e(iT)+\frac{T_D}{T}\nabla e[(k-1)T]\right] \tag{4. 7}$$

Diferenční rovnice PSD pro diskrétní čas $kT$ je vyjádřena vztahem (4. 8).

$$u(kT)=k_P\left[e(kT)+\frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k}e(iT)+\frac{T_D}{T}\nabla e(kT)\right] \tag{4. 8}$$

Po odečtení těchto dvou vztahů získáme **přírůstkový tvar algoritmu PSD regulátoru**.

$$\nabla u(kT)=k_P\left[\nabla e(kT)+\frac{T}{T_I}e(kT)+\frac{T_D}{T}\nabla^2 e(kT)\right] \tag{4. 9}$$

kde

$$\nabla^2 e(kT)=\nabla e(kT)-\nabla e[(k-1)T]=e(kT)-2e[(k-1)T]+e[(k-2)T] \tag{4. 10}$$

Po dosazení získáme konečný tvar **PSD regulátoru** (4. 11) a po úpravě (4. 12).

$$u(kT)-u[(k-1)T]=$$
$$=k_P\left\{e(kT)-e[(k-1)T]+\frac{T}{T_I}e(kT)+\frac{T_D}{T}\{e(kT)-2e[(k-1)T]+e[(k-2)T]\}\right\} \tag{4. 11}$$

$$u(kT)=u[(k-1)T]+q_0e(kT)+q_1e[(k-1)T]+q_2e[(k-2)T] \tag{4. 12}$$

Po úpravě vztahů (4. 12) a (4. 14) určíme přenos PSD regulátoru při použití Z-transformace.

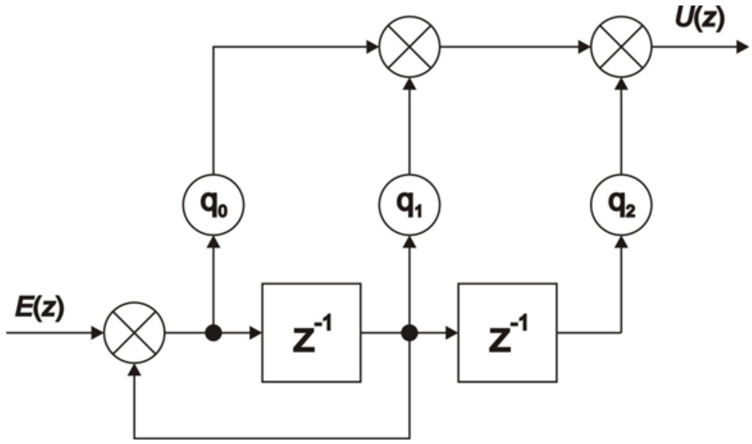
$$G_R(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}} \tag{4. 13}$$

kde

$$q_0 = k_P \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}\right)$$
$$q_1 = -k_P \left(1 + 2\frac{T_D}{T}\right) \qquad (4.\ 14)$$
$$q_2 = k_P \frac{T_D}{T}$$

Někdy se pro sumační činnost používá lichoběžníkova sumace.

$$\frac{T}{2T_I}\sum_{i=1}^{k}\{e(iT) + e[(i+1)T]\} \mathrel{\hat{=}} \frac{T}{2T_I} \cdot \frac{z+1}{z-1} \qquad (4.\ 15)$$




**Obr. 4. 1 Blokové schéma číslicového PID regulátoru pro přírůstkový algoritmus**

**Příklad 4.1**

Převeďte spojitý regulátor s přenosem $G_R(s) = 1{,}4\left(1 + \frac{1}{0{,}8s} + 0{,}4s\right)$ na číslicový PSD regulátor s přírůstkovým algoritmem při vzorkovací periodě $T$ = 0,1 s. Odvoďte jeho diferenční rovnici a Z-přenos.

**Řešení:**

Z přenosu určíme následující konstanty:

$k_P = 1{,}4$; $T_I = 0{,}8$ s; $T_D = 0{,}4$ s.

Nyní můžeme určit $q_1, q_2, q_3$.

$$q_0 = k_P\left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}\right) = 1{,}4\left(1 + \frac{0{,}1}{0{,}8} + \frac{0{,}4}{0{,}1}\right) = 7{,}175$$

$$q_1 = -k_P\left(1 + 2\frac{T_D}{T}\right) = -1{,}4\left(1 + 2\frac{0{,}4}{0{,}1}\right) = -12{,}6$$

$$q_2 = k_P\frac{T_D}{T} = 1{,}4\frac{0{,}4}{0{,}1} = 5{,}6$$

Diferenční rovnice dle (4. 12) tedy bude

$$u(kT) = u[(k-1)T] + 7{,}175e(kT) - 12{,}6e[(k-1)T] + 5{,}6e[(k-2)T].$$

Z-přenos je dle (4. 13)

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{7{,}175 - 12{,}6z^{-1} + 5{,}6z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

příp.

$$\frac{\Delta U(z)}{E(z)} = 7{,}175 - 12{,}6z^{-1} + 5{,}6z^{-2}$$