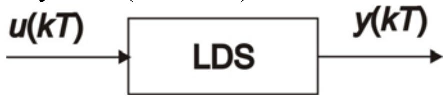
2 Matematické modely

Uvažujme lineární diskrétní systém (obr. 2. 1).



Obr. 2. 1 Lineární diskrétní systém

Stejně jak u spojitých systémů tak i u diskrétních systémů existuje několik možností způsobu vnějšího popisu chování, které vyjadřují vztah mezi výstupní veličinou $y(kT)$ a diskrétní vstupní veličinou $u(kT)$. Vnitřní popis chování diskrétního systému obsahuje kromě uvedených veličin i diskrétní stavové veličiny.

2.1 Popis v časové oblasti – diferenční rovnice systému

Pro popis vlastností dynamického systému v časové oblasti může sloužit diferenční rovnice v normálním tvaru s počátečními podmínkami.

$$\begin{aligned} & a_n y[(k+n)T] + \ldots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = \\ & = b_m u[(k+m)T] + \ldots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT) \\ & y(0), y(T), \ldots, y[(n-1)T]; \qquad u(0), u(T), \ldots, u[(m-1)T] \end{aligned} \tag{2. 1}$$

Klidový ustálený stav (jestliže existuje) je pospán vztahy

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} u(kT) &= u \\ \lim_{k\to\infty} y(kT) &= y \end{aligned} \tag{2. 2}$$

tj. pro $k \to \infty$ platí

$$\begin{aligned} y[(k+n)T] &= \ldots = y[(k+1)T] = y(kT) = y \\ u[(k+m)T] &= \ldots = u[(k+1)T] = u(kT) = u \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} & y = \frac{b_m + \ldots + b_1 + b_0}{a_n + \ldots + a_1 + a_0} u; && \sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0 \\ & y = k_1 u; && k_1 = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i} \end{aligned} \tag{2. 3}$$

kde k_1 je koeficient přenosu.

Diferenční rovnice (2. 1) je lineární, její koeficienty jsou konstantní, hovoříme tedy o stacionárním diskrétním lineárním dynamickém systému.

Statická charakteristika, tedy závislost výstupní veličiny na vstupní veličině v ustáleném stavu je pospána vztahem (2. 3).

Pokud má diferenční rovnice (2. 1) popisovat reálný dynamický systém musí být splněny podmínky fyzikální realizovatelnosti.

$n > m$	Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti	
$n = m$	Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti	(2. 4)
$n < m$	Fyzikálně nerealizovatelný systém	

2.2 Popis v oblasti komplexní proměnné – diskrétní přenos

Po Z-transformaci diferenční rovnice (2. 1) získáme přenos ve tvaru podílu Z-obrazu (1. 1) výstupního signálu $y(kT)$ k Z-obrazu vstupního signálu $u(kT)$ při nulových počátečních podmínkách.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} \tag{2. 5}$$

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$\begin{gathered} y = \left[\lim_{z \to 1} G(z)\right] u = \frac{b_m + \ldots + b_1 + b_0}{a_n + \ldots + a_1 + a_0} u = k_1 u \\ \sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0 \end{gathered} \tag{2. 6}$$

Jmenovatel přenosu $G(z)$ je charakteristický mnohočlen diskrétního lineárního dynamického systému.

$$N(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \tag{2. 7}$$

kde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jsou kořeny charakteristické rovnice.

$$N(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2. 8}$$

které nazýváme póly přenosu $G(z)$.

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2. 4).

2.3 Popis v kmitočtové oblasti

Pro popis systému je možno také užít diskrétní kmitočtový přenos

$$\begin{gathered} G\left(\mathrm{e}^{jT\omega}\right) = G(z); \qquad z = \mathrm{e}^{jT\omega} \\ G\left(\mathrm{e}^{jT\omega}\right) = \frac{b_m \mathrm{e}^{jmT\omega} + \ldots + b_1 \mathrm{e}^{jT\omega} + b_0}{a_n \mathrm{e}^{jnT\omega} + \ldots + a_1 \mathrm{e}^{jT\omega} + a_0} \end{gathered} \tag{2. 9}$$

který se používá pro kmitočet

$$0 \leq \omega \leq \frac{T}{2}$$

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$\begin{gathered} y = \left[\lim_{\omega \to 0} G\left(\mathrm{e}^{jT\omega}\right)\right] u = \frac{b_m + \ldots + b_1 + b_0}{a_n + \ldots + a_1 + a_0} u = k_1 u \\ \sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0 \end{gathered} \tag{2. 10}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2. 4).

2.4 Popis v časové oblasti – přechodová funkce

Přechodová funkce je odezva dynamického systému na vstupní veličinu ve tvaru Heavisideova jednotkového skoku $\eta(kT)$.

Z-obraz diskrétního jednotkového Heavisideova skoku je

$$U(z) = Z\{\eta(kT)\} = \frac{z}{z-1} \tag{2. 11}$$

Diskrétní přechodová funkce tedy bude mít tvar

$$H(z) = G(z)\frac{z}{z-1} \tag{2. 12}$$

Originál je dán vztahem

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{G(z)\frac{z}{z-1}\right\} \tag{2. 13}$$

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

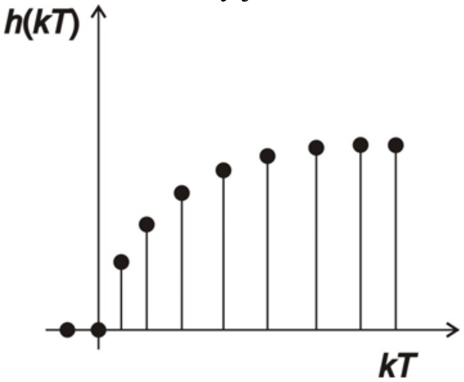
$$y = \left[\lim_{k\to\infty} h(kT)\right]u = \left[\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}H(z)\right]u = \frac{b_m + \ldots + b_1 + b_0}{a_n + \ldots + a_1 + a_0}u = k_1 u \tag{2. 14}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou tedy

$h(0) = 0$ Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti

$h(0) \neq 0$ Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti

Příklad diskrétní přechodové charakteristiky je na obr. 2. 2.



Obr. 2. 2 Diskrétní přechodová charakteristika

2.5 Popis v časové oblasti – impulsní funkce

Diskrétní impulsní funkce $g(kT)$ je odezva dynamického systému na diskrétní jednotkový Diracův impuls $\delta(kT)$. Z-obraz diskrétního jednotkového Diracova impulsu je

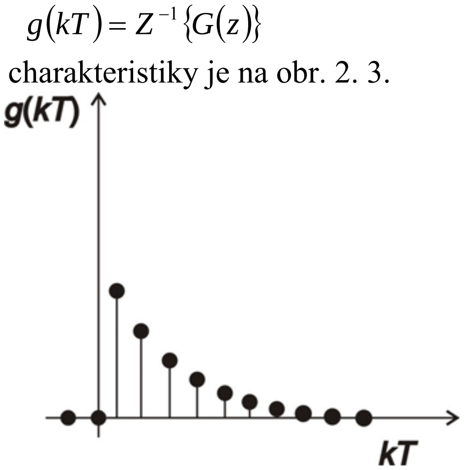
$$Z\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\delta(kT)z^{-k} = 1$$

$$\delta(kT) \mathrel{\hat{=}} 1 \tag{2. 15}$$

Diskrétní impulsní funkce je definovaná vztahem

$$g(kT) = Z^{-1}\{G(z)\} \tag{2. 16}$$

Příklad diskrétní impulsní charakteristiky je na obr. 2. 3.



Obr. 2. 3 Diskrétní impulsní charakteristika

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$y = \left[\lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{k} g(iT) \right] u = \frac{b_m + \ldots + b_1 + b_0}{a_n + \ldots + a_1 + a_0} u = k_1 u \qquad (2.\ 17)$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou tedy

$g(0) = 0$ Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti

$g(0) \neq 0$ Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti

2.6 Vztah mezi přechodovou a impulsní funkcí

Stejně jako u spojitých systémů, také u diskrétních systémů existuje spojitost mezi přechodovou a impulsní funkcí.

Ze vztahu pro obraz přechodové funkce (2. 18) vypočteme obraz impulsní funkce (2. 19)

$$H(z) = \frac{z}{z-1} G(z) \qquad (2.\ 18)$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} H(z) \qquad (2.\ 19)$$

Použitím vlastností Z-transformace z tab. 1. 1 dostaneme vztahy (2. 20) a (2. 21). Impulsní funkce je tedy dána zpětnou diferencí přechodové funkce (2. 20), přechodovou funkci získáme sumací impulsní funkce (2. 21).

$$g(kT) = \nabla h(kT) = h(kT) - h[(k-1)T] \qquad (2.\ 20)$$

$$h(kT) = \sum_{i=0}^{k} g(iT) \qquad (2.\ 21)$$

2.7 Stavový popis

Stavový model pro diskrétní lineární dynamický systém má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}u(kT) && - \text{stavová rovnice} \\ y(kT) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(kT) + du(kT) && - \text{výstupní rovnice} \end{aligned} \qquad (2.\ 22)$$

kde

$\mathbf{A}$ – matice systému (stavová matice systému), rozměr (n x n),

$\mathbf{b}$ – vektor řízení (stavový vektor řízení), rozměr (n x 1),

$\mathbf{c}$ – výstupní vektor (výstupní vektor systému), rozměr (n x 1),

d – vektor převodu (výstupní vektor řízení), rozměr (1 x 1).

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$y = \left[\mathbf{c}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \right] u \qquad (2.\ 23)$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou tedy

$d = 0$ Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti

$d \neq 0$ Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti

Máme-li diskrétní systém pospaný vnějším popisem, resp. diferenční rovnicí (2. 24) nebo diskrétním obrazovým přenosem $G(z)$ (2. 25)

$$\begin{aligned} & a_n y[(k+n)T] + \ldots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = \\ & = b_m u[(k+m)T] + \ldots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT) \end{aligned} \qquad (2.\ 24)$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0} \tag{2. 25}$$

je možno jej převést na vnitřní popis, resp. stavový popis a to několika metodami a to např. [Noskievič, 1992]:

- metodou postupné integrace,
- metodou snižování řádu derivace,
- rozkladem přenosu na dílčí přenosy.

Tak jako je možno vnější popis systému, resp. obrazový přenos $G(z)$ převádět na vnitřní popis, resp. stavový popis, existuje i možnost zpětné operace, tedy převodu ze stavového popisu na obrazový přenos (2. 26).

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\mathbf{c}^T(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d \tag{2. 26}$$

2.8 Dělení diskrétních dynamických systémů

Diskrétní dynamické systémy lze rozdělit na tři typy těchto systémů a to P (proporcionální), S (sumační) a D (diferenční). Typ systémů lze určit ze statické charakteristiky, obrazového přenosu $G(z)$ a průběhu přechodové charakteristiky $h(kT)$.

Pro připomenutí může být uvedeno, že statická charakteristika je závislost výstupní veličiny y na vstupní veličině u v ustáleném stavu.

2.8.1 Proporcionální dynamický systém

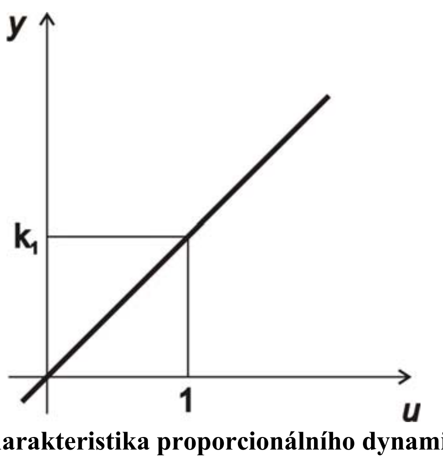
Statická charakteristika

V případě proporcionálního systému statická charakteristika **existuje** (obr. 2. 4) a je definovaná

$$y=k_1 u \tag{2. 27}$$

kde

$$k_1=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i}; \qquad \sum_{j=0}^{m} b_j \neq 0,\ \sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0 \tag{2. 28}$$



Obr. 2. 4 Statická charakteristika proporcionálního dynamického systému

Obrazový přenos

Při určování typu systému vycházíme z obrazového přenosu $G(z)$ (2. 29).

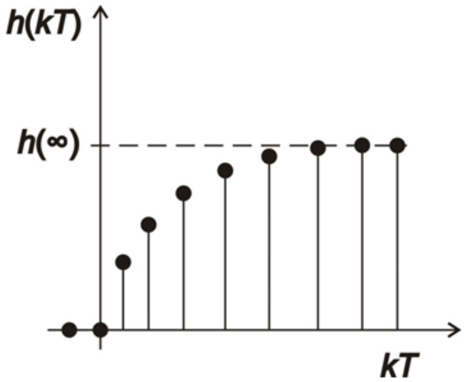
$$G(z)=\frac{b_m z^m+...+b_1 z+b_0}{a_n z^n+...+a_1 z+a_0} \qquad (2.\ 29)$$

O proporcionální dynamický systém se jedná v případě, že nelze z čitatele ani jmenovatele vytknout výraz $(1-z^{-1})$, popř. $(z-1)$.

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika proporcionálního dynamického systému se ustálí na nenulové konečné hodnotě, resp.

$$h(\infty)=k_1=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i} \qquad (2.\ 30)$$



Obr. 2. 5 Přechodová charakteristika proporcionálního dynamického systému

2.8.2 Sumační dynamický systém

Statická charakteristika

V případě sumačního dynamického systému statická charakteristika **neexistuje,** protože platí

$$k_1=\infty \qquad (2.\ 31)$$

$$k_1=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i}; \qquad \sum_{j=0}^{m} b_j\neq 0,\ \sum_{i=0}^{n} a_i=0 \qquad (2.\ 32)$$

Obrazový přenos

Při určování typu systému opět vycházíme z obrazového přenosu $G(z)$ (2. 33).

$$G(z)=\frac{b_m z^m+...+b_1 z+b_0}{a_n z^n+...+a_1 z+a_0} \qquad (2.\ 33)$$

O sumační dynamický systém se jedná v případě, že lze ve jmenovateli vytknout výraz $(1-z^{-1})$, popř. $(z-1)$, tedy

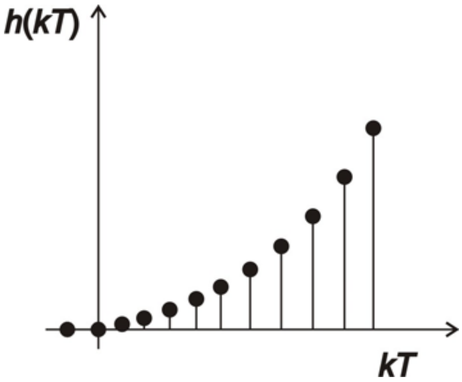
$$G(z) = \frac{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}{(z-1)^q \left(a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0\right)} \tag{2. 34}$$

kde q je řád sumace.

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika sumačního dynamického systému se neustálí, resp.

$$|h(\infty)| \to \infty \tag{2. 35}$$



Obr. 2. 6 Přechodová charakteristika sumačního dynamického systému

2.8.3 Diferenční dynamický systém

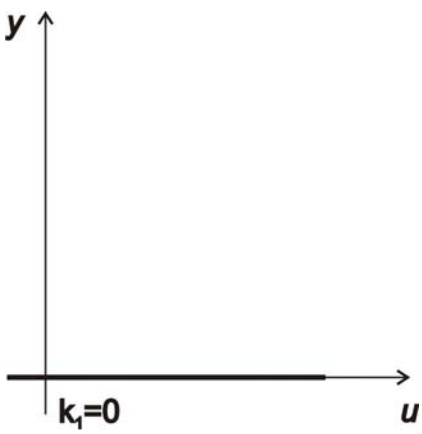
Statická charakteristika

V případě diferenčního systému statická charakteristika **existuje**, ale je triviální a je rovna

$$y = 0 \tag{2. 36}$$

protože platí

$$k_1 = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i}; \qquad \sum_{j=0}^{m} b_j = 0, \sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0 \tag{2. 37}$$



Obr. 2. 7 Statická charakteristika diferenčního dynamického systému

Obrazový přenos

Při určování typu systému opět vycházíme z obrazového přenosu $G(z)$ (2. 38).

$$G(z)=\frac{b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0} \tag{2. 38}$$

O diferenční dynamický systém se jedná v případě, že lze v čitateli vytknout výraz $(1-z^{-1})$, popř. $(z-1)$, tedy

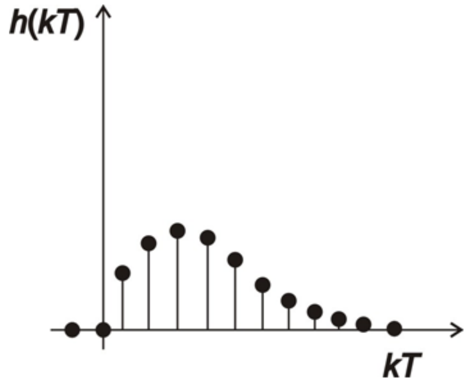
$$G(z)=\frac{(z-1)^r\left(b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0\right)}{a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0} \tag{2. 39}$$

kde r je řád diference.

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika diferenčního dynamického systému se ustálí na hodnotě 0, tj.

$$|h(\infty)|\to 0 \tag{2. 40}$$



Obr. 2. 8 Přechodová charakteristika diferenčního dynamického systému

2.9 Matematické modely – řešené příklady

Příklad 2.1

Pro systém popsaný diferenční rovnicí

$y[(k+2)T]+0{,}7y[(k+1)T]+0{,}1y(kT)=u[(k+1)T]-u(kT)$

s nulovými počátečními podmínkami $u(0)=0$, $y(0)=y(T)=0$ určete:

a) obrazový přenos,
b) přechodovou funkci v uzavřeném tvaru,
c) impulsní funkci,
d) vykreslete impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot,
e) o jaký typ dynamického systému se jedná a jeho fyzikální realizovatelnost.

Řešení:

- ad a) Určíme obrazový přenos:

$$z^2Y(z)+0{,}7zY(z)+0{,}1Y(z)=zU(z)-U(z)$$

$$Y(z)\left(z^2+0{,}7z+0{,}1\right)=U(z)(z-1)$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z-1}{z^2+0{,}7z+0{,}1}$$

$m = 1, n = 2 \Rightarrow n > m \Rightarrow$ je splněná silná podmínka fyzikální realizovatelnosti.

- ad b) Pro výpočet diskrétní přechodové funkce použijeme vztah (2. 13):

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}G(z)\right\}$$

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z-1}{z^2+0{,}7z+0{,}1}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+0{,}7z+0{,}1}\right\}$$

Obraz přechodové funkce rozdělíme na parciální zlomky. Kořeny jmenovatele jmenovatele jsou $z_1 = -0{,}2$ a $z_2 = -0{,}5$.

Nyní lze provést rozklad na parciální zlomky a dosazovací metodou dopočítat koeficienty *A*, *B* parciálních zlomků:

$$\frac{z}{z^2+0{,}7z+0{,}1} = \frac{A}{z+0{,}2} + \frac{B}{z+0{,}5}$$

$$z = A(z+0{,}5) + B(z+0{,}2)$$

Za z dosadíme

$$z_1 = -0{,}5: \qquad -0{,}5 = -0{,}3B \Rightarrow B = \frac{5}{3}$$

$$z_2 = -0{,}2: \qquad -0{,}2 = 0{,}3A \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

V souladu s tab. 1. 2 můžeme psát

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{-\frac{2}{3}}{(z+0{,}2)} + \frac{\frac{5}{3}}{(z+0{,}5)}\right\} = -\frac{2}{3}\binom{k-1}{0}(-0{,}2)^{k-1} + \frac{5}{3}\binom{k-1}{0}(-0{,}5)^{k-1} =$$

$$= -\frac{2}{3}(-0{,}2)^{k-1}\eta[(k-1)T] + \frac{5}{3}(-0{,}5)^{k-1}\eta[(k-1)T] = -\frac{2}{3}(-0{,}2)^{k-1} + \frac{5}{3}(-0{,}5)^{k-1}$$

pro $k \geq 1$ a 0 pro $k < 1$.

Nyní vypočteme prvních pět hodnot přechodové charakteristiky:

$$h(0) = 0$$

$$h(T) = 1$$

$$h(2T) = -\frac{2}{3}(-0{,}2) + \frac{5}{3}(-0{,}5) = -0{,}7$$

$$h(3T) = -\frac{2}{3}(-0{,}2)^2 + \frac{5}{3}(-0{,}5)^2 = 0{,}39$$

$$h(kT) = h(4T) = -\frac{2}{3}(-0{,}2)^3 + \frac{5}{3}(-0{,}5)^3 = -0{,}203 \doteq -0{,}2$$

- ad c) Nyní vypočteme prvních pět bodů impulsní charakteristiky s použitím vztahu (2. 20):

$$g(kT) = h(kT) - h[(k-1)T]$$

$$g(0) = 0$$

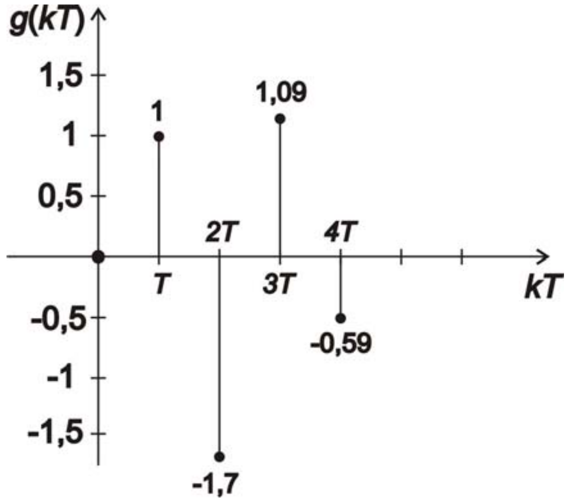
$$g(T) = 1 - 0 = 1$$

$$g(2T) = -0{,}7 - 1 = -1{,}7$$

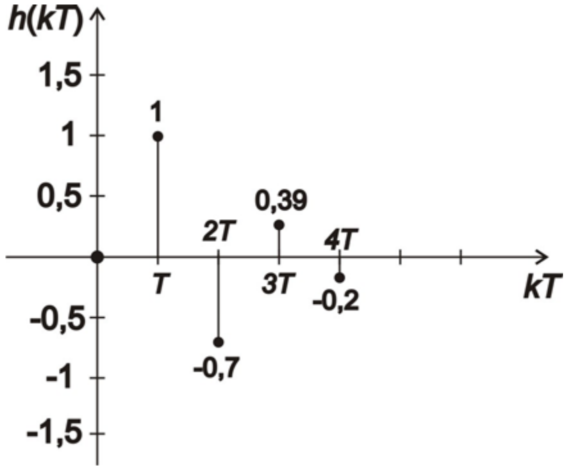
$$g(3T) = 0{,}39 + 0{,}7 = 1{,}09$$

$$g(4T) = -0{,}2 - 0{,}39 = -0{,}59$$

- ad d) Dle předešlých výpočtů vykreslíme impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot:



Obr. 2. 9 Impulsní charakteristika z příkladu 2.1



Obr. 2. 10 Přechodová charakteristika z příkladu 2.1

- ad e) Nyní určíme typ dynamického systému a jeho fyzikální realizovatelnost:

$$k_1 = h(\infty) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i} = \frac{1-1}{1+0{,}7+0{,}1} = 0$$

Přechodová charakteristika se ustálí v hodnotě 0, z toho vyplývá, že se jedná o diferenční dynamický systém.

Dále je možno říci, že je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti, neboť pro obě charakteristiky platí $h(0) = 0, g(0) = 0$.

__**Příklad 2.2**__

Pro systém pospaný diferenční rovnicí

$$y(kT) + 0{,}5y[(k-1)T] = u(kT) + 2u[(k-1)T]$$

s nulovými počátečními podmínkami určete:

a) obrazový přenos,
b) přechodovou funkci,
c) impulsní funkci v uzavřeném tvaru,

d) vykreslete impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot,
e) o jaký typ dynamického systému se jedná a jeho fyzikální realizovatelnost.

Řešení:

- ad a) Určíme obrazový přenos:

$$Y(z)+0{,}5z^{-1}Y(z)=U(z)+2z^{-1}U(z) \qquad /(\cdot z)$$
$$zY(z)+0{,}5Y(z)=zU(z)+2U(z)$$
$$Y(z)(z+0{,}5)=U(z)(z+2)$$
$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+2}{z+0{,}5}$$

$m=1, n=1 \Rightarrow n=m \Rightarrow$ je splněná slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti.

Vzhledem k požadavku bodu c) v zadání o uzavřeném tvaru impulsní funkce, vypočítáme nejprve tento bod.

- ad c) Určíme impulsní funkci v uzavřeném tvaru:

$$g(kT)=Z^{-1}\{G(z)\}$$
$$g(kT)=Z^{-1}\left\{\frac{z+2}{z+0{,}5}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+0{,}5}+\frac{2}{z+0{,}5}\right\}$$
$$g(kT)=(-0{,}5)^k+2\binom{k-1}{0}(-0{,}5)^{k-1}=(-0{,}5)^k+2(-0{,}5)^{k-1}\eta[(k-1)T]$$

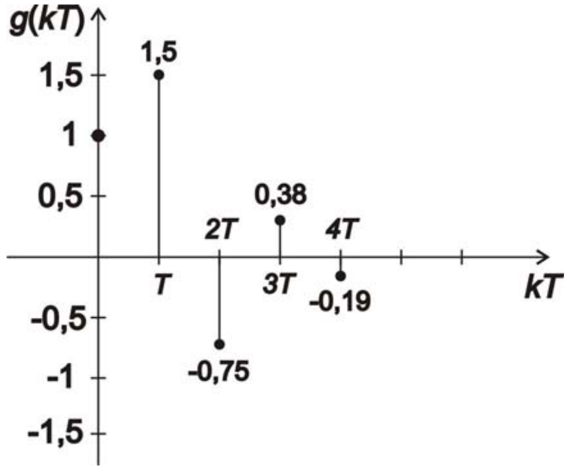
Nyní vypočteme prvních pět bodů impulsní charakteristiky:

$$g(0)=1$$
$$g(T)=-0{,}5+2=1{,}5$$
$$g(2T)=0{,}25-1=-0{,}75$$
$$g(3T)=-0{,}125+0{,}5=0{,}375\doteq 0{,}38$$
$$g(4T)=0{,}0625-0{,}25=-0{,}1875\doteq -0{,}19$$

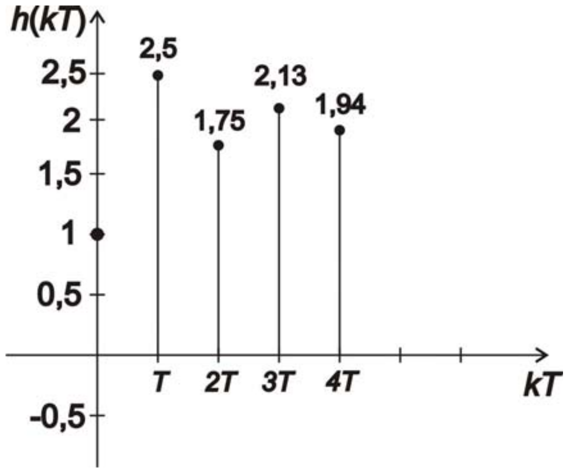
- ad b) S využitím vztahu (2. 21) dopočítáme hodnoty diskrétní přechodové funkce:

$$h(kT)=\sum_{i=0}^{k} g(iT)$$
$$h(0)=1$$
$$h(T)=1+1{,}5=2{,}5$$
$$h(2T)=2{,}5-0{,}75=1{,}75$$
$$h(3T)=1{,}75+0{,}38=2{,}13$$
$$h(4T)=2{,}13+(-0{,}19)=1{,}94$$

- ad d) Dle předešlých výpočtů vykreslíme impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot:



Obr. 2. 11 Impulsní charakteristika z příkladu 2.2



Obr. 2. 12 Přechodová charakteristika z příkladu 2.2

- ad e) Nyní určíme typ dynamického systému a jeho fyzikální realizovatelnost:

$$k_1 = h(\infty) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j}{\sum_{i=0}^{n} a_i} = \frac{1+2}{1+0{,}5} = \frac{3}{1{,}5} = 2$$

Přechodová charakteristika se ustálí na hodnotě 2, z toho vyplývá, že se jedná o proporcionální dynamický systém.

Dynamický systém splňuje slabou podmínku fyzikální realizovatelnosti, neboť obě charakteristiky nezačínají v počátku souřadnicového systému a dále platí $n = m = 1$.

Příklad 2.3

Pro systém pospaný obrazovým přenosem $G(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 1}$ určete:

a) impulsní funkci,
b) přechodovou funkci,
c) vykreslete impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot,
d) určete podmínky fyzikální realizovatelnosti a o jaký typ dynamického systému se jedná.

Řešení:

Převedeme obrazový přenos na diferenční rovnici.

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z}{z^2+2z+1}$$

$$Y(z)\left(z^2+2z+1\right)=zU(z)$$

$$z^2Y(z)+2zY(z)+Y(z)=zU(z)$$

$$y[(k+2)T]+2y[(k+1)T]+y(kT)=u[(k+1)T]$$

$$y[(k+2)T]=u[(k+1)T]-2y[(k+1)T]-y(kT)$$

$$u(kT)=\delta(kT)\Rightarrow y(kT)=g(kT)$$

$$g[(k+2)T]=\delta[(k+1)T]-2g[(k+1)T]-g(kT)$$

- ad a) Určíme hodnoty diskrétní impulsní funkce:

$$\begin{array}{ll} k=-2 & g(0)=0 \\ k=-1 & g(T)=\delta(0)-2g(0)-g(-T)=1+0+0=1 \\ k=0 & g(2T)=\delta(T)-2g(T)-g(0)=0-2-0=-2 \\ k=1 & g(3T)=\delta(2T)-2g(2T)-g(T)=0+4-1=3 \\ k=2 & g(4T)=\delta(3T)-2g(3T)-g(2T)=0-6+2=-4 \end{array}$$

- ad b) Pro určení hodnot diskrétní přechodové použijeme vztah (2. 21):

$$h(kT)=\sum_{i=0}^{k}g(iT)$$

$$h(0)=0$$

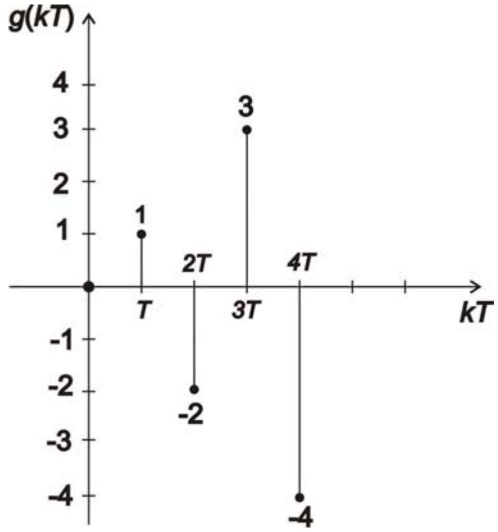
$$h(T)=0+1=1$$

$$h(2T)=1-2=-1$$

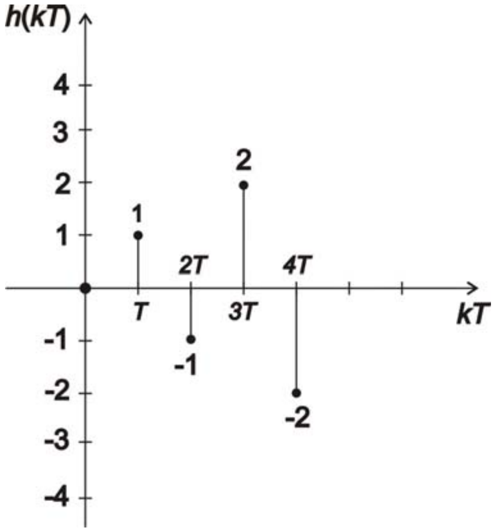
$$h(3T)=-1+3=2$$

$$h(4T)=2-4=-2$$

- ad c) Dle předešlých výpočtů vykreslíme impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot:



Obr. 2. 13 Impulsní charakteristika z příkladu 2.3



Obr. 2. 14 Přechodová charakteristika z příkladu 2.3

Z průběhu $g(kT)$ a $h(kT)$ vidíme, že tento dynamický systém je nestabilní.

- ad e) Nyní určíme typ dynamického systému a jeho fyzikální realizovatelnost:

Protože se jedná o nestabilní systém, jeho typ určíme z přenosu $G(z)$. Ani v čitateli, ani ve jmenovateli přenosu nelze vytknout dvojčlen $(z-1)$, proto se jedná o proporcionální dynamický systém.

Je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti, neboť obě charakteristiky začínají v počátku souřadnicového systému a dále platí $n = 2$ a $m = 1$.