VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra automatizační techniky a řízení
Česká republika

ZPĚTNOVAZEBNÍ ŘÍZENÍ MECHATRONICKÝCH SYSTÉMŮ

Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.
Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.

Ostrava 2013

ZPĚTNOVAZEBNÍ ŘÍZENÍ MECHATRONICKÝCH SYSTÉMŮ

ISBN 978-80-248-3232-6

PŘEDMLUVA

Učební texty „Zpětnovazební řízení v mechatronických systémech“ jsou věnovány základům automatického řízení. Hlavní důraz je kladen na princip záporné zpětné vazby a jeho využití při řízení mechatronických systémů. Pokrývají nejdůležitější oblasti analogové regulace a velmi stručně také popisují číslicovou regulaci.

Vzhledem k tomu, že učební texty pojednávají o základních pojmech automatického řízení, nejsou v textech uváděny přesné důkazy. Pro prohloubení a rozšíření studijního materiálu jsou doporučeny níže uvedené publikace:

DORF, R.C., BISHOP, R. *Modern Control Systems*. 12th Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2011

FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D. – EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 4th Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002

LANDAU, I. D., ZITO, G. Digital Control Systems. Design, Identification and Implementation. Springer – Verlag, London, 2006

NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6th Edition. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2011

Učební texty jsou určeny pro studenty, kteří se zajímají o automatizaci a mechatroniku.

OBSAH

SEZNAM ZÁKLADNÍHO ZNAČENÍ A SYMBOLŮ

$a, a_i, b, b_i, \ldots$ konstanty

a_i koeficienty levé strany lineární diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu ve jmenovateli přenosu

A, A_i, B, B_i konstanty, koeficienty

$A(\omega) = \mathrm{mod}G(j\omega) = |G(j\omega)|$ modul kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $A(\omega)$ = amplitudová kmitočtová charakteristika

A_o modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu

A_C modul kmitočtového přenosu regulátoru

A_P modul kmitočtového přenosu regulované soustavy

A_{wy} modul kmitočtového přenosu řízení (uzavřeného regulačního obvodu)

$\boldsymbol{A}$ stavová matice systému (dynamiky) řádu n [$(n \times n)$]

b váha žádané veličiny u proporcionální složky

b_i koeficienty pravé strany lineární diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu v čitateli přenosu

$\boldsymbol{b}$ stavový vektor vstupu dimenze n

c váha žádané veličiny u derivační složky

$\boldsymbol{c}$ výstupní vektor stavu dimenze n

C kapacita

d konstanta převodu

e regulační odchylka

$e_v(\infty)$ trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou

$e_w(\infty)$ trvalá regulační odchylka způsobená žádanou veličinou

f obecná funkce

$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ kmitočet

$g(t)$ impulsní funkce, grafické vyjádření $g(t)$ = impulsní charakteristika

$g_P(t)$ impulsní funkce regulované soustavy

$G(s)$ přenos, obraz impulsní funkce

$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}$ kmitočtový přenos, grafické vyjádření $G(j\omega)$ = amplitudofázová kmitočtová charakteristika

G_F přenos filtru

G_o přenos otevřeného regulačního obvodu

G_C přenos regulátoru

G_P přenos regulované soustavy

G_{vy}	přenos poruchy
G_{ve}	odchylkový přenos poruchy
G_{wy}	přenos řízení
G_{we}	odchylkový přenos řízení
$h(t)$	přechodová funkce, grafické vyjádření $h(t)$ = přechodová charakteristika
$h_P(t)$	přechodová funkce regulované soustavy
$h_v(t)$	přechodová funkce regulačního obvodu vyvolaná poruchovou veličinou
$h_w(t)$	přechodová funkce regulačního obvodu vyvolaná žádanou veličinou
H_i	Hurwitzovy determinanty (subdeterminanty, minory)
$\boldsymbol{H}$	Hurwitzova matice
$H(s)$	obraz přechodové funkce
i	činitel interakce, proud
I_i	integrální kritéria kvality regulace (i = *IE, IAE, ISE, ITAE*)
$j = \sqrt{-1}$	imaginární jednotka
k	relativní diskrétní čas
k_i	koeficient přenosu (zisk), zesílení ($\lvert k_i \rvert > 1$), tlumení ($\lvert k_i \rvert < 1$) (i = 1, 2, 3, …)
kT	diskrétní čas
K_D	váha derivační složky regulátoru
K_I	váha integrační složky regulátoru
K_P	zesílení regulátoru, váha proporcionální složky regulátoru
K_{Pc}	kritické zesílení regulátoru
$\boldsymbol{k}$	vektor stavového regulátoru
L	indukčnost
L	operátor přímé L-transformace (Laplaceovy transformace)
L^{-1}	operátor zpětné (inverzní) L-transformace (Laplaceovy transformace)
$L(\omega) = 20\log A(\omega)$	logaritmický modul kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $L(\omega)$ = logaritmická amplitudová kmitočtová charakteristika
L_o	logaritmický modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu
L_C	logaritmický modul kmitočtového přenosu regulátoru
L_{wy}	logaritmický modul kmitočtového přenosu řízení (uzavřeného regulačního obvodu)
$\boldsymbol{l}$	vektor zesílení Luenbergerova pozorovatele, korekční vektor
m	stupeň mnohočlenu v čitateli přenosu, moment motoru, hmotnost
m_A	amplitudová bezpečnost
m_l	zátěžný moment

$m_L = 20\log m_A$ logaritmická amplitudová bezpečnost

M mnohočlen v čitateli přenosu (kořeny = nuly)

M_S maximum modulu funkce citlivosti

n stupeň charakteristického mnohočlenu, stupeň mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, dimenze vektoru stavových proměnných $\boldsymbol{x}$

N charakteristický mnohočlen nebo kvazimonohočlen, mnohočlen nebo kvazimnohočlen ve jmenovateli přenosu (kořeny = póly)

$N(j\omega)$ Michajlovova funkce (hodograf, charakteristika)

$N_P(\omega) = \mathrm{Re}N(j\omega)$ reálná část Michajlovovy funkce

$N_Q(\omega) = \mathrm{Im}N(j\omega)$ imaginární část Michajlovovy funkce

p počet stavitelných parametrů regulátoru

$P(\omega) = \mathrm{Re}G(j\omega)$ reálná část kmitočtového přenosu

pp pásmo proporcionality

q řád integračního členu, typ regulačního obvodu

$Q(\omega) = \mathrm{Im}G(j\omega)$ imaginární část kmitočtového přenosu

Q_{co} matice řiditelnosti řádu n [$(n\times n)$]

Q_{ob} matice pozorovatelnosti řádu n [$(n\times n)$]

$Q(\omega) = \mathrm{Im}G(j\omega)$ imaginární část kmitočtového přenosu

r řád derivačního členu

R odpor

$s = \alpha + j\omega$ komplexní proměnná, nezávisle proměnná u obrazu v Laplaceově transformaci

s_i kořeny mnohočlenu s komplexní proměnnou s

S doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou

$S(j\omega)$ funkce citlivosti

t (spojitý) čas

t_m doba dosažení maximální hodnoty y_m (maximálního překmitu)

t_r rychlost odezvy

t_s doba regulace

$t_\varphi = \dfrac{\varphi}{\omega}$ čas odpovídající fázi φ

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ perioda

T vzorkovací perioda, perioda

T_d dopravní zpoždění

T_D derivační časová konstanta

T_I integrační časová konstanta

T_{Ic}	kritická integrační časová konstanta
T_i	(setrvačná) časová konstanta
$T_c = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$	kritická perioda
T_n	doba náběhu
T_p	doba přechodu
T_Σ	náhradní součtová časová konstanta
T_u	doba průtahu
$T(j\omega)$	doplňková funkce citlivosti
$\boldsymbol{T}_c,\ \boldsymbol{T}_o$	transformační matice řádu n [$(n\times n)$]
u	akční veličina, řízení, vstupní veličina (vstup), napětí
u_T	tvarovaná akční veličina
v	poruchová veličina (porucha)
w	žádaná veličina
x	stavová veličina (stav)
$\boldsymbol{x}$	vektor stavových veličin (stav) dimenze n
y	regulovaná veličina, výstupní veličina (výstup)
$y_m = y(t_m)$	maximální hodnota regulované veličiny při překmitu (maximální překmit)
y_v	odezva vyvolaná poruchovou veličinou
y_w	odezva vyvolaná žádanou veličinou
y_T	přechodná část odezvy
y_S	ustálená část odezvy
Z	impedance
α	stupeň stability (absolutní tlumení), sklon, koeficient u MPM
$\alpha = \mathrm{Re}\, s$	reálná část komplexní proměnné s
β	sklon, koeficient u MPM
γ	fázová bezpečnost
δ	relativní tolerance regulačního pochodu
$\delta(t)$	Diracův jednotkový impuls
Δ	přírůstek, tolerance regulačního pochodu
$\eta(t)$	Heavisideův jednotkový skok
ω	úhlová rychlost
$\omega = 2\pi f$	úhlový kmitočet
$\omega = \mathrm{Im}\, s$	imaginární část komplexní proměnné s

ω_b mezní úhlový kmitočet

$\omega_c = \dfrac{2\pi}{T_c}$ kritický úhlový kmitočet

ω_g úhlový kmitočet průchodu pro (amplitudu) modul (modul = 1)

ω_p úhlový kmitočet průchodu pro fázi (fáze = $-\pi$)

ω_R rezonanční kmitočet

ω_0 úhlový kmitočet netlumených kmitů, přirozený úhlový kmitočet

$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ fáze kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $\varphi(\omega)$ = fázová kmitočtová charakteristika

φ_o fáze otevřeného regulačního obvodu

ξ_i koeficient relativního poměrného tlumení (relativní tlumení)

κ překmit

τ_j časová konstanta

Horní indexy

* optimální, doporučený

-1 inverzní

T transponovaný

Symboly nad písmeny

. (totální) derivace podle času

$\wedge$ odhad

Relační znaménka

$\approx$ přibližně rovno

$\doteq$ po zaokrouhlení rovno

$\hat{=}$ korespondence mezi originálem a obrazem

$\Rightarrow$ implikace

$\Leftrightarrow$ ekvivalence

Grafické značky

○ (jednonásobná) nula

◎ dvojnásobná nula

× (jednonásobný) pól

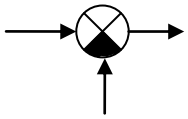
※ dvojnásobný pól

 nelineární systém (prvek, člen)

 lineární systém (prvek, člen)

→ jednorozměrový signál (veličina)

➡ mnohorozměrový signál (veličina)



součtový člen (vyplněný segment označuje znaménko minus)

Zkratky

arg	argument
dB	decibel
dek	dekáda
det	determinant
dim	dimenze (rozměr)
Im	imaginární, imaginární část
konst	konstantní, konstanta
lim	limita
max	maximální, maximum
min	minimální, minimum
mod	modul
Re	reálný, reálná část
sign	znaménko, znaménková funkce
DOF	stupeň volnosti (**d**egree **o**f **f**reedom)
MČT	**m**etoda **č**tvrtinového **t**lumení
MDZ	**m**etoda **d**obrého **z**esílení (Good Gain Method)
MOM	**m**etoda **o**ptimálního **m**odulu
MPM	**m**etoda **p**ožadovaného **m**odelu
MSO	**m**etoda **s**ymetrického **o**ptima
SIMC	metoda SIMC (**S**kogestad **I**nternal **M**odel **C**ontrol)
TLM	**T**yreusova-**L**yubenova **m**etoda
UEM	**u**niverzální **e**xperimentální **m**etoda
ZNM	**Z**ieglerova-**N**icholsova **m**etoda

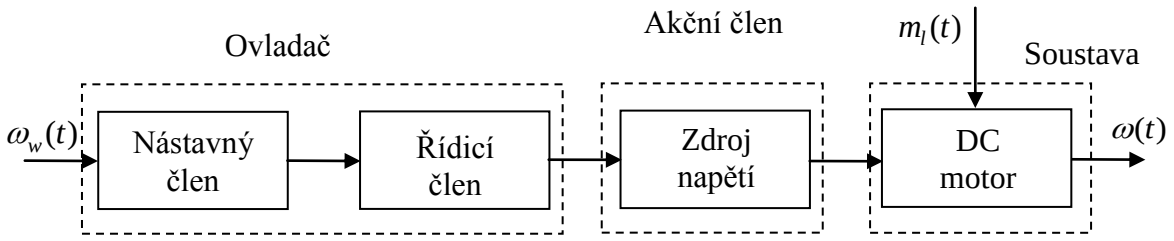
1 ÚVOD DO ZPĚTNOVAZEBNÍHO ŘÍZENÍ

S řízením se setkáváme na každém kroku. Téměř v každém složitějším zařízení najdeme systémy řízení, které nejčastěji pracují v uzavřené smyčce. Tyto systémy řízení jsou dnes samozřejmostí, a proto si jejich existenci často ani neuvědomujeme. Např. současné kompaktní fotoaparáty obsahují systémy automatického zaostřování, sledování fotografovaného objektu, nastavování clony a citlivosti, vyvážení bílé apod. Domácí spotřebiče, jako jsou např. rádiové a televizní přijímače, ledničky, mrazničky, pračky, sušičky, mikrovlnné a elektrické trouby, fritovací hrnce, elektrické žehličky, pokojové termostaty aj., rovněž obsahují jednodušší či složitější systémy řízení. Systémy řízení najdeme i v moderních hračkách, jako např. v dálkově řízených autíčkách, lodích, helikoptérách, letadlech atd. Pokročilejší systémy řízení vystupují v současných dopravních prostředcích, tj. automobilech, lodích, letadlech a samozřejmě v nejrůznějších vojenských zařízeních a zbraních.

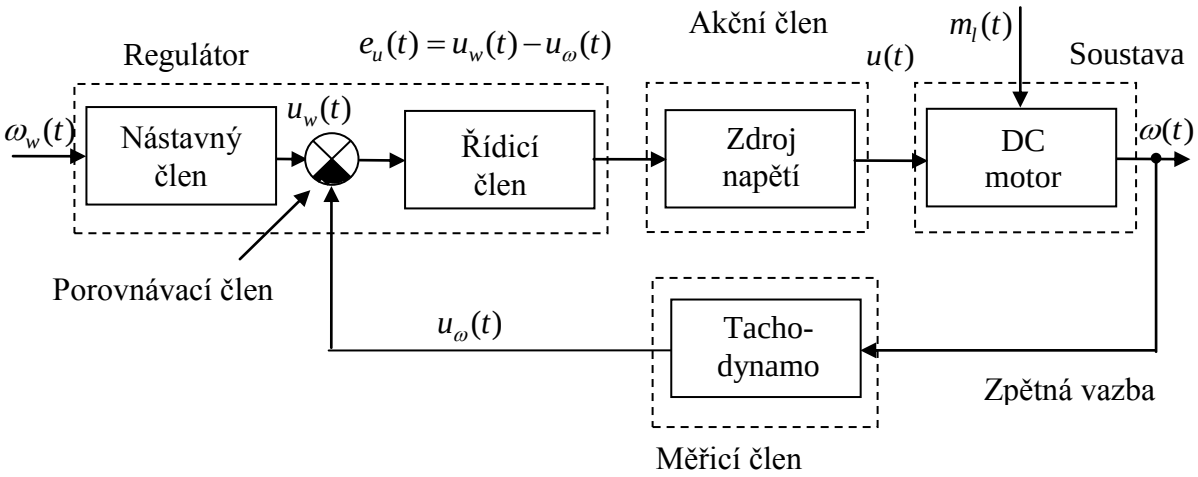
Většinu těchto systémů lze zahrnout do velmi široké skupiny mechatronických systémů, které se vyznačují tím, že se v nich synenergeticky spojují výhody a vlastnosti nejrůznějších odvětví, jak např. mechaniky, elektromechaniky, elektroniky, kybernetiky, ale i technologie a konstrukce.

Problém **řízení v otevřené a uzavřené smyčce** si vysvětlíme na zjednodušeném příkladě řízení úhlové rychlosti (otáček) stejnosměrného motoru s permanentními magnety (DC motor), viz obr. 1.1 a 1.2, kde značí: $\omega(t)$ – skutečná úhlová rychlost hřídele motoru [rad s^{-1}], $\omega_w(t)$ – požadovaná úhlová rychlost hřídele motoru [rad s^{-1}], $u(t)$ – napětí kotvy motoru [V], $u_w(t) = k_\omega \omega_w(t)$ – napětí na výstupu nástavného členu [V], $u_\omega(t) = k_\omega \omega\ (t)$ – napětí na výstupu tachodynama [V], k_ω – koeficient přenosu tachodynama [V s rad^{-1}], $m_l(t)$ – zátěžný moment [N m].

Nástavný člen se nejčastěji přiřazuje k řídicímu členu a pak spolu tvoří **ovladač** (obr. 1.1), resp. **regulátor** (obr. 1.2).



Obr. 1.1 Řízení úhlové rychlosti stejnosměrného motoru v otevřené smyčce



Obr. 1.2 Řízení úhlové rychlosti stejnosměrného motoru v uzavřené smyčce

Cíl řízení spočívá v tom, aby skutečná úhlová rychlost hřídele motoru (**soustavy**) $\omega(t)$ byla v každém časovém okamžiku t udržována (v ideálním případě rovna) na požadované úhlové rychlosti $\omega_w(t)$ bez ohledu na měnící se zátěžný moment $m_l(t)$, tj.

$$\omega(t) \to \omega_w(t)\,. \tag{1.1a}$$

Je zřejmé, že cíl řízení (1.1a) může být vyjádřen v ekvivalentním tvaru

$$e(t) = \omega_w(t) - \omega(t) \to 0\,, \tag{1.1b}$$

kde $e(t)$ je **odchylka řízení**.

Při **řízení v otevřené smyčce** (obr. 1.1) ovladač musí pomocí zdroje napětí (**akční člen**) vytvářet takové napětí kotvy motoru $u(t)$, aby úhlová rychlost hřídele $\omega(t)$ se pokud možno co nejvíce blížila požadované úhlové rychlosti $\omega_w(t)$. Vyplývá z toho to, že vlastnosti stejnosměrného motoru musí být velmi dobře známé. Jakékoliv nepřesnosti ve znalostí motoru se projeví na úhlové rychlosti $\omega(t)$. Rovněž je zřejmé, že ovladač v žádném případě nemůže odstranit vliv zátěžného momentu $m_l(t)$ na úhlovou rychlost $\omega(t)$. Zátěžný moment $m_l(t)$ zde působí jako **neodstranitelná porucha**.

Z toho důvodu řízení v otevřené smyčce lze použít pouze pro velmi jednoduché úlohy řízení.

Takové jednoduché systémy řízení jsou např. v uličních semaforech, pračkách, mikrovlnných troubách, fritovacích hrncích atd. Úloha řízení se zde většinou nastaví volbou předprogramovaných pracovních režimů. Ovladače obsahují jednoduché, nejčastěji logické systémy.

Při **řízení v uzavřené smyčce** (obr. 1.2) se vytváří odchylka

$$e_u(t) = u_w(t) - u_\omega(t) = k_\omega \omega_w(t) - k_\omega \omega(t) = k_\omega e(t)\,, \tag{1.2}$$

kterou se regulátor snaží odstranit generováním vhodného napětí kotvy $u(t)$ pomocí zdroje napětí (akční člen) na vstupu motoru.

Nezáleží na tom, zda odchylka (1.2) vznikla neznalostí nebo změnou vlastností motoru, případně působením zátěžného momentu $m_l(t)$. Důležité je, aby regulátor měl takové vlastnosti, aby se vždy snažil odchylku (1.2) co nejrychleji a nejvíce snížit, nejlépe zcela odstranit.

Tachodynamo (**měřicí člen**) ve zpětné vazbě na obr. 1.2 na svém výstupu dává napětí

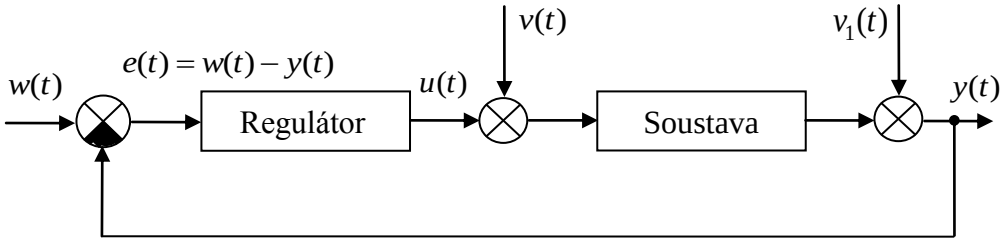
$$u_\omega(t) = k_\omega \omega(t) \tag{1.3}$$

a je zřejmé, že jeho dynamické vlastnosti by měly být z hlediska řízení zanedbatelné. Přesnost vztahu (1.3), a tedy přesnost tachodynama (měřicího členu) určuje výslednou přesnost řízení. ***Přesnost řízení nemůže být nikdy vyšší, než je přesnost měřicího členu***.

Z výše uvedeného vyplývá, že řízení v uzavřené smyčce je nesrovnatelně kvalitnější než v otevřené smyčce. Z tohoto důvodu se dále budeme zabývat řízením v uzavřené smyčce.

Protože v systému řízení na obr. 1.2 vystupuje **zpětná vazba**, řízení v uzavřené smyčce se nazývá rovněž **zpětnovazebním řízením** nebo **regulací**. Je zřejmé, že ***zpětná vazba musí být záporná***.

Pro účely analýzy a syntézy systému řízení v uzavřené smyčce, tj. systému zpětnovazebního řízení (systému regulace) se schéma na obr. 1.2 zastupuje zjednodušeným schématem na obr. 1.3.



Obr. 1.3 Schéma systému zpětnovazebního řízení (regulační obvod)

Nástavný a řídicí člen tvoří regulátor. Soustavou je řízené zařízení nebo proces (v našem případě motor). K soustavě se často přidávají akční a měřicí člen. Tyto členy se někdy přidávají i k regulátoru. Vše záleží na vlastní realizaci členů systému zpětnovazebního řízení. **Poruchové veličiny** se agregují do jedné nebo dvou poruchových veličin, např. $v(t)$ a $v_1(t)$. **Žádaná** (požadovaná, referenční) **veličina** se obecně označuje $w(t)$ a výstupní, tj. **regulovaná veličina** $y(t)$. **Výstupní veličina** z regulátoru $u(t)$ se nazývá akční (řídicí, manipulovaná).

V technické praxi se systém zpětnovazebního řízení nazývá systémem regulace nebo regulačním obvodem, a proto dále tento název budeme většinou používat.

Cíl regulace (cíl řízení) pro regulační obvod na obr. 1.3 může být vyjádřen vztahem

$$y(t) \to w(t) \tag{1.4a}$$

nebo ekvivalentně

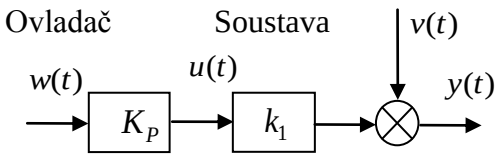
$$e(t) \to 0\,. \tag{1.4b}$$

Z obou vyjádření vyplývá dvojí funkce regulátoru spočívající v zajištění sledování žádané veličiny $w(t)$ regulovanou veličinou $y(t)$ a potlačení negativního vlivu poruchových veličin $v(t)$ a $v_1(t)$ na činnost regulačního obvodu. První funkce se nazývá **úloha sledování** (servo problem) a druhá funkce **úloha potlačení poruch** (regulatory problem).

Vlastnosti řízení v otevřené a uzavřené smyčce si ukážeme na jednoduchých příkladech.

Příklad 1.1

Je třeba provést analýzu systému řízení v otevřené smyčce (systému ovládání) na obr. 1.4. kde K_P je zesílení ovladače a k_1 je zesílení soustavy. Předpokládá se, že zesílení soustavy k_1 se může změnit o $\pm\,\Delta k_1$.



Obr. 1.4 Schéma jednoduchého systému řízení v otevřené smyčce – příklad 1.1

Řešení:

Pro systém řízení v otevřené smyčce platí

$$y(t) = K_P k_1 w(t) + v(t)\,. \tag{1.5}$$

Uvažujme ideální cíl řízení [viz (1.4a)]

$$y(t) = w(t)\,. \tag{1.6}$$

a dále dva případy, kdy poruchová veličina $v(t)$ působí [$v(t) \neq 0$] a nepůsobí [$v(t) = 0$].

a) $v(t) = 0$

Z rovnice (1.5) pro cíl řízení (1.6) na základě znalosti zesílení soustavy se dostane

$$K_P = \frac{1}{k_1}\,. \tag{1.7}$$

Platí tedy

$$y(t) = K_P(k_1 \pm \Delta k_1 w(t) \;\Rightarrow$$

$$y(t) = \left(1 \pm \frac{\Delta k_1}{k_1}\right) w(t)\,. \tag{1.8}$$

Vidíme, že relativní změna zesílení soustavy $\Delta k_1/k_1$ se plně projeví na výstupní veličině $y(t)$.

Např. změní-li se zesílení soustavy o 50 %, tj. $\Delta k_1/k_1 = 0{,}5$, pak se ze vztahu (1.8) dostane

$$y(t) = (1 \pm 0{,}5) w(t)\,.$$

b) $v(t) \neq 0$

Pro zesílení ovladače K_P (1.7) a relativní změnu zesílení soustavy $\Delta k_1/k_1$ obdržíme

$$y(t) = \left(1 \pm \frac{\Delta k_1}{k_1}\right) w(t) + v(t)\,. \tag{1.9}$$

Vidíme, že v tomto případě na výstupní veličině $y(t)$ se navíc plně projeví i poruchová veličina $v(t)$.

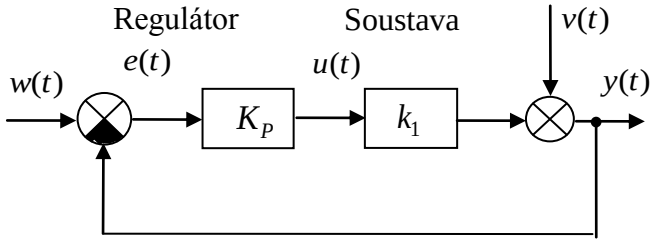
Např., změní-li se zesílení soustavy k_1 stejně jako v předchozím případě, tj. $\Delta k_1/k_1$ = 0,5, pak se dostane

$$y(t) = (1 \pm 0{,}5)w(t) + v(t)\,.$$

Je tedy zřejmé, že systém řízení v otevřené smyčce (systém ovládání) lze použít pouze v případě velmi dobré znalosti vlastností soustavy a tehdy, kdy poruchy na systém řízení nepůsobí nebo mají na něj zanedbatelný vliv.

Příklad 1.2

Je třeba provést analýzu systému řízení v uzavřené smyčce (systém regulace) na obr. 1.5, kde K_P je zesílení regulátoru a k_1 je zesílení soustavy. Předpokládá se, že zesílení soustavy k_1 se může změnit o $\pm\,\Delta k_1$.



Obr. 1.5 Schéma jednoduchého systému řízení v uzavřené smyčce – příklad 1.2

Řešení:

Pro systém řízení v uzavřené smyčce platí

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= K_P k_1 e(t) + v(t) \\ e(t) &= w(t) - y(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{K_P k_1}{1 + K_P k_1} w(t) + \frac{1}{1 + K_P k_1} v(t)\,. \tag{1.10}$$

V tomto případě můžeme uvažovat změny zesílení soustavy $\pm\,\Delta k_1$ i působení poruchy $v(t)$, tj. můžeme psát

$$y(t) = \frac{K_P(k_1 \pm \Delta k_1)}{1 + K_P(k_1 \pm \Delta k_1)} w(t) + \frac{1}{1 + K_P(k_1 \pm \Delta k_1)} v(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{\dfrac{1}{K_P k_1\left(1 \pm \dfrac{\Delta k_1}{k_1}\right)} + 1} w(t) + \frac{1}{1 + K_P k_1\left(1 \pm \dfrac{\Delta k_1}{k_1}\right)} v(t)\,. \tag{1.11}$$

Je zřejmé, že ze vztahu (1.11) se pro

$$K_P \to \infty \quad \text{nebo} \quad K_P k_1 \to \infty \tag{1.12}$$

dostane

$$y(t) \to w(t)\,.$$

Vidíme, že při dostatečně vysoké hodnotě zesílení regulátoru K_P, případně součinu $K_P k_1$ bude splněn cíl řízení (1.4a).

Např. pro $K_P k_1 = 100$ a změnu zesílení soustavy o 50 %, tj. $\Delta K_P/k_1 = 0{,}5$, se dostane

$$y(t) = \frac{1}{\dfrac{1}{100(1 \pm 0{,}5)} + 1} w(t) + \frac{1}{1 + 100(1 \pm 0{,}5)} v(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \left(0{,}9901^{+0{,}0033}_{-0{,}0097}\right) w(t) + \left(0{,}0099^{-0{,}0033}_{+0{,}0097}\right) v(t).$$

V tomto případě změna zesílení soustavy k_1 o 50 % způsobí změnu výstupní veličiny $y(t)$ menší než 2 % a poruchová veličina $v(t)$ je rovněž potlačena na hodnotu menší než 2 % z původní velikosti.

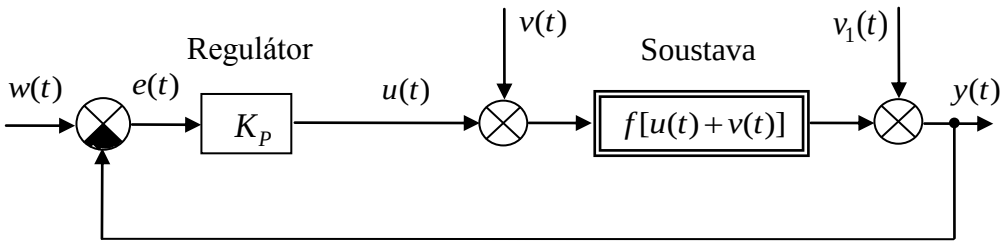
Z výše uvedeného je zřejmé, že systém řízení v uzavřené smyčce (systém regulace) dovede zajistit vysokou kvalitu řízení a to jak z hlediska sledování, tak i z hlediska potlačování poruch.

Příklad 1.3

Na obr. 1.6 je systém řízení v uzavřené smyčce (systém regulace), kde na soustavu působí dvě poruchy $v(t)$ a $v_1(t)$. Soustava je nelineární a je popsána vztahem

$$y(t) = f[u(t) + v(t)] + v_1(t). \tag{1.13}$$

Je třeba zjistit vlastnosti uvedeného systému řízení pro $K_P \to \infty$.



Obr. 1.6 Schéma systému řízení v uzavřené smyčce s nelineární soustavou – příklad 1.3

Řešení:

Pro systém řízení na obr. 1.6 lze psát

$$\left.\begin{aligned} e(t) &= w(t) - y(t) \\ e(t) &= \frac{u(t)}{K_P} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(t) = w(t) - \frac{u(t)}{K_P}. \tag{1.14}$$

Ze vztahu (1.13) určíme $u(t)$, tj.

$$f[u(t) + v(t)] = y(t) - v_1(t) \Rightarrow$$

$$u(t) + v(t) = f^{-1}[y(t) - v_1(t)] \Rightarrow$$

$$u(t) = f^{-1}[y(t) - v_1(t)] - v(t). \tag{1.15}$$

Po dosazení (1.15) do (1.14) obdržíme

$$y(t) = w(t) - \frac{f^{-1}[y(t) - v_1(t)] - v(t)}{K_P}. \tag{1.16}$$

Je zřejmé, že pro $K_P \to \infty$ se dostane

$$y(t) \to w(t)\,.$$

Vidíme, že pro dostatečně vysoké zesílení regulátoru K_P lze pomocí řízení v uzavřené smyčce (zpětnovazebního řízení) plnit cíl řízení (1.4a) i pro nelineární soustavu a při působení dvou vzájemně nezávislých poruch.

2 MATEMATICKÉ MODELY DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

2.1 Obecné matematické modely

Při návrhu a studiu vlastností systémů řízení používáme jejich **matematické modely**. Je to velmi výhodné, protože experimentování se skutečnými systémy řízení můžeme zastoupit experimentováním na jejich matematických modelech, tj. **simulací**. Umožňuje to výrazné snížení rizika zničení daného reálného systému řízení a nákladů. Dochází rovněž k zásadnímu zrychlení celého postupu. Často vznikají nová netradiční řešení.

V teorii automatického řízení v časové oblasti se používají algebraické, transcendentní, diferenciální, parciální diferenciální, diferenční, integrální, sumační rovnice a jejich kombinace. Matematický model lze získat **identifikací**, a to analytickou nebo experimentální cestou, příp. jejich kombinací. Např. analyticky se získá matematický model a jeho parametry se určí nebo zpřesní experimentálně. Někdy pod pojmem identifikace se rozumí nalezení matematického modelu pouze experimentální cestou. Dále se budeme zabývat pouze takovými matematickými modely, které se dají vyjádřit obyčejnými diferenciálními rovnicemi a které popisují reálné systémy se soustředěnými parametry.

Při interpretaci vlastního matematického modelu i výsledů simulace je třeba si vždy pamatovat, že ***každý matematický model je jen určitou aproximací skutečného systému***.

Protože i velmi složitý mnohorozměrový systém vzniká spojením jednorozměrových systémů, hlavní pozornost bude věnována jednorozměrovým systémům.

Uvažujme **jednorozměrový systém** popsaný obecně nelineární diferenciální rovnicí

$$g[y^{(n)}(t),\ldots,\dot{y}(t),y(t),u^{(m)}(t),\ldots,\dot{u}(t),u(t)]=0\,. \tag{2.1a}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}(t)&=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\ y^{(i)}(t)=\frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i};\ i=1,2,\ldots,n,\\ \dot{u}(t)&=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t},\ u^{(j)}(t)=\frac{\mathrm{d}^j u(t)}{\mathrm{d}t^j};\ j=1,2,\ldots,m,\end{aligned}\right\} \tag{2.1b}$$

při počátečních podmínkách

$$\left.\begin{aligned}y(0)&=y_0,\dot{y}(0)=\dot{y}_0,\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)},\\ u(0)&=u_0,\dot{u}(0)=\dot{u}_0,\ldots,u^{(m-1)}(0)=u_0^{(m-1)},\end{aligned}\right\} \tag{2.1c}$$

kde $u(t)$ je **vstupní veličina** (signál, proměnná) = **vstup**, $y(t)$ – **výstupní veličina** (signál, proměnná) = **výstup**, g – obecně nelineární funkce, n – **řád systému**.

Pokud platí

$$n>m \tag{2.2}$$

pak matematický model vyhovuje **silné podmínce fyzikální realizovatelnosti**. V případě

$$n=m \tag{2.3}$$

vyhovuje pouze **slabé** podmínce fyzikální realizovatelnosti.

V případě

$$n<m \tag{2.4}$$

matematický model je **fyzikálně nerealizovatelný**, a tedy nevyjadřuje vlastnosti reálného systému.

Matematický model (2.1a), ve kterém vystupují derivace (2.1b) popisuje **dynamický systém** – s pamětí.

Z diferenciální rovnice (2.1a) pro

$$\lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = 0;\ i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\lim_{t\to\infty} u^{(j)}(t) = 0;\ j = 1,2,\ldots,m$$

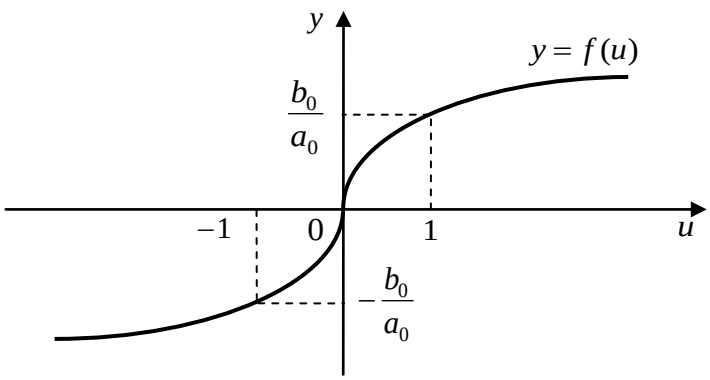
je možné získat rovnici (pokud existuje)

$$y = f(u), \tag{2.5}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} y &= \lim_{t\to\infty} y(t), \\ u &= \lim_{t\to\infty} u(t). \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Rovnice (2.5) vyjadřuje **statickou charakteristiku** daného dynamického systému (2.1), viz např. obr. 2.1.



Obr. 2.1 Nelineární statická charakteristika – příklad 2.1

Statická charakteristika popisuje závislost mezi výstupní y a vstupní u veličinou v **ustáleném stavu**.

Pokud v rovnici (2.1a) nevystupují derivace, tj.

$$g[y(t),u(t)] = 0 \quad \text{nebo} \quad g(y,u) = 0, \tag{2.7}$$

pak je to matematický model **statického systému** – bez paměti.

Veliký význam mají stavové modely dynamických systémů, které se používají jak pro jednorozměrové, tak i mnohorozměrové dynamické systémy.

Stavový model jednorozměrového dynamického systému má tvar

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t),u(t)],\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \textbf{– stavová rovnice} \tag{2.8a}$$

$$y(t) = h[\boldsymbol{x}(t),u(t)] \quad \textbf{– výstupní rovnice} \tag{2.8b}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T ,$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = [g_1, g_2, ..., g_n]^T ,$$

kde $\boldsymbol{x}(t)$ je **vektor stavu** (stav) dimenze n, $\boldsymbol{g}$ – obecně nelineární vektorová funkce dimenze n, h – obecně nelineární funkce, T – symbol transpozice.

Z důvodu zjednodušení nezávisle proměnnou čas t budeme často vynechávat.

Složky x_1, x_2,…, x_n stavu $\boldsymbol{x}$ vyjadřují vnitřní proměnné. Jejich znalost je důležitá při tzv. **stavovém řízení** (viz kapitola 7).

Řád systému n je dán počtem stavových proměnných. Pokud ve výstupní rovnici (2.8b) nevystupuje vstup $u(t)$, pak daný dynamický systém (2.8) je silně fyzikálně realizovatelný, jinak je pouze slabě fyzikálně realizovatelný.

Statickou charakteristiku (pokud existuje) ze stavového modelu (2.8) získáme pro $t \to \infty \Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{0}$ a eliminací stavových proměnných (viz příklad 2.1).

Příklad 2.1

Nelineární dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí 2.řádu

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 \operatorname{sign}[u(t)] \sqrt{|u(t)|} , \tag{2.9}$$

při počátečních podmínkách $y(0) = y_0$ a $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Je třeba:

a) určit fyzikální realizovatelnost,

b) určit a nakreslit statickou charakteristiku,

c) vyjádřit matematický model (2.9) stavově.

Řešení:

a) Protože $n = 2 > m = 0$ [na pravé straně rovnice nevystupuje derivace $u(t)$], daný dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný.

b) V ustáleném stavu pro $t \to \infty$ derivace v rovnici (2.9) budou nulové, a proto v souladu s (2.6) lze psát

$$a_0 y(t) = b_0 \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|} \Rightarrow$$

$$y = \frac{b_0}{a_0} \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|}$$

Získaná nelineární statická charakteristika je na obr. 2.1.

c) Zvolíme např. stavové proměnné

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y},$$

po dosazení do diferenciální rovnice (2.9) a úpravě dostaneme

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = y_0,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{a_0}{a_2}x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2 + \frac{b_0}{a_2}\operatorname{sign}(u)\sqrt{|u|}, \qquad x_2(0) = \dot{y}_0.$$

Statickou charakteristiku získáme pro ustálený stav, tj. pro $t \to \infty \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) \to 0$ a $\dot{x}_2(t) \to 0$ a eliminací stavových proměnných

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{a_0}{a_2}x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2 + \frac{b_0}{a_2}\operatorname{sign}(u)\sqrt{|u|} \\ y &= x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y = \frac{b_0}{a_2}\operatorname{sign}(u)\sqrt{|u|}\ .$$

2.2 Lineární dynamické modely

Velmi důležitou skupinou matematických modelů dynamických systémů jsou **lineární matematické modely**. Tyto matematické modely musí vyhovovat podmínce **linearity**, která sestává ze dvou dílčích vlastností **aditivity** a **homogenity**.

Aditivita

$$\left.\begin{aligned} u_1 &\to \text{systém} \to y_1 \\ u_2 &\to \text{systém} \to y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_1 + u_2 \to \text{systém} \to y_1 + y_2\,. \tag{2.10a}$$

Homogenita:

$$u \to \text{systém} \to y \Rightarrow au \to \text{systém} \to ay\,. \tag{2.10b}$$

Tyto dílčí vlastnosti linearity mohou být sloučeny

$$\left.\begin{aligned} u_1 &\to \text{systém} \to y_1 \\ u_2 &\to \text{systém} \to y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1u_1 + a_2u_2 \to \text{systém} \to a_1y_1 + a_2y_2\,, \tag{2.11}$$

kde a, a_1, a_2 jsou libovolné konstanty; $u(t)$, $u_1(t)$ a $u_2(t)$ – vstupní veličiny (vstupy); $y(t)$, $y_1(t)$ a $y_2(t)$ – výstupní veličiny (výstupy).

Linearita dynamických systémů je tedy vlastnost, kdy váženému součtu vstupů odpovídá stejně vážený součet výstupů.

Velmi důležitou vlastností lineárních dynamických systémů je, že každá jejich lokální vlastnost je současně i jejich globální vlastností.

Příklad 2.2

Statický systém je popsán lineární algebraickou rovnicí

$$y(t) = k_1 u(t) + y_0\,, \tag{2.12}$$

kde k_1 a y_0 jsou konstanty.

Je třeba ověřit, zda matematický model (2.12) je lineární.

Řešení:

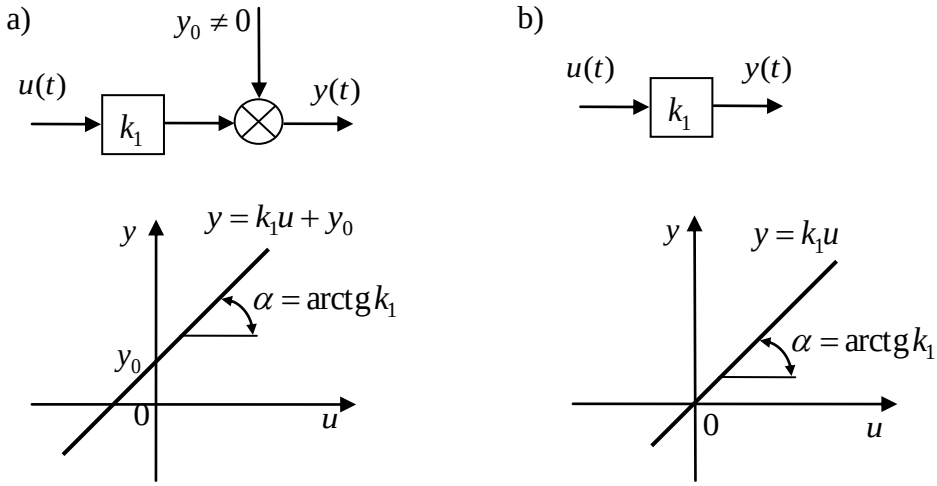
Jako vstupy volíme např. $u_1(t) = 2$ a $u_2(t) = 4t$.

Po dosazení do (2.12) dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) = 2\ldots \quad y_1(t) = 2k_1 + y_0 \\ u_2(t) = 4t\ldots y_2(t) = 4k_1 t + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = 2k_1(1+2t) + 2y_0\,,$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2(1+2t)\ldots y = 2k_1(1+2t) + y_0 \neq y_1(t) + y_2(t) =$$
$$= 2k_1(1+2t) + 2y_0.$$

Vidíme, že pro $y_0 \neq 0$ matematický model (2.12) z hlediska definice linearity (2.10) nebo (2.11) není lineární. Matematický model (2.12) statického systému bude lineární pouze pro $y_0 = 0$, viz obr. 2.2.



Obr. 2.2 Matematický model statického systému: a) nelineární, b) lineární – příklad 2.2

Z výše uvedeného je zřejmé, že u lineárních systémů statická charakteristika (pokud existuje) musí vždy procházet počátkem souřadnic.

Příklad 2.3

Dynamický systém (integrátor) je popsán lineární diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t} = k_1 u(t),\ y(0) = y_0\,, \tag{2.13}$$

nebo ekvivalentní integrální rovnicí

$$y(t) = k_1 \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + y_0\,, \tag{2.14}$$

Je třeba ověřit linearitu daného matematického modelu.

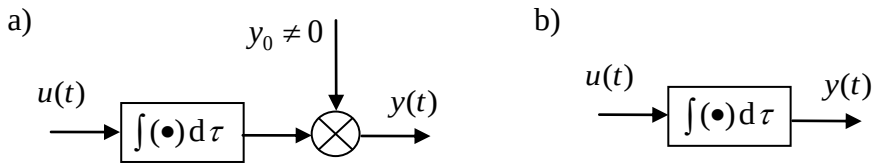
Řešení:

Zvolíme např. stejné vstupy jako v příkladě 2.2 a dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) = 2\ldots \quad y_1(t) = 2k_1 t + y_0 \\ u_2(t) = 4t\ldots y_2(t) = 2k_1 t^2 + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = 2k_1 t(1+t) + 2y_0\,,$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2(1+2t)\ldots y = 2k_1 t(1+t) + y_0 \neq y_1(t) + y_2(t) =$$
$$= 2k_1 t(1+t) + 2y_0.$$

Znovu vidíme, že daný matematický model (2.13) nebo (2.14) pro $y_0 \neq 0$ nesplňuje podmínku linearity (obr. 2.3).



Obr. 2.3 Matematický model integrátoru: a) nelineární, b) lineární – příklad 2.3

Tento konkrétní závěr může být zobecněn. ***U lineárních matematických modelů musíme uvažovat vždy nulové počáteční podmínky***. V opačném případě s nimi nemůžeme pracovat jako s matematickými modely splňujícími podmínku linearity.

3 MATEMATICKÉ MODELY LINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

3.1 Základní lineární matematické modely

Jednorozměrové lineární dynamické systémy v časové oblasti jsou nejčastěji popsány lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty (pouze takové systémy budeme uvažovat)

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \tag{3.1a}$$

při počátečních podmínkách

$$\left.\begin{aligned} &y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \\ &u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \ldots, u^{(m-1)}(0) = u_0^{(m-1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.1b}$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2.2) − (2.4).

Použitím Laplaceovy transformace (viz příloha A) na diferenciální rovnici *n*-tého řádu (3.1a) při uvažování počátečních podmínek (3.1b) dostaneme její obraz, tj. algebraickou rovnici *n*-tého stupně

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) - L(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) - R(s)$$

a z ní můžeme vypočítat obraz výstupní veličiny

$$Y(s) = \underbrace{\underbrace{\frac{M(s)}{N(s)} U(s)}_{\text{obraz odezvy na vstup}} + \underbrace{\frac{L(s) - R(s)}{N(s)}}_{\substack{\text{obraz odezvy na} \\ \text{pocatecni podminky} \\ \text{(obraz homogenni} \\ \text{diferencialni rovnice)}}}}_{\text{obraz reseni diferencialni rovnice}}, \tag{3.2}$$

$$M(s) = b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0 = b_m (s - s_1^0)(s - s_2^0) \ldots (s - s_m^0), \tag{3.3}$$

$$N(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n), \tag{3.4}$$

kde $Y(s)$ je obraz výstupní veličiny $y(t)$, $U(s)$ − obraz vstupní veličiny $u(t)$, $L(s)$ – mnohočlen nejvýše stupně $n - 1$ určený počátečními podmínkami levé strany diferenciální rovnice, $R(s)$ – mnohočlen nejvýše stupně $m - 1$ určený počátečními podmínkami pravé strany diferenciální rovnice, $M(s)$ – mnohočlen stupně m určený koeficienty pravé strany diferenciální rovnice, $N(s)$ – **charakteristický mnohočlen** stupně n určený koeficienty levé strany diferenciální rovnice, s – **komplexní proměnná** (rozměr čas^{-1}) [s^{-1}].

Protože diferenciální rovnice (3.1) je matematickým modelem dynamického systému, je zřejmé, že mnohočlen $N(s)$ je současné charakteristickým mnohočlenem i tohoto dynamického systému.

Použitím inverzní Laplaceovy transformace (viz příloha A) na obraz řešení (3.2) získáme originál řešení

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y(s)\}. \tag{3.5}$$

Velmi výhodné je použití vhodných slovníků Laplaceovy transformace. Slovníky vhodné pro teorii automatického řízení jsou uvedeny v příloze A.

Ze vztahu (3.2) vyplývá, že může být použit jako lineární matematický model daného lineárního dynamického systému, bude-li obraz odezvy na počáteční podmínky nulový (tj. budou-li počáteční podmínky nulové), viz podmínky linearity (2.10) nebo (2.11). V tomto případě můžeme psát

$$Y(s) = \frac{M(s)}{N(s)} U(s) = G(s)U(s)\,, \tag{3.6}$$

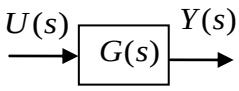
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m (s - s_1^0)(s - s_2^0)\ldots(s - s_m^0)}{a_n (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)}\,, \tag{3.7}$$

kde $G(s)$ je **přenos**, s_i – **póly** lineárního dynamického systému = kořeny charakteristického mnohočlenu $N(s)$, s_j^0 – **nuly** lineárního dynamického systému = kořeny mnohočlenu $M(s)$. Rozdíl $n - m$ se nazývá **relativní stupeň systému**.

Přenos $G(s)$ ***je dán podílem obrazu výstupní veličiny*** $Y(s)$ ***a obrazu vstupní veličiny*** $U(s)$ ***při nulových počátečních podmínkách***. Můžeme ho obdržet přímo z diferenciální rovnice (3.1a), protože obrazy derivací výstupní $y(t)$ a vstupní $u(t)$ veličiny při nulových počátečních podmínkách jsou dány vztahy

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L}\left\{y^{(i)}(t)\right\} &= s^i Y(s); \quad i = 1,2,\ldots.n \\ \mathrm{L}\left\{u^{(j)}(t)\right\} &= s^j U(s); \quad j = 1,2,\ldots.m \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Velikou výhodou přenosu je, že dovoluje vyjádřit vlastnosti lineárního dynamického systému v oblasti komplexní proměnné blokem jak na obr. 3.1.



Obr. 3.1 Blokové schéma systému

Jak bude dále ukázáno, s takovými bloky se velmi jednoduše a efektivně pracuje.

Statickou charakteristiku lineárního dynamického systému (pokud existuje) získáme z diferenciální rovnice (3.1a) pro

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) &= 0; \quad i = 1,2,\ldots,n, \\ \lim_{t\to\infty} u^{(j)}(t) &= 0; \quad j = 1,2,\ldots,m, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

tj.

$$y = k_1 u\,, \tag{3.10a}$$

$$k_1 = \frac{b_0}{a_0},\ a_0 \neq 0\,, \tag{3.10b}$$

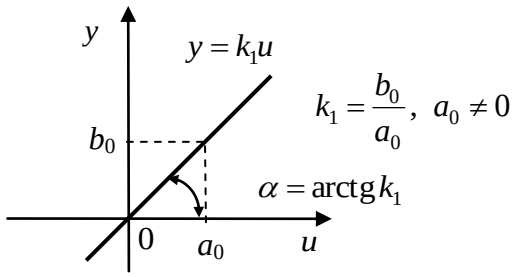
kde k_1 je koeficient přenosu.

Ze srovnání (3.8) a (3.9) vyplývá důležitý vztah mezi časem t a komplexní proměnnou s, tj.

$$t \to \infty \Leftrightarrow s \to 0\,. \tag{3.11}$$

Je zřejmé, že na základě vztahu (3.11) dostaneme z přenosu (3.7) rovnici statické charakteristiky (3.10), proto lze psát

$$y = [\lim_{s \to 0} G(s)]u,\ a_0 \neq 0\,. \tag{3.12}$$



Obr. 3.2 Statická charakteristika lineárního dynamického systému

Statická charakteristika lineárního dynamického systému je přímka, která vždy prochází počátkem souřadnic (obr. 3.2).

Dosazením komplexního kmitočtu jω za komplexní proměnnou s v přenosu (3.7) dostaneme **kmitočtový** (frekvenční) **přenos**

$$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \cdots + b_1\,\mathrm{j}\omega + b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \cdots + a_1\,\mathrm{j}\omega + a_0} = A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\,, \tag{3.13}$$

$$A(\omega) = \mathrm{mod}\, G(\mathrm{j}\omega) = |G(\mathrm{j}\omega)|\,, \tag{3.14}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(\mathrm{j}\omega)\,, \tag{3.15}$$

kde $A(\omega)$ je **modul** (amplituda) kmitočtového přenosu, $\varphi(\omega)$ – **argument** (fáze) kmitočtového přenosu, ω – **úhlový kmitočet** (úhlová frekvence) (rozměr čas^{-1}) [s^{-1}].

Z důvodu odlišení úhlového kmitočtu (T – perioda, f – kmitočet)

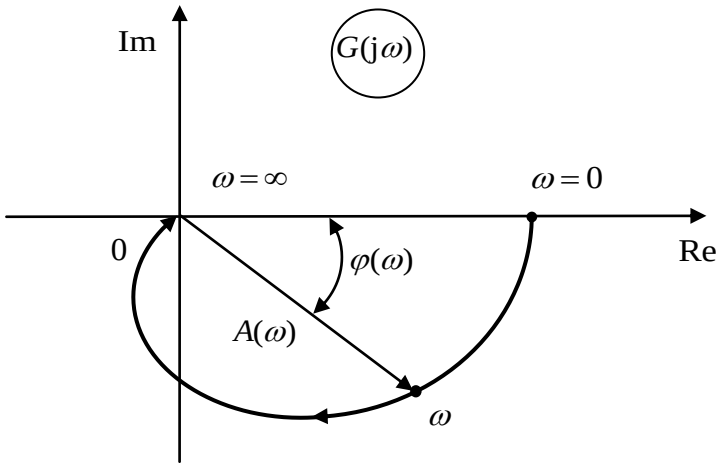
$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \tag{3.16}$$

od „obyčejného“ kmitočtu

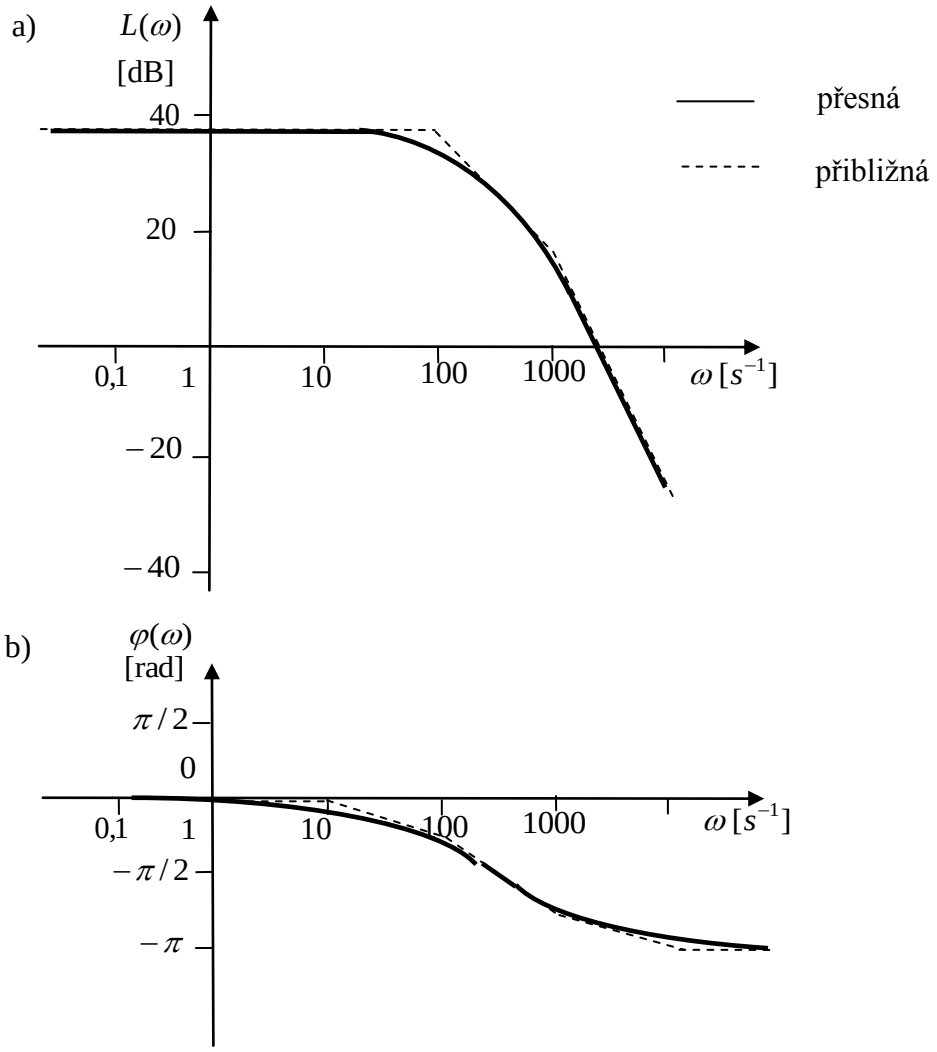
$$f = \frac{1}{T} \tag{3.17}$$

s jednotkou Hz (herz) a rozměrem [s^{-1}] se používá pro úhlový kmitočet často místo [s^{-1}] označení [rad s^{-1}].

Zobrazení kmitočtového přenosu $G(\mathrm{j}\omega)$ pro $\omega = 0$ až $\omega = \infty$ v komplexní rovině se nazývá **amplitudovázová kmitočtová charakteristika** (obr. 3.3).



Obr. 3.3 Amplitudofázová kmitočtová charakteristika



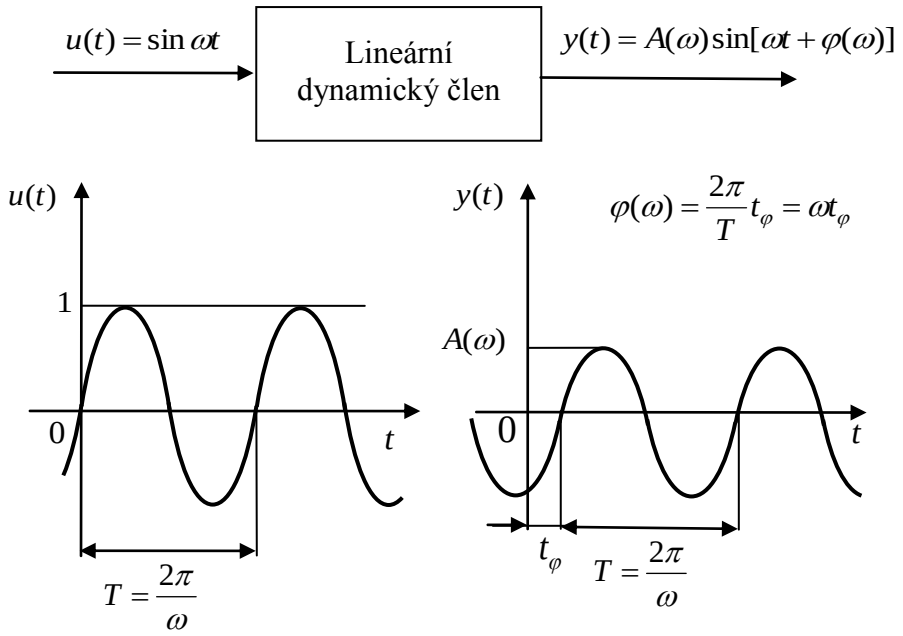
Obr. 3.4 Logaritmické kmitočtové charakteristiky: a) amplitudová, b) fázová

Nejčastěji se používají **logaritmické kmitočtové charakteristiky** (Bodého kmitočtové charakteristiky), viz obr. 3.4. V tomto případě se vykresluje zvlášť tzv. **logaritmický modul**

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) \tag{3.18}$$

a fáze $\varphi(\omega)$. Kmitočtová osa má logaritmické měřítko a logaritmický modul $L(\omega)$ se uvádí v dB (decibelech). Obdržíme tak logaritmickou amplitudovou kmitočtovou charakteristiku (obr. 3.4a) a logaritmickou fázovou kmitočtovou charakteristiku (obr. 3.4b). U logaritmických kmitočtových charakteristik se s výhodou využívá aproximace přesných průběhů pomocí přímkových úseků.

Kmitočtový přenos $G(\mathrm{j}\omega)$ vyjadřuje pro každou hodnotu úhlového kmitočtu ω amplitudu (modul) $A(\omega)$ a fázi (argument) $\varphi(\omega)$ ustálené sinusoidální odezvy $y(t)$ na sinusoidální průběh vstupní veličiny $u(t)$ s jednotkovou amplitudou. Tzn., že ***kmitočtovou charakteristiku můžeme získat experimentálně*** (obr. 3.5). Má to veliký význam především u rychlých systémů.



Obr. 3.5 Interpretace kmitočtové charakteristiky

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2.2) – (2.4). Je zřejmé, že reálný lineární dynamický systém nemůže přenést průběh s nekonečně vysokým úhlovým kmitočtem, a proto u silně fyzikálně realizovatelných systémů musí platit

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\omega\to\infty} G(\mathrm{j}\omega) = 0 \\ &\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0 \\ &\lim_{\omega\to\infty} L(\omega) = -\infty \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \; n > m\,. \tag{3.19}$$

Rovnici statické charakteristiky (3.10) z kmitočtového přenosu (3.13) získáme snadno (pokud existuje), protože pro ustálený stav musí platit $\omega = 0$, tj.

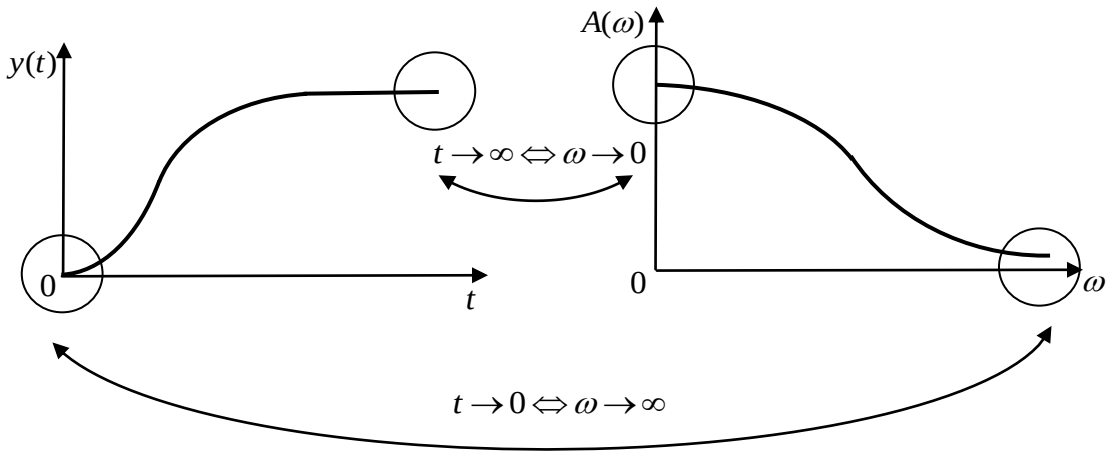
$$y = [\lim_{\omega\to 0} G(\mathrm{j}\omega)]u\,, \quad a_0 \neq 0\,. \tag{3.20}$$

Vyplývá to rovněž ze vztahu (3.11) pro $s = \mathrm{j}\omega$

$$t \to \infty \;\Leftrightarrow\; \omega \to 0\,. \tag{3.21}$$

Je zřejmé, že mezi časem t a úhlovým kmitočtem ω platí i duální vztah (obr. 3.6)

$$t \to 0 \;\Leftrightarrow\; \omega \to \infty\,. \tag{3.22}$$

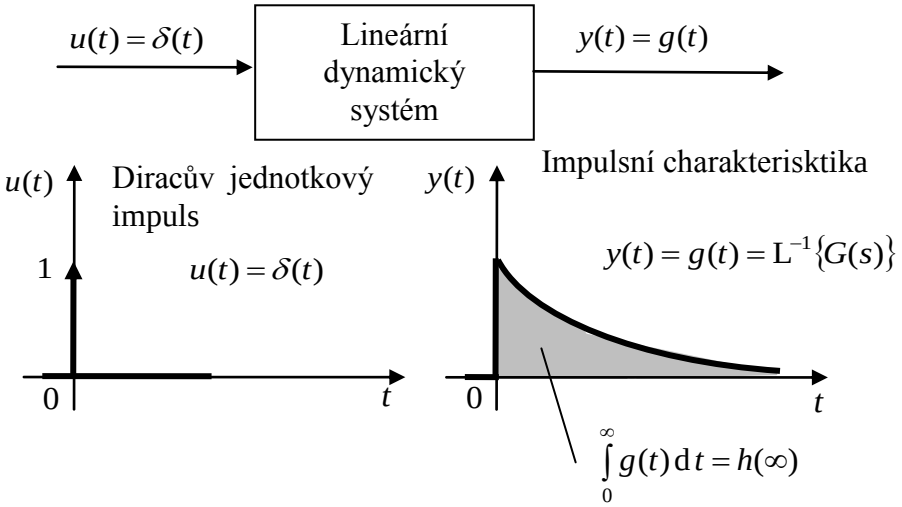


Obr. 3.6 Vztah mezi časem t a úhlovým kmitočtem ω

Ze vztahů (3.21), (3.22) a obr. 3.6 vyplývá, že vlastnosti lineárního dynamického systému při nízkých úhlových kmitočtech rozhodují o jeho vlastnostech při dlouhých časech, tj. v ustáleném stavu a naopak. Podobně jeho vlastnosti při vysokých úhlových kmitočtech rozhodují o vlastnostech počátku časové odezvy, tj. o rychlosti časové odezvy (o přechodném stavu) a naopak.

Vlastnosti lineárních dynamických systémů při nulových počátečních podmínkách mohou být popsány časovými odezvami na přesně definované průběhy vstupní veličiny. V teorii automatického řízení se používají dva základní průběhy vstupní veličiny $u(t)$, a to **Diracův (jednotkový) impuls** $\delta(t)$ a **Heavisideův (jednotkový) skok** $\eta(t)$, viz příloha A.

Impuslní (impulsová) **funkce** $g(t)$ popisuje odezvu lineárního dynamického systému na průběh vstupní veličiny ve tvaru Diracova impulsu $\delta(t)$ při nulových počátečních podmínkách, viz obr. 3.7.



Obr. 3.7 Impulsní funkce (charakteristika) lineárního dynamického systému

Grafické vyjádření impulsní funkce $g(t)$ je impulsní charakteristika (obr. 3.7).

V souladu se vztahem (3.6) můžeme psát

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{3.23}$$

a pro

$$u(t) = \delta(t) \mathrel{\hat{=}} U(s) = 1$$

dostaneme

$$y(t) = g(t) = \mathrm{L}^{-1}\{G(s)\}. \tag{3.24}$$

U lineárního dynamického systému derivaci nebo integrálu vstupní veličiny $u(t)$ odpovídá derivace nebo integrál výstupní veličiny $y(t)$. Této vlastnosti využijeme pro vyznačení statické charakteristiky lineárního dynamického systému na základě jeho impulsní funkce $g(t)$. Protože statická charakteristika lineárního dynamického systému je přímka procházející počátkem souřadnic, stačí určit jeden její nenulový bod. Můžeme tedy psát

$$u = u(\infty) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1,$$

$$y = y(\infty) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

Odtud již snadno dostaneme rovnici statické charakteristiky (pokud existuje)

$$y = [\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau]u . \tag{3.25}$$

Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti má tvar

$$|g(0)| < \infty . \tag{3.26}$$

Pokud $g(0)$ obsahuje Diracův impuls $\delta(t)$, pak daný lineární dynamický systém je pouze slabě fyzikálně realizovatelný.

Přechodová funkce $h(t)$ je odezva lineárního dynamického systému na průběh vstupní veličiny ve tvaru Heavisideova skoku $\eta(t)$ při nulových počátečních podmínkách, viz obr. 3.8.

Grafické vyjádření přechodové funkce $h(t)$ je přechodová charakteristika (obr. 3.8).

Na základě vztahu (3.23) pro

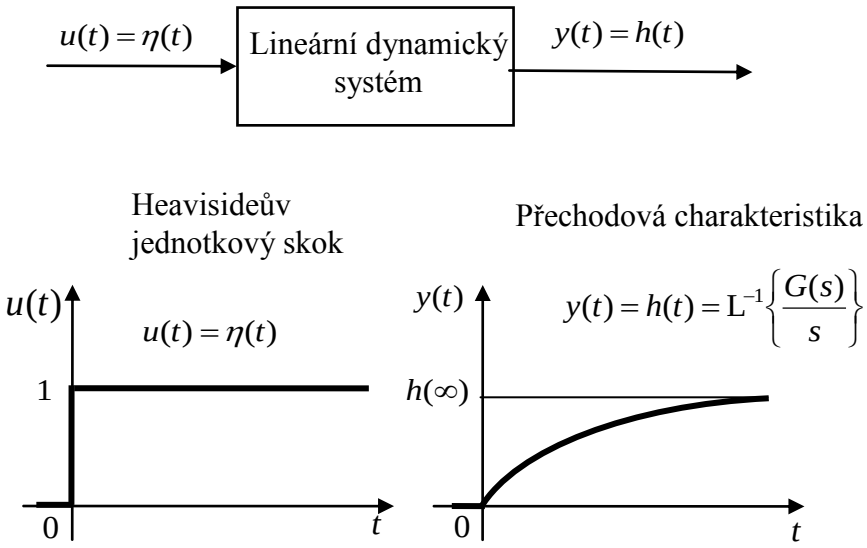
$$u(t) = \eta(t) \mathrel{\hat{=}} U(s) = \frac{1}{s}$$

dostaneme

$$y(t) = h(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \tag{3.27}$$

Z přechodové funkce $h(t)$ se získá rovnice statické charakteristiky (pokud existuje) velmi snadno, protože platí

$$u = u(\infty) = \eta(\infty) = 1,$$



Obr. 3.8 Přechodová funkce (charakteristika) lineárního dynamického systému

$$y = y(\infty) = h(\infty),$$

tj.

$$y = [\lim_{t\to\infty} h(t)]u\,. \tag{3.28}$$

Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti má tvar

$$h(0) = 0 \tag{3.29}$$

a slabá

$$0 < |h(0)| < \infty\,. \tag{3.30}$$

Užitečné je použití **zobecněné derivace** definované vztahy (obr. 3.9)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}_{ob}(t) + \sum_{i=1}^{p} h_i \delta(t - t_i), \\ h_i &= \lim_{t\to t_{i+}} x(t) - \lim_{t\to t_{i-}} x(t), \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

kde t_i jsou body nespojitosti prvního druhu se skoky h_i, $\dot{x}_{ob}(t)$ − obyčejná derivace určena mezi body nespojitosti.

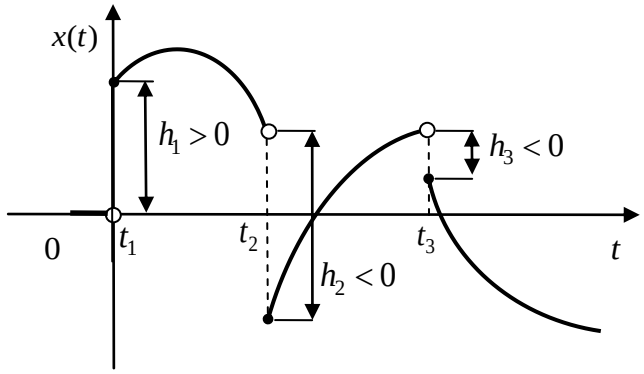
Pomocí zobecněné derivace můžeme snadno vyjádřit vztah mezi Diracovým impulsem a Heavisideovým skokem

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t} \;\Leftrightarrow\; \eta(t) = \int_0^t \delta(\tau)d\tau \tag{3.32}$$

a mezi impulsní a přechodovou funkcí

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} \;\Leftrightarrow\; h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau\,, \tag{3.33}$$

$$G(s) = sH(s) \;\Leftrightarrow\; H(s) = \frac{G(s)}{s}\,. \tag{3.34}$$



Obr. 3.9 Funkce $x(t)$ s body nespojitosti prvního druhu

Ze všech matematických modelů lineárních dynamických systémů je nejobecnější stavový model

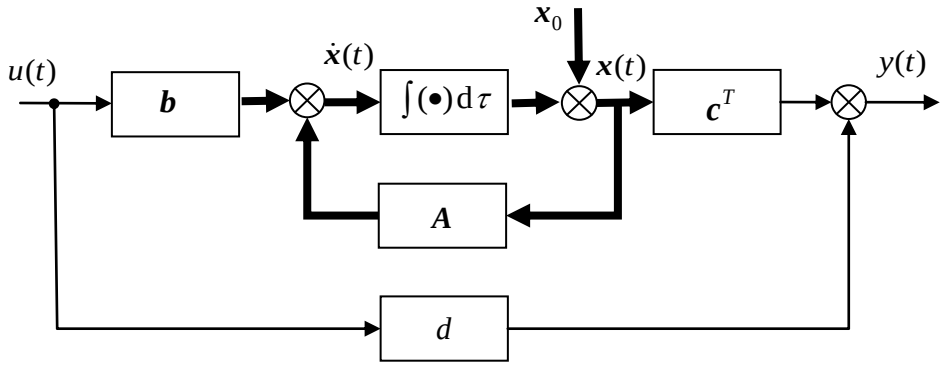
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{– stavová rovnice} \tag{3.35a}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) + du(t) \quad \text{– výstupní rovnice} \tag{3.35b}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je čtvercová stavová matice systému (dynamiky) řádu n [$(n\times n)$], $\boldsymbol{b}$ – stavový vektor vstupu dimenze n, $\boldsymbol{c}$ – výstupní vektor stavu dimenze n, d – konstanta převodu, T – symbol transpozice.

Blokové schéma stavového modelu lineárního dynamického systému (3.35) je na obr. 3.10.

Pro $d = 0$ stavový model (3.35) vyhovuje podmínce silné fyzikální realizovatelnosti a pro $d \neq 0$ vyhovuje pouze slabé podmínce fyzikální realizovatelnosti.



Obr. 3.10 Blokové schéma stavového modelu lineárního dynamického systému

Pokud stavový model (3.35) vyhovuje **podmínce řiditelnosti**

$$\boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}], \quad \det \boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \neq 0 \tag{3.36}$$

a **podmínce pozorovatelnosti**

$$\boldsymbol{Q}_{ob}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}, \ldots, (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{c}]^T, \quad \det \boldsymbol{Q}_{ob}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^T) \neq 0 \tag{3.37}$$

pak při nulových počátečních podmínkách [$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$] můžeme z něho pomocí Laplaceovy transformace získat přenos

$$\left.\begin{aligned} s\boldsymbol{X}(s) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{b}U(s) \\ Y(s) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}(s) + dU(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d \tag{3.38}$$

kde det je determinant, $\boldsymbol{I}$ – jednotková matice, $\boldsymbol{Q}_{co}$ – **matice řiditelnosti** řádu n [$(n\times n)$], $\boldsymbol{Q}_{ob}$ – **matice pozorovatelnosti** řádu n [$(n\times n)$].

Z přenosu (3.38) již snadno na základě (3.12) můžeme získat rovnici statické charakteristiky (pokud existuje)

$$y = \lim_{s\to 0}[\boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d]u \tag{3.39}$$

Výhodnější pro získání přenosu je použití vztahu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T) - \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} + d\,, \tag{3.40}$$

který nevyžaduje inverzi funkcionální matice.

Podmínka řiditelnosti (3.36) vyjadřuje velmi důležitou vlastnost daného lineárního dynamického systému spočívající v tom, že existuje taková vstupní veličina (řízení) $u(t)$, která převede daný systém z libovolného počátečního stavu do jiného libovolného stavu za konečnou dobu.

Podmínka pozorovatelnosti (3.37) vyjadřuje to, že na základě průběhu vstupní veličiny (řízení) $u(t)$ a výstupní veličiny $y(t)$ na určitém časovém intervalu lze určit stav $\boldsymbol{x}(t)$ v čase z tohoto intervalu.

Přenos (3.38) nebo (3.39) je určen na základě stavového modelu (3.35) jednoznačně. Naproti tomu pro přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b'_m s^m + \ldots + b'_1 s + b'_0}{a'_n s^n + \ldots + a'_1 s + a'_0} \tag{3.41a}$$

stavový model může mít mnoho (teoreticky nekonečně mnoho) různých tvarů. Např. pro $n = m$ přenos (3.41a) lze zapsat ve tvaru

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b'_n}{a'_n} + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} =$$

$$= d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{N(s)}\,. \tag{3.41b}$$

Z takto upraveného přenosu (3.41b) můžeme přímo vyjádřit stavový model (3.35) v tzv. **kanonickém tvaru řízení**, kde

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &\boldsymbol{c}_c^T = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}], \ d = \frac{b_n'}{a_n'}. \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

Upravený přenos (3.41b) byl získán z přenosu (3.41a) vydělením čitatele jmenovatelem a zbytku koeficientem a_n'.

Koeficienty a_i a b_i můžeme získat přímo pomocí vztahů

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{a_i'}{a_n'} \\ b_i &= \frac{1}{a_n'}\left(b_i' - a_i' \frac{b_n'}{a_n'}\right) \end{aligned}\right\} \ i = 0,1,\dots,n\,. \tag{3.43}$$

Pro stavový model v kanonickém tvaru řízení (3.42) existuje duální **kanonický tvar pozorování**

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_c(t) &= \boldsymbol{A}_c \boldsymbol{x}_c(t) + \boldsymbol{b}_c u(t), & \dot{\boldsymbol{x}}_o(t) &= \boldsymbol{A}_o \boldsymbol{x}_o(t) + \boldsymbol{b}_o u(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{c}_c^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}_c(t) + du(t), & y(t) &= \boldsymbol{c}_o^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}_o(t) + du(t), \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

kanonický tvar řízení — kanonický tvar pozorování

(canonical controller form) — (canonical observer form)

kde

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_o &= \boldsymbol{A}_c^T & &\Leftrightarrow & \boldsymbol{A}_c &= \boldsymbol{A}_o^T \\ \boldsymbol{b}_o &= \boldsymbol{c}_c & &\Leftrightarrow & \boldsymbol{b}_c &= \boldsymbol{c}_o \\ \boldsymbol{c}_o^T &= \boldsymbol{b}_c^T & &\Leftrightarrow & \boldsymbol{c}_c^T &= \boldsymbol{b}_o^T \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

Konstanta převodu d zůstává ve všech tvarech stavových modelů stejná.

Obě matice $\boldsymbol{A}_c$ a $\boldsymbol{A}_o = \boldsymbol{A}_c^T$ ve stavových modelech (3.44) mají **Frobeniův kanonický tvar**, který se vyznačuje tím, že v prvním nebo posledním řádku, příp. v prvním nebo posledním sloupci vystupují záporné koeficienty jejich charakteristických mnohočlenů $N(s)$ pro $a_n = 1$. Charakteristické mnohočleny jsou stejné a jsou dány vztahem

$$\begin{aligned} N(s) &= \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_o) = \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n), \end{aligned} \tag{3.46}$$

kde s_i jsou **charakteristická** (vlastní) **čísla** (hodnoty), stejná pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_c$ a $\boldsymbol{A}_o = \boldsymbol{A}_c^T$.

Ze srovnání mnohočlenů ve jmenovatelích ve vztazích (3.38), (3.40) a (3.41) a mnohočlenu (3.46) vyplývá, že kořeny charakteristického mnohočlenu jsou charakteristická čísla matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_c$ a $\boldsymbol{A}_o$, a tedy jsou to rovněž póly daného lineárního dynamického systému.

Kanonické stavové modely (3.44) můžeme z obecného stavového modelu (3.35) získat přímo pomocí transformačních matic $\boldsymbol{T}_c$ a $\boldsymbol{T}_o$, pro které platí

$$\boldsymbol{T}_c = \boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\boldsymbol{Q}\,, \tag{3.47}$$

$$\boldsymbol{T}_o^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^T)\,, \tag{3.48}$$

kde matice

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

je sestavena z koeficientů charakteristického mnohočlenu $N(s)$ pro $a_n = 1$, mimo koeficientu a_0, viz též vztah (3.41b). Pak lze psát:

kanonický tvar řízení

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_c = \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{x}, \\ &\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c,\ \boldsymbol{b}_c = \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{b} = [0,0,\dots,1]^T,\ \boldsymbol{c}_c^T = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}_c = [b_0,b_1,\dots,b_{n-1}], \end{aligned} \tag{3.50}$$

kanonický tvar pozorování

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{x}, \\ &\boldsymbol{A}_o = \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_o,\ \boldsymbol{b}_o = \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{b} = [b_0,b_1,\dots,b_{n-1}]^T,\ \boldsymbol{c}_o^T = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}_o = [0,0,\dots,1]. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Vektory $\boldsymbol{b}_o$ a $\boldsymbol{c}_c$ jsou tvořeny koeficienty b_i čitatele ve vztahu (3.41) a mohou být určeny přímo na základě vztahu (3.43).

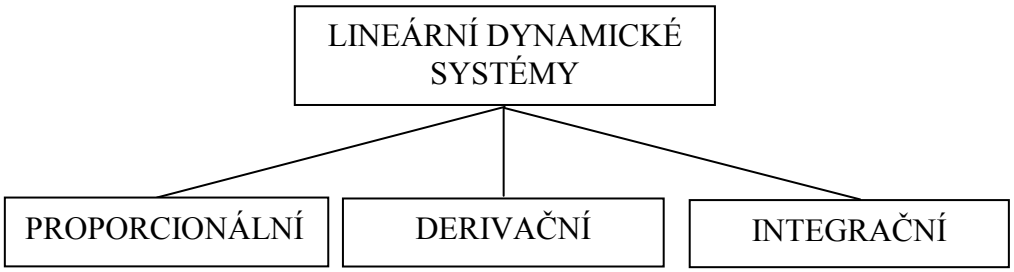
Z uvedených matematických modelů je stavový model nejobecnější. Za předpokladu řiditelnosti a pozorovatelnosti [viz vztahy (3.36) a (3.37)] a samozřejmě nulových počátečních podmínek, jsou všechny tyto matematické modely lineárních dynamických systémů, tj. lineární diferenciální rovnice, přenos, kmitočtový přenos, impulsní funkce (charakteristika), přechodová funkce (charakteristika) a lineární stavový model, ekvivalentní a vzájemně převoditelné.

Z tohoto důvodu při analýze a syntéze systémů řízení je třeba vždy použít takový matematický model, který je pro daný účel nejvhodnější.

3.2 Dělení lineárních dynamických systémů

Lineární dynamické systémy lze dělit podle různých hledisek. Zde bude provedeno dělení podle jejich vlastností pro $t \to \infty$, příp. pro $\omega \to 0$ [viz vztah (3.22)].

Lineární dynamické systémy se dělí na **proporcionální**, **derivační** a **integrační** (obr. 3.11).



Obr. 3.11 Základní dělení lineárních dynamických systémů

Pro proporcionální, derivační a integrační lineární dynamické systémy jsou nakresleny na obr. 3.12a průběhy statických charakteristik, na obr. 3.12b průběhy přechodových charakteristik pro $t \to \infty$, na obr. 3.12c,d průběhy amplitudofázových a logaritmických amplitudových kmitočtových charakteristik pro $\omega \to 0$.

Proporcionální systémy

Obecný přenos proporcionálního systému se setrvačností n-tého řádu s dopravním zpožděním ($T_d > 0$) má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \mathrm{e}^{-T_d s},\ a_0 > 0,\ b_0 \neq 0,\ T_d \geq 0, \tag{3.52}$$

kde T_d je **dopravní zpoždění**, n – řád setrvačnosti, mnohočlen $a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ má všechny kořeny v levé polorovině komplexní roviny s [tento předpoklad platí i ve vztazích (3.57) a (3.58)]. Obecné vlastnosti proporcionálních systémů v časové a kmitočtové oblasti jsou ukázány na obr. 3.12 (obrázky vlevo).

Přenos dopravního zpoždění reprezentovaný transcendentní funkcí

$$\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{3.53}$$

se v praxi často aproximuje algebraickými funkcemi, např.

$$\mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{1}{\mathrm{e}^{T_d s}} \approx \frac{1}{T_d s + 1}, \tag{3.54}$$

$$\mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{T_d}{2} s}}{\mathrm{e}^{\frac{T_d}{2} s}} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2} s}{1 + \frac{T_d}{2} s}. \tag{3.55}$$

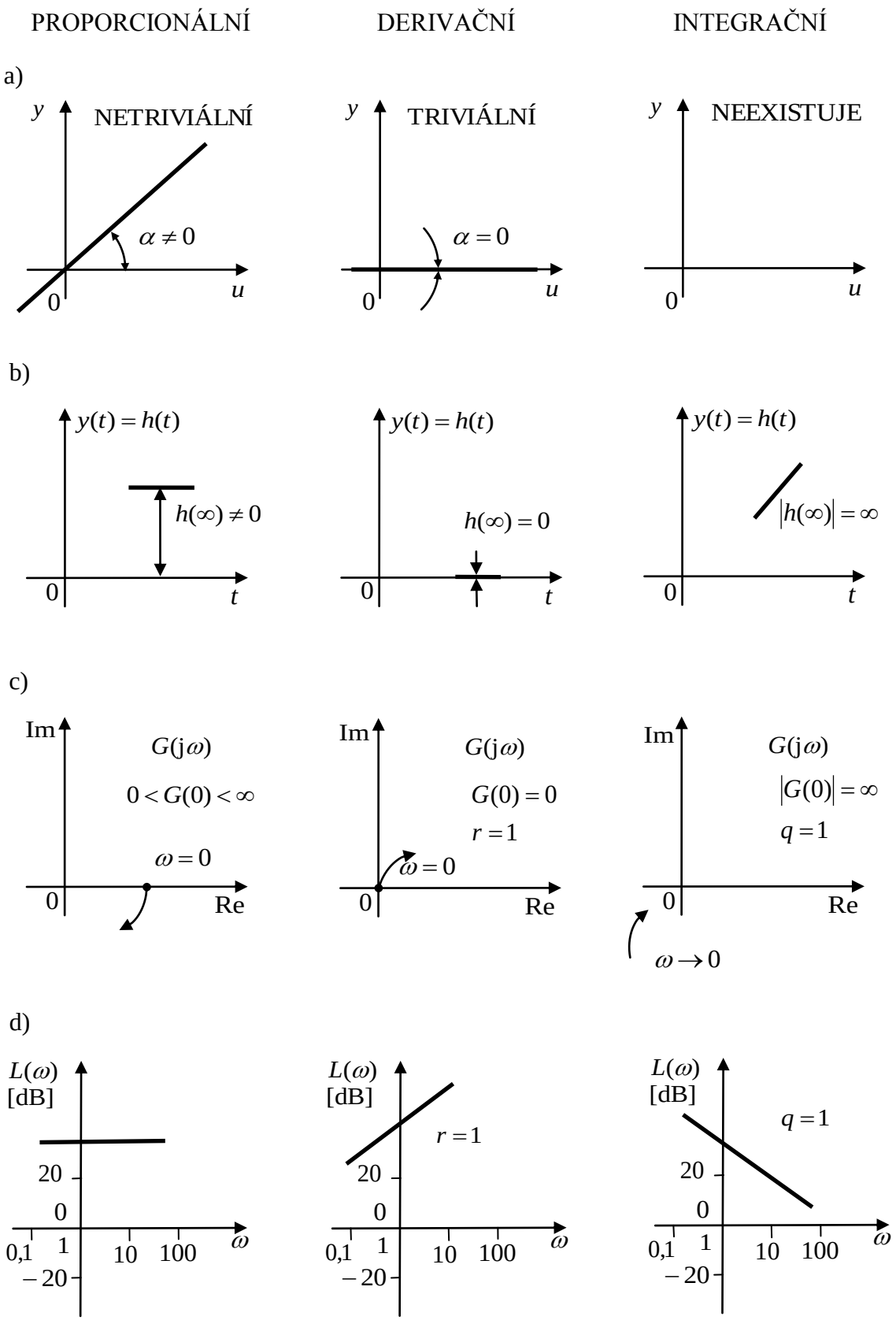
Při aproximaci byl použit Taylorův rozvoj

$$\mathrm{e}^{\pm x} \approx 1 \pm x. \tag{3.56}$$

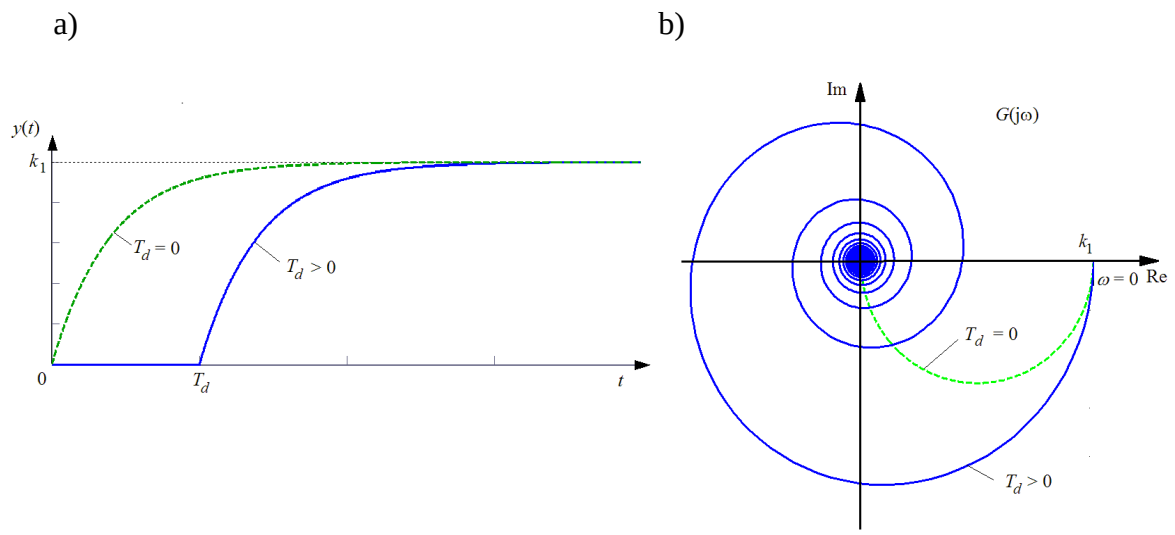
Aproximace dopravního zpoždění (3.55) se také nazývá Padého rozvoj 1. řádu.

V časové oblasti se dopravní zpoždění (3.53) projevuje zpožděním odezvy o dobu T_d, tj. posunutím časového průběhu o dobu T_d vpravo. Tvar časového průběhu se nemění (obr. 3.13a).

V kmitočtové oblasti dopravní zpoždění (3.53) nemá vliv na modul (amplitudu). Naproti tomu zvyšuje zápornou fázi, co se na amplitudofázové kmitočtové charakteristice projeví nekonečnou spirálou okolo počátku souřadnic (obr. 3.13b).



Obr. 3.12 Lineární dynamické systémy: a) statické charakteristiky, b) přechodové charakteristiky, c) amplitudofázové kmitočtové charakteristiky, d) logaritmické amplitudové kmitočtové charakteristiky



Obr. 3.13 Vliv dopravního zpoždění na průběh: a) časové odezvy, b) amplitudofázové kmitočtové charakteristiky

Derivační systémy

Obecný přenos derivačního systému r-tého řádu se setrvačností n-tého řádu s dopravním zpožděním ($T_d > 0$) má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^r(b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0)}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \mathrm{e}^{-T_d s}, \; a_0 > 0, \; b_0 \neq 0, \; r \geq 1, \; T_d \geq 0 . \quad (3.57)$$

Obecné vlastnosti derivačních systémů v časové a kmitočtové oblasti jsou ukázány na obr. 3.12 (obrázky uprostřed).

Integrační systémy

Obecný přenos integračního systému q-tého řádu se setrvačností n-tého řádu s dopravním zpožděním ($T_d > 0$) má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^q(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \; a_0 > 0, \; b_0 \neq 0, \; q \geq 1, \; T_d \geq 0 . \quad (3.58)$$

Celkový řád integračního systému (3.58) je $n + q$.

Obecné vlastnosti integračních systémů v časové a kmitočtové oblasti jsou ukázány na obr. 3.12 (obrázky vpravo).

Příklad 3.1

Matematický model lineárního dynamického systému je dán lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$T_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = k_1 u(t - T_d) , \quad (3.59)$$

kde T_1 je časová konstanta [s], T_d – dopravní zpoždění [s], k_1 – koeficient přenosu [-].

Daný matematický model je třeba vyjádřit pomocí přenosu, kmitočtového přenosu, impulsní funkce, přechodové funkce a stavového modelu. Na základě všech modelů je třeba určit fyzikální realizovatelnost a statickou charakteristiku.

Řešení:

Diferenciální rovnice

Matematický model již je ve tvaru lineární diferenciální rovnice. Vyplývá z ní, že $n = 1 > m = 0$, tj. relativní stupeň je roven jedné, a proto daný dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný.

Pro $t \to \infty$ z diferenciální rovnice (3.59) dostaneme rovnici statické charakteristiky [viz (2.6)]

$$y = k_1 u \,. \tag{3.60}$$

Přenos

Použitím Laplaceovy transformace při nulových počátečních podmínkách na diferenciální rovnici (3.59) dostaneme [viz (3.8)]

$$T_1 s Y(s) + Y(s) = k_1 U(s) \mathrm{e}^{-T_d s} \;\Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s} \,. \tag{3.61}$$

Protože $n = 1 > m = 0$, daný dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný.

Statickou charakteristiku získáme na základě (3.12)

$$y = [\lim_{s \to 0} G(s)] u \;\Rightarrow\; y = k_1 u \,.$$

Kmitočtový přenos

Kmitočtový přenos získáme snadno [viz (3.13)]

$$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{k_1}{1 + \mathrm{j} T_1 \omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{j} T_d \omega} = A(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} , \tag{3.62a}$$

$$A(\omega) = \operatorname{mod} G(\mathrm{j}\omega), \;\; \varphi(\omega) = \arg G(\mathrm{j}\omega) \,. \tag{3.62b}$$

Kmitočtový přenos (3.62) rozdělíme na část neobsahující a obsahující dopravní zpoždění

$$G(\mathrm{j}\omega) = G_1(\mathrm{j}\omega) G_2(\mathrm{j}\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)]} , \tag{3.63}$$

$$G_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{k_1}{1 + \mathrm{j} T_1 \omega} \;\Rightarrow$$

$$A_1(\omega) = \operatorname{mod} G_1(\mathrm{j}\omega) = \operatorname{mod} \frac{k_1}{1 + \mathrm{j} T_1 \omega} = \frac{k_1}{\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}} \,, \tag{3.64a}$$

$$\varphi_1(\omega) = \arg G_1(\mathrm{j}\omega) = \arg \frac{k_1}{1 + \mathrm{j} T_1 \omega} = -\operatorname{arctg} T_1 \omega \,, \tag{3.64b}$$

$$G_2(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j} T_d \omega} \;\Rightarrow$$

$$A_2(\omega) = \operatorname{mod} G_2(\mathrm{j}\omega) = \operatorname{mod} \mathrm{e}^{-\mathrm{j} T_d \omega} = 1 \,, \tag{3.65a}$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg G_2(\mathrm{j}\omega) = \arg \mathrm{e}^{-\mathrm{j} T_d \omega} = -T_d \omega \,. \tag{3.65b}$$

Vztahy (3.64) a (3.65) byly získány na základě známých relací pro komplexní čísla

$$\operatorname{mod}\frac{1}{a+\mathrm{j}b}=\frac{1}{\operatorname{mod}(a+\mathrm{j}b)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{3.66a}$$

$$\arg\frac{1}{a+\mathrm{j}b}=-\arg(a+\mathrm{j}b)=-\operatorname{arctg}\frac{b}{a} \tag{3.66b}$$

a Eulerova vzorce

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}=\cos x-\mathrm{j}\sin x. \tag{3.67}$$

Pak pro kmitočtový přenos (3.62) platí

$$A(\omega)=A_1(\omega)A_2(\omega)=\frac{k_1}{\sqrt{1+(T_1\omega)^2}}, \tag{3.68a}$$

$$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)=-\operatorname{arctg}T_1\omega-T_d\omega. \tag{3.68b}$$

Ze vztahů (3.64), (3.65) a (3.68) vyplývá, že dopravní zpoždění nemá vliv na modul (modul dopravního zpoždění je roven jedné), ale výrazným způsobem zvyšuje zápornou fázi. Právě nekonečný nárůst záporné fáze způsobí u amplitudofázové kmitočtové charakteristiky vznik nekonečné spirály, viz obr. 3.13b.

Impulsní funkce

Impulsní funkce $g(t)$ je originálem k přenosu $G(s)$. Protože přenos (3.61) obsahuje dopravní zpoždění, je vhodné ho zapsat ve tvaru (podobně jako u kmitočtového přenosu)

$$\left.\begin{aligned}&G(s)=G_1(s)G_2(s),\\&G_1(s)=\frac{k_1}{T_1s+1},\ G_2(s)=\mathrm{e}^{-T_ds}\end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

a najít impulsní funkci $g_1(t)$, tj. originál k přenosu $G_1(s)$, který neobsahuje dopravní zpoždění

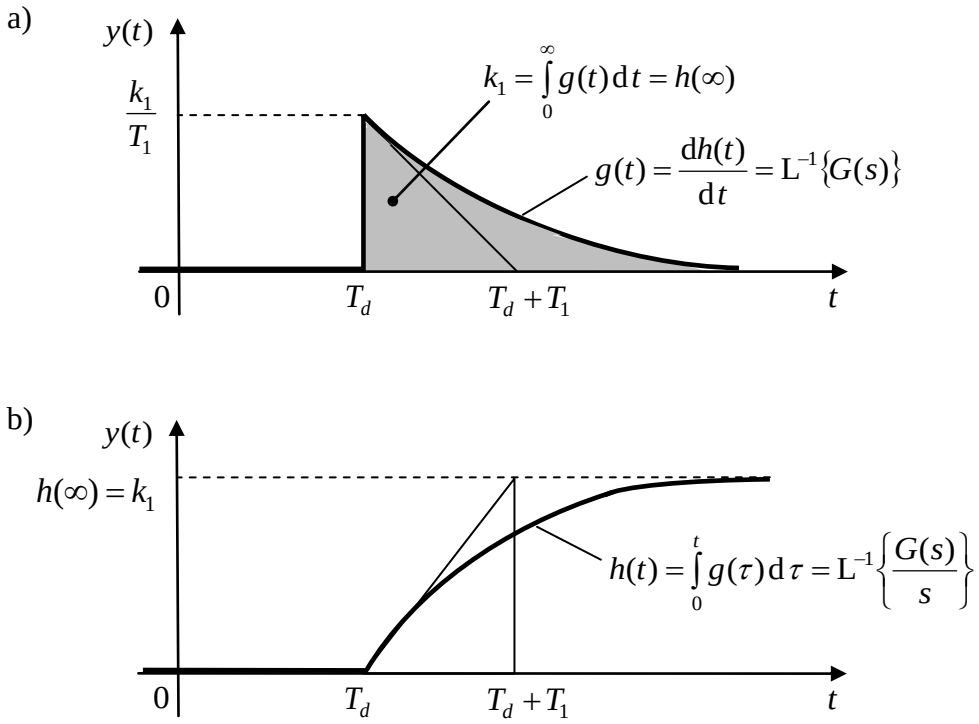
$$g_1(t)=\mathrm{L}^{-1}\{G_1(s)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{T_1s+1}\right\}=\frac{k_1}{T_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}. \tag{3.70}$$

Výsledná impulsní funkce bude zpožděná o T_d, a proto můžeme psát (obr. 3.14a)

$$g(t)=\frac{k_1}{T_1}\mathrm{e}^{-\frac{t-T_d}{T_1}}\eta(t-T_d). \tag{3.71}$$

V tomto zápise musí být použit zpožděný Heavisideův jednotkový skok $\eta(t-T_d)$, který zaručí

$$g(t)=0 \quad \text{pro} \quad t<T_d. \tag{3.72}$$



Obr. 3.14 Časové charakteristiky: a) impulsní, b) přechodová – příklad 3.1

V okamžiku $t = T_d$, tj. začátku působení vstupu $u(t)$ impulsní funkce $g(t)$ neobsahuje Diracův impuls $\delta(t - T_d)$, a proto daný lineární dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný (obr. 3.14a).

Statickou charakteristiku určíme pomocí vztahu (3.25). V souladu se vztahem (3.25) můžeme psát

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{k_1}{T_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t-T_d}{T_1}}\,\eta(t-T_d)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{k_1}{T_1}\int_{T_d}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t-T_d}{T_1}}\,\mathrm{d}t = \frac{k_1}{T_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T_1}}\,\mathrm{d}\tau = \left[-k_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T_1}}\right]_0^\infty = k_1 \;\Rightarrow$$

$$y = k_1 u.$$

Přechodová funkce

Podobně jako u impulsní funkce použijeme rozdělení přenosu (3.69) a v souladu se vztahem (3.27) pro část přenosu bez dopravního zpoždění platí

$$h_1(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s(T_1 s+1)}\right\} = k_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}\right). \tag{3.73}$$

Výsledná přechodová funkce $h(t)$ bude zpožděna o T_d, a proto můžeme psát (obr. 3.13a, 3.14b)

$$h(t) = k_1\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-T_d}{T_1}}\right)\eta(t - T_d)\,. \tag{3.74}$$

Zpožděný Heavisideův jednotkový skok $\eta(t - T_d)$ zaručuje

$$h(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t < T_d\,. \tag{3.75}$$

V okamžiku $t = T_d$, tj. začátku působení vstupu $u(t)$ je přechodová funkce $h(t)$ rovna nule, a proto daný lineární dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný.

Pro určení statické charakteristiky použijeme vztah (3.28)

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty}\left[k_1\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-T_d}{T_1}}\right)\eta(t - T_d)\right] = k_1 \;\Rightarrow$$

$$y = k_1 u.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že platí (obr. 3.14)

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}\,t} \;\Leftrightarrow\; h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau\,.$$

Stavový model

Protože lineární diferenciální rovnice (3.59) je velmi jednoduchá, můžeme např. pro $x(t) = y(t)$ přímo psát

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{T_1}x(t) + \frac{k_1}{T_1}u(t - T_d) && -\ \text{stavová rovnice} \\ y(t) &= x(t) && -\ \text{výstupní rovnice} \end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

kde $x(t)$ je stav.

Je zřejmé, že tvar (3.76) je pouze jeden z mnoha možných ekvivalentních tvarů stavového modelu.

Ze stavového modelu (3.76) vyplývá, že $d = 0$, a proto daný lineární dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný.

Statickou charakteristiku ze stavového modelu (3.76) získáme velmi snadno:

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) \to 0 \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{T_1}x + \frac{k_1}{T_1}u \\ y &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = k_1 u\,.$$

Ze všech uvedených matematických modelů je zřejmé, že se jedná o proporcionální systém se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním (viz obr. 3.12).

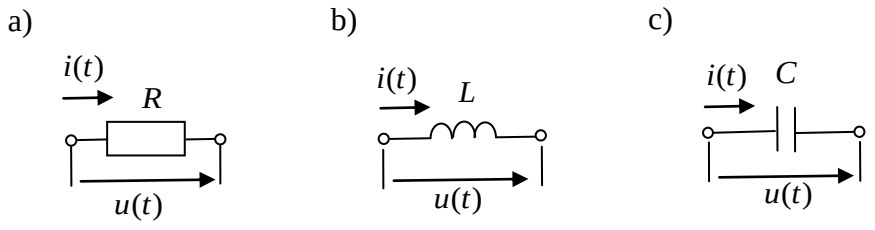
Pro uvedený systém (člen) se v české literatuře používají i jiné názvy, např. setrvačný člen 1. řádu s dopravním zpožděním, jednokapacitní člen s dopravním zpožděním, aperiodický člen 1. řádu s dopravním zpožděním.

V anglické literatuře se pro tento systém používají zkratky FOPTD (**f**irst **o**rder **p**lus **t**ime **d**elay), FOPDT (**f**irst **o**rder **p**lus **d**ead **t**ime) a FOLPD (**f**irst **o**rder **l**ag **p**lus time **d**elay).

Proporcionální systém se setrvačností 1. řádu s dopravním zpožděním je pro teorii automatického řízení velmi důležitý, protože se používá pro aproximaci nekmitavých systémů vysokého řádu.

Příklad 3.2

Rezistanci, indukčnost a kapacitu je třeba vyjádřit ve tvaru obrazových impedancí a přenosů (obr. 3.15). Na obr. 3.15 značí: $u(t)$ – napětí [V], $i(t)$ – proud [A], R – rezistance [Ω], L – indukčnost [H], C – kapacita [F].



Obr. 3.15 Pasivní elektrické prvky: a) odpor, b) cívka, c) kondenzátor

Řešení:

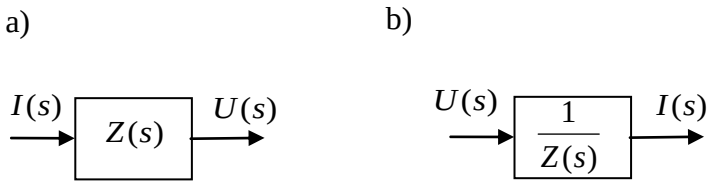
Pro určení obrazových impedancí $Z(s)$ použijeme zobecněný Ohmův zákon

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} \Rightarrow$$

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}, \tag{3.77}$$

kde $U(s)$ je obraz napětí $u(t)$, $I(s)$ – obraz proudu $i(t)$.

Přenos pasivního elektrického prvku s obrazovou impedancí $Z(s)$ závisí na tom, zda vstupem je proud $I(s)$ nebo napětí $U(s)$, viz obr. 3.16.



Obr. 3.16 Přenos pasivního elektrického prvku: a) vstupem je proud, b) vstupem je napětí

a) Odpor

Pro odpor s rezistancí R platí

$$u(t) = Ri(t).$$

Použijeme Laplaceovu transformaci a dostaneme

$$U(s) = RI(s) \Rightarrow$$

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R. \tag{3.78}$$

Odpor s rezistancí R se chová jako ideální proporcionální systém jak při proudovém, tak i napěťovém vstupu (obr. 3.17a)

b) Cívka

Pro cívku s indukčností L platí

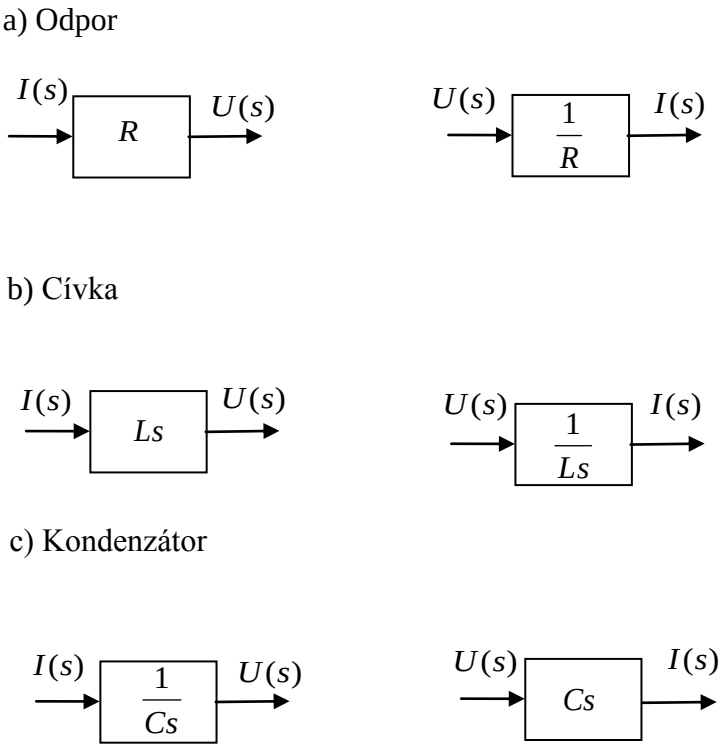
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Použijeme Laplaceovu transformaci při nulové počáteční podmínce a dostaneme

$$U(s) = LsI(s) \Rightarrow$$

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = Ls. \tag{3.79}$$

Cívka s indukčností L se chová jako ideální derivační systém, je-li vstupem proud a jako ideální integrační systém, je-li vstupem napětí (obr. 3.17b).



Obr. 3.17 Přenosy pasivních elektrických prvků: a) odporu, b) cívky, c) kondenzátoru

c) Kondenzátor

Pro kondenzátor s kapacitou C platí

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Použijeme Laplaceovu transformaci při nulové počáteční podmínce a dostaneme

$$U(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \Rightarrow$$

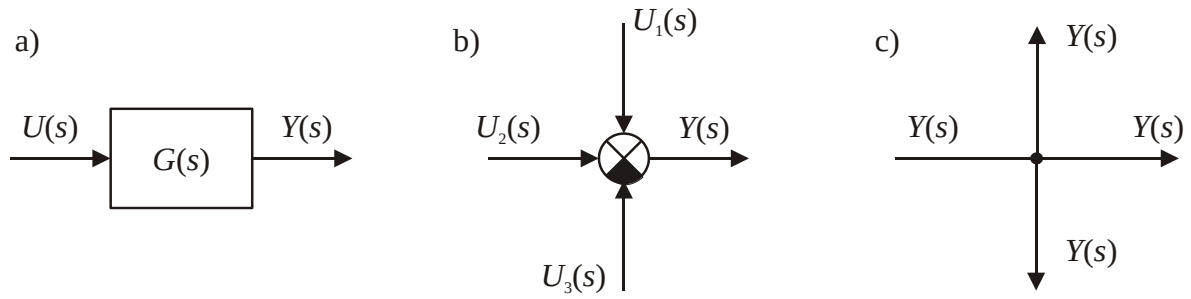
$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}. \tag{3.80}$$

Kondenzátor s kapacitou C se chová jako ideální integrační systém, je-li vstupem proud a jako ideální derivační systém, je-li vstupem napětí (obr. 3.17c).

3.3 Algebra blokových schémat

Bloková schémata byla již používána v předchozích kapitolách. Nyní si ukážeme, že bloková schémata reprezentující složité systémy lze snadno zjednodušovat pomocí **algebry blokových schémat**.

V blokových schématech systém (podsystém, prvek atd.) je vyjádřen blokem s vepsaným přenosem. Sčítání a odčítání (porovnávání) veličin je vyjádřeno sumačním uzlem a větvení veličin informačním uzlem (obr. 3.18).



$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad Y(s) = U_1(s) + U_2(s) - U_3(s)$$

Obr. 3.18 Vyjádření: a) lineárního dynamického systému blokem, b) sčítání a odčítání veličin sumačním uzlem, c) větvení veličin informačním uzlem

Vyplněný segment u sumačního uzlu nebo znaménko minus znamenají odčítání příslušné veličiny. Ze sumačního uzlu může vycházet pouze jedna veličina. Z důvodu jednoduchosti a přehlednosti se obvykle u přenosů a obrazů neuvádí komplexní proměnná s.

Pro sériové zapojení na obr. 3.19a platí

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s)X(s) \\ X(s) &= G_1(s)U(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s) = G_2(s)G_1(s)\,. \tag{3.81}$$

U sériového zapojení je výsledný přenos dán součinem jednotlivých přenosů (na pořadí nezáleží).

Pro paralelní zapojení na obr. 3.19b lze psát

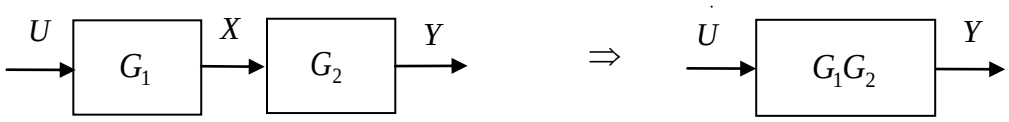
$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= X_1(s) - X_2(s) \\ X_1(s) &= G_1(s)U(s) \\ X_2(s) &= G_2(s)U(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) - G_2(s)\,. \tag{3.82}$$

U paralelního zapojení je výsledný přenos dán součtem jednotlivých přenosů s uvažováním příslušných znamének u součtového uzlu.

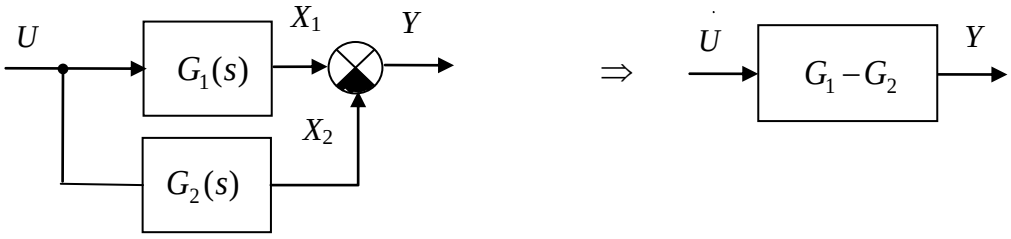
U zpětnovazebního zapojení je výsledný přenos dán přenosem v přímé větvi podělený záporným (v případě kladné zpětné vazby), resp. kladným (v případě záporné zpětné vazby)

součinem přenosů v přímé i zpětnovazební větvi zvětšeným o jedničku. Přenos větve bez uvedeného konkrétního přenosu (bez bloku) je uvažován jako jednotkový.

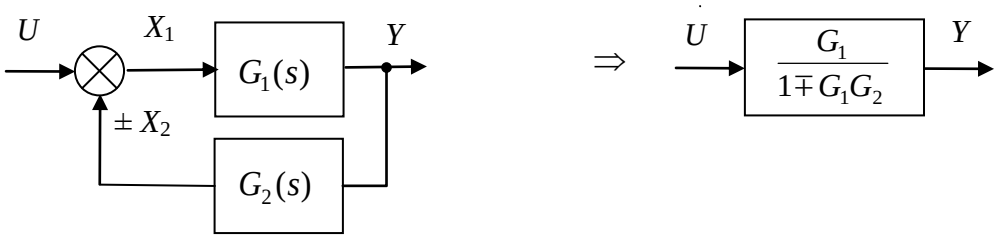
a)



b)



c)



Obr. 3.19 Zapojení bloků: a) sériové, b) paralelní, c) zpětnovazební

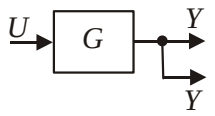
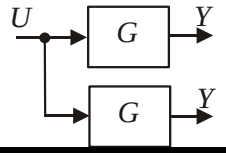
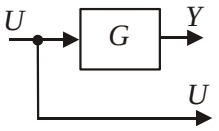
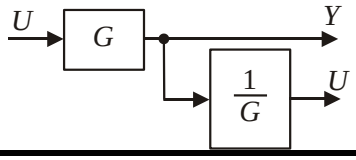
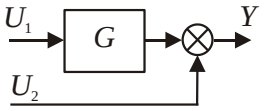
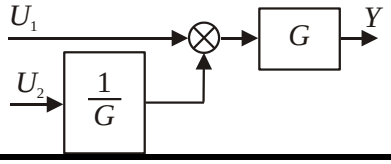
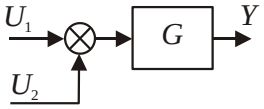
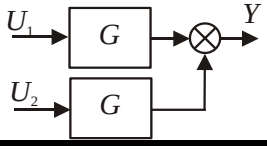
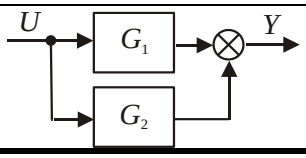
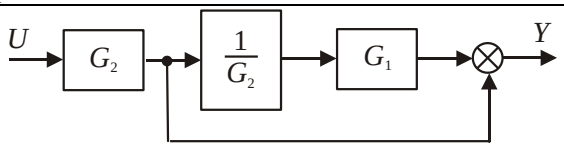
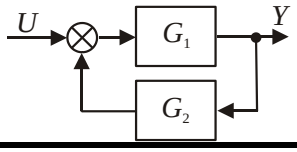
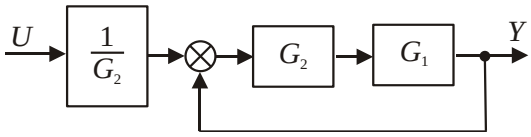
Se znalostí uvedených tří zapojení a jednoduchých úprav blokových schémat ukázaných v tab. 3.1 lze snadno zjednodušit libovolně složité blokové schéma.

Pro zpětnovazební zapojení na obr. 3.19c lze psát

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)X_1(s) \\ X_1(s) &= U(s) \pm X_2(s) \\ X_2(s) &= G_2(s)Y(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}\,. \tag{3.83}$$

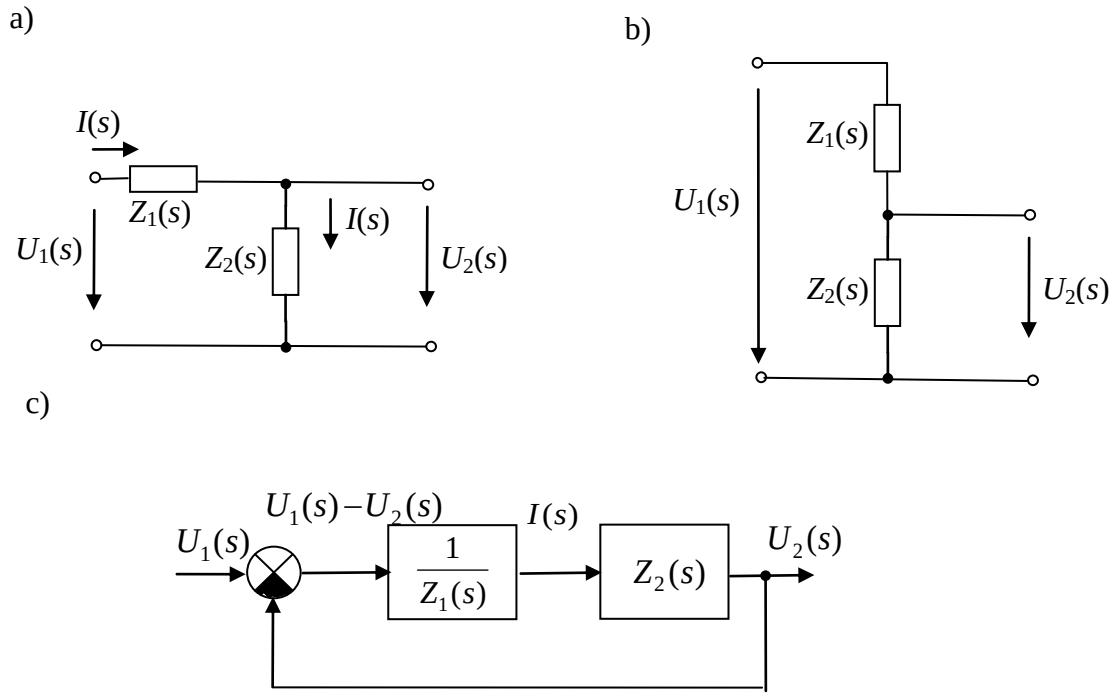
Pokud blokové schéma obsahuje více vstupních a výstupních veličin, pak pro každou výstupní veličinu se postupně uvažují všechny vstupní veličiny, přičemž neuvažované vstupní veličiny se považují za nulové (nekreslí se). Výsledné přenosy pro jednotlivé vstupní veličiny jsou na základě linearity dány součtem vlivů všech vstupních veličin. Z důvodu jednoznačnosti popisu výsledného přenosu se často používá index, jehož první písmeno označuje vstupní veličinu a druhé písmeno výstupní veličinu (někdy se používá opačné označení).

Tab. 3.1 – Základní úpravy blokových schémat

Přesunutí informačního uzlu před blok	
	
Přesunutí informačního uzlu za blok	
	
Přesunutí sumačního uzlu před blok	
	
Přesunutí sumačního uzlu za blok	
	
Přesunutí bloku z paralelní větve	
	
Přesunutí bloku ze zpětnovazební větve	
	

Příklad 3.3

Na obr. 3.20 je jednoduchý elektrický obvod s pasivními prvky s obrazovými impedancemi $Z_1(s)$ a $Z_2(s)$. Je třeba určit jeho přenos za předpokladu, že vstupem je napětí $u_1(t)$ [V] a výstupem napětí $u_2(t)$ [V].



Obr. 3.20 Jednoduchý elektrický obvod s pasivními prvky: a) schéma, b) dělič napětí, c) zpětnovazební zapojení – příklad 3.3

Řešení:

Přenos jednoduchého elektrického obvodu na obr. 3.20a určíme třemi způsoby.

a) Klasický přístup

Je zřejmé, že oběma impedancemi teče stejný proud $i(t)$, a proto lze psát

$$\left.\begin{aligned} Z_1(s)I(s) &= U_1(s) - U_2(s) \\ Z_2(s)I(s) &= U_2(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} + 1 = \frac{1}{G(s)} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \tag{3.84}$$

b) Dělič napětí

Na elektrický obvod na obr. 3.20a lze pohlížet jako na dělič napětí, viz obr. 3.20b.

Pro dělič napětí platí

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}.$$

c) Zpětnovazební obvod

Elektrický obvod na obr. 3.20a lze považovat rovněž za zpětnovazební obvod na obr. 3.20c.

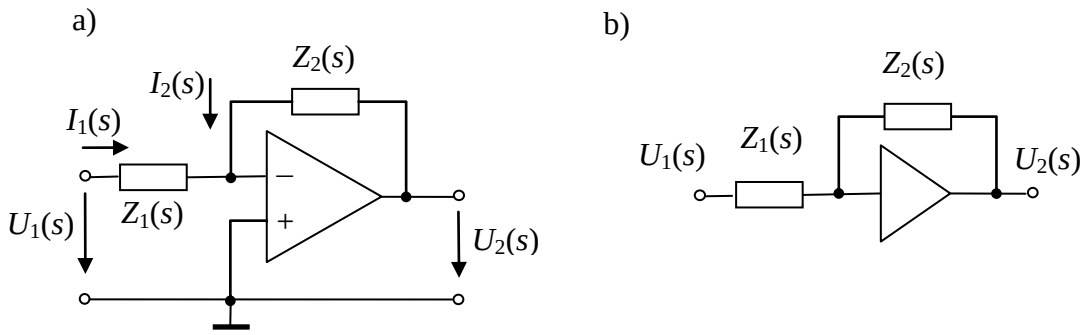
V souladu se vztahy (3.81) a (3.83) lze přímo psát

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}{1+\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}=\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}\,.$$

Příklad 3.4

Operační zesilovač je velmi důležitý aktivní prvek, který má v mechatronice široké použití. V elektronice a elektrotechnice je k dispozici jako integrovaný obvod. Je to v podstatě zesilovač s vysokým zesílením (teoreticky nekonečně vysokým) a velikou vstupní rezistancí (teoreticky nekonečně velikou), který pracuje se zápornou zpětnou vazbou (obr. 3.21a). Vhodnou volbou zpětnovazební impedance $Z_2(s)$ a impedance na vstupu $Z_1(s)$ lze získat různé dynamické vlastnosti. Napájení se u operačních zesilovačů nejčastěji nekreslí a používá se jeho zjednodušené schéma (obr. 3.21b).

Je třeba odvodit přenos operačního zesilovače.



Obr. 3.21 Operační zesilovač: a) schéma, b) zjednodušené schéma – příklad 3.4

Řešení:

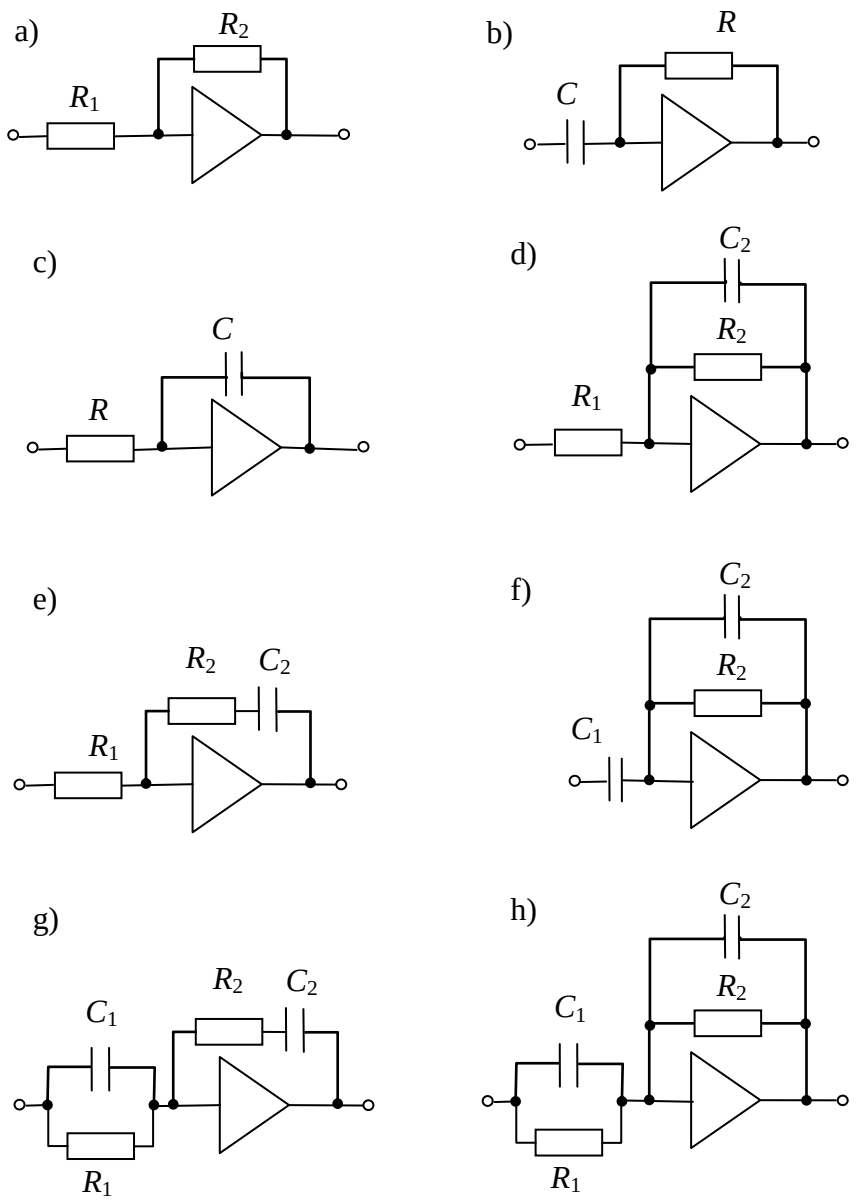
Protože zesílení operačního zesilovače a jeho vstupní rezistance jsou velmi veliké, je zřejmé, že do něho nemůže téci žádný proud, tj. musí platit

$$I_1(s)+I_2(s)=0 \;\Rightarrow\; \frac{U_1(s)}{Z_1(s)}+\frac{U_2(s)}{Z_2(s)}=0 \;\Rightarrow$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\,. \tag{3.85}$$

Příklad 3.5

Pro všechna zapojení operačního zesilovače na obr. 3.22 je třeba určit přenosy.



Obr. 3.22 Operační zesilovač v různém zapojení – příklad 3.5

Řešení:

Pro určení přenosu operačního zesilovače v různém zapojení na obr. 3.22 použijeme vztah (3.85) odvozený v příkladu 3.4, tj.

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}.$$

Za předpokladu, že rezistance je v [Ω] a kapacita v [F], součin rezistance a kapacity je v [s].

a)

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1}. \tag{3.86}$$

Je to ideální proporcionální systém (ideální zesilovač) – P.

b)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{R}{\frac{1}{Cs}}=-RCs\,. \tag{3.87}$$

Je to ideální derivační systém – D.

c)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{\frac{1}{Cs}}{R}=-\frac{1}{RCs}\,. \tag{3.88}$$

Je to ideální integrační systém – I.

d)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{\frac{\frac{R_2}{C_2 s}}{R_2+\frac{1}{C_2 s}}}{R_1}=-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2C_2s+1}\,. \tag{3.89}$$

Je to proporcionální systém se setrvačností 1. řádu (aperiodický systém se setrvačností 1. řádu).

e)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{R_2+\frac{1}{C_2 s}}{R_1}=-\frac{R_2C_2s+1}{R_1C_2s}\,. \tag{3.90}$$

Toto zapojení operačního zesilovače realizuje tzv. **regulátor PI** (podrobněji viz podkap. 5.1).

f)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{\frac{\frac{R_2}{C_2 s}}{R_2+\frac{1}{C_2 s}}}{\frac{1}{C_1 s}}=-\frac{R_2C_1s}{R_2C_2s+1}\,. \tag{3.91}$$

Je to derivační systém se setrvačností 1. řádu (reálný derivační systém).

g)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{R_2+\dfrac{1}{C_2 s}}{\dfrac{\dfrac{R_1}{C_1 s}}{R_1+\dfrac{1}{C_1 s}}}=-\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1C_2s}\,. \tag{3.92}$$

Toto zapojení je velmi důležité, protože realizuje tzv. **PID regulátor s interakcí** (podrobněji viz podkap. 5.1).

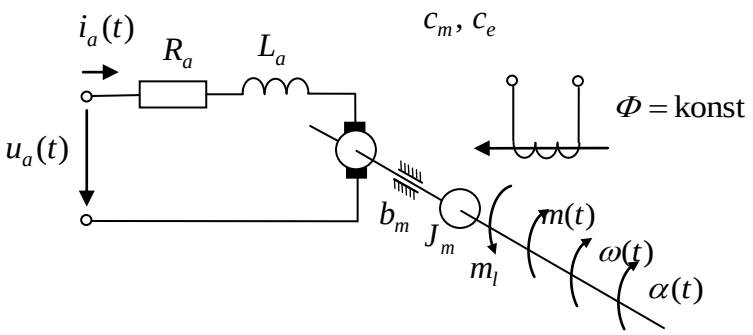
h)

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{\dfrac{\dfrac{R_2}{C_2 s}}{R_2+\dfrac{1}{C_2 s}}}{\dfrac{\dfrac{R_1}{C_1 s}}{R_1+\dfrac{1}{C_1 s}}}=-\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1}\,. \tag{3.93}$$

Rovněž i toto zapojení operačního zesilovače je důležité. Jedná se o proporcionální člen se setrvačností 1. řádu, který se využívá ke korekci, protože má integroderivační charakter.

Příklad 3.6

Je třeba odvodit matematický model stejnosměrného motoru s cizím konstantním buzením na obr. 3.23, kde značí: J_m – celkový moment setrvačnosti redukovaný na hřídel motoru [kg m^2], $i_a(t)$ – proud kotvy [A], $u_a(t)$ – napětí kotvy [V], R_a – celkový odpor (rezistance) obvodu kotvy [Ω], L_a – celková indukčnost obvodu kotvy [H], b_m – koeficient viskózního tření [N m s rad^{-1}], $m(t)$ – moment motoru [N m], $m_l(t)$ – zátěžný moment [N m], $\alpha(t)$ – úhel natočení hřídele motoru [rad], $\omega(t)$ – úhlová rychlost hřídele motoru [rad s^{-1}], c_m – konstanta motoru [N m A^{-1}], c_e – konstanta motoru [V s rad^{-1}], $u_e(t)$ – indukované napětí [V], Φ – konstantní magnetický tok buzení [Wb].



Obr. 3.23 Zjednodušené schéma stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením – příklad 3.6

Řešení:

V souladu s obr. 3.23 můžeme psát:

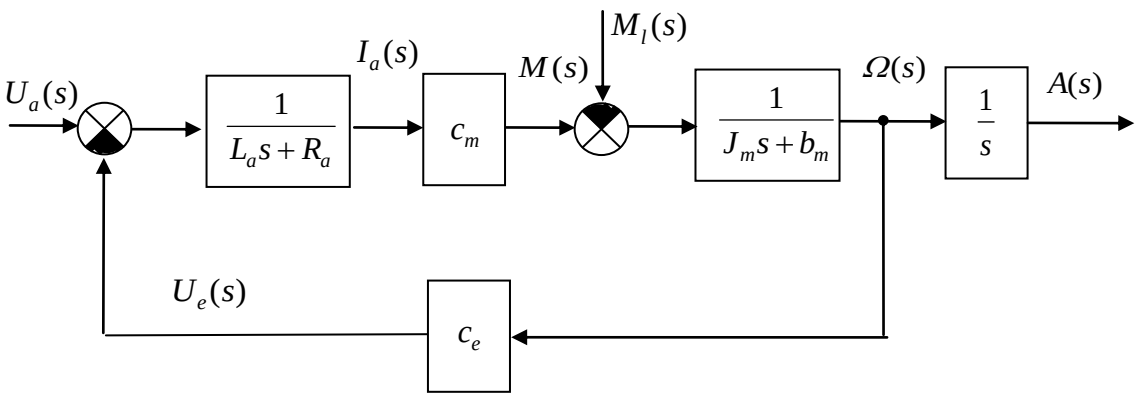
$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} &= \omega(t), \\ J_m \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} + b_m\omega(t) &= m(t) - m_l(t), \\ m(t) &= c_m i_a(t), \\ L_a \frac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} + R_a i_a(t) &= u_a(t) - u_e(t), \\ u_e(t) &= c_e\omega(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.94}$$

Použijeme Laplaceovu transformaci při nulových počátečních podmínkách a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{1}{s}\Omega(s), \\ \Omega(s) &= \frac{1}{J_m s + b_m}[M(s) - M_l(s)], \\ M(s) &= c_m I_a(s), \\ I_a(s) &= \frac{1}{L_a s + R_a}[U_a(s) - U_e(s)], \\ U_e(s) &= c_e\Omega(s). \end{aligned}$$

Nyní již můžeme snadno sestavit blokové schéma odpovídající výše uvedeným rovnicím (obr. 3.24).

Na základě blokového schématu na obr. 3.24 můžeme snadno obdržet přenosy:



Obr. 3.24. Blokové schéma stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením – příklad 3.6

Úhlová rychlost hřídele motoru

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{c_m}{(J_m s + b_m)(L_a s + R_a) + c_e c_m}, \tag{3.95}$$

$$\frac{\Omega(s)}{M_l(s)} = -\frac{L_a s + R_a}{(J_m s + b_m)(L_a s + R_a) + c_e c_m}. \tag{3.96}$$

Úhel natočení hřídele motoru

$$\frac{A(s)}{U_a(s)} = \frac{c_m}{s[(J_m s + b_m)(L_a s + R_a) + c_e c_m]}, \tag{3.97}$$

$$\frac{A(s)}{M_l(s)} = -\frac{L_a s + R_a}{s[(J_m s + b_m)(L_a s + R_a) + c_e c_m]}. \tag{3.98}$$

V ustáleném stavu pro výkony platí rovnost, tj.

$$u_e i_a = m\omega \;\Rightarrow\; c_e \omega i_a = c_m i_a \omega \;\Rightarrow\; c_e = c_m. \tag{3.99}$$

Stavový model stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením dostaneme ze soustavy rovnic (3.94), tj.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} &= \omega(t), \\ \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{b_m}{J_m}\omega(t) + \frac{c_m}{J_m} i_a(t) - \frac{1}{J_m} m_l(t), \\ \frac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{c_e}{L_a}\omega(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} u_a(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.100}$$

Soustavu rovnic (3.100) zapíšeme maticově

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} & \frac{c_m}{J_m} \\ 0 & -\frac{c_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u_a(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} m_l(t) \tag{3.101}$$

4 ZJEDNODUŠOVÁNÍ MATEMATICKÝCH MODELŮ

4.1 Linearizace

Lineární dynamické systémy jsou v podstatě idealizací reálných dynamických systémů. Reálný svět je nelineární, a proto abychom mohli používat lineární modely, musíme přistoupit na různé zjednodušující předpoklady. Jedním z nejdůležitějších předpokladů je, že daný systém pracuje v „blízkém“ okolí **pracovního bodu**. V tomto okolí matematický model daného dynamického systému může být považován za lineární.

Předpokládejme, že nelineární dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí (2.1a)

$$g[y^{(n)}(t),\ldots,\dot{y}(t),y(t),u^{(m)}(t),\ldots,\dot{u}(t),u(t)]=0\,.$$

Použijeme Taylorův rozvoj a budeme uvažovat pouze lineární výrazy vzhledem k přírůstkům a dostaneme

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y^{(n)}}\right|_0 \Delta y^{(n)}(t)+\cdots+\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\right|_0 \Delta\dot{y}(t)+\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_0 \Delta y(t)+$$
$$+\left.\frac{\partial g}{\partial u^{(m)}}\right|_0 \Delta u^{(m)}(t)+\cdots+\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{u}}\right|_0 \Delta\dot{u}(t)+\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_0 \Delta u(t)=0.$$

Po úpravě obdržíme linearizovanou diferenciální rovnici.

$$a_n\Delta y^{(n)}(t)+\cdots+a_1\Delta\dot{y}(t)+a_0\Delta y(t)=b_m\Delta u^{(m)}(t)+\cdots+b_1\Delta\dot{u}(t)+b_0\Delta u(t) \tag{4.1}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \left.\frac{\partial g}{\partial y^{(i)}}\right|_0,\ \Delta y^{(i)}(t)=y^{(i)}(t),\ i=1,2,\ldots,n,\\ a_0 &= \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_0,\ \Delta y(t)=y(t)-y_0,\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} b_j &= -\left.\frac{\partial g}{\partial u^{(j)}}\right|_0,\ \Delta u^{(j)}(t)=u^{(j)}(t),\ j=1,2,\ldots,m,\\ b_0 &= -\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_0,\ \Delta u(t)=u(t)-u_0.\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Parciální derivace ve vztazích (4.2) a (4.3) je třeba počítat pro pracovní bod (u_0, y_0), který leží na statické charakteristice [viz (2.5)]

$$y=f(u)\,,$$

tj.

$$y_0=f(u_0)\,. \tag{4.4}$$

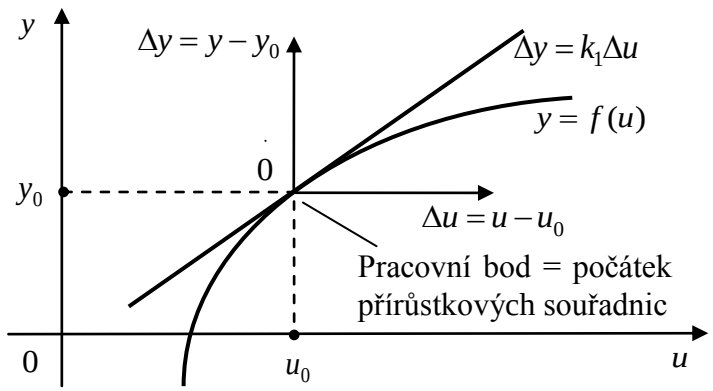
Linearizovaná statická charakteristika má tvar

$$\Delta y(t)=k_1\Delta u(t)\,,\ \text{resp.}\quad \Delta y=k_1\Delta u\,, \tag{4.5}$$

kde koeficient k_1 určíme na základě vztahů (4.2) a (4.3)

$$k_1 = -\left.\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,u}\right|_0 = \frac{b_0}{a_0},\ a_0 \neq 0\,. \tag{4.6}$$

Geometrická interpretace **linearizace** nelineární statické charakteristiky je na obr. 4.1. Vidíme, že je to tečna v pracovním bodě k původní nelineární statické charakteristice.



Obr. 4.1 Geometrická interpretace linearizace nelineární statické charakteristiky

Ze srovnání rovnic (4.1) a (3.1a) vyplývá, že mají stejný tvar, ale vstupní a výstupní veličiny jsou vyjádřeny jejími přírůstky a koeficienty (4.2) a (4.3) závisí na pracovním bodě (u_0, y_0).

Po linearizaci statická charakteristika (4.5) musí procházet počátkem **přírůstkových souřadnic** (obr. 4.1).

Výstupní veličina může být přibližně vyjádřena vztahem

$$\hat{y}(t) = y_0 + \Delta y(t)\,, \tag{4.7}$$

kde $\hat{y}(t)$ je výstupní veličina získaná z linearizovaného matematického modelu.

Uvažujme nyní matematický model nelineárního statického systému s jednou výstupní veličinou y a m vstupními veličinami u_1, u_2,…, u_m.

$$y = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)\,. \tag{4.8}$$

Podobně jako v předchozím případě použijeme Taylorův rozvoj a linearizovaný matematický model je určen tečnou nadrovinou

$$\Delta y(t) = \sum_{j=1}^{m} k_j \Delta u_j\,, \tag{4.9a}$$

$$k_j = \left.\frac{\partial f}{\partial u_j}\right|_0,\quad j = 1,2,\ldots,m\,. \tag{4.9b}$$

Je-li matematický model nelineárního dynamického systému ve stavovém vyjádření (2.8)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), u(t)],$$

$$y(t) = h[\boldsymbol{x}(t), u(t)],$$

pak se při linearizaci postupuje podobně. Použije se Taylorův rozvoj a uvažují se pouze výrazy lineární vzhledem k přírůstku, tj.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\Delta u(t), \\ \Delta y(t) &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}(t) + d\Delta u(t), \end{aligned}\right\} \tag{4.10a}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t), && \Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0, \\ &\Delta u(t) = u(t) - u_0, && \Delta y(t) = y(t) - y_0, \\ &\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0, && \boldsymbol{b} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}\right|_0, \\ &\boldsymbol{c} = \left.\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0, && d = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_0. \end{aligned}\right\} \tag{4.10b}$$

Ve všech případech se předpokládá, že parciální derivace (4.2), (4.3) a (4.9b) existují a jsou spojité.

Přechod od přírůstkových veličin k jejich absolutnímu vyjádření je dán vztahy

$$\left.\begin{aligned} \hat{y}(t) &= y_0 + \Delta y(t), \\ u(t) &= u_0 + \Delta u(t). \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

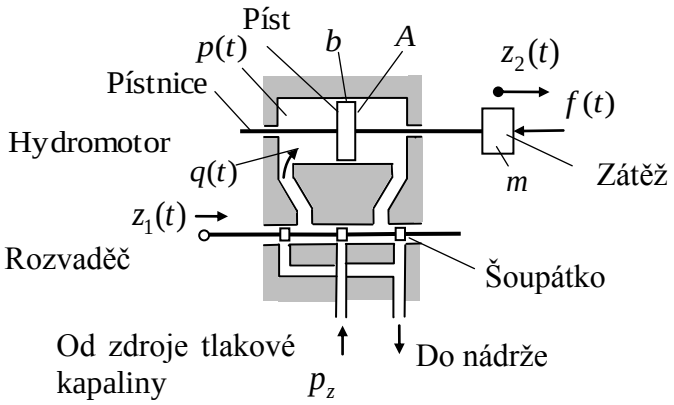
V celém textu, pokud nebude řešeno jinak, všechny přenosy jsou uvažovány v pracovním bodě, tj. pracuje se s přírůstkovými veličinami, i když to není výslovně řečeno a veličiny nejsou označovány jako přírůstkové.

Příklad 4.1

Je třeba odvodit zjednodušený matematický model dvojčinného přímočarého hydromotoru se šoupátkovým rozvaděčem (ventilem pro plynulou regulaci průtoku) a provést jeho linearizaci (obr. 4.2). Předpokládá se, že stlačitelnost pracovní kapaliny, tlakové ztráty v přívodech a průsaky jsou zanedbatelné. Šoupátkový rozvod je popsán rovnicí statické charakteristiky ve tvaru (p_z = konst)

$$q(t) = q[z_1(t), p_z - p(t)]. \tag{4.12}$$

Na obr. 4.2 značí: m – celková hmotnost (píst + pístnice + zátěž) [kg], $z_1(t)$ – vstupní posunutí šoupátka [m], $z_2(t)$ – výstupní posunutí pístnice [m], $p(t)$ – tlak v pracovním prostoru [Pa], p_z – tlak zdroje [Pa], A – plocha pístu (stejná pro obě strany) [m^2], b – koeficient viskózního tření [kg s^{-1}], $q(t)$ – objemový průtok [m^3 s^{-1}], $f(t)$ – vnější síla [N].



Obr. 4.2 Zjednodušené schéma dvojčinného přímočarého hydromotoru se šoupátkovým rozvaděčem – příklad 4.1

Řešení:

Za výše uvedených zjednodušujících předpokladů můžeme psát:

rovnováha sil

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} = Ap(t) - f(t), \tag{4.13}$$

bilance množství

$$A\frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} = q(t), \tag{4.14}$$

charakteristika rozvaděče

$$q(t) = q[z_1(t), p_z - p(t)].$$

Polohu pístnice $z_2(t)$ odpovídající střední poloze pístu a současně pracovnímu bodu označíme z_{20}.

Protože pro přírůstek výstupního posunutí pístnice platí

$$\Delta z_2(t) = z_2(t) - z_{20}, \tag{4.15}$$

můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}\Delta z_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\Delta z_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 z_2(t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{4.16}$$

Linearizované rovnice (4.12) − (4.14) budou mít tvary

$$m\frac{\mathrm{d}^2\Delta z_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}\Delta z_2(t)}{\mathrm{d}t} = A\Delta p(t) - \Delta f(t), \tag{4.17}$$

$$A\frac{\mathrm{d}\Delta z_2(t)}{\mathrm{d}t} = \Delta q(t), \tag{4.18}$$

$$\Delta q(t) = k_{z_1}\Delta z_1(t) - k_p\Delta p(t). \tag{4.19}$$

$$k_{z_1} = \left.\frac{\partial q}{\partial z_1}\right|_0 , \; k_p = -\left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_0 , \tag{4.20}$$

$$q_0 = q[z_{10}, p_z - p_0] , \tag{4.21}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta z_1(t) = z_1(t) - z_{10}, \; \Delta q(t) = q(t) - q_0, \\ &\Delta f(t) = f(t) - f_0, \quad \Delta p(t) = p(t) - p_0, \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

kde veličiny z_{10}, z_{20}, p_0, q_0, f_0 odpovídají pracovnímu bodu, resp. nominálním hodnotám.

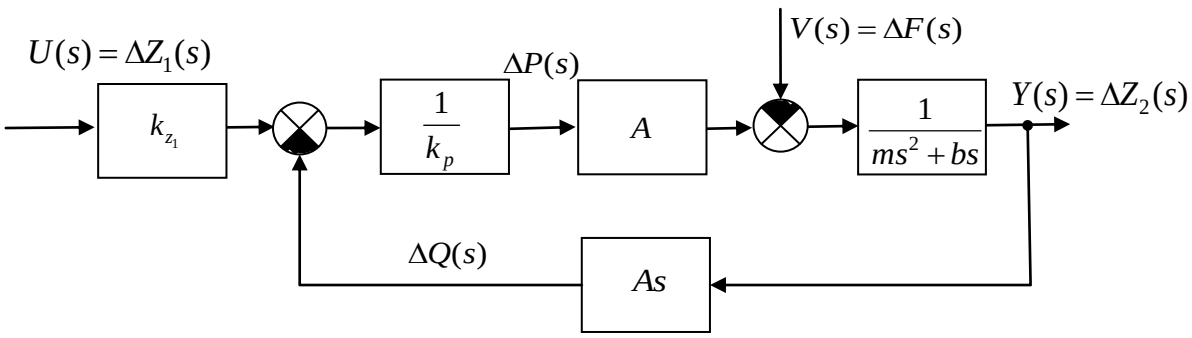
Parciální derivace (4.20) je třeba počítat pro pracovní bod.

Na rovnice použijeme Laplaceovu transformaci při nulových počátečních podmínkách a vhodně je upravíme, tj.

$$\Delta Z_2(s) = \frac{A}{ms^2 + bs}\Delta P(s) - \frac{1}{ms^2 + bs}\Delta F ,$$

$$\Delta Q(s) = As\Delta Z_2(s) ,$$

$$\Delta P(s) = \frac{1}{k_p}[k_{z_1}\Delta Z_1(s) - \Delta Q(s)] .$$



Obr. 4.3. Blokové schéma linearizovaného dvojčinného přímočarého hydromotoru se šoupátkovým rozvaděčem – příklad 4.1

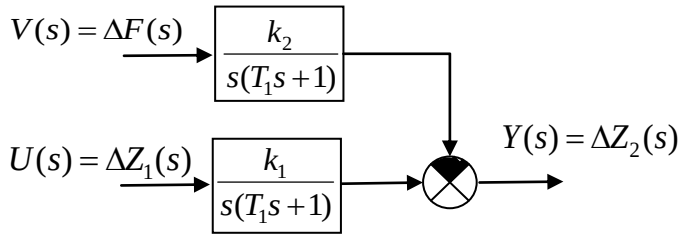
Na základě blokového schématu můžeme snadno určit přenosy

$$G_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\Delta Z_2(s)}{\Delta Z_1(s)} = \frac{\dfrac{Ak_{z_1}}{bk_p + A^2}}{s\left(\dfrac{mk_p}{bk_p + A^2}s + 1\right)} = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} , \tag{4.23}$$

$$G_{vy}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\Delta Z_2(s)}{\Delta F(s)} = -\frac{\dfrac{k_p}{bk_p + A^2}}{s\left(\dfrac{mk_p}{bk_p + A^2}s + 1\right)} = -\frac{k_2}{s(T_1 s + 1)} , \tag{4.24}$$

$$T_1 = \frac{mk_p}{bk_p + A^2},\ k_1 = \frac{Ak_{z_1}}{bk_p + A^2},\ k_2 = \frac{k_p}{bk_p + A^2}, \tag{4.25}$$

kde T_1 je časová konstanta [s], k_1 – koeficient přenosu pro vstupní posunutí šoupátka [s^{-1}], k_2 – koeficient přenosu pro vnější sílu [N^{-1} m s^{-1}].



Obr. 4.4 Zjednodušené blokové schéma dvojčinného přímočarého hydromotoru se šoupátkovým rozvaděčem – příklad 4.1

Pomocí přenosů (4.23) a (4.24) linearizovaný model dvojčinného přímočarého hydromotoru se šoupátkovým rozvaděčem může být vyjádřen velmi jednoduchým blokových schématem (obr. 4.4).

Pokud by tlak $p(t)$ byl konstantní, pak $k_p = 0$ [viz (4.20)] a dojde k výraznému zjednodušení obou přenosů (4.23) a (4.24)

$$G_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\Delta Z_2(s)}{\Delta Z_1(s)} = \frac{k_{z_1}}{As}, \tag{4.26}$$

$$G_{vy}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\Delta Z_2(s)}{\Delta F(s)} = 0, \tag{4.27}$$

kde k_{z1} je koeficient přenosu [m^3 s].

Přenos (4.26) je nejjednodušším matematickým modelem dvojčinného přímočarého hydromotoru se šoupátkovým rozvaděčem.

4.2 Úprava přenosů regulovaných soutav

Matematický model získaný analytickou nebo experimentální cestou je často příliš složitý. Většinou jde o matematické modely regulovaných soustav. Má-li matematický model regulované soustavy tvar přenosu, pak je možné ho zjednodušit buď na základě jeho přechodové charakteristiky nebo přímo jednoduchou úpravou přenosu.

Úprava přenosů na základě přechodové charakteristiky soustavy

Předpokládejme, že můžeme simulačně určit přechodovou charakteristiku, pak je možné použít některý z následujících postupů. Všechny tyto postupy lze rovněž použít k jednoduché experimentální identifikaci za předpokladu, že průběhy přechodových charakteristik jsou vhodně upraveny (filtrovány, vyhlazeny atd.) a pracuje se s přírůstkovými veličinami, tj. průběhy začínají v počátku souřadnic. Předpokládá se, že časové konstanty splňují podmínku

$$T_i \geq T_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.28}$$

tj. časová konstanta s nižším indexem má vyšší nebo stejnou hodnotu, než časová konstanta

s vyšším indexem.

Úprava přenosu soustavy spočívá ve vykreslení přechodové charakteristiky a v následném určení jejího přenosu v požadovaném tvaru.

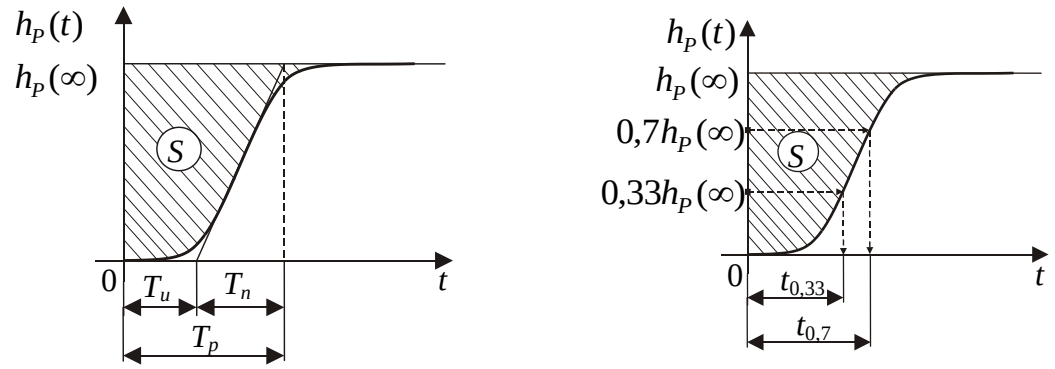
Pokud soustava je proporcionální nekmitavá a má přechodovou charakteristiku h_P(t) podobnou jako na obr. 4.5a, pak nejjednodušší způsob určení jejího přenosu spočívá v určení doby průtahu $T_u = T_{d1}$ a doby náběhu $T_n = T_1$ na základě úseků, které vytne tečna vedená inflexním bodem na časové ose a na ustálené hodnotě $h_P(\infty)$. Součet obou dob je doba přechodu T_p. Přenos soustavy má pak tvar

$$G_P(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1} s}, \tag{4.29}$$

kde T_1 je časová konstanta vyjadřující dobu náběhu T_n, T_{d1} – dopravní zpoždění vyjadřující dobu průtahu T_u, k_1 – koeficient přenosu.

Takto určený přenos soustavy je velmi hrubý a je nejčastěji používán pro předběžné seřízení regulátoru Zieglerovou – Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky, viz odstavec 6.2.5 [2 – 4, 10, 21 – 24, 26, 29, 31].

a) b)



Obr. 4.5 Určení přenosu nekmitavé proporcionální soustavy:
a) pomocí doby průtahu T_u a doby náběhu T_n, b) pomocí dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$

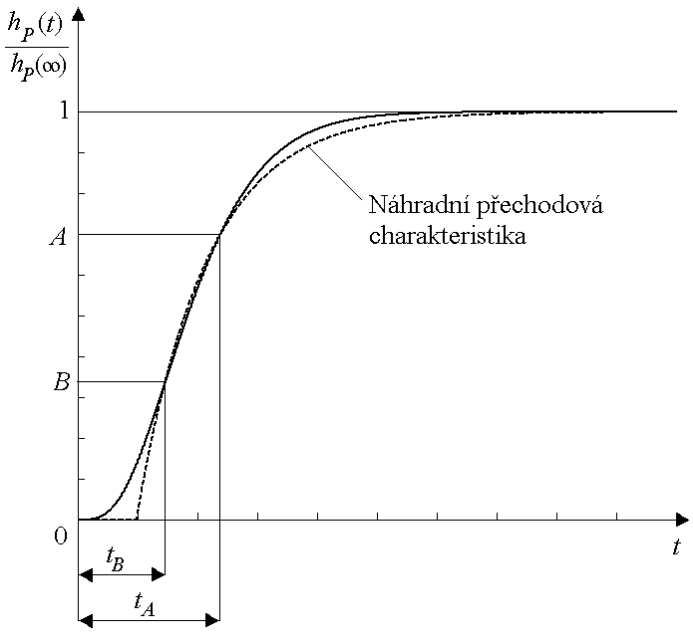
Značně kvalitnější určení přenosu proporcionální nekmitavé soustavy se setrvačností prvního řádu s dopravním zpožděním (4.29) lze obdržet použitím dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ v souladu s obr. 4.5b a vztahy [22, 26, 29]

$$\begin{aligned} T_1 &\doteq 1{,}245(t_{0,7} - t_{0,33}) \approx 1{,}25(t_{0,7} - t_{0,33}), \\ T_{d1} &\doteq 1{,}498 t_{0,33} - 0{,}498 t_{0,7} \approx 1{,}5 t_{0,33} - 0{,}5 t_{0,7}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Vztahy jsou určeny analyticky. Na základě obr. 4.6 lze pro normovanou přechodovou charakteristiku psát

$$\frac{h_P(t)}{h_P(\infty)} = (1 - \mathrm{e}^{-(t - T_{d1})/T_1}) \eta(t - T_{d1}).$$

Zpožděný Heavisideův jednotkový skok $\eta(t - T_{d1})$ zajišťuje $h_P(t) = 0$ pro $t < T_{d1}$.



Obr. 4.6 Určení přenosu soustavy z normované přechodové charakteristiky pomocí dob t_A a t_B

Pro hodnoty A a B platí rovnice

$$A = 1 - \mathrm{e}^{-(t_A - T_{d1})/T_1},$$

$$B = 1 - \mathrm{e}^{-(t_B - T_{d1})/T_1},$$

ze kterých se dostanou požadované vztahy

$$T_1 = \frac{1}{\ln(1-A) - \ln(1-B)}(t_B - t_A),$$

$$T_{d1} = \frac{1}{\ln(1-A) - \ln(1-B)}[t_B \ln(1-A) - t_A \ln(1-B)].$$

Je zřejmé, že hodnoty A a B normované přechodové charakteristiky by měly být zvoleny tak, aby byly přibližně v 1/3 a 2/3 a aby číselné hodnoty koeficientů ve výše uvedených vztazích byly snadno zapamatovatelné.

Např. pro A = 0,33 a B = 0,7 se dostane (4.30).

Podobně se pro A = 0,28 a B = 0,63 dostane

$$\begin{aligned} T_1 &\doteq 1{,}502(t_{0,63} - t_{0,28}) \approx 1{,}5(t_{0,63} - t_{0,28}), \\ T_{d1} &\doteq 1{,}493 t_{0,28} - 0{,}493 t_{0,63} \approx 1{,}5 t_{0,28} - 0{,}5 t_{0,63}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pomocí dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ lze získat přenos nekmitavé proporcionální soustavy se setrvačností druhého řádu s dopravním zpožděním [22, 26, 29]:

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_{d2} s}, \tag{4.32}$$

kde

$$\begin{aligned} T_2 &\doteq 0{,}794(t_{0,7} - t_{0,33}), \\ T_{d2} &\doteq 1{,}937 t_{0,33} - 0{,}937 t_{0,7}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pro přibližnou kontrolu lze využít doplňkovou plochu S nad přechodovou charakteristikou (obr. 4.5)

$$T_1 + T_{d1} \approx \frac{S}{h_P(\infty)}, \qquad 2T_2 + T_{d2} \approx \frac{S}{h_P(\infty)}. \tag{4.34}$$

Vztahy (4.33) byly získány numericky ze shody náhradní přechodové charakteristiky se simulovanou (skutečnou, původní) přechodovou charakteristikou v hodnotách $h_P(0) = 0$, $h_P(t_{0,33}) = 0{,}33h_P(\infty)$, $h_P(t_{0,7}) = 0{,}7h_P(\infty)$ a $h_P(\infty)$ [22, 26, 29].

Velmi dobrou aproximaci průběhu nekmitavé proporcionální regulované soustavy lze získat pomocí přenosu s rozdílnými časovými konstantami

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_{d2}s}, \tag{4.35}$$

kde

$$\begin{aligned} &T_1 = \frac{1}{2}\left(D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_1^2}\right), \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(D_2 - \sqrt{D_2^2 - 4D_1^2}\right), \\ &T_{d2} = 1{,}937 t_{0,33} - 0{,}937 t_{0,7}, \\ &D_1 = 0{,}794\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right), \; D_2 = \frac{S}{h_P(\infty)} - T_{d2}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Aby mohl být použit přenos ve tvaru (4.35), musí platit $D_2 > 2D_1$, jinak je třeba použít přenos (4.32).

Pro vzájemné převedení přenosů soustav v souladu se schématem (4.37) lze použít tab. 4.1 [22, 26, 29].

$$\begin{array}{ccc} & \dfrac{1}{(T_i s + 1)^i} \mathrm{e}^{-T_{di}s} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \dfrac{1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1}s} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_{d2}s} \end{array} \tag{4.37}$$

Tab. 4.1 Tabulka pro rychlý převod přenosů v souladu se schématem (4.37)

$\frac{1}{(T_i s+1)^i}\mathrm{e}^{-T_{di}s}$	i	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_{d1}s}$	$\frac{T_1}{T_i}$	1	1,568	1,980	2,320	2,615	2,881
	$\frac{T_{d1}-T_{di}}{T_i}$	0	0,552	1,232	1,969	2,741	3,537
$\frac{1}{(T_2 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_{d2}s}$	$\frac{T_2}{T_i}$	0,638	1	1,263	1,480	1,668	1,838
	$\frac{T_{d2}-T_{di}}{T_i}$	* –0,352	0	0,535	1,153	1,821	2,523

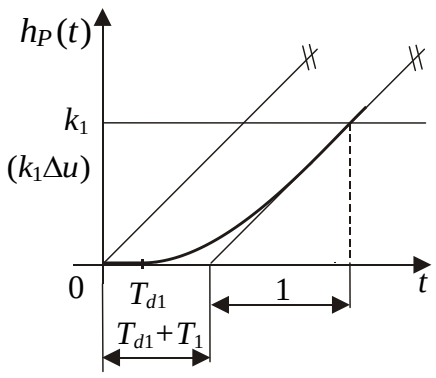
* Použitelné pro $T_{d1} > 0{,}352T_1$.

Tab. 4.1 byla získána numericky za předpokladu shody přechodových charakteristik regulovaných soustav v hodnotách $h_P(0)$, $h_P(t_{0,33})$, $h_P(t_{0,7})$ a $h_P(\infty)$.

Pro přibližné určení přenosu nekmitavé integrační soustavy

$$G_P(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_{d1} s} \tag{4.38}$$

lze použít její přechodovou charakteristiku (obr. 4.7), kde se odhadne dopravní zpoždění. Pokud vstupní skok akční veličiny není jednotkový, tj. $\Delta u(t) \neq \eta(t)$, ale $\Delta u(t) = \Delta u \eta(t)$, pak je třeba uvažovat hodnotu v závorce.



Obr. 4.7 Určení přenosu nekmitavé integrační regulované soustavy

Přímá úprava přenosů

Nejjednodušší přímé úpravy přenosů soustav vycházejí z rovnosti doplňkových ploch nad náhradní a simulovanou (skutečnou, původní) přechodovou charakteristikou regulované soustavy.

Nekmitavé proporcionální soustavy

a)

$$\begin{gathered} \frac{k_1}{(T_1 s + 1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s + 1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}, \\ T_\Sigma = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ T_1 >> T_i,\ i = 2,3,\ldots,n. \end{gathered} \tag{4.39}$$

b)

$$\begin{gathered} \frac{k_1}{(T_1 s + 1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s + 1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \\ T_d = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ T_1 >> T_i,\ i = 2,3,\ldots,n. \end{gathered} \tag{4.40}$$

c)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\prod_{i=3}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=3}^{n} T_i,\ \ T_1 \geq T_2 >> T_i,\ \ i = 3,4,\ldots,n. \tag{4.41}$$

d)

$$\frac{k_1}{(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i,\ \ T_0 >> T_i,\ \ i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.42}$$

Nekmitavé integrační soustavy

a) $$\frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{s(T_\Sigma s+1)}, \qquad T_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i\,, \tag{4.43}$$

b) $$\frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}, \qquad T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i\,, \tag{4.44}$$

c)

$$\frac{k_1}{s(T_1 s+1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{s(T_1 s+1)} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ \ T_1 >> T_i,\ \ i = 2,3,\ldots,n. \tag{4.45}$$

Výhodné je použití kombinace náhradní součtové časové konstanty T_Σ a náhradního dopravního zpoždění T_d, viz níže „pravidlo poloviny“.

Pokud v čitateli přenosu regulované soustavy vystupují dvojčleny

$$1 \pm \tau_i s\,, \tag{4.46}$$

pak každý dvojčlen lze zastoupit výrazem

$$\mathrm{e}^{\pm \tau_i s} \tag{4.47}$$

za předpokladu, že výsledné dopravní zpoždění bude nezáporné.

Že ve výše uvedených jednoduchých úpravách jde o rovnosti doplňkových ploch nad přechodovými charakteristikami soustav, lze snadno ukázat. Jsou uvažovány přenosy soustav

$$G_P(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{1}{T_\Sigma s+1} = G_1(s)\,, \tag{4.48}$$

$$G_P(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} \approx \mathrm{e}^{-T_d s} = G_2(s)\,, \tag{4.49}$$

$$T_\Sigma = T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i\,. \tag{4.50}$$

Je zřejmé, že platí (viz příloha A)

$$\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} X(s)\,, \tag{4.51}$$

kde $X(s)$ je Laplaceův obraz časové funkce $x(t)$, tj.

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,.$$

Proto pro doplňkovou plochu nad přechodovou charakteristikou $h_P(t)$ lze psát

$$\int_0^\infty [1 - h_P(t)]\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1) - 1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} =$$

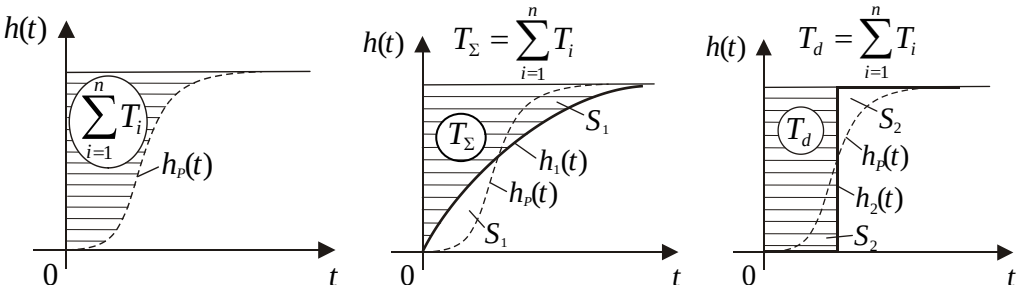
$$= \lim_{s\to 0}\frac{(\prod_{i=1}^{n} T_i)s^{n-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} T_i}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} = \sum_{i=1}^{n} T_i\,. \tag{4.52}$$

Pro přenos $G_1(s)$ lze doplňkovou plochu nad přechodovou charakteristikou $h_1(t)$ získat na základě právě obdrženého vztahu

$$\int_0^\infty [1 - h_1(t)]\,\mathrm{d}t = T_\Sigma\,.$$

Pro přenos $G_2(s)$ se doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou $h_2(t)$ získá na základě vztahu

$$\int_0^\infty [1 - h_2(t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty [1 - \eta(t - T_d)]\,\mathrm{d}t = T_d\,.$$



Obr. 4.8 Geometrická interpretace náhradní součtové časové konstanty T_Σ a náhradního dopravního zpoždění T_d

Geometrická interpretace náhradní součtové časové konstanty T_Σ a náhradního dopravního zpoždění T_d je ukázána na obr. 4.8. Náhradní přechodové charakteristiky $h_1(t)$ a

$h_2(t)$ se protnou s původní přechodovou charakteristikou $h_P(t)$ v takovém bodě, aby jimi vymezené plochy S_1 a S_2 nad a pod odpovídající náhradní přechodovou charakteristikou byly stejné.

Velmi jednoduchá, a současně efektivní, je metoda používající empirické „pravidlo poloviny“ [20].

Za předpokladu, že přenos soustavy má tvar s nestabilními nulami

$$G_P(s) = \frac{\prod_j (1-\tau_{j0}s)}{\prod_i (T_{i0}s+1)} \mathrm{e}^{-T_{d0}s}, \tag{4.53}$$

$$T_{i0} \geq T_{i+1,0}, \ \tau_{j0} \geq 0, \ T_{d0} \geq 0,$$

pak na základě „pravidla poloviny“ se pro náhradní přenos (4.29) dostane

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2}, \quad T_{d1} = T_{d0} + \frac{T_{20}}{2} + \sum_{i\geq 3} T_{i0} + \sum_j \tau_{j0}, \tag{4.54}$$

resp. pro přenos (4.35)

$$T_1 = T_{10}, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2}, \quad T_{d2} = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} + \sum_{i\geq 4} T_{i0} + \sum_j \tau_{j0}. \tag{4.55}$$

Je zřejmé, že platí

$$\sum_i T_{i0} + \sum_j \tau_{j0} + T_{d0} = T_1 + T_{d1} = T_1 + T_2 + T_{d2}, \tag{4.56}$$

tj. „pravidlo poloviny“ zachovává rovnost doplňkových ploch nad náhradními přechodovými charakteristikami a původní přechodovou charakteristikou, ale vhodně je rozdělí mezi setrvačnou časovou konstantu, příp. dvě časové konstanty a dopravní zpoždění.

Pro přenosy soustav se stabilními nulami postup uvedený v [20] je již poměrně složitý. V tomto případě vhodnější, a především přesnější, postup je simulačně vykreslit přechodovou charakteristiku a na základě dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ určit přenos (4.29) nebo (4.32).

Příklad 4.2

Přenos

$$G_P(s) = \frac{2}{(6s+1)^4} \tag{4.57}$$

je třeba upravit na tvary (4.29) a (4.32) na základě schématu (4.37) a tab. 4.1 a také „pravidla poloviny“ (časová konstanta je v min).

Řešení:

V souladu se schématem (4.37) a tab. 4.1 můžeme psát: $k_1 = 2$, $T_4 = 6$, $T_{d4} = 0$.

a) Přenos (4.29)

$$\frac{T_1}{T_4} = 2{,}320 \Rightarrow T_1 = 2{,}32T_4 = 13{,}92 \doteq 13{,}9 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d1}-T_{d4}}{T_4}=1{,}969 \Rightarrow T_{d1}=1{,}969T_4=11{,}814 \doteq 11{,}8 \text{ min}$$

$$G_P(s)=\frac{2}{(6s+1)^4}\approx\frac{2}{13{,}9s+1}\mathrm{e}^{-11{,}8s}. \tag{4.58}$$

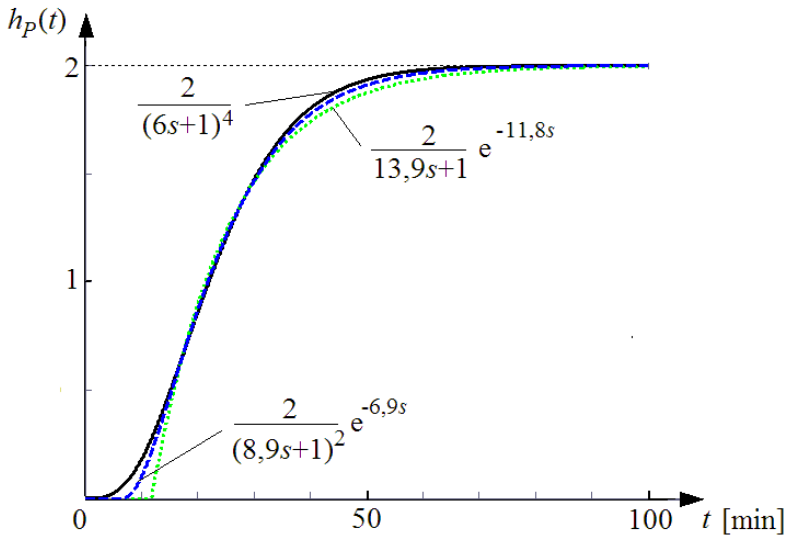
b) Přenos (4.32)

$$\frac{T_2}{T_4}=1{,}480 \Rightarrow T_2=1{,}48T_4=8{,}88 \doteq 8{,}9 \text{ min},$$

$$\frac{T_{d2}-T_{d4}}{T_4}=1{,}153 \Rightarrow T_{d2}=1{,}153T_4=6{,}918 \doteq 6{,}9 \text{ min}$$

$$G_P(s)=\frac{2}{(6s+1)^4}\approx\frac{2}{(8{,}9s+1)^2}\mathrm{e}^{-6{,}9s}. \tag{4.59}$$

Porovnání přechodové charakteristiky získané z přenosu (4.57) s náhradními přechodovými charakteristikami získanými z upravených přenosů (4.58) a (4.59) je na obr. 4.9.



Obr. 4.9 Porovnání přechodových charakteristik (tab. 4.1) – příklad 4.2

Pro porovnání přenos (4.57) zjednodušíme pomocí „pravidla poloviny“.

Pro „pravidlo poloviny“ platí: $T_{10} = T_{20} = T_{30} = T_{40} = 6$, $T_{d0} = 0$.

a) Přenos (4.29)

V souladu se vztahem (4.54) dostaneme

$$T_1=T_{10}+\frac{T_{20}}{2}=9 \text{ min},\ T_{d1}=T_{d0}+\frac{T_{20}}{2}+T_{30}+T_{40}=15 \text{ min},$$

$$G_P(s)=\frac{2}{(6s+1)^4}\approx\frac{2}{9s+1}\mathrm{e}^{-15s}. \tag{4.60}$$

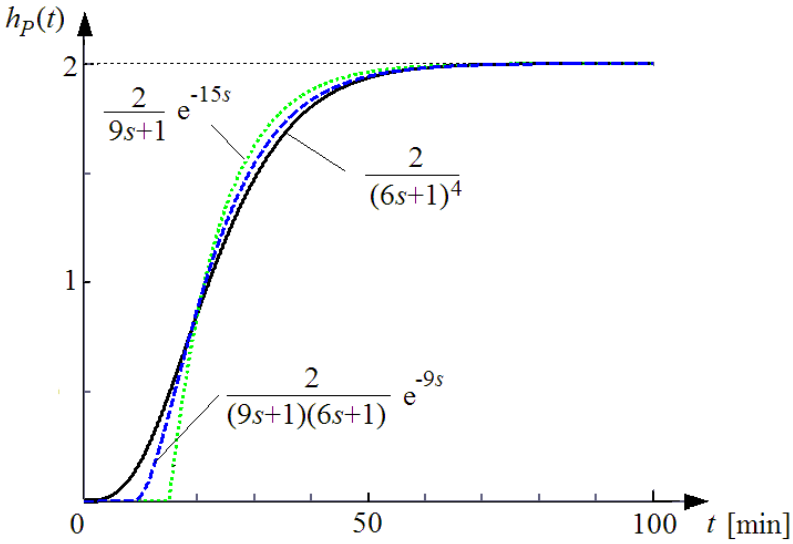
b) Přenos (4.35)

Na základě vztahu (4.55) můžeme přímo psát

$$T_1 = T_{10} = 6 \text{ min},\ T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 9 \text{ min},\ T_{d2} = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} + T_{40} = 9 \text{ min},$$

$$G_P(s) = \frac{2}{(6s+1)^4} \approx \frac{2}{(9s+1)(6s+1)} \mathrm{e}^{-9s}. \tag{4.61}$$

Porovnání přechodových charakteristik je na obr. 4.10.



Obr. 4.10 Porovnání přechodových charakteristik („pravidlo poloviny“) – příklad 4.2

Příklad 4.3

Na základě „pravidla poloviny“ je třeba upravit přenos

$$G_P(s) = \frac{1-s}{(5s+1)(2s+1)^2} \mathrm{e}^{-3s}. \tag{4.62}$$

na tvary (4.29) a (4.35). Časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách.

Řešení:

Pro přenos (4.62) platí: $T_{10} = 5$, $T_{20} = T_{30} = 2$, $\tau_{10} = 1$, $T_{d0} = 3$.

a) Přenos (4.29)

V souladu se vztahem (4.54) můžeme přímo psát

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2} = 6 \text{ s},\ T_{d1} = T_{d0} + \frac{T_{20}}{2} + T_{30} + \tau_{10} = 7 \text{ s},$$

$$G_P(s) = \frac{1-s}{(5s+1)(2s+1)^2} \mathrm{e}^{-3s} \approx \frac{1}{6s+1} \mathrm{e}^{-7s}. \tag{4.63}$$

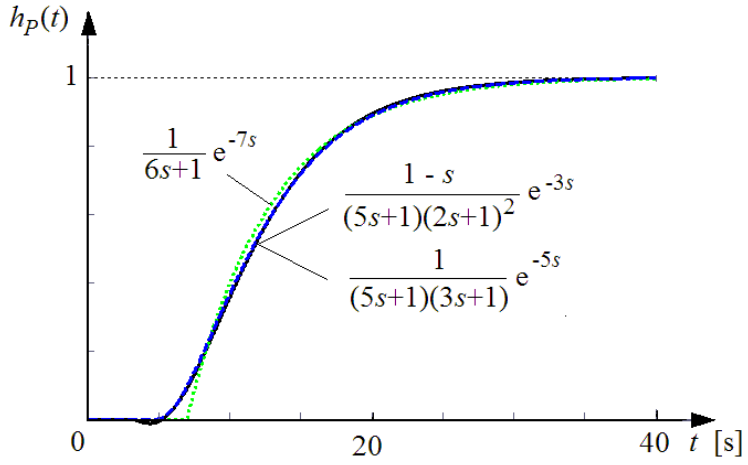
b) Přenos (4.35)

Podobně jako v předchozím případě v souladu s (4.55) můžeme psát

$$T_1 = T_{10} = 5 \text{ s},\ T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 3 \text{ s},\ T_{d_2} = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} + \tau_{10} = 5 \text{s},$$

$$G_P(s) = \frac{1-s}{(5s+1)(2s+1)^2}\mathrm{e}^{-3s} \approx \frac{1}{(5s+1)(3s+1)}\mathrm{e}^{-5s}. \tag{4.64}$$

Porovnání přechodových charakteristik je na obr. 4.11.



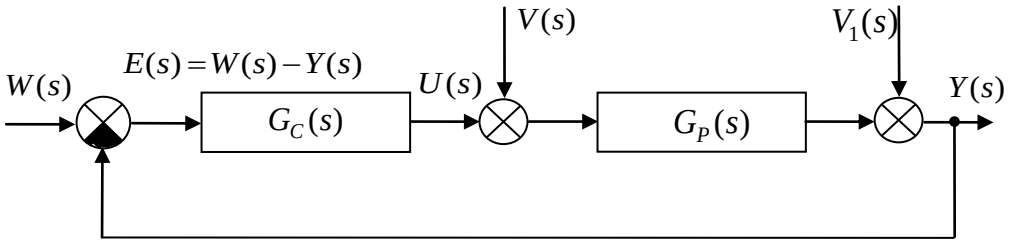
Obr. 4.11 Porovnání přechodových charakteristik – příklad 4.3

5 REGULAČNÍ OBVODY

5.1 Regulátory

Většinou se budeme zabývat regulačním obvodem na obr. 5.1 (viz též obr. 1.3), kde $G_C(s)$ je přenos regulátoru, $G_P(s)$ – přenos regulované soustavy, $W(s)$ – obraz žádané veličiny $w(t)$, $E(s)$ – obraz regulační odchylky $e(t)$, $U(s)$ – obraz akční veličiny $u(t)$, $Y(s)$ – obraz regulované veličiny $y(t)$, $V(s)$ a $V_1(s)$ – obrazy poruchových veličin $v(t)$ a $v_1(t)$.

Z důvodu jednoduchosti budeme velmi často slovo "obraz" vynechávat, protože z textu bude zřejmé, zda jde o obraz nebo originál příslušné veličiny.



Obr. 5.1. Blokové schéma regulačního obvodu

Pokud poruchové veličiny nelze měřit ani jinak přesněji specifikovat, pak je vhodné agregovat je do jediné poruchové veličiny a umístit ji do nejméně příznivého místa v regulačním obvodě. V případě integrační regulované soustavy je to její vstup a v případě proporcionální soustavy je to její výstup.

Jak již bylo uvedeno v kap. 1 cíl regulace může být vyjádřen dvěma ekvivalentními tvary, viz vztahy (1.4). Pro regulační obvod na obr. 5.1 můžeme psát:

a) Cíl regulace ve tvaru

$$y(t) \to w(t) \;\hat{=}\; Y(s) \to W(s) \tag{5.1}$$

V souladu s obr. 5.1 a principem linearity platí

$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) + G_{vy}(s)V(s) + G_{v_1y}(s)V_1(s) \tag{5.2}$$

kde

$$G_{wy}(s) = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)} \tag{5.3}$$

je **přenos řízení**,

$$G_{vy}(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)} = [1-G_{wy}(s)]G_P(s) \tag{5.4}$$

a

$$G_{v_1y}(s) = \frac{1}{1+G_C(s)G_P(s)} = 1-G_{wy}(s) \tag{5.5}$$

jsou **přenosy poruch** $V(s)$ a $V_1(s)$.

Aby cíl regulace (5.1) byl splněn pro libovolnou žádanou veličinu $W(s)$ a libovolné poruchové veličiny $V(s)$ a $V_1(s)$, musí být splněny podmínky

$$G_{wy}(s) \to 1, \tag{5.6}$$

$$G_{vy}(s) \to 0, \tag{5.7}$$

$$G_{v_1y}(s) \to 0. \tag{5.8}$$

První podmínka pro přenos řízení (5.6) vyjadřuje funkci regulátoru spočívající v zajištění sledování žádané veličiny $W(s)$ regulovanou veličinou $Y(s)$. Další dvě podmínky (5.7) a (5.8) vyjadřují funkci regulátoru spočívající v potlačení vlivu poruchových veličin $V(s)$ a $V_1(s)$ na činnost regulačního obvodu.

Ze vztahů (5.4) a (5.5) vyplývá, že když bude splněna podmínka (5.6) pro přenos řízení, pak budou současně splněny podmínky (5.7) a (5.8) pro přenosy poruch.

b) Cíl regulace ve varu

$$e(t) \to 0 \;\hat{=}\; E(s) \to 0. \tag{5.9}$$

V souladu s obr. 5.1 můžeme psát

$$E(s) = G_{we}(s)W(s) + G_{ve}(s)V(s) + G_{v_1e}(s)V_1(s) \tag{5.10}$$

kde

$$G_{we}(s) = \frac{1}{1 + G_C(s)G_P(s)} = 1 - G_{wy}(s) \tag{5.11}$$

je odchylkový přenos řízení,

$$G_{ve}(s) = -\frac{G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)} = -[1 - G_{wy}(s)]G_P(s) \tag{5.12}$$

a

$$G_{v_1e}(s) = -\frac{1}{1 + G_C(s)G_P(s)} = -[1 - G_{wy}(s)] \tag{5.13}$$

jsou odchylkové přenosy poruch $V(s)$ a $V_1(s)$.

Přenosy (5.3) – (5.5) a (5.11) – (5.13) jsou tzv. **základní přenosy daného regulačního obvodu**. Protože první nebo druhá trojice přenosů popisuje vlastnosti daného regulačního obvodu jednoznačně.

Je zřejmé, že aby byl plněn cíl regulace (5.9) pro libovolnou žádanou veličinu $W(s)$ a libovolné poruchové veličiny $V(s)$ a $V_1(s)$, musí být splněny podmínky

$$G_{we}(s) \to 0, \tag{5.14}$$

$$G_{ve}(s) \to 0, \tag{5.15}$$

$$G_{v_1e}(s) \to 0. \tag{5.16}$$

Podobně jako v předchozím případě první podmínka pro odchylkový přenos řízení (5.14) vyjadřuje funkci regulátoru spočívající v zajištění sledování žádané veličiny $W(s)$ regulovanou veličinou $Y(s)$ a další dvě podmínky pro odchylkové přenosy poruch (5.15) a

(5.16) vyjadřují funkci regulátoru spočívající v potlačení vlivu poruchových veličin $V(s)$ a $V_1(s)$ na činnost regulačního obvodu.

Ze vztahů (5.11) – (5.13) rovněž vyplývá, že když bude splněna podmínka (5.6) pro přenos řízení, pak budou současně splněny podmínky (5.14) – (5.16) pro odchylkové přenosy.

Vidíme, že obě formulace cíle regulace (5.1) a (5.9) jsou vzájemně ekvivalentní a dále je zřejmé, že pokud bude splněna podmínka (5.6) pro přenos řízení, pak budou splněny všechny podmínky, tj. (5.7), (5.8) a (5.14) – (5.16).

Proto se dále budeme zabývat především cílem regulace ve tvaru (5.1) a hlavní pozornost budeme věnovat přenosu řízení (5.3).

Kmitočtový přenos řízení má tvar

$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = G_{wy}(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)}{1+G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{\dfrac{1}{G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)}+1} \tag{5.17}$$

a je zřejmé, že platí

$$\left.\begin{array}{l} |G_C(\mathrm{j}\omega)| \to \infty \\ G_P(\mathrm{j}\omega) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(s) \to 1, \tag{5.18}$$

příp.

$$|G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)| \to \infty \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(s) \to 1. \tag{5.19}$$

Ze vztahu (5.18) vyplývá, že bude-li zajištěna dostatečně vysoká hodnota modulu kmitočtového přenosu regulátoru

$$A_C(\omega) = \operatorname{mod} G_C(\mathrm{j}\omega) = |G_C(\mathrm{j}\omega)|, \tag{5.20}$$

pak bude splněna s dostatečnou přesností podmínka (5.6) a pro nesingulární $G_P(s)$ i podmínka (5.7).

Budou-li k dispozici i informace o vlastnostech regulované soustavy vyjádřené jejím přenosem $G_P(s)$, pak je snazší zajistit dostatečně vysokou hodnotu modulu kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$A_o(\omega) = \operatorname{mod} G_o(\mathrm{j}\omega) = |G_o(\mathrm{j}\omega)| = |G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)|, \tag{5.21}$$

viz vztah (5.19).

Vysoké hodnoty modulů $A_C(\omega)$ nebo $A_o(\omega)$ musí být zajištěny v rozsahu pracovních úhlových kmitočtů při současném zabezpečení stability a požadované kvality regulačního pochodu. Toho lze dosáhnout vhodně zvoleným regulátorem a jeho následným správným seřízením.

Průmyslové regulátory se vyrábějí v různých verzích a modifikacích, a proto budou uvedeny pouze základní struktury a modifikace běžně používaných konvenčních regulátorů [2 – 6, 9 – 11, 13 – 17, 19 – 31].

Analogové (spojité) konvenční regulátory jsou realizovány jako kombinace základních třech činností (složek): **proporcionální – P**, **integrační – I** a **derivační – D**. Regulátor, u kterého vystupují všechny tři činnosti, se nazývá **proporcionálně integračně derivační**

regulátor nebo zkráceně **regulátor typu PID** a jeho vlastnosti v časové oblasti mohou být popsány vztahem

$$u(t) = \underbrace{K_P e(t)}_{P} + \underbrace{K_I \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{I} + \underbrace{K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}}_{D} = K_P\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right], \quad (5.22)$$

kde K_P, K_I a K_D jsou **váhy proporcionální, integrační** a **derivační složky** regulátoru, K_P – **zesílení** regulátoru, T_I a T_D – **integrační** a **derivační časová konstanta** regulátoru.

U průmyslových regulátorů se místo zesílení K_P používá jeho převrácená hodnota vyjádřena v procentech, tzv. **pásmo proporcionality**

$$pp = \frac{100}{K_P}\,[\%]. \quad (5.23)$$

Parametry K_P, K_I a K_D, příp. K_P, T_I a T_D jsou tzv. **stavitelné parametry regulátoru**. Úkolem seřízení regulátoru je zajištění požadavků na kvalitu regulačního pochodu vhodnou volbou hodnot jeho stavitelných parametrů pro konkrétní regulovanou soustavu.

Mezi stavitelnými parametry regulátoru platí převodní vztahy

$$K_I = \frac{K_P}{T_I}, \qquad K_D = K_P T_D, \quad (5.24)$$

resp.

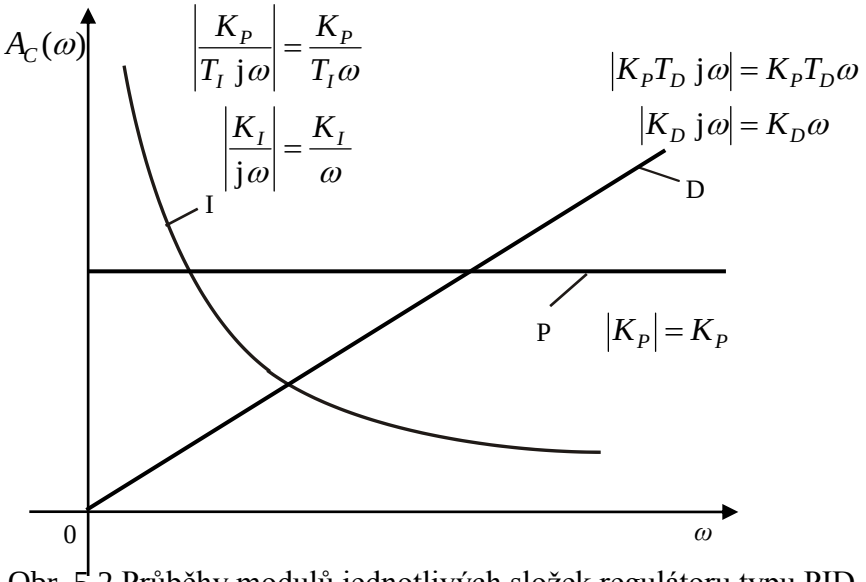
$$T_I = \frac{K_P}{K_I}, \qquad T_D = \frac{K_D}{K_P}. \quad (5.25)$$

Protože váha proporcionální složky K_P je identická se zesílením K_P, proto se i pro ni používá často název zesílení regulátoru.

Použitím Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek se získá ze vztahu (5.22) přenos regulátoru typu PID

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right). \quad (5.26)$$

Na obr. 5.2 jsou nakresleny průběhy modulů jednotlivých složek P, I a D regulátoru typu PID. Z obr. 5.2 vyplývá, že integrační složka (I) zajišťuje vysokou hodnotu modulu kmitočtového přenosu (5.26) regulátoru PID při nízkých úhlových kmitočtech a především v ustálených stavech ($\omega = 0$), derivační složka (D) při vysokých úhlových kmitočtech a proporcionální složka (P) v celém pracovním pásmu úhlových kmitočtů, ale především pro střední úhlové kmitočty. Právě vhodnou volbou jednotlivých složek P, I a D, tj. vhodnou volbou hodnot stavitelných parametrů regulátoru K_P, K_I a K_D, příp. K_P, T_I a T_D lze dosáhnout vysoké hodnoty modulu kmitočtového přenosu regulátoru (5.20) nebo modulu kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu (5.21), a tím i splnění podmínek (5.18) nebo (5.19).



Obr. 5.2 Průběhy modulů jednotlivých složek regulátoru typu PID

V praxi se používají i jednodušší typy regulátorů (jsou uvažovány pouze vztahy s časovými konstantami): regulátor typu P (proporcionální), regulátor typu I (integrační), regulátor typu PI (proporcionálně integrační) a regulátor typu PD (proporcionálně derivační). Přenosy těchto konvenčních regulátorů jsou přehledně sestaveny v tab. 5.1, řádky 1 ÷ 5. Regulátor se samotnou derivační složkou se nedá použít, protože reaguje pouze na časové změny regulační odchylky $e(t)$, tj. $\dot{e}(t)$ a v ustáleném stavu způsobí jako by rozpojení regulačního obvodu.

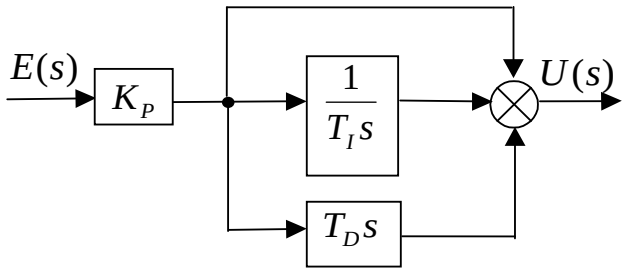
Tab. 5.1 Přenosy konvenčních analogových regulátorů

	Typ	Přenos $G_C(s)$
1	P	K_P
2	I	$\frac{1}{T_I s}$
3	PI	$K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)$
4	PD	$K_P(1+T_D s)$
5	PID	$K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$
6	PID$_i$	$K'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)(1+T'_D s)$

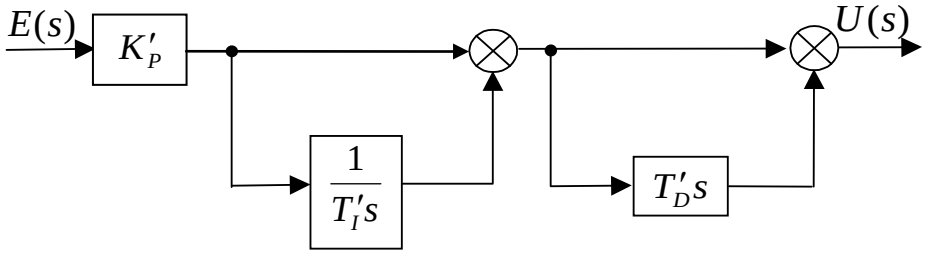
Blokové schéma regulátoru typu PID s přenosem (5.26) je na obr. 5.3a, ze kterého vyplývá, že má paralelní strukturu. U takového regulátoru typu PID lze všechny jeho

stavitelné parametry nastavit nezávisle, a proto regulátoru s paralelní strukturou se také říká – **regulátor typu PID bez interakce**.

a)



b)



Obr. 5.3 Blokové schéma regulátoru PID se strukturou: a) paralelní (bez interakce), b) sériovou (s interakcí)

Někdy se za **paralelní formu** regulátoru PID považuje pouze tvar (5.26) s váhami a tvar s časovými konstantami (obr. 5.3a) za **standardní tvar** podle ISA (The **I**nternational **S**ociety of **A**utomation – dříve **I**nstrument **S**ociety of **A**merica).

Regulátor typu PID lze rovněž realizovat pomocí sériové struktury (viz obr. 5.3b) dané vztahem

$$G_C(s) = \underbrace{K'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)}_{\text{PI}}\underbrace{\left(1+T'_D s\right)}_{\text{PD}} = K'_P\,\frac{(T'_I s+1)(T'_D s+1)}{T'_I s}, \tag{5.27}$$

který lze snadno upravit na strukturu paralelní (5.26)

$$G_C(s) = \underbrace{K'_P\,\frac{T'_I+T'_D}{T'_I}}_{K_P}\left(1+\underbrace{\frac{1}{T'_I+T'_D}}_{\frac{1}{T_I}}\frac{1}{s}+\underbrace{\frac{T'_I T'_D}{T'_I+T'_D}}_{T_D}s\right). \tag{5.28}$$

Ze vztahu (5.28) je zřejmé, že při změně hodnoty integrační T'_I nebo derivační T'_D časové konstanty dochází ke změně hodnot všech stavitelných parametrů u odpovídající paralelní struktury K_P, T_I a T_D , tj. dochází zde k interakci mezi stavitelnými parametry. Proto regulátoru PID se sériovou strukturou se také říká – regulátor typu **PID s interakcí** a označuje se jako PID_i (viz tab. 5.1, řádek 6).

Mezi stavitelnými parametry paralelní a sériové struktury platí jednoduché převodní vztahy [2, 26, 29]:

$$K_P = K'_P i, \qquad T_I = T'_I i, \qquad T_D = \frac{T'_D}{i}, \qquad i = 1 + \frac{T'_D}{T'_I}, \tag{5.29}$$

$$K'_P = K_P \beta, \qquad T'_I = T_I \beta, \qquad T'_D = \frac{T_D}{\beta}, \qquad \beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{T_D}{T_I}}. \tag{5.30}$$

Koeficient i se nazývá **činitel interakce**. Hodnoty stavitelných parametrů K_P, T_I a T_D regulátoru typu PID (tj. bez interakce) jsou tzv. efektivní hodnoty, protože většina metod seřizování předpokládá standardní paralelní strukturu regulátoru typu PID (obr. 5.3a), a proto nastavené hodnoty stavitelných parametrů K'_P, T'_I a T'_D regulátoru typu $\mathrm{PID_i}$ (tj. s interakcí) je třeba přepočíst na hodnoty efektivní (skutečné) podle vztahů (5.29), tj. na K_P, T_I a T_d.

U regulátoru typu PID se sériovou strukturou, tj. typu $\mathrm{PID_i}$ vystupuje omezení [viz vztah pro β (5.30)]

$$\frac{T_D}{T_I} \le \frac{1}{4}, \tag{5.31}$$

které však většinou není podstatné.

Sériová struktura $\mathrm{PID_i}$ má i své výhody. Jednoduše se realizuje, např. sériovým zapojením regulátorů typu PI a PD, viz obr. 5.3b a vztah (5.27). Je rovněž výrobně levnější. Realizace regulátoru $\mathrm{PID_i}$ se sériovou strukturou pomocí operačního zesilovače je ukázáno v příkladě 3.5. Pro $T'_D = T_D = 0$ jsou obě struktury ekvivalentní typu PI.

Derivační složka má z teoretického hlediska kladný stabilizující vliv na regulační pochod. Z praktického hlediska má však derivační složka velmi nepříjemnou vlastnost, která spočívá v zesilování šumu o vysokých úhlových kmitočtech (viz obr. 5.2) a rychlých změn. Např. pokud derivační složka regulátoru typu PD nebo PID

$$K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} = K_P T_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.32}$$

zpracovává regulační odchylku $e(t)$, na kterou je aditivně namodulován šum o amplitudě a_S a úhlovém kmitočtu ω_S, tj. [2]

$$e(t) + a_S \sin \omega_S t,$$

pak na výstupu derivační složky (5.32) se dostane

$$K_P T_D [\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_S \omega_S \cos \omega_S t], \tag{5.33}$$

kde $\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ je užitečná část a $a_S \omega_S \cos \omega_S t$ je parazitní část výstupu derivační složky.

Ze vztahu (5.33) vyplývá, že při vyšších úhlových kmitočtech ω_S, bude parazitní část převládat nad užitečnou částí a výstup z derivační složky může způsobit nesprávnou činnost nejen vlastního regulátoru, ale i celého regulačního obvodu. Z tohoto důvodu ideální derivační činnost je prakticky nepoužitelná. Pro snížení vlivu parazitní části se používá **vnitřní filtr** s přenosem

$$\frac{1}{\frac{T_D}{N}s+1}=\frac{1}{\alpha T_D s+1},\quad \alpha=\frac{1}{N}, \tag{5.34}$$

kde $N = 5 \div 20$, příp. $\alpha = 0{,}05 \div 0{,}2$ [2, 17, 22, 24 – 26, 29].

Úkolem vnitřního filtru je potlačit parazitní šum, který obsahuje především regulovaná veličina $y(t)$. Při hodnotách $\alpha \leq 0{,}1$ se zásadním způsobem neovlivní výsledné vlastnosti regulátoru, a proto se při seřizování regulátorů většinou neuvažuje. Vnitřní filtr (5.34) je v průmyslových regulátorech většinou přednastaven na hodnotu $\alpha = 0{,}1$ ($N = 10$) [2, 4, 22, 29].

Přenos regulátoru typu PID s vnitřním filtrem má tvar

$$G_C(s)=K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+\frac{T_D s}{\alpha T_D s+1}\right). \tag{5.35}$$

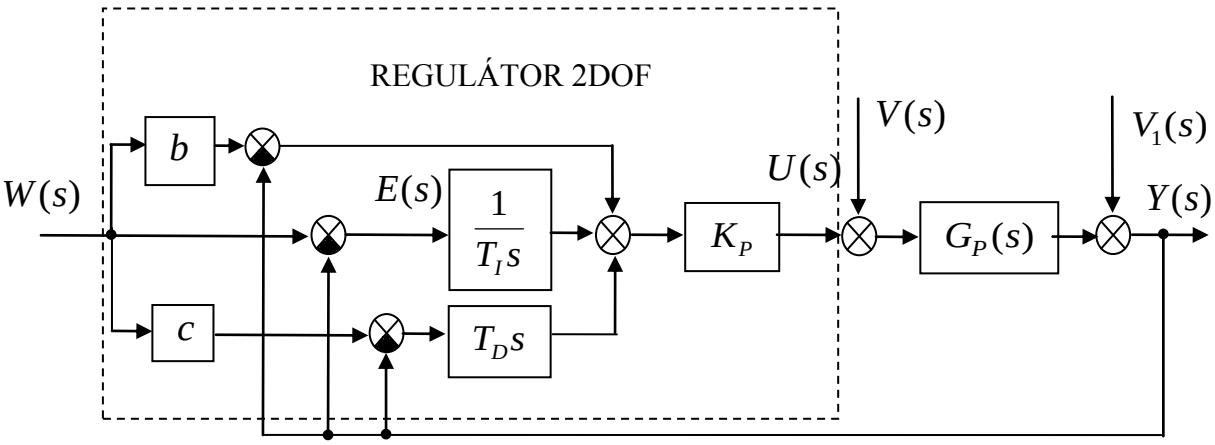
Konvenční regulátory uvedené v tab. 5.1 i s případným vnitřním filtrem (5.35) umožňují takové seřízení, které zajistí požadovaný regulační pochod pouze z hlediska žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v_1(t)$ působící na výstupu regulované soustavy.

Pokud porucha $v(t)$ působí na vstupu proporcionální regulované soustavy, většinou se volí kompromisní seřízení. Problémy nastávají, když regulovaná soustava má integrační charakter a kompromisní seřízení není možné [22, 25, 29, 30]. V tomto případě je vhodné použití regulátoru se dvěma stupni volnosti (2DOF).

Např. vlastnosti ideálního regulátoru PID 2DOF jsou nejčastěji popsány v tzv. ISA tvaru (obr. 5.4) [2, 22, 29]

$$U(s)=K_P\left\{bW(s)-Y(s)+\frac{1}{T_I s}[W(s)-Y(s)]+T_D s[cW(s)-Y(s)]\right\}, \tag{5.36}$$

kde b je váha žádané veličiny u proporcionální složky, c – váha žádané veličiny u derivační složky.



Obr. 5.4 Schéma regulačního obvodu s regulátorem PID 2DOF odpovídající vztahu (5.36)

Obě váhy se mohou měnit v rozmezích od 0 do 1. Pro $b = c = 1$ vztah (5.36) vyjadřuje rovnici konvenčního regulátoru PID s jedním stupněm volnosti (1DOF), viz vztah (5.26).

Vztah (5.36) můžeme upravit na tvar

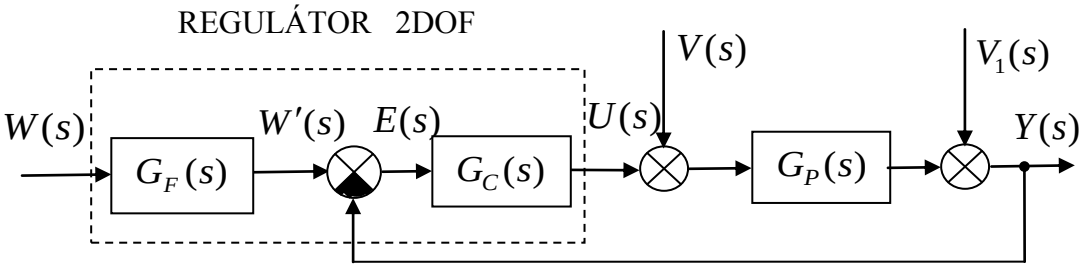
$$U(s) = G_F(s)G_C(s)W(s) - G_C(s)Y(s), \tag{5.37}$$

$$G_F(s) = \frac{cT_IT_Ds^2 + bT_Is + 1}{T_IT_Ds^2 + T_Is + 1}, \tag{5.38}$$

$$G_C(s) = K_P\frac{T_IT_Ds^2 + T_Is + 1}{T_Is} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_Is} + T_Ds\right), \tag{5.39}$$

kde $G_F(s)$ je přenos vstupního filtru, $G_C(s)$ – přenos konvenčního regulátoru PID (1DOF).

Vztahu (5.37) odpovídá schéma na obr. 5.5.



Obr. 5.5 Schéma regulačního obvodu s analogovým regulátorem 2DOF odpovídající vztahu (5.37)

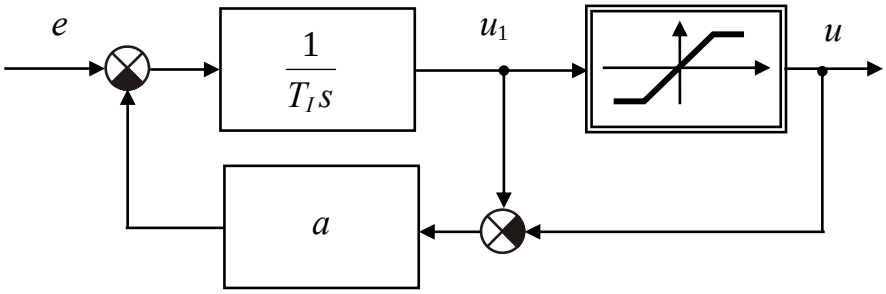
Z obr. 5.5 je zřejmé, že regulátor typu PID s přenosem $G_C(s)$ [(5.39)] se seřídí z hlediska rychlého potlačení negativního vlivu poruchové veličiny $v(t)$ a vhodnou volbou vah b a c se seřídí vstupní filtr s přenosem $G_F(s)$ [(5.38)] z hlediska změn žádané veličiny $w(t)$. Pro $b = c = 1 \Rightarrow G_F(s) = 1$ a regulační obvod na obr. 5.5 se chová jako regulační obvod s konvenčním regulátorem typu PID, tj. jako s regulátorem s jedním stupněm volnosti.

Velmi nepříjemným jevem při použití regulátoru s integrační složkou **při omezení akční veličiny**, tj. při existenci **nasycení**, je pokračující integrace, tzv. **windup**. Vysvětluje to obr. 5.6.

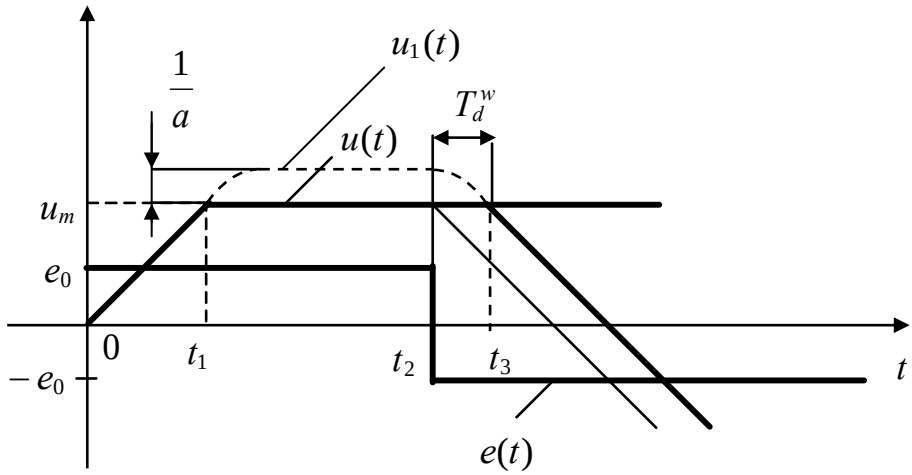
Protože v obrázku vystupují jak originály veličin, tak i jejich obrazy, proto jsou veličiny označeny malými písmeny bez uvedení nezávislých proměnných.

Opatření proti pokračující integraci se nazývá **antiwindup** a může být zrealizováno tak, jak je ukázáno na obr. 5.6a. Z obr. 5.6b vyplývá, že když $u_1(t)$ překročí hodnotu $u(t) = u_m$, projeví se záporná zpětná vazba (obr. 5.6a) a vstup integrátoru je zmenšován o veličinu $a[u_1(t) - u(t)]$ a to způsobí pokles růstu výstupní veličiny integrátoru $u_1(t)$. Průběhy $u_1(t)$ a $u(t)$ na obr. 5.6b ukazují, že implementací opatření antiwindup došlo k podstatnému snížení windup zpoždění T_d^w. Právě windup zpoždění T_d^w je příčinou existence velkých a dlouhotrvajících překmitů v regulačním obvodě, a tím i zhoršení kvality regulace. Hodnota a (obr. 5.6a) musí být dostatečně veliká, jak to vyplývá z obr. 5.6b.

a)

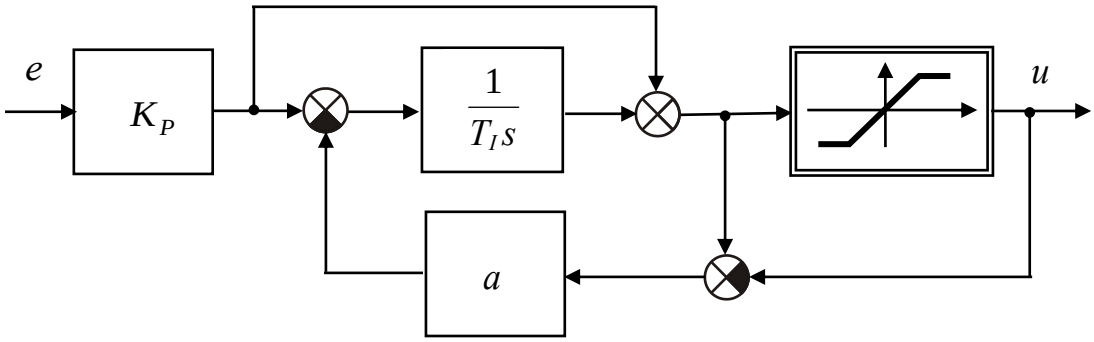


b)



Obr. 5.6 Regulátor I s opatřením antiwindup: a) schéma, b) průběhy veličin

Realizace regulátoru typu PI s opatřením antiwindup je na obr. 5.7.

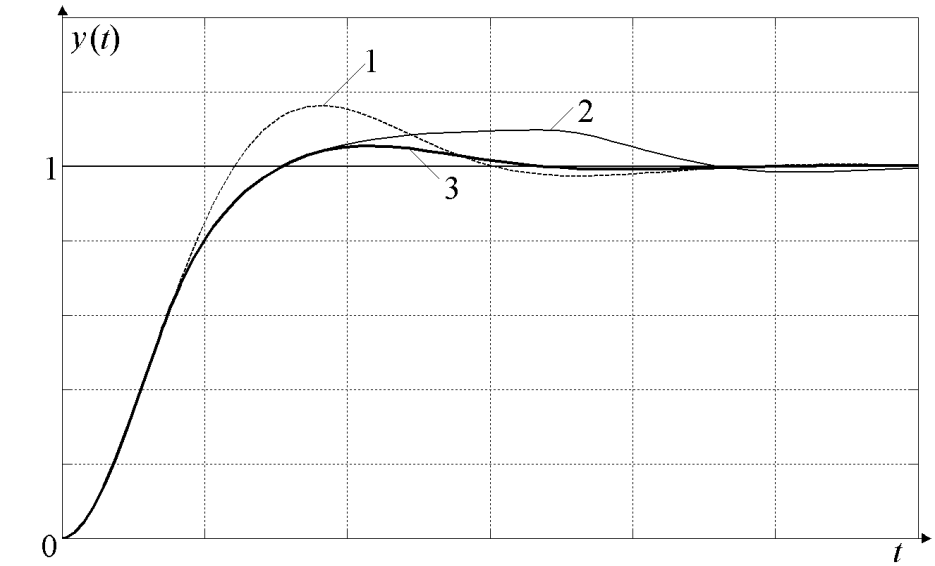


Obr. 5.7 Realizace regulátoru typu PI s opatřením antiwindup.

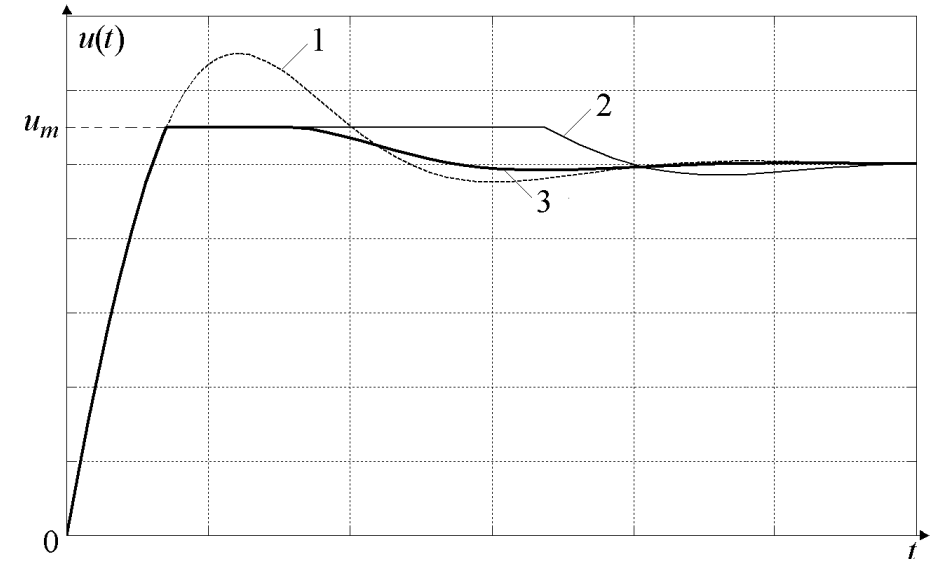
Na obr. 5.8 jsou ukázány průběhy regulované a akční veličiny v regulačním obvodu s regulátorem typu I v případě, že omezení akční veličiny nevystupuje (průběh 1) (lineární regulační obvod), omezení akční veličiny vystupuje, ale není použito opatření antiwindup (průběh 2) a omezení akční veličiny vystupuje a je použito opatření antiwindup (průběh 3). Z obr. 5.8 je zřejmé, že omezení akční veličiny způsobuje zpomalení odezvy. Omezení akční

veličiny má většinou stabilizující účinek, ale pokud není použito opatření antiwindup, podstatně snižuje kvalitu regulace.

a)



b)



Obr. 5.8 Průběhy regulované veličiny a) a akční veličiny b) v regulačním obvodu s regulátorem typu I: 1 – lineární, 2 – s omezením akční veličiny bez opatření antiwindup, 3 – s omezením akční veličiny a s opatřením antiwindup

Pokračující integrace – windup vystupuje především v analogových regulátorech. V číslicových regulátorech opatření antiwindup se jednoduše řeší zastavením integrace (sumace) při nasycení.

5.2 Stabilita

Stabilita (lineárního) regulačního obvodu je jeho schopnost ustálit všechny veličiny na konečných hodnotách, pokud se vstupní veličiny ustálí na konečných hodnotách. Vstupními veličinami u regulačního obvodu jsou žádaná veličina $w(t)$ a všechny poruchové veličiny, nejčastěji agregované do jediné poruchové veličiny $v(t)$ nebo $v_1(t)$.

Je zřejmé, že následující definice je ekvivalentní. ***Lineární regulační obvod je stabilní, když omezeným vstupům odpovídají omezené výstupy.*** Je to tzv. BIBO stabilita (**b**ounded-**i**nput **b**ounded-**o**utput).

Z obou definic vyplývá, že stabilita je charakteristická vlastnost daného regulačního obvodu, která nezávisí na konkrétních vstupech ani na konkrétních výstupech (pro nelineární regulační obvod to neplatí).

Vzhledem k tomu, že regulační obvod plně popisuje rovnice

$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) + G_{vy}(s)V(s) + G_{v_1y}(s)V_1(s) \tag{5.40a}$$

nebo rovnice

$$E(s) = G_{we}(s)W(s) + G_{ve}(s)V(s) + G_{v_1e}(s)V_1(s), \tag{5.40b}$$

je zřejmé, že stabilita musí být dána výrazem, který vystupuje ve všech základních přenosech, tj. přenosu řízení $G_{wy}(s)$ a přenosech poruch $G_{vy}(s)$ a $G_{v1y}(s)$ nebo odchylkovém přenosu řízení $G_{we}(s)$ a odchylkových přenosech poruch $G_{ve}(s)$ a $G_{v1e}(s)$. Ze vztahů na základní přenosy (5.3) – (5.5) a (5.11) – (5.13), vyplývá, že tímto výrazem je jejich jmenovatel

$$1 + G_C(s)G_P(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \frac{M_o(s)}{N_o(s)} = \frac{N_o(s) + M_o(s)}{N_o(s)} = \frac{N(s)}{N_o(s)}, \tag{5.41}$$

kde $G_o(s)$ je **přenos otevřeného** (rozpojeného) **regulačního obvodu** (obecně je dán součinem všech přenosů ve smyčce), $N_o(s)$ – charakteristický mnohočlen otevřeného regulačního obvodu (mnohočlen ve jmenovateli přenosu otevřeného regulačního obvodu), $M_o(s)$ – mnohočlen v čitateli přenosu otevřeného regulačního obvodu.

Mnohočlen

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) \tag{5.42}$$

se nazývá **charakteristický mnohočlen** regulačního obvodu a po jeho přirovnání nule se obdrží **charakteristická rovnice** regulačního obvodu

$$N(s) = 0. \tag{5.43}$$

Charakteristický mnohočlen (5.42) vystupuje u každého základního přenosu regulačního obvodu po úpravě ve jmenovateli, a tedy je to současně charakteristický mnohočlen příslušné diferenciální rovnice popisující regulační obvod.

Ukážeme si, že nutnou a postačující podmínkou stability lineárního regulačního obvodu je, aby kořeny s_1, s_2,..., s_n jeho charakteristického mnohočlenu (příp. její charakteristické rovnice)

$$N(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) \tag{5.44}$$

měly zápornou reálnou část, tj. (viz obr. 5.9)

$$\mathrm{Re}\, s_i < 0, \qquad \text{pro} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.45}$$

Podmínka zápornosti reálných částí (5.45) ***kořenů charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu*** (5.42) ***nebo ekvivalentně kořenů charakteristické rovnice regulačního obvodu*** (5.43) ***je nutnou a postačující podmínkou (asymptotické) stability daného regulačního obvodu***.

Protože pojem stabilita v nelineárních regulačních obvodech má poněkud jiný význam, je třeba, pokud by mohlo dojít k nedorozumění, stabilitu lineárních regulačních obvodů při splnění nutné a postačující podmínky nazývat asymptotickou stabilitou.

Je třeba si uvědomit, že komplexní kořeny vystupují vždy v komplexně sdružených dvojicích (tj. symetricky podle reálné osy v komplexní rovině s).

Dále je třeba si uvědomit, že kořeny s_1, s_2,..., s_n jsou současně póly všech základních přenosů (tj. přenosu řízení a poruchy a odchylkových přenosů řízení a poruchy, a tedy jsou to póly celého regulačního obvodu). Toto neplatí pro nuly základních přenosů. ***Póly regulačního obvodu jsou pro dynamické vlastnosti lineárního regulačního obvodu zásadní***.

Nyní si ukážeme, jak lze dojít k nutné a postačující podmínce stability regulačního obvodu (5.45).

Uvažujme libovolný základní přenos regulačního obvodu, např. přenos řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \tag{5.46}$$

a obraz žádané veličiny

$$W(s) = \frac{M_w(s)}{N_w(s)}, \tag{5.47}$$

kde $M(s)$, $M_w(s)$ a $N_w(s)$ jsou mnohočleny a $N(s)$ je charakteristický mnohočlen regulačního obvodu.

Za předpokladu, že charakteristický mnohočlen regulačního obvodu $N(s)$ má jednoduché kořeny s_1, s_2,..., s_n a mnohočlen $N_w(s)$ má jednoduché kořeny $s_1^w, s_2^w, \ldots, s_p^w$ [p je stupeň mnohočlenu $N_w(s)$], lze obraz regulované veličiny – odezvy

$$Y(s) = G_{wy}(s)W(s) = \frac{M(s)}{N(s)}\frac{M_w(s)}{N_w(s)} \tag{5.48}$$

zapsat ve tvaru součtu parciálních zlomků (viz příloha A)

$$Y(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - s_i}}_{Y_T(s)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \frac{B_j}{s - s_j^w}}_{Y_S(s)} = Y_T(s) + Y_S(s), \tag{5.49}$$

kde $Y_T(s)$ je obraz přechodné části odezvy, $Y_S(s)$ je obraz ustálené části odezvy.

Originál regulované veličiny $y(t)$ se získá z (5.49) pomocí zpětné Laplaceovy transformace

$$y(t) = y_T(t) + y_S(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \, \mathrm{e}^{s_i t} + \sum_{j=1}^{p} B_j \, \mathrm{e}^{s_j^w t}. \tag{5.50}$$

Konstanty A_i a B_j ve vztazích (5.49) a (5.50) obecně závisí na tvaru přenosu řízení $G_{wy}(s)$ a žádané veličiny $W(s)$, viz (5.46) a (5.47).

Průběh přechodné části regulované veličiny $y_T(t)$ závisí na kořenech charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu, tj. na jeho pólech a je dán vztahem

$$y_T(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \, \mathrm{e}^{s_i t}. \tag{5.51}$$

Průběh ustálené části regulované veličiny

$$y_S(t) = \sum_{j=1}^{p} B_j \, \mathrm{e}^{s_j^w t} \tag{5.52}$$

je dán průběhem žádané veličiny $w(t)$.

Zde se ustáleným průběhem rozumí obecná daná časová funkce, např. $y_S(t) = Bt$, $y_S(t) = B\sin\omega t$ atd. na rozdíl od ustáleného (klidového) stavu, např. $y_S(t) = y_S$ = konst.

Ze vztahu (5.50) vyplývá, že při omezené vstupní veličině – žádané veličině $w(t)$ ($\mathrm{Re}\, s_j^w < 0$ pro j = 1, 2,..., p) výstupní veličina – regulovaná veličina $y(t)$ bude omezena tehdy a jen tehdy, když bude omezena její přechodná část $y_T(t)$, tj. bude-li platit podmínka (5.45). Proto u stabilního regulačního obvodu musí s rostoucím časem t vymizet přechodná část odezvy, tj.

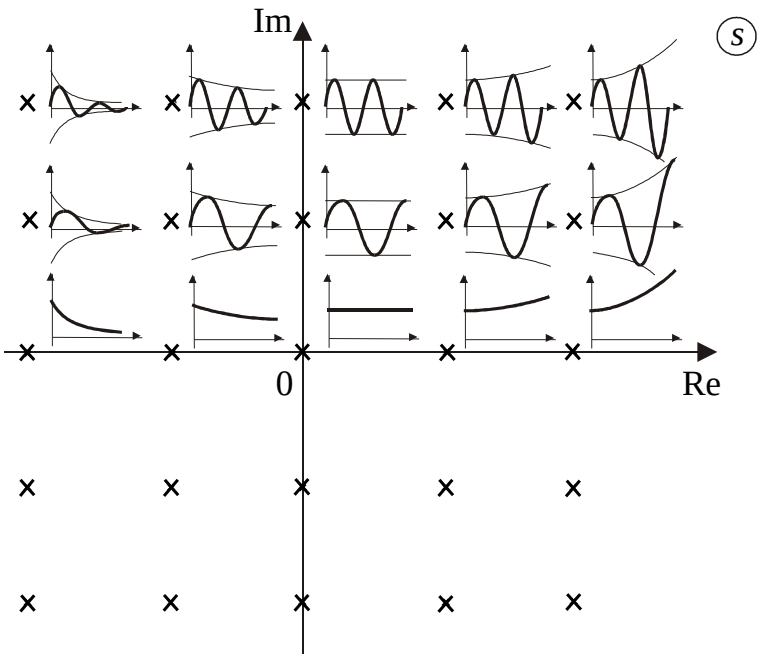
$$\lim_{t\to\infty} y_T(t) = 0\,, \tag{5.53}$$

a proto pro $t \to \infty$ platí

$$y(t) \to y_S(t)\,. \tag{5.54}$$

Z posledního vztahu vyplývá, že stabilita regulačního obvodu je jeho schopnost ustálit výstupní – regulovanou veličinu $y(t) \to y_S(t)$ při ustálené vstupní – žádané veličině $w(t) \to w_S(t)$.

U regulačního obvodu z cíle regulace $y(t) \to w(t)$ vyplývá samozřejmý požadavek $y_S(t) \to w_S(t)$.



Obr. 5.9 Vliv polohy pólů regulačního obvodu na průběh přechodné odezvy

Je zřejmé, že všechny závěry budou platit i pro násobné kořeny mnohočlenů $N(s)$ a $N_w(s)$ ve vztahu (5.48), protože přičtením zanedbatelně malých čísel k násobným kořenům se tyto změní na jednoduché a taková změna nemůže podstatně ovlivnit vlastnosti daného regulačního obvodu.

Vliv polohy pólů regulačního obvodu na průběh přechodné odezvy je názorně ukázán na obr. 5.9. Je třeba si uvědomit, že kmitavé odezvy způsobují komplexně sdružené dvojice pólů.

U regulačních obvodů s dopravním zpožděním má přenos otevřeného regulačního obvodu tvar [srovnej s (5.41)]

$$G_o(s) = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{5.55}$$

z něhož se dostane tzv. **charakteristický kvazimnohočlen** regulačního obvodu [srovnej s (5.42)]

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) \mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{5.56}$$

Charakteristický kvazimnohočlen (5.56) má nekonečně mnoho kořenů, tj. regulační obvod s dopravním zpožděním má nekonečně mnoho pólů, a proto ověřování splnění nutné a postačující podmínky stability (5.45) přímým výpočtem je nereálné.

Stabilita regulačního obvodu je nutnou podmínkou jeho správné činnosti. K jejímu ověření se používá celá řada nejrůznějších kritérií, která dovolují kontrolovat splnění nerovností (5.45) bez pracného výpočtu kořenů charakteristického mnohočlenu, resp. kvazimnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$.

Budou uvedena bez odvození tři kritéria stability: Hurwitzovo, Michajlovovo a Nyquistovo.

Hurwitzovo kritérium stability

Hurwitzovo kritérium stability je algebraické kritérium, a proto není vhodné pro regulační obvody s dopravním zpožděním (exponenciální funkce není algebraická). Může však být použito pro přibližné ověření stability v případě, že dopravní zpoždění se zastoupí jeho aproximací ve tvaru racionální lomené funkce, např. (3.54) nebo (3.55).

Hurwitzovo kritérium stability může být formulováno ve tvaru:

„Lineární regulační obvod s charakteristickým mnohočlenem

$$N(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$$

bude (asymptoticky) stabilní [tj. budou splněny nerovnosti (5.45)] tehdy a jen tehdy, když:

a) všechny koeficienty a_0, a_1,..., a_n existují a jsou kladné (je to **Stodolova nutná podmínka stability** zformulována slovenským technikem A. Stodolou),

b) hlavní rohové subdeterminanty (minory) Hurwitzovy matice

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{bmatrix}, \tag{5.57}$$

$$H_1 = a_{n-1}, \; H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; H_n = |\boldsymbol{H}|$$

jsou kladné.“

Protože platí $H_1 = a_{n-1}$, $H_n = a_0 H_{n-1}$, stačí kontrolovat kladnost pouze H_2, H_3, ..., H_{n-1}. Nulovost některého z Hurwitzových subdeterminantů označuje **mez stability**. Tak např. bude-li $a_0 = 0$, pak jeden pól je nulový (počátek souřadnic v komplexní rovině s). Tento případ charakterizuje **nekmitavou mez stability**. Když $H_{n-1} = 0$, pak dva póly jsou ryze imaginární (póly leží na imaginární ose souměrně podle počátku souřadnic v komplexní rovině s). V tomto případě jde o **kmitavou mez stability**, viz obr. 5.9.

V případě splnění Stodolovy nutné podmínky stability lze rovněž použít zjednodušené **Lineardovo-Chipartovo kritérium** spočívající v kontrole kladnosti všech lichých, nebo sudých Hurwitzových subdeterminantů.

Nevýhodou Hurwitzova kritéria stability je jeho výpočetní náročnost pro $n \geq 5$.

Michajlovovo kritérium stability

Michajlovovo kritérium stability je kmitočtové kritérium s velmi širokou oblastí využití. Zde bude ukázána jednoduchá formulace vhodná pro regulační obvody bez dopravního zpoždění.

Michajlovovo kritérium stability vychází z charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$, ze kterého se po dosazení $s = \mathrm{j}\omega$ dostane **Michajlovova funkce**

$$N(\mathrm{j}\omega) = N(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = N_P(\omega) + \mathrm{j}N_Q(\omega)\,, \tag{5.58}$$

kde

$$N_P(\omega) = \mathrm{Re}\,N(\mathrm{j}\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots \tag{5.59a}$$

je reálná část a

$$N_Q(\omega) = \mathrm{Im}\,N(\mathrm{j}\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots \tag{5.59b}$$

je imaginární část Michajlovovy funkce.

Její grafické vyjádření je **Michajlovova charakteristika** (křivka, hodograf).

Nyní již může být formulováno Michajlovovo kritérium ve tvaru:

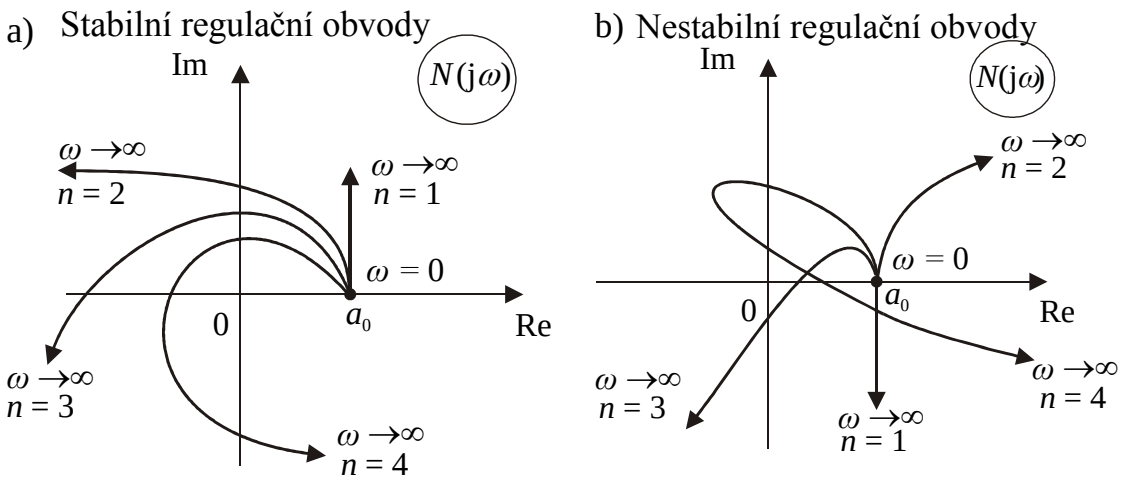
„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když jeho Michajlovova charakteristika $N(\mathrm{j}\omega)$ pro $0 \leq \omega \leq \infty$ začíná na kladné reálné poloose a postupně v kladném směru (proti pohybu hodinových ručiček) prochází n kvadranty."

Tuto formulaci lze zapsat vztahem pro změnu argumentu Michajlovovy funkce

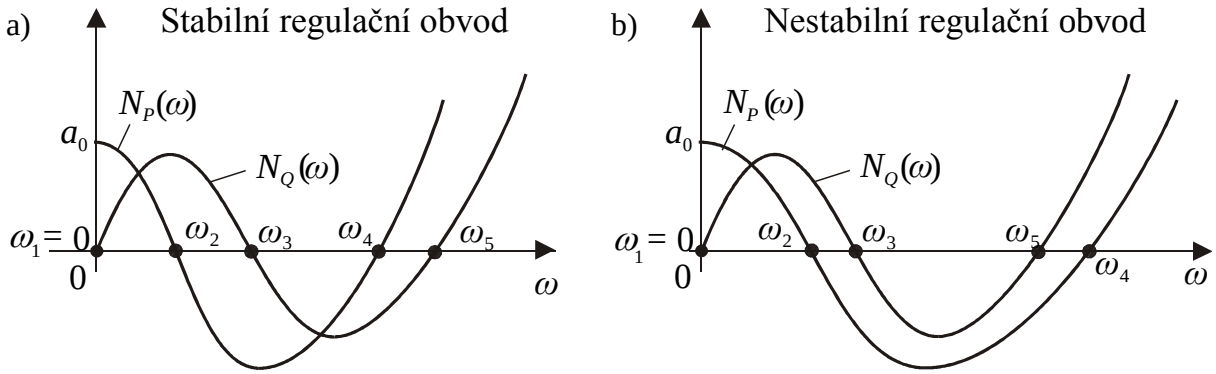
$$\Delta \underset{0\leq\omega\leq\infty}{\arg} N(\mathrm{j}\omega) = n\frac{\pi}{2}\,, \tag{5.60}$$

kde n je stupeň charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$.

Průběhy Michajlovových charakteristik pro stabilní regulační obvody jsou na obr. 5.10a a pro nestabilní regulační obvody na obr. 5.10b.



Obr. 5.10 Průběhy Michajlovových charakteristik pro regulační obvody:
a) stabilní, b) nestabilní



Obr. 5.11 Průběhy reálné $N_P(\omega)$ a imaginární $N_Q(\omega)$ části Michajlovovy charakteristiky pro $n = 5$ u regulačního obvodu: a) stabilního, b) nestabilního

Z průběhů Michajlovovy charakteristiky $N(\mathrm{j}\omega)$ pro stabilní regulační obvody na obr. 5.10a vyplývá, že pro $0 \le \omega \le \infty$ imaginární $N_Q(\omega)$ a reálná $N_P(\omega)$ část se postupně nulují [$N_Q(\omega)$ při průchodu reálnou osou a $N_P(\omega)$ při průchodu imaginární osou], a proto Michajlovovo kritérium stability lze formulovat v ekvivalentním tvaru (viz obr. 5.11):

„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když $N_P(0) = a_0 > 0$ a pro $0 \le \omega \le \infty$ kořeny $N_Q(\omega)$ a $N_P(\omega)$ se vzájemně střídají.“

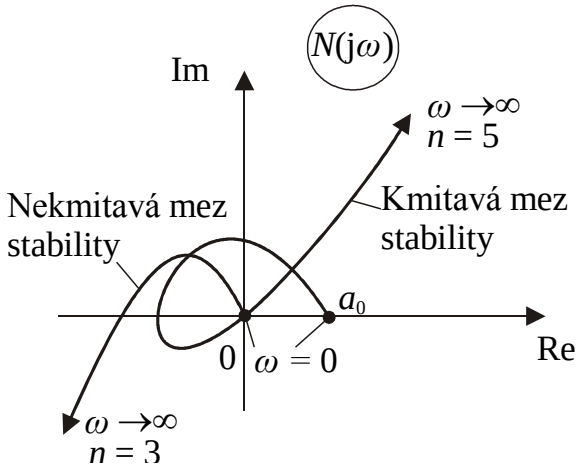
Výhodou této formulace je, že může být zapsána analyticky:

$$\left.\begin{aligned} N_P(\omega)\big|_{\omega=0} &= N_P(0) > 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,N_P(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{\mathrm{d}\,N_P(0)}{\mathrm{d}\,\omega} \le 0, \\ N_Q(\omega)\big|_{\omega=0} &= N_Q(0) = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,N_Q(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{\mathrm{d}\,N_Q(0)}{\mathrm{d}\,\omega} > 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

$$\left.\begin{aligned} &N_Q(\omega) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_1 = 0 < \omega_3 < \omega_5 < \ldots \\ &N_P(0) = a_0 > 0,\; N_P(\omega) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_2 < \omega_4 < \ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_1 = 0 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \ldots \tag{5.62}$$

Je zřejmé, že počet kořenů ω_i je roven stupni n charakteristického mnohočlenu regulačního obvodu $N(s)$.

Je-li regulační obvod na nekmitavé mezi stability, pak $N_P(0) = a_0 = 0$ a Michajlovova charakteristika vychází z počátku souřadnic. Naproti tomu, je-li $N_P(0) = a_0 > 0$ a Michajlovova charakteristika prochází počátkem souřadnic, pak jde o kmitavou mez stability, viz obr. 5.12. V tomto případě se současně nulují reálná $N_P(\omega)$ a imaginární $N_Q(\omega)$ část. Této vlastnosti Michajlovovy funkce (charakteristiky) lze s výhodou využít pro analytické určení **kritického úhlového kmitočtu** ω_C a dalšího kritického parametru, kterým nejčastěji je **kritické zesílení regulátoru** K_{Pc} nebo **kritická integrační časová konstanta regulátoru** T_{Ic}



Obr. 5.12 Průběhy Michajlovových charakteristik pro regulační obvody na mezi stability

Správně by se mělo hovořit o kritických hodnotách uvedených parametrů. Tyto kritické hodnoty uvedených parametrů způsobují, že regulační obvod je na mezi stability, čili v určitém kritickém stavu mezi stabilitou a nestabilitou. V tomto případě stačí nepatrná změna některé z těchto hodnot a regulační obvod bude stabilní, nebo nestabilní. Z tohoto důvodu při ověřování stability na základě různých aproximací je třeba vždy k výsledkům přistupovat velice opatrně.

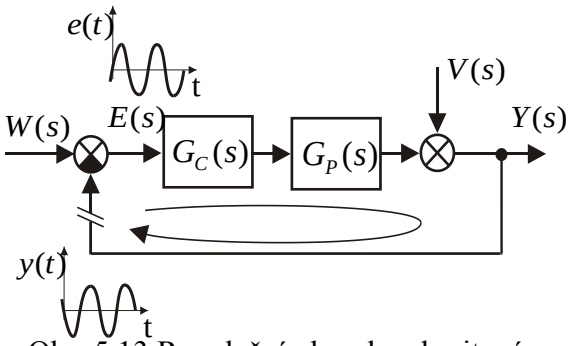
Geometrická formulace Michajlovova kritéria stability je vhodná v tom případě, kdy koeficienty charakteristického mnohočlenu jsou zadány číselně, jinak je vždy vhodnější formulace analytická.

Michajlovovo kritérium stability v uvedených dvou formulacích může být použito i pro přibližné ověření stability regulačních obvodů s dopravním zpožděním za předpokladu, že dopravní zpoždění bude aproximováno racionální lomenou funkcí, např. (3.54) nebo (3.55).

Nyquistovo kritérium stability

Nyquistovo kritérium stability je kmitočtové, a na rozdíl od Hurwitzova a Michajlovova kritéria vychází z vlastností otevřeného regulačního obvodu a je vhodné i pro regulační obvody s dopravním zpožděním. Může být dokonce rozšířeno i na některé nelineární regulační obvody.

Je uvažován regulační obvod na obr. 5.13, ze kterého vyplývá, že aby v něm vznikly kmity na mezi stability pro $W(s) = V(s) = 0$ a tyto kmity se udržely se stálou amplitudou a stálým úhlovým kmitočtem, musí průběh ve zpětné vazbě před sumačním uzlem být stejný ale opačného znaménka, než je průběh za sumačním uzlem. Lze to vyjádřit v obrazech



Obr. 5.13 Regulační obvod na kmitavé mezi stability

$$G_o(s) = -1 \Rightarrow G_o(\mathrm{j}\omega_C) = -1, \tag{5.63}$$

kde $G_o(s) = G_C(s)G_P(s)$ je přenos otevřeného regulačního obvodu, který obecně je dán součinem všech přenosů v hlavní a zpětnovazební větvi (tj. ve smyčce), ω_c – kritický úhlový kmitočet.

Je zřejmé, že k výše uvedenému závěru bylo možné dojít za předpokladu, že otevřený regulační obvod je stabilní (jinak by vznik a trvání stálých kmitů v regulační smyčce nebyl možný).

Vztah (5.63) vyjadřuje pro daný regulační obvod podmínku kmitavé meze stability. Lze k ní dojít i na základě stejných jmenovatelů všech základních přenosů [viz např. (5.3) – (5.5), a (5.11) – (5.13)], ve kterých vystupuje výraz $1 + G_o(s)$. Je zřejmé, že kritický stav vznikne, když uvedený výraz bude roven nule, což odpovídá (5.63).

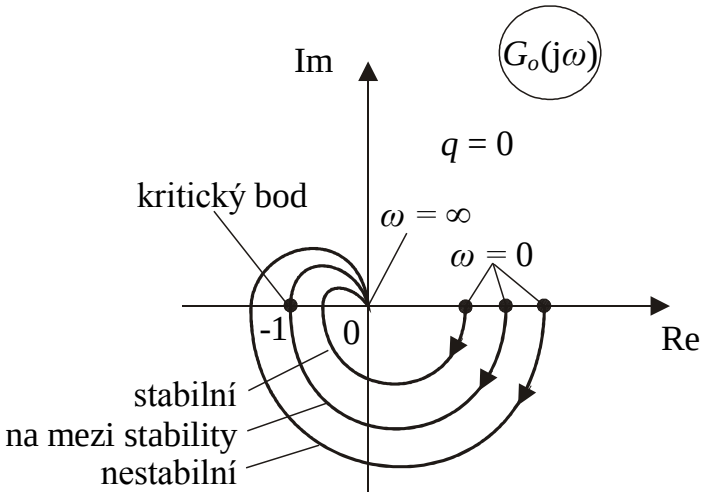
Vztah (5.63) vyjadřuje tu skutečnost, že je-li lineární regulační obvod na kmitavé mezi stability, pak amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilního otevřeného regulačního obvodu prochází bodem –1 na záporné reálné poloose.

Bod –1 na záporné reálné poloose se nazývá **kritický bod**.

Nyní lze již zformulovat Nyquistovo kritérium stability:

„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilního otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ pro $0 \le \omega \le \infty$ neobklopuje kritický bod –1 na záporné reálné poloose.“

Hlavní případy průběhů amplitudofázových kmitočtových charakteristik otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ vzhledem ke kritickému bodu (–1 + j0) ukazuje obr. 5.14. ***Integrační členy vystupující v hlavní a zpětnovazební větvi, tj. ve smyčce, se z hlediska Nyquistova kritéria stability nepovažují za nestabilní*** (jsou to v podstatě neutrální členy). Jejich počet se označuje písmenem q a nazývá se **typ regulačního obvodu**. V tomto případě pro rozhodnutí o tom, zda amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ obklopuje či neobklopuje kritický bod (–1 + j0), je třeba tuto charakteristiku spojit s kladnou reálnou poloosou kružnicí o nekonečně velikém poloměru (ukázáno čárkovaně), viz obr. 5.15.



Obr. 5.14 Průběhy amplitudofázových kmitočtových charakteristik stabilního otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ pro $q = 0$

Pokud amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ má průběh jak na obr. 5.15 pro $q = 2$, pak jde o **podmíněnou stabilitu**, kdy jak pokles, tak i vzrůst hodnoty $A_o(\omega)$ pro fázi $-\pi$ může způsobit nestabilitu regulačního obvodu.

Výše byla zformulována geometrická verze Nyquistova kritéria stability. Velmi užitečná může být i analytická verze, pro kterou je vhodné kromě kritického úhlového kmitočtu ω_c zavést ještě **úhlový kmitočet průchodu pro modul** ω_g definovaný vztahem (obr. 5.16)

$$A_o(\omega_g) = 1 \tag{5.64}$$

a **úhlový kmitočet průchodu pro fázi** ω_p definovaný vztahem (obr. 5.16)

$$\varphi_o(\omega_p) = -\pi\,. \tag{5.65}$$

Úhlový kmitočet ω_p lze rovněž určit ze vztahu

$$\mathrm{Im}G_o(\mathrm{j}\omega_p) = 0\,. \tag{5.66}$$

Pro kmitavou mez stability platí

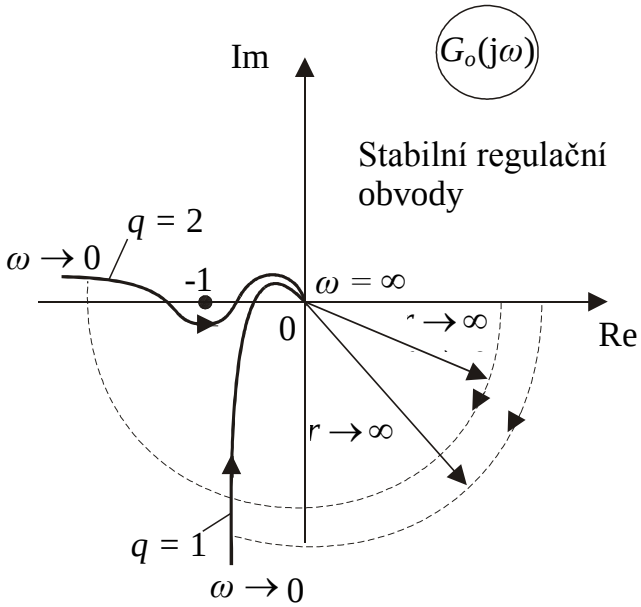
$$\omega_c = \omega_g = \omega_p\,. \tag{5.67}$$

Nyní již lze Nyquistovo kritérium stability analyticky zapsat v některém z ekvivalentních tvarů:

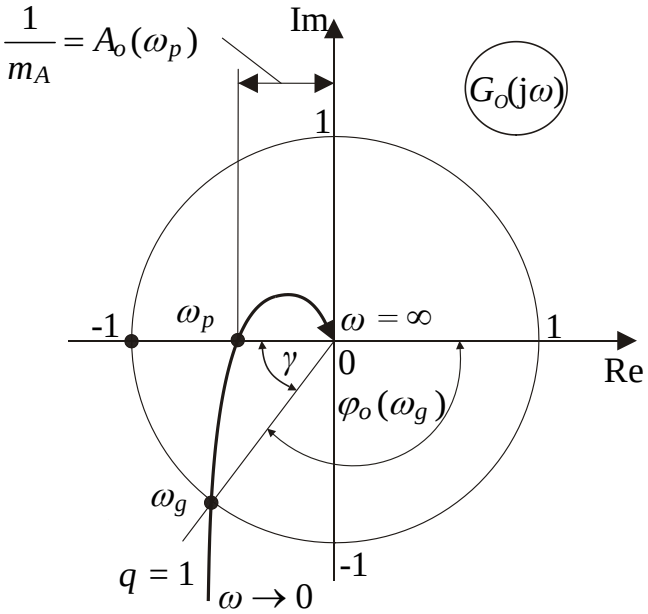
$$G_o(\mathrm{j}\omega_p) = \mathrm{Re}G_o(\mathrm{j}\omega_p) > -1, \tag{5.68}$$

$$A_o(\omega_p) < 1, \tag{5.69}$$

$$\varphi_o(\omega_g) > -\pi\,. \tag{5.70}$$



Obr. 5.15 Průběhy amplitudofázových kmitočtových charakteristik otevřeného regulačního obvodu $G_o(j\omega)$ pro $q = 1$ a $q = 2$



Obr. 5.16 Amplitudová m_A a fázová γ bezpečnost

Je zřejmé, že uvedené jednoduché formulace (5.68) – (5.70) platí pro nepodmíněně stabilní regulační obvody. Pro podmíněně stabilní regulační obvody je lze snadno rozšířit.

Pomocí úhlových kmitočtů ω_g a ω_p lze definovat další velmi důležité ukazatele (obr. 5.16):

amplitudovou bezpečnost (bezpečnost v amplitudě)

$$m_A = \frac{1}{A_o(\omega_p)} \tag{5.71}$$

a **fázovou bezpečnost** (bezpečnost ve fázi)

$$\gamma = \pi + \varphi_o(\omega_g)\,. \tag{5.72}$$

Amplitudová bezpečnost m_A vyjadřuje kolikrát lze zvýšit hodnotu $A_o(\omega_p)$ (kolikrát lze zvýšit hodnotu zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o), aby se regulační obvod dostal na mez stability. Podobně fázová bezpečnost γ vyjadřuje o kolik se může zvětšit fáze $\varphi_o(\omega_g)$ (v absolutní hodnotě), aby se regulační obvod dostal na mez stability.

Protože integrační činnost (složka) regulátoru vnáší do otevřeného regulačního obvodu zápornou fázi, tj. zmenšuje fázovou bezpečnost γ, proto ***integrační činnost regulátoru destabilizuje*** (zhoršuje stabilitu) ***regulační obvod***. Naproti tomu derivační činnost (složka) vnáší do otevřeného regulačního obvodu kladnou fázi, tj. zvyšuje fázovou bezpečnost γ, proto ***derivační činnost regulátoru stabilizuje*** (zlepšuje stabilitu) ***regulační obvod*** (samozřejmě při vhodné filtraci).

Pokud jde o proporcionální činnost regulátoru vyjádřenou jeho zesílením K_P, pak je zřejmé, že zvyšuje zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o a tím snižuje amplitudovou bezpečnost m_A, proto ***proporcionální činnost regulátoru destabilizuje regulační obvod***. Výjimku tvoří podmíněně stabilní regulační obvody.

Pro stabilitu regulačního obvodu je velmi nebezpečné dopravní zpoždění, jehož kmitočtový přenos má tvar

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{e}^{-T_d\,\mathrm{j}\omega} = A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\,, \tag{5.73a)}$$

$$A(\omega) = 1\,, \tag{5.73b}$$

$$\varphi(\omega) = -T_d\,\omega\,. \tag{5.73c}$$

Ze vztahů (5.73) je zřejmé, že dopravní zpoždění nemění modul [viz (5.73b)], ale lineárně s rostoucím úhlovým kmitočtem zvyšuje zápornou fázi [viz (5.73c)], tj. snižuje fázovou bezpečnost γ. Proto ***dopravní zpoždění vždy podstatně destabilizuje regulační obvod***.

Uvedené formulace Nyquistova kritéria stability platí pouze pro stabilní otevřené regulační obvody, a proto je třeba vždy nejdříve ověřit stabilitu otevřeného regulačního obvodu a teprve pak přistoupit k ověřování stability (uzavřeného) regulačního obvodu.

Místo dlouhého názvu amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného regulačního obvodu se používá kratší název **Nyquistova charakteristika** (křivka).

Nyquistovo kritérium pro nestabilní otevřené regulační obvody je formulováno takto:

„Lineární regulační obvod je (asymptoticky) stabilní tehdy a jen tehdy, když amplitudofázová kmitočtová charakteristika nestabilního otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ s p nestabilními póly pro $0 \le \omega \le \infty$ obklopí kritický bod –1 na záporné poloose v kladném směru (proti pohybu hodinových ručiček) $p/2$ krát (tj. $p\pi$)“.

Příklad 5.1

Charakteristický mnohočlen regulačního obvodu má tvar

$$N(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0\,.$$

Na základě Hurwitzova kritéria stability je třeba určit podmínky pro koeficienty a_0, a_1 a a_2 zajišťující stabilitu regulačního obvodu.

Řešení:

a) Z nutné Stodolovy podmínky vyplývá: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

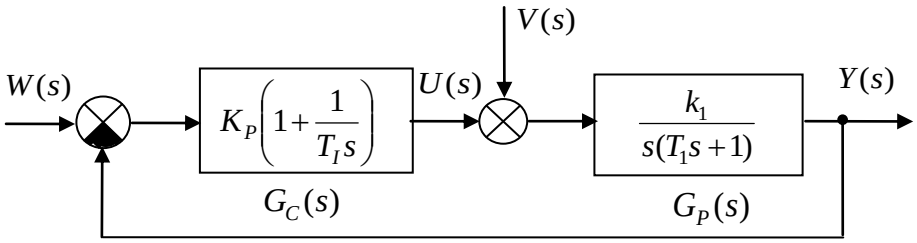
b) Hurwitzova matice pro $n = 2$ je

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Protože Hurwitzův subdeterminant $H_{n-1} = a_1 > 0$, je zřejmé, že pro charakteristický mnohočlen regulačního obvodu 2. stupně Stodolova podmínka existence a nezápornosti koeficientů $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ a $a_2 > 0$ je podmínkou nutnou a postačující pro (asymptotickou) stabilitu daného regulačního obvodu.

Příklad 5.2

U regulačního obvodu na obr. 5.17 je třeba pomocí Hurwitzova kritéria stability v rovině stavitelných parametrů (K_P,T_I) vyznačit stabilní oblast ($k_1 > 0$, $T_1 > 0$).



Obr. 5.17 Blokové schéma regulačního obvodu – příklad 5.2

Řešení:

V souladu s obr. 5.17 přenos otevřeného regulačního obvodu je dán vztahem

$$G_o(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{K_P k_1 (T_I s + 1)}{T_I s^2 (T_1 s + 1)} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}.$$

Nyní můžeme snadno určit charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = T_I T_1 s^3 + T_I s^2 + K_P k_1 T_I s + K_P k_1.$$

a) Z nutné Stodolovy podmínky vyplývá:

$$K_P > 0, \;\; T_I > 0.$$

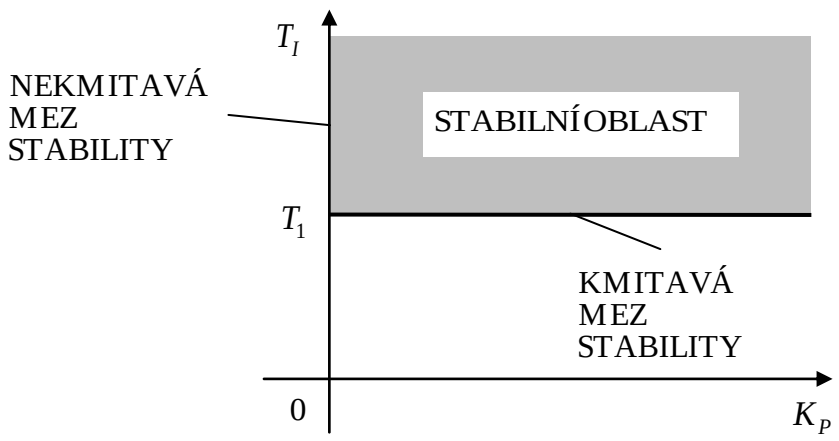
b) Hurwitzova matice pro $n = 3$ má tvar

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc:c} T_I & K_P k_1 & 0 \\ T_I T_1 & K_P k_1 T_I & 0 \\ \hdashline 0 & T_I & K_P k_1 \end{array}\right].$$

Stačí ověřit kladnost Hurtwitzova subdeterminantu

$$H_2 = \begin{vmatrix} T_I & K_P k_1 \\ T_I T_1 & K_P k_1 T_I \end{vmatrix} = K_P k_1 T_I (T_I - T_1) > 0 \;\Rightarrow T_I > T_1.$$

Stabilní oblast v rovině stavitelných parametrů (K_P,T_I) vymezuje poslední nerovnost $T_I > T_1$ a podmínka $K_P > 0$. Nekmitavá mez stability je určena rovností $K_P = 0$ a kmitavá mez stability je dána rovností $T_I = T_1$ (obr. 5.18).



Obr. 5.18 Stabilní oblast pro regulační obvod – příklad 5.2

Příklad 5.3

U regulačního obvodu na obr. 5.17 z příkladu 5.2 je třeba pomocí Michajlovova kritéria stability vyznačit v rovině stavitelných parametrů (K_P,T_I) stabilní oblast.

Řešení:

Charakteristický mnohočlen $N(s)$ byl již v příkladě 5.2 určen

$$N(s) = T_I T_1 s^3 + T_I s^2 + K_P k_1 T_I s + K_P k_1,$$

a proto Michajlovova funkce má tvar

$$N(\mathrm{j}\omega) = N(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = T_I T_1 (\mathrm{j}\omega)^3 + T_I (\mathrm{j}\omega)^2 + K_P k_1 T_I\ \mathrm{j}\omega + K_P k_1 =$$
$$= N_P(\omega) + \mathrm{j} N_Q(\omega),$$
$$N_P(\omega) = K_P k_1 - T_I \omega^2,$$
$$N_Q(\omega) = T_I (K_P k_1 - T_1 \omega^2)\omega.$$

V souladu s analytickou formulací Michajlovova kritéria stability (5.62) můžeme psát

$$T_I (K_P k_1 - T_1 \omega^2)\omega = 0 \;\Rightarrow\; \omega_1 = 0,\ \omega_3 = \sqrt{\frac{K_P k_1}{T_1}},$$

$$K_P k_1 - T_I \omega^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_2 = \sqrt{\frac{K_P k_1}{T_I}}.$$

Pro kořeny imaginární $N_Q(\omega)$ a reálné $N_P(\omega)$ části Michajlovovy funkce $N(\mathrm{j}\omega)$ musí platit nerovnosti

$$\omega_1 = 0 < \omega_2 = \sqrt{\frac{K_P k_1}{T_I}} < \omega_3 = \sqrt{\frac{K_P k_1}{T_1}},$$

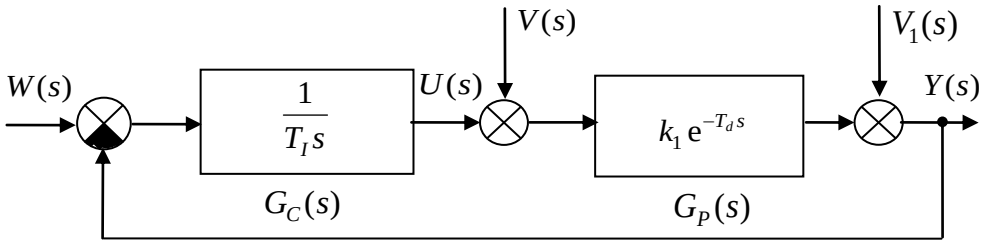
ze kterých se dostane

$$\sqrt{\frac{K_P k_1}{T_I}} < \sqrt{\frac{K_P k_1}{T_1}} \;\Rightarrow\; T_I > T_1.$$

Tato nerovnost spolu s nutnou Stodolovou podmínkou nezápornosti koeficientů charakteristického mnohočlenu $N(s)$, tj. $K_P > 0$ a $T_I > 0$ nám dá stejnou stabilní oblast jako v příkladě 5.2 (obr. 5.18).

Příklad 5.4

Pomocí Nyquistova kritéria stability je třeba určit hodnoty integrační časové konstanty T_I, pro které regulační obvod na obr. 5.19 bude (asymptoticky) stabilní ($k_1 > 0$).



Obr. 5.19 Blokové schéma regulačního obvodu – příklad 5.4

Řešení:

V souladu s obr. 5.19 přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{k_1}{T_I s}\mathrm{e}^{-T_d s}.$$

Otevřený regulační obvod obsahuje jeden integrační člen (regulátor), a proto z hlediska použití Nyquistova kritéria ho lze považovat za stabilní.

Kmitočtový přenos otevřeného regulačního obvodu je

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = G_o(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{k_1}{T_I\,\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-T_d\,\mathrm{j}\omega} = -\mathrm{j}\frac{k_1}{T_I\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}T_d\omega} = \frac{k_1}{T_I\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(T_d\omega+\frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= A_o(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_o(\omega)},$$

kde

$$A_o(\omega) = \frac{k_1}{T_I\omega}, \quad \varphi_o(\omega) = -\left(T_d\omega + \frac{\pi}{2}\right).$$

Pro úpravu výše uvedeného vztahu byla použita vlastnost

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}.$$

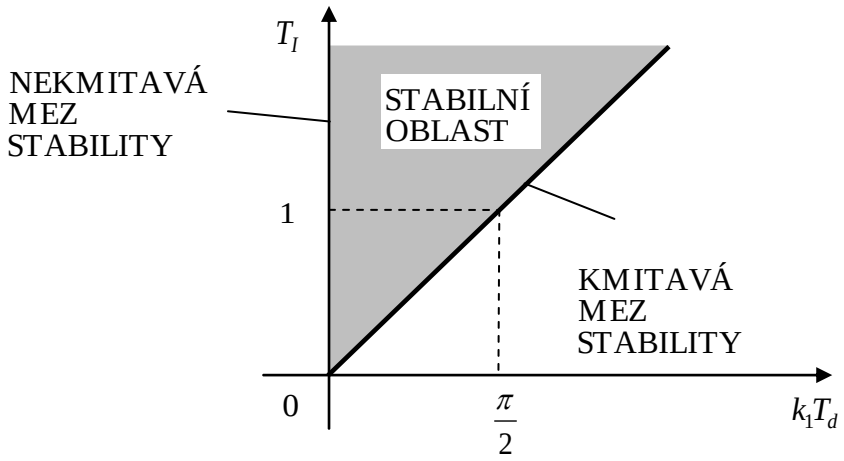
Aby uzavřený regulační obvod byl stabilní, musí platit [viz (5.69) a (5.65)]

$$\left.\begin{aligned} &A_o(\omega_p) < 1 \;\Rightarrow\; \frac{k_1}{T_I\omega_p} < 1 \\ &\varphi_o(\omega_p) = -\pi \;\Rightarrow\; -\left(T_d\omega_p + \frac{\pi}{2}\right) = -\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\omega_p = \frac{\pi}{2T_d}, \\ &T_I > \frac{2k_1T_d}{\pi}. \end{aligned}$$

Pro

$$T_I = \frac{2k_1T_d}{\pi}$$

dostaneme kmitavou mez stability, pro kterou platí $\omega_p = \omega_g = \omega_c$ (obr. 5.20)



Obr. 5.20 Stabilní oblast pro regulační obvod na obr. 5.19 – příklad 5.4

Příklad 5.5

Jsou dány přenosy

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s+1}$$

a

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s-1}.$$

Je třeba provést analýzu ideálního a reálného krácení dvojčlenů v uvedených přenosech.

Řešení:

V teorii automatické regulace se většinou místo pojmu krácení používá pojem **kompenzace**. V případě přenosu $G_1(s)$ jde o kompenzaci stabilního pólu $s_1 = -1$ stabilní nulou $s_1^0 = -1$ (kořeny čitatele = nuly, kořeny jmenovatele = póly). U přenosu $G_2(s)$ jde o kompenzaci nestabilního pólu $s_1 = 1$ nestabilní nulou $s_1^0 = 1$.

a) Ideální kompenzace

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s+1} = 1,$$
$$h_1(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_1(s)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \eta(t) = 1.$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s-1} = 1,$$
$$h_2(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_2(s)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \eta(t) = 1.$$

V případě ideální kompenzace dochází ke krácení stejných výrazů ve jmenovateli i čitateli, a proto přechodové charakteristiky $h_1(t)$ a $h_2(t)$ jsou shodné.

b) Reálná kompenzace (ε – malé číslo)

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+(1+\varepsilon)}{s+1} = \frac{s}{s+1} + \frac{1+\varepsilon}{s+1},$$

$$h_1(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_1(s)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1+\varepsilon}{s(s+1)}\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{-t} + (1+\varepsilon)(1-\mathrm{e}^{-t}) = 1+\varepsilon-\varepsilon\mathrm{e}^{-t}.$$

$$\lim_{t\to\infty} h_1(t) = 1+\varepsilon.$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-(1+\varepsilon)}{s-1} = \frac{s}{s-1} - \frac{1+\varepsilon}{s-1},$$

$$h_2(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_2(s)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1+\varepsilon}{s(s-1)}\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{t} + (1+\varepsilon)(1-\mathrm{e}^{t}) = 1+\varepsilon-\varepsilon\mathrm{e}^{t},$$

$$\lim_{t\to\infty} |h_2(t)| = \infty.$$

Při reálné kompenzaci stabilních dvojčlenů přechodová charakteristika se liší od přechodové charakteristiky při ideální kompenzaci nepatrně. Rozdílnost závisí na velikosti a znaménku malého čísla ε. Naproti tomu v případě reálné kompenzace nestabilních dvojčlenů má vždy přechodová charakteristika nestabilní průběh.

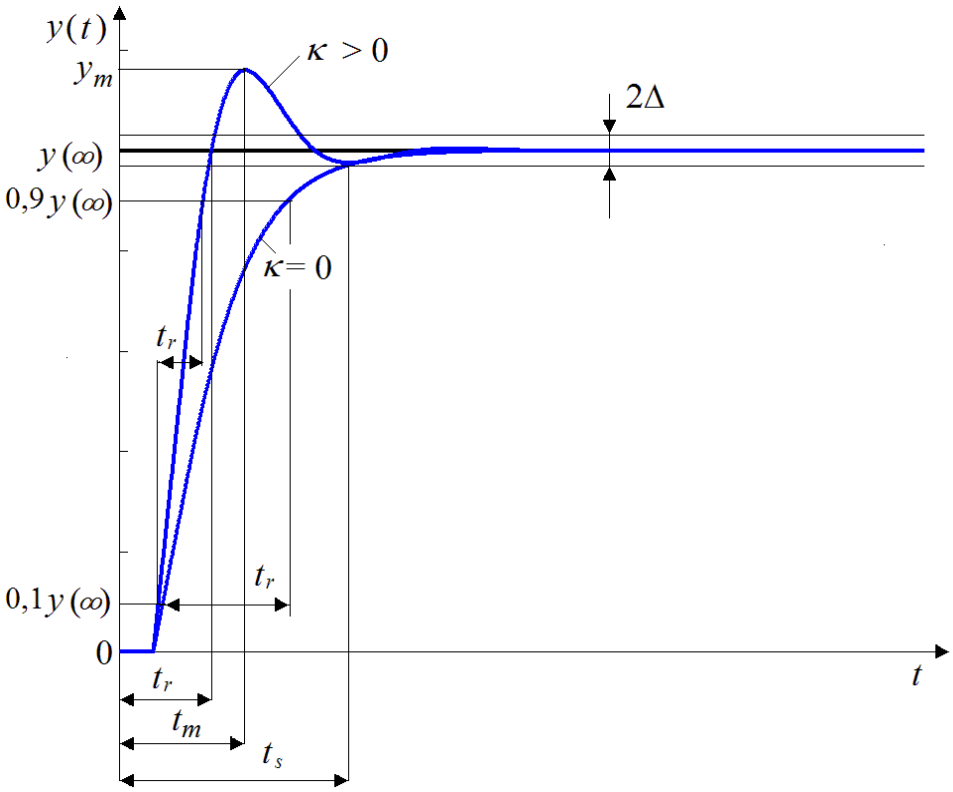
V přenosech nikdy není možné kompenzovat (krátit) výrazy obsahující nestabilní kořeny. Při kompenzaci nestabilních výrazů vznikají neřiditelné a nepozorovatelné módy (charakteristické průběhy), které způsobují nestabilitu.

6 SYNTÉZA REGULAČNÍCH OBVODŮ

6.1 Kvalita regulace

Nejjednodušeji se kvalita regulace posuzuje podle průběhů odezev regulačního obvodu na skokové změny vstupních veličin. V kapitole 5 bylo řečeno, že zajištěním vhodných vlastností regulačního obvodu vzhledem k žádané veličině $w(t)$ budou většinou zajištěny i jeho vlastnosti vzhledem k poruchovým veličinám $v(t)$ a $v_1(t)$. Pro konvenční regulátor 1DOF a pro poruchu $v_1(t)$ působící na výstupu soustavy to platí vždy.

Na obr. 6.1 je odezva regulačního obvodu (přechodová charakteristika) na skokovou změnu žádané veličiny $w(t)$.



Obr. 6.1 Přechodová charakteristika regulačního obvodu s vyznačenými ukazateli kvality

Pod pojmem přechodová charakteristika se zde rozumí odezva na skokovou změnu polohy, která nemusí být vždy jednotková.

Na obr. 6.1 jsou dva typické průběhy požadovaných přechodových charakteristik regulačního obvodu vyvolaných skokovou změnou žádané veličiny $w(t)$.

Z praktického hlediska jsou pro posouzení kvality regulace nejdůležitější dva ukazatele, a to **doba regulace** t_s (obr. 6.1) a **relativní překmit** (přeregulování)

$$\kappa = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)}, \qquad y_m = y(t_m), \tag{6.1}$$

kde y_m je maximální hodnota regulované veličiny při překmitu, t_m – doba dosažení maximální hodnoty y_m, $y(\infty)$ – ustálená hodnota regulované veličiny.

Doba regulace t_s je dána časem, kdy regulovaná veličina $y(t)$ vejde do pásma o šířce 2Δ, tj. $y(\infty) \pm \Delta$, kde **tolerance regulace** je dána vztahem

$$\Delta = \delta\, y(\infty), \quad \delta = 0{,}01 - 0{,}05 \qquad (1 - 5)\ \%. \tag{6.2}$$

Relativní tolerance regulace δ má nejčastěji hodnoty 0,05 nebo 0,02.

Relativní hodnoty (6.1) a (6.2) se uvádějí rovněž v procentech.

Při uvádění doby regulace t_s musí být vždy také uvedena hodnota relativní tolerance regulace δ. Pokud není uvedena, předpokládá se, že $\delta = 0{,}05$ (5 %).

Případ $\kappa = 0$ odpovídá nekmitavému (aperiodickému) regulačnímu pochodu, který je požadován u procesů, kde překmit by mohl způsobit nežádoucí účinky (jsou to především tepelné a chemické procesy, ale také pohyby robotů a manipulátorů apod.).

U nekmitavého regulačního pochodu se často požaduje, aby měl minimální dobu regulace t_s. Takový nekmitavý regulační pochod se nazývá mezní.

Pro $\kappa > 0$ bývá regulační pochod kmitavý a je rychlejší než nekmitavý pochod. Rychlost nárůstu regulované veličiny $y(t)$ se dá ocenit pomocí **rychlosti odezvy** t_r. Je to doba, za kterou regulovaná veličina $y(t)$ poprvé dosáhne ustálené hodnoty $y(\infty)$. Nejčastěji rychlost odezvy t_r je definována jako doba od dosažení hodnoty $0{,}1y(\infty)$ do dosažení hodnoty $0{,}9y(\infty)$. Takovým způsobem definovaný ukazatel rychlosti nárůstu regulované veličiny $y(t)$ je použitelný jak pro kmitavé, tak i nekmitavé regulační pochody a dokonce pro pochody s dopravním zpožděním.

Pro většinu procesů je vyhovující regulační pochod s relativním překmitem okolo 0,05 (5 %). Pokud se současně zajistí i minimální doba regulace t_s, pak takový regulační pochod je často považován za „prakticky optimální“. Používá se všude tam, kde malý překmit nevadí, příp. je žádoucí, např. u ručkových měřicích a zapisovacích přístrojů (v tomto případě umožňuje rychle interpolovat polohu ručičky při měření).

Protože soustava je vždy spojitá, proto se kvalita regulace posuzuje nejčastěji pro spojitý regulační obvod.

Pro komplexní zhodnocení kvality regulačního pochodu jsou velmi vhodná **integrální kritéria**.

Je zřejmé, že čím regulační plocha bude menší, tím vyšší bude kvalita regulace. Aby se nemuselo pracovat se dvěma průběhy $y(t)$ a $w(t)$, pracuje se pouze s regulační odchylkou $e(t) = w(t) - y(t)$ a předpokládá se, že $e(\infty) = 0$. Pokud $e(\infty) \neq 0$, pak ve všech vztazích na integrální kritéria je třeba místo $e(t)$ dosadit výraz $e(t) - e(\infty)$.

Lineární regulační plocha

$$I_{IE} = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.3a}$$

Kritérium lineární regulační plochy I_{IE} (IE = **i**ntegral of **e**rror) je nejjednodušší. Není vhodné pro kmitavé regulační pochody, protože $I_{IE} = 0$ pro regulační pochod na mezi kmitavé stability. Jeho největší výhodou je, že lze snadno určit, protože platí (viz příloha A)

$$I_{IE} = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.3b}$$

Absolutní regulační plocha

$$I_{IAE} = \int_0^\infty |e(t)| \, \mathrm{d}t \,. \tag{6.3c}$$

Kritérium absolutní regulační plochy I_{IAE} (IAE = **i**ntegral of **a**bsolute **e**rror) odstraňuje nevýhodu předchozího kritéria I_{IE}, a proto je použitelné jak pro nekmitavé, tak i kmitavé regulační pochody. Má však velmi nepříjemnou vlastnost, spočívající v tom, že v bodech, ve kterých $e(t)$ mění znaménko není definována derivace $\dot{e}(t)$, a proto hodnotu kritéria absolutní regulační plochy nelze vypočítat analyticky. Jeho hodnotu lze určit pouze simulací.

Kvadratická regulační plocha

$$I_{ISE} = \int_0^\infty e^2(t) \, \mathrm{d}t \,. \tag{6.3d}$$

Kritérium kvadratické regulační plochy I_{ISE} (ISE = **i**ntegral of **s**quared **e**rror) odstraňuje sice nedostatky obou předchozích integrálních kritérií I_{IE} a I_{IAE}, protože je použitelné i pro kmitavé regulační pochody a jeho hodnotu lze určit analyticky [průběh $e^2(t)$ je hladký], ale výsledný průběh regulované veličiny $y(t)$ je příliš kmitavý. Použití je vhodné v těch případech, kdy žádaná $w(t)$ nebo poruchová $v(t)$ veličina mají náhodný charakter.

Kritérium ITAE

$$I_{ITAE} = \int_0^\infty t|e(t)| \, \mathrm{d}t \,. \tag{6.3e}$$

Integrální kritérium I_{ITAE} (ITAE = **i**ntegral of **t**ime multiplied by **a**bsolute **e**rror) v sobě zahrnuje čas i regulační odchylku, a proto při jeho minimalizaci dochází současně k minimalizaci jak absolutní regulační plochy, tak i doby regulace t_S. Je to velmi oblíbené integrální kritérium, i když jeho hodnotu v případě kmitavých průběhů lze určit pouze simulačně.

Byla uvedena pouze nejdůležitější integrální kritéria. Jejich minimalizací se získají hodnoty stavitelných parametrů zvoleného regulátoru. Minimalizace může být prováděna i simulačně.

Důležitým ukazatelem kvality regulačního pochodu jsou **trvalé regulační odchylky** způsobené tzv. testovacími průběhy vstupních veličin, tj. skokem polohy, rychlosti a zrychlení.

Celková regulační odchylka je dána vztahem (5.10)

$$E(s) = E_w(s) + E_v(s) + E_{v_1}(s) \,,$$

kde

$$E_w(s) = G_{we}(s)W(s), \;\; E_v(s) = G_{ve}(s)V(s), \;\; E_{v_1}(s) = G_{v_1e}(s)V_1(s)$$

jsou dílčí odchylky způsobené odpovídajícími vstupními veličinami.

Protože platí [viz (5.11) a (5.13)]

$$G_{we}(s) = -G_{v_1e}(s) \,,$$

má smysl zabývat se pouze odchylkami způsobenými žádanou veličinou $w(t)$ a poruchovou veličinou $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy.

Testovací průběhy vstupních veličin jsou dány vztahy:

skok polohy

$$w(t) = w_0\eta(t) \mathrel{\hat{=}} W(s) = \frac{w_0}{s}, \quad v(t) = v_0\eta(t) \mathrel{\hat{=}} V(s) = \frac{v_0}{s}, \tag{6.4}$$

skok rychlosti

$$w(t) = w_1 t\eta(t) \mathrel{\hat{=}} W(s) = \frac{w_1}{s^2}, \quad v(t) = v_1 t\eta(t) \mathrel{\hat{=}} V(s) = \frac{v_1}{s^2}, \tag{6.5}$$

skok zrychlení

$$w(t) = \frac{1}{2} w_2 t^2\eta(t) \mathrel{\hat{=}} W(s) = \frac{w_2}{s^3}, \quad v(t) = \frac{1}{2} v_2 t^2\eta(t) \mathrel{\hat{=}} V(s) = \frac{v_2}{s^3}. \tag{6.6}$$

Na základě věty o koncové hodnotě trvalé regulační odchylky pro dané testovací průběhy jsou dány

$$e_w(\infty) = \lim_{t\to\infty} e_w(t) = \lim_{s\to 0} sE_w(s), \; e_v(\infty) = \lim_{t\to\infty} e_v(t) = \lim_{s\to 0} sE_v(s). \tag{6.7}$$

Z kmitočtového přenosu řízení (5.17) lze získat modul (amplitudu), resp. logaritmický modul regulačního obvodu, tj.

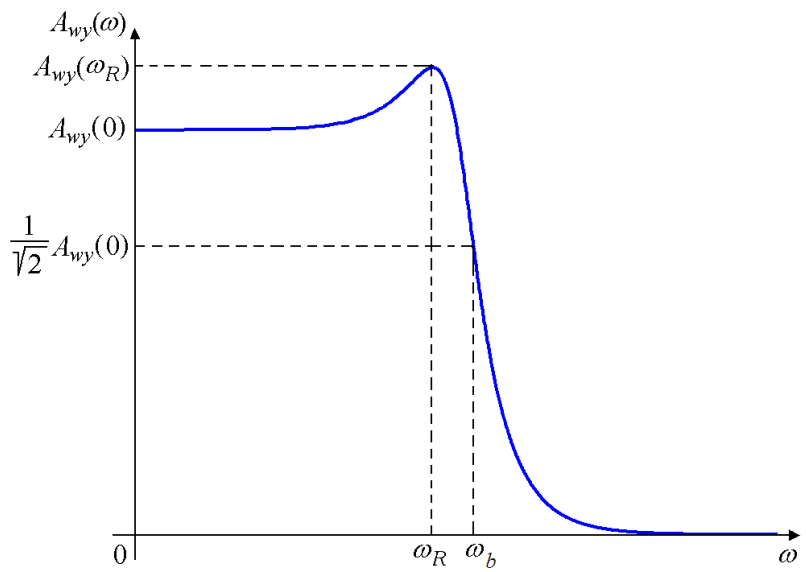
$$A_{wy}(\omega) = \operatorname{mod} G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = \left|G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\right|, \;\; \text{resp. } L_{wy}(\omega) = 20\log A_{wy}(\omega). \tag{6.8}$$

Typický průběh amplitudové kmitočtové charakteristiky regulačního obvodu $A_{wy}(\omega)$ je na obr. 6.2. Z jejího průběhu lze vyčíst ukazatele kvality: $A_{wy}(\omega_R)$ – **amplitudové rezonanční převýšení**, ω_R – **rezonanční úhlový kmitočet**, ω_b – **mezní** (hraniční) **úhlový kmitočet**.

Pro správně seřízený regulační obvod je doporučováno, aby platilo [2, 4, 9, 10, 22, 29]

$$A_{wy}(\omega_R) \le 1{,}1 - \mathbf{1{,}5}, \;\; \text{resp. } L_{wy}(\omega_R) \le (0{,}8 - \mathbf{3{,}5})\ \text{dB}. \tag{6.9}$$

Příliš vysoká hodnota amplitudového rezonančního převýšení dává velkou kmitavost a značný překmit.



Obr. 6.2 Amplitudová kmitočtová charakteristika regulačního obvodu

Mezní úhlový kmitočet ω_b určuje šířku pracovního pásma regulačního obvodu, tj. oblast pracovních úhlových kmitočtů. Čím je jeho hodnota vyšší, tím vyšší úhlové kmitočty dovede regulační obvod zpracovat. Jeho hodnota je dána poklesem modulu $A_{wy}(\omega)$ [$L_{wy}(\omega)$] na úroveň $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{wy}(0) \doteq 0{,}707A_{wy}(0)$ [$L_{wy}(0) - 3$ dB] a pokud vystupuje vysoké rezonanční převýšení $A_{wy}(\omega_R)$, pak vzrůstem modulu $A_{wy}(\omega)$ [$L_{wy}(\omega)$] na úroveň $\sqrt{2}A_{wy}(0) \doteq 1{,}414A_{wy}(0)$ [$L_{wy}(0) + 3$ dB].

Z průběhu amplitudové kmitočtové charakteristiky regulačního obvodu $A_{wy}(\omega)$ lze rovněž určit jeho typ q, protože platí

$$A_{wy}(0) = 1, \text{ resp. } L_{wy}(0) = 0 \;\Rightarrow\; q \geq 1, \tag{6.10}$$

$$A_{wy}(0) < 1, \text{ resp. } L_{wy}(0) < 0 \;\Rightarrow\; q = 0. \tag{6.11}$$

Určit přesně typ regulačního obvodu q lze z průběhu amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ pro $\omega \to 0$, viz obr. 5.15 a 5.16.

Úhlový kmitočet průchodu pro modul ω_g je definován vztahem

$$A_o(\omega_g) = 1 \tag{6.12}$$

a úhlový kmitočet průchodu pro fázi ω_p

$$\varphi_o(\omega_p) = -\pi\ , \tag{6.13}$$

kde

$$A_o(\omega) = \operatorname{mod} G_o(\mathrm{j}\omega) = |G_o(\mathrm{j}\omega)| \tag{6.14}$$

je modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu a

$$\varphi_o(\omega) = \arg G_o(\mathrm{j}\omega) \tag{6.15}$$

je fáze kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu.

Pro kmitavou mez stability platí

$$\omega_c = \omega_g = \omega_p\,, \tag{6.16}$$

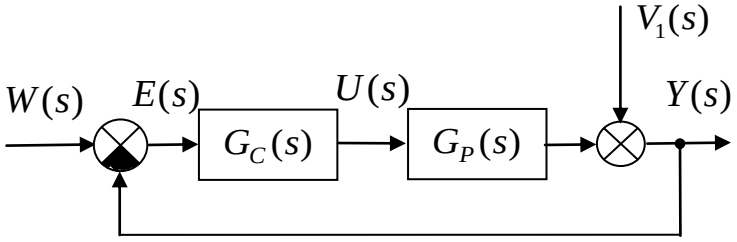
kde ω_c je kritický úhlový kmitočet.

Z amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ lze určit velmi důležité ukazatele kvality regulace, jako jsou amplitudová m_A a fázová γ bezpečnost (viz obr. 5.15 a 5.16). Pro běžné regulační obvody jsou doporučovány hodnoty

$$m_A = \mathbf{2} - 5, \text{ resp. } m_L = 20\log m_A = (\mathbf{6} - 14)\ \mathrm{dB}, \tag{6.17}$$

$$\gamma = \mathbf{30}° - 60° \quad \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} - \frac{\pi}{3}\right). \tag{6.18}$$

Hodnoty vyznačené tučně by v žádném případě neměly být překročeny [2, 4, 9, 10, 13, 22, 24, 29].



Obr. 6.3 Schéma regulačního obvodu

Kmitočtové přenosy $G_{wy}(\mathrm{j}\omega)$ a $G_{v_1y}(\mathrm{j}\omega)$ [viz obr. 6.3 a vztahy (5.3), (5.5)] mají pro teorii automatického řízení zásadní význam, a proto se také označují speciálními symboly $T(\mathrm{j}\omega)$ a $S(\mathrm{j}\omega)$ a mají také své názvy. Ze vztahu (5.5) vyplývá, že platí

$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega)+G_{v_1y}(\mathrm{j}\omega)=1 \;\Leftrightarrow\; T(\mathrm{j}\omega)+S(\mathrm{j}\omega)=1\,. \tag{6.19}$$

Funkce $S(\mathrm{j}\omega)$ se nazývá **funkce citlivosti** a funkce $T(\mathrm{j}\omega)$ **doplňková** (komplementární) **funkce citlivosti**.

Název funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ vyplývá z následujících úvah (obr. 6.3).

Ze vztahu

$$Y(\mathrm{j}\omega)=G_{wy}(\mathrm{j}\omega)W(\mathrm{j}\omega)=\frac{G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)}{1+G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)}W(\mathrm{j}\omega) \tag{6.20}$$

pro $W(\mathrm{j}\omega)$ = konst se dostane

$$\frac{\mathrm{d}Y(\mathrm{j}\omega)}{Y(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}\,, \tag{6.21}$$

tj. relativní změna regulované veličiny (jejího obrazu) je rovna relativní změně vlastností regulačního obvodu (jeho přenosu řízení). Podobně se odvodí z (6.20) vztah

$$\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}=\frac{1}{1+G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)}\left[\frac{\mathrm{d}G_C(\mathrm{j}\omega)}{G_C(\mathrm{j}\omega)}+\frac{\mathrm{d}G_P(\mathrm{j}\omega)}{G_P(\mathrm{j}\omega)}\right],$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}Y(\mathrm{j}\omega)}{Y(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}=S(\mathrm{j}\omega)\left[\frac{\mathrm{d}G_C(\mathrm{j}\omega)}{G_C(\mathrm{j}\omega)}+\frac{\mathrm{d}G_P(\mathrm{j}\omega)}{G_P(\mathrm{j}\omega)}\right], \tag{6.22}$$

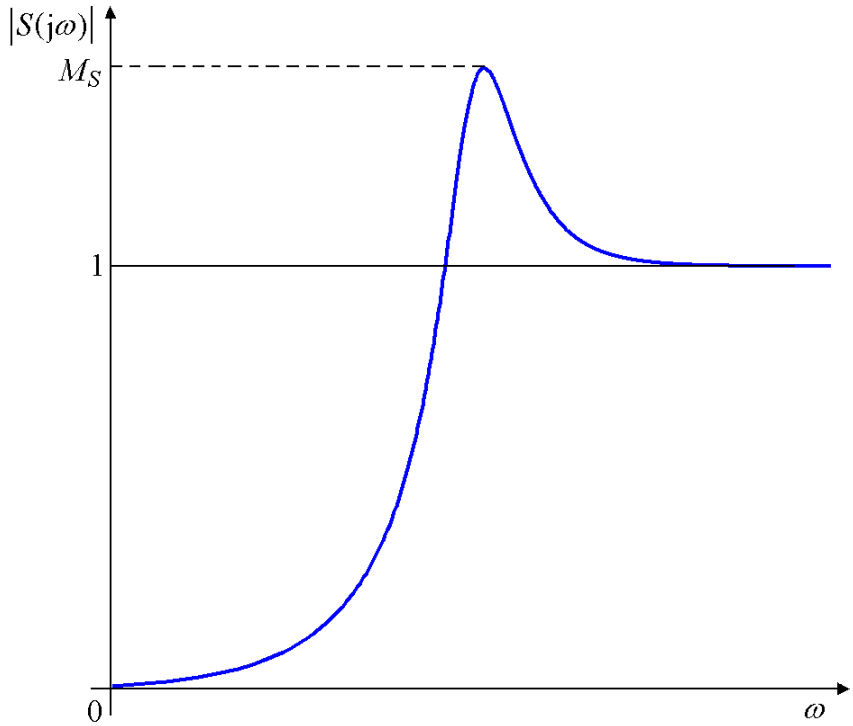
který vyjadřuje vliv relativních změn vlastností regulátoru (jeho přenosu) a regulované soustavy (jejího přenosu) na relativní změnu vlastností regulačního obvodu (jeho přenosu řízení), a tím i na relativní změnu regulované veličiny (jejího obrazu). Ze vztahu (6.22) je zřejmé, že tento vliv vyjadřuje právě funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$. Čím její hodnota bude nižší, tím nižší bude vliv relativních změn vlastností regulátoru a regulované soustavy na relativní změnu vlastností regulačního obvodu, a tedy i na relativní změnu regulované veličiny.

Funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ vyjadřuje tedy citlivost, resp. necitlivost regulačního obvodu k velmi malým, většinou blíže nespecifikovaným, změnám vlastností jeho členů.

Na obr. 6.4 je ukázán typický průběh modulu funkce citlivosti $|S(\mathrm{j}\omega)|=\mathrm{mod}\,S(\mathrm{j}\omega)$. Měřítko úhlového kmitočtu ω bývá nejčastěji logaritmické.

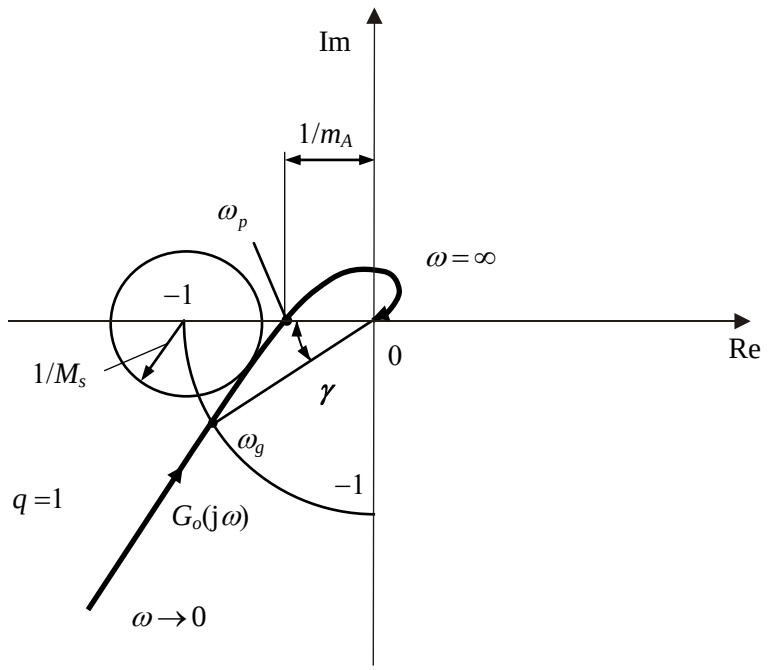
Velmi důležitou interpretaci má **maximální hodnota modulu funkce citlivosti**

$$M_S = \max_{0\le\omega<\infty}\left|S(\mathrm{j}\omega)\right| = \max_{0\le\omega<\infty}\left|\frac{1}{1+G_C(\mathrm{j}\omega)G_P(\mathrm{j}\omega)}\right|. \tag{6.23}$$



Obr. 6.4 Průběh modulu funkce citlivosti

Převrácená hodnota maxima modulu funkce citlivosti $1/M_S$ je vlastně nejkratší vzdálenost amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu (Nyquistovy charakteristiky) $G_o(\mathrm{j}\omega)$ od kritického bodu (–1 + 0j), viz obr. 6.5.



Obr. 6.5 Geometrická interpretace maxima modulu funkce citlivosti M_S

U správně seřízeného regulačního obvodu by neměla hodnota M_S překročit 2 a měla by být v rozmezí [2, 13, 22, 29]

$$1{,}4 \le M_S \le \mathbf{2}\,. \tag{6.24}$$

Maximum modulu funkce citlivosti M_S se dá využít pro odhady amplitudové a fázové bezpečnosti, protože platí

$$m_A > \frac{M_S}{M_S - 1}\,, \tag{6.25}$$

$$\gamma > 2\arcsin\frac{1}{2M_S}\,. \tag{6.26}$$

Maximum modulu funkce citlivosti M_S je komplexním ukazatelem kvality regulačního obvodu, protože ze vztahů (6.25) a (6.26) vyplývá, že pro $M_S \le 2$ zaručuje amplitudovou bezpečnost $m_A \ge 2$ a fázovou bezpečnost $\gamma > 29$ °. Podobně $M_S \le 1{,}4$ zaručuje $m_A \ge 3{,}5$ a $\gamma > 42$ °. Opačné tvrzení neplatí, tj. m_A a γ nezaručují odpovídající hodnotu M_S [2, 13].

Další velkou výhodou maxima modulu funkce citlivosti M_S je, že jeho pomocí lze vyjádřit sklony **sektorové nelinearity** (obr. 6.6)

$$\alpha = \frac{M_S}{M_S + 1} \le \frac{f(u_1)}{u_1} \le \frac{M_S}{M_S - 1} = \beta\,, \tag{6.27}$$

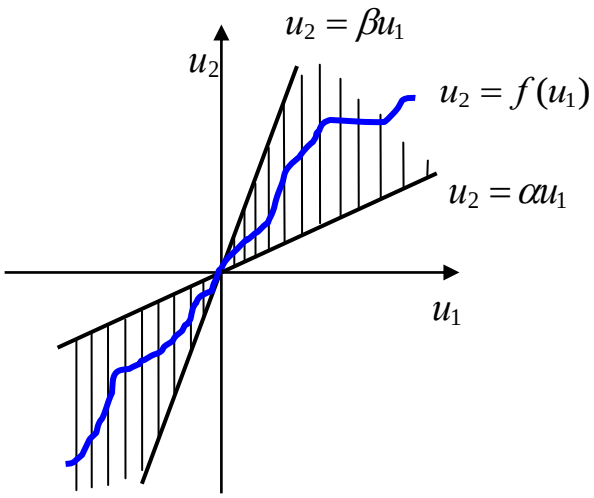
při které regulační obvod s nelinearitou (obr. 6.7) bude asymptoticky stabilní [2, 13].

V reálných regulačních obvodech totiž často vystupují nelinearity, případně časově proměnná zesílení. Tyto případy lze popsat sektorovou nelinearitou

$$u_2 = f(u_1), \quad f(0) = 0\,,$$

která prochází počátkem a je vymezena přímkami o sklonech α a β (obr. 6.6)

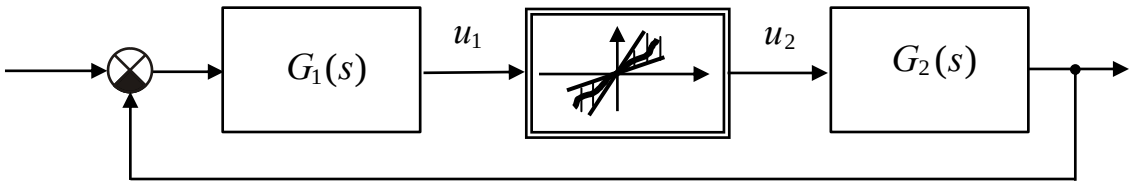
$$0 < \alpha u_1 \le f(u_1) \le \beta u_1 \;\Rightarrow\; 0 < \alpha \le \frac{f(u_1)}{u_1} \le \beta\,. \tag{6.28}$$



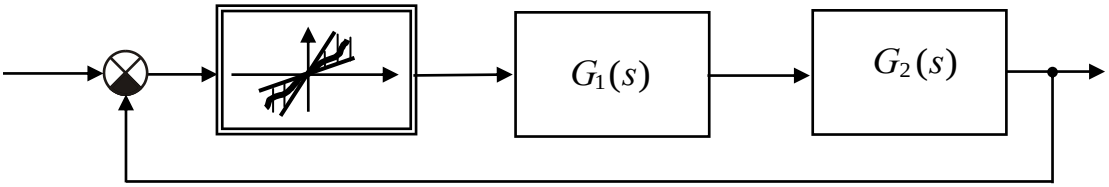
Obr. 6.6 Nelinearita vymezena přímkami o sklonech α a β

Většinou se jedná o nelineární akční člen, viz obr. 6.7a. Pro účely ověření stability, lze schéma na obr. 6.7a transformovat na schéma na obr. 6.7b.

a)



b)

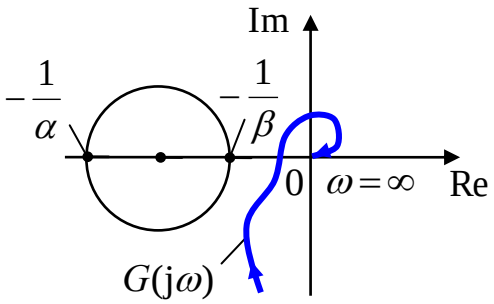


Obr. 6.7 Regulační obvod s nelinearitou: a) původní, b) upravený

Na základě **kruhového kritéria stability** regulační obvod s nelineární nebo časově proměnnou charakteristikou ležící v sektoru vymezeném přímkami o sklonech α a β je asymptoticky stabilní, pokud amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilní lineární části s přenosem

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \tag{6.29}$$

leží napravo od kružnice procházející body $-\frac{1}{\alpha}$ a $-\frac{1}{\beta}$ a se středem na záporné reálné poloose (obr. 6.8) [13].



Obr. 6.8 Geometrická interpretace kruhového kritéria

Pro $\alpha = \beta > 0$ a $G_o(s) = \alpha G(s)$ je zřejmé, že kruhové kritérium přejde na Nyquistovo kritérium pro stabilní otevřené regulační obvody.

Např. na základě (6.27) pro $M_S = 2$ se dostanou sklony přímek vymezující sektorovou nelinearitu $\alpha = 0{,}67$ a $\beta = 2$, podobně pro $M_S = 1{,}4$ se dostane $\alpha = 0{,}58$ a $\beta = 3{,}5$.

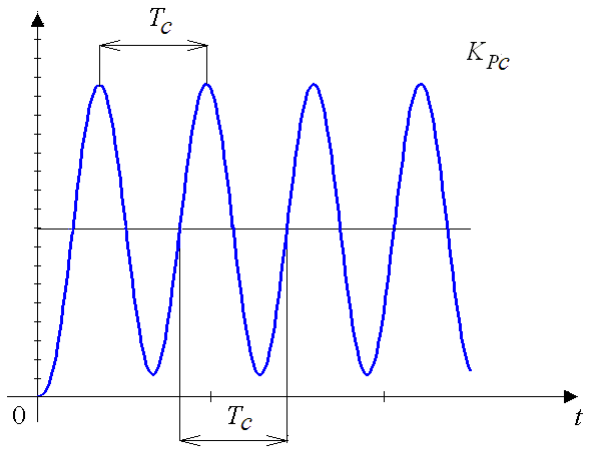
S citlivostí, resp. necitlivostí regulačního obvodu k velmi malým změnám vlastností jeho členů velmi úzce souvisí **robustnost** regulačního obvodu, která vyjadřuje schopnost regulačního obvodu plnit cíl regulace při větších, většinou kvantitativně definovaných, změnách vlastností jeho členů i při určitém poklesu kvality, ale vždy při zajištění stability. Např. maximum modulu funkce citlivosti M_S vymezuje sektor pro nelinearitu nebo časovou změnu zesílení, které nezpůsobí ztrátu stability, tj. M_S vyjadřuje určitým způsobem robustnost regulačního obvodu k dané nelinearitě nebo časovým změnám zesílení omezených sklony α a β.

6.2 Seřizování regulátorů

V současné době existuje obrovské množství nejrůznějších metod seřizování regulátorů [1 – 11, 13 – 15, 17, 19 – 31]. Zde budou uvedeny pouze některé, a to metody seřizování vycházející z vlastností uzavřeného regulačního obvodu (odstavce 6.2.1 – 6.2.4) a ze znalosti matematického modelu regulované soustavy (odstavce 6.2.5 – 6.2.10).

6.2.1 Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů

Zieglerova-**N**icholsova **m**etoda (ZNM) kritických parametrů (metoda uzavřeného regulačního obvodu) vychází ze skutečného regulačního obvodu, který se při vyřazené integrační činnosti ($T_I \to \infty$) a derivační činnosti ($T_D \to 0$) regulátoru zvyšováním jeho zesílení K_P přivede na kmitavou mez stability [2, 4, 17, 22, 29, 31].



Obr. 6.9 Určení kritické periody T_c

Pak z periodického průběhu libovolné veličiny regulačního obvodu se odečte kritická perioda T_c a z odpovídajícího nastavení analogového regulátoru – kritické zesílení K_{Pc}, viz obr. 6.9.

Hodnoty stavitelných parametrů zvoleného analogového regulátoru se vypočtou na základě tab. 6.1.

Pro regulátor typu P je amplitudová bezpečnost $m_A = 2$.

Destabilizující vliv integrační složky u analogového regulátoru PI se projevil snížením K_P^* oproti analogovému regulátoru P a stabilizující vliv derivační složky (při vhodné filtraci) u standardního analogového regulátoru PID se projevil zvýšením zesílení K_P^* (porovnej s tab. 6.4). Poměr T_D^*/T_I^* = 1/4.

Tab. 6.1 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu (ZNM) kritických parametrů

Regulátor	K_P^*	T_I^*	T_D^*
P	$0{,}5K_{Pc}$	–	–
PI	$0{,}45K_{Pc}$	$\frac{T_c}{1{,}2} \doteq 0{,}83T_c$	–
PID	$0{,}6K_{Pc}$	$0{,}5T_c$	$0{,}125T_c$

Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů je použitelná i pro analogové regulátory typu I. V tomto případě se regulační obvod přivede na kmitavou mez stability vhodným snížením integrační časové konstanty T_I. Při vystoupení kmitavé meze stability se z nastavení analogového regulátoru odečte kritická hodnota integrační časové konstanty T_{Ic} a pak se pro seřízení použije hodnota

$$T_I^* = 2T_{Ic}. \tag{6.30}$$

I v tomto případě je amplitudová bezpečnost $m_A = 2$.

Pokud je požadován nekmitavý regulační pochod, pak volíme

$$T_I^* = (4-6)T_{Ic} \tag{6.31}$$

s amplitudovou bezpečností $m_A = 4 - 6$ [22, 29].

Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů je výhodná především tím, že nepředpokládá žádnou znalost vlastností regulované soustavy a že pracuje s reálnou soustavou i regulátorem. Její zásadní vadou je, že musí přivést regulační obvod na mez kmitavé stability, tj. musí ho rozkmitat, což většina reálných soustav nedovoluje a dále, že se mohou výraznějším způsobem projevit jejich nelineární vlastnosti.

Její další vadou je, že je příliš agresivní, což vyplývá z požadavku na čtvrtinové tlumení, viz obr. 6.10. Reálný překmit po seřízení analogového regulátoru Ziglerovou-Nicholsovou metodou je od 10 % do 60 %, v průměru pro různé soustavy okolo 25 %. Seřízení Ziglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů bývá vhodné pro stabilizující regulaci v případě působení poruchové veličiny $v(t)$ na vstupu soustavy.

Postup:

1. U regulačního obvodu se zkontroluje celé zapojení a ověří se funkčnost všech jeho členů.
2. Nastaví se požadovaná hodnota žádané veličiny $w(t)$ a v ručním režimu se nastaví $y(t) \approx w(t)$, vyřadí se integrační složka ($T_I \to \infty$) a derivační složka ($T_D \to 0$), zesílení regulátoru K_P se sníží a regulátor se přepne do automatického režimu.
3. Zesílení regulátoru K_P se postupně zvyšuje tak dlouho, až při malé změně žádané veličiny $w(t)$ v regulačním obvodu vystoupí kmity se stejnou amplitudou, co odpovídá kmitavé mezi stability.
4. Z periodického průběhu libovolné veličiny regulačního obvodu se určí kritická perioda T_c a z nastavení regulátoru – kritické zesílení K_{Pc}.

5. Pro zvolený typ regulátoru se z tab. 6.1 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

6.2.2 Tyreusova-Lyubenova metoda kritických parametrů

Postup při seřizování konvenčních regulátorů je zcela shodný s Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů. Pro výpočet hodnot stavitelných parametrů regulátorů se použije tab. 6.2 [2, 17, 22, 29]. Ze srovnání tab. 6.1 a 6.2 vyplývá, že **T**yreusova-**L**yubenova **m**etoda (TLM) je velmi konzervativní.

Tab. 6.2 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro Tyreusovu-Luybenovu metodu (TLM) kritických parametrů

Regulátor	K_P^*	T_I^*	T_D^*
PI	$0{,}31K_{Pc}$	$2{,}2T_c$	–
PID	$0{,}45K_{Pc}$	$2{,}2T_c$	$\frac{T_c}{6{,}3} \doteq 0{,}16T_c$

6.2.3 Metoda čtvrtinového tlumení

Metoda **č**tvrtinového **t**lumení (MČT) je modifikací Zieglerovy-Nicholsovy metody kritických parametrů. Na rozdíl od této metody nepředpokládá rozkmitání regulačního obvodu, což umožňuje pracovat v lineární oblasti a použití u většího množství regulovaných soustav [22, 29].

Tab. 6.3 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro metodu čtvrtinového tlumení (MČT)

Regulátor	K_P^*	T_I^*	T_D^*
P	$K_{P1/4}$	–	–
PI	$0{,}9K_{P1/4}$	$T_{1/4}$	–
PID	$1{,}2K_{P1/4}$	$0{,}6T_{1/4}$	$0{,}15T_{1/4}$

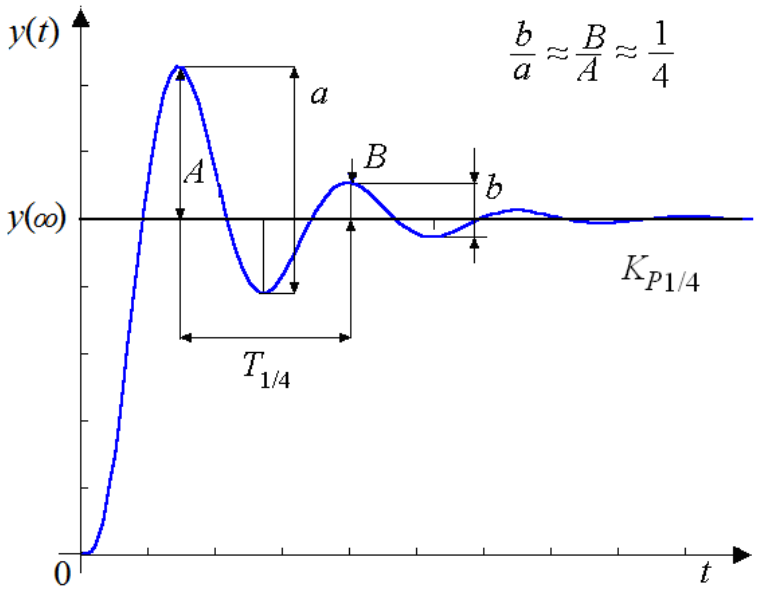
Postup:

1. a 2. Stejný postup jako u Zieglerovy-Nicholsovy metody kritických parametrů.

3. Zesílení regulátoru K_P se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ se obdrží přechodová charakteristika regulačního obvodu $y(t)$ taková, aby podíl dvou po sobě následujících amplitud byl roven 1/4 (tj. útlum = 4), viz obr. 6.10.

4. Z přechodové charakteristiky se odečte doba kmitu $T_{1/4}$ a z nastavení regulátoru jeho zesílení $K_{P1/4}$.

5. Pro zvolený typ regulátoru se z tab. 6.3 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.



Obr. 6.10 Seřízení regulačního obvodu na čtvrtinové tlumení

6.2.4 Metoda dobrého zesílení

Metoda **d**obrého **z**esílení (MDZ) – Good Gain Method je podobná Zieglerově-Nicholsově metody kritických parametrů a je popsána v [6, 29].

Postup:

1.a 2. Stejný postup jako u Zieglerovy-Nicholsovy metody kritických parametrů.

3. Zesílení regulátoru K_P se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ se dostane průběh s překmitem a pozorovatelným podkmitem (obr. 6.11). Tomuto průběhu odpovídá zesílení K_{PGG} (Good Gain). Skok žádané veličiny $w(t)$ nesmí v žádném případě způsobovat nelineární chování, tj. především nasycení.

4. Integrační časová konstanta se nastaví na hodnotu

$$T_I^* = 1{,}5T_{ou} \tag{6.32}$$

a zesílení regulátoru na hodnotu

$$K_P^* = 0{,}8K_{PGG}. \tag{6.33}$$

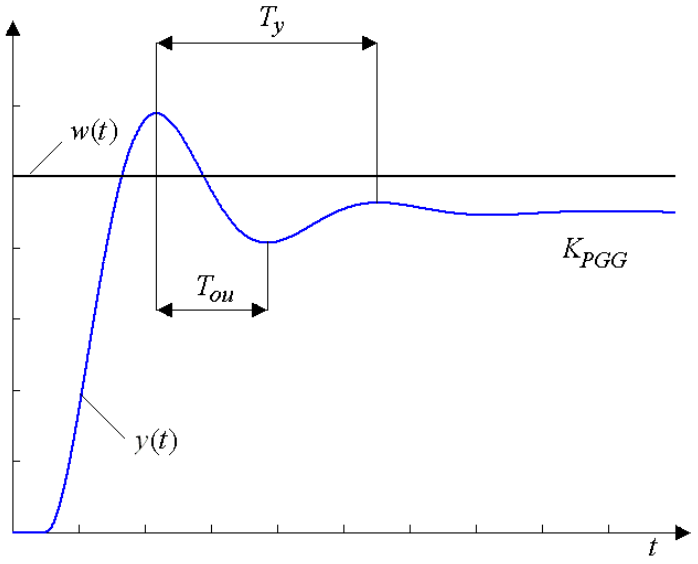
Doba T_{ou} (overshoot – překmit, undershoot – podkmit) se určí v souladu s obr. 6.11.

5. V případě použití derivační složky se derivační časová konstanta nastaví na hodnotu

$$T_D^* = 0{,}25T_I^*. \tag{6.34}$$

Pokud se nepříznivě projeví šumy nebo akční veličina $u(t)$ bude příliš aktivní, pak použití derivační složky není vhodné a znovu se vyřadí.

6. Konečný požadovaný průběh regulované veličiny $y(t)$ se získá doladěním zesílení regulátoru K_P, případně integrační časovou konstantou T_I.



Obr. 6.11 Experimentální seřizování metodou „dobrého zesílení“

Určitou výhodou metody dobrého zesílení je to, že při mírně kmitavém průběhu první podkmit se určí lépe než druhý překmit.

Metoda dobrého zesílení vychází z následujících úvah [6].

Předpokládá se, že uzavřený regulační obvod má vlastnosti, které můžeme vyjádřit přenosem řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}. \tag{6.35}$$

Při relativním tlumení $\xi_w = 0{,}6$ vznikne relativní překmit $\kappa \approx 0{,}1$ (10 %) a také je slabě pozorovatelný podkmit. Doba kmitu tohoto slabě kmitavého průběhu je

$$T_{GG} = \frac{2\pi T_w}{\sqrt{1-\xi_w^2}} = \frac{2\pi T_w}{0{,}8} = 2T_{ou}.$$

Regulační obvod s přenosem řízení (6.35) bude na kmitavé mezi stability pro $\xi_w = 0$ s kritickou periodou

$$T_c = 2\pi T_w.$$

Vztah mezi dobou T_{ou} tlumených kmitů pro metodu dobrého zesílení a periodou netlumených kmitů (kritickou periodou) T_c je

$$T_c = 0{,}8T_{GG} = 1{,}6T_{ou}.$$

Pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu kritických parametrů platí (viz tab. 6.1)

$$T_I = \frac{T_c}{1{,}2} = \frac{1{,}6T_{ou}}{1{,}2} = 1{,}33T_{ou}.$$

Seřízení Zieglerovou-Nicholsovou metodou je příliš agresivní, a proto se volí

$$T_I^* = 1{,}5T_{ou}.$$

V Zieglerově-Nicholsově metodě zesílení K_P u analogového regulátoru PI je 0,9 násobkem zesílení u analogového regulátoru P. Protože integrační složka destabilizuje regulační obvod, původní zesílení regulátoru K_{PGG} je třeba snížit, tj.

$$K_P^* = 0{,}8K_{PGG}.$$

Je zřejmé, že uvedená metoda je použitelná pouze pro soustavy, u kterých lze získat průběhy v souladu s obr. 6.11.

Příklad 6.1

Regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{1{,}5}{(4s+1)^3}$$

je třeba seřídit experimentálními metodami (časová konstanta je v sekundách):

a) Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů,

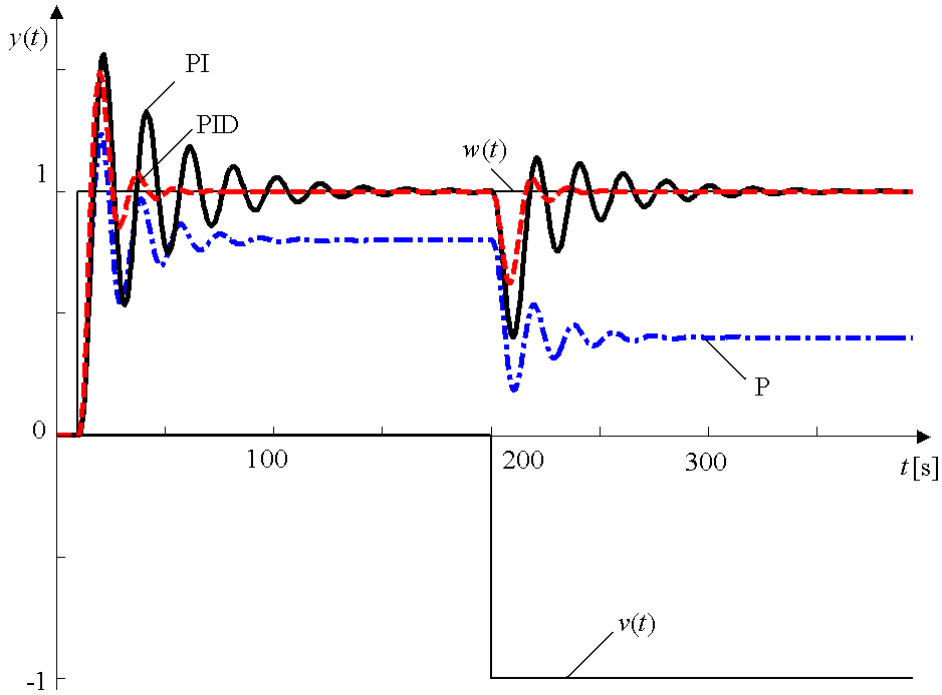
b) Tyreusovou-Luybenovou metodou kritických parametrů,

c) metodou čtvrtinového tlumení,

d) metodou dobrého zesílení.

Řešení:

a) Experimentální Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů



Obr. 6.12 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů – příklad 6.1

Po vyřazení integrační a derivační složky regulátoru postupným zvyšováním jeho zesílení K_P byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ získán periodický průběh na mezi kmitavé stability. Z analogového regulátoru bylo odečteno kritické zesílení K_{Pc} = 5,3

a kritická perioda $T_c = 14{,}5$ s. Na základě tab. 6.1 byly vypočteny hodnoty stavitelných parametrů:

P: $K_P^* = 0{,}5K_{Pc} = 2{,}65$;

PI: $K_P^* = 0{,}45K_{Pc} = 2{,}39$; $T_I^* = 0{,}83T_c = 12{,}04$ s;

PID: $K_P^* = 0{,}6K_{Pc} = 3{,}18$; $T_I^* = 0{,}5T_c = 7{,}25$ s; $T_D^* = 0{,}125T_c = 1{,}81$ s.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 6.12.

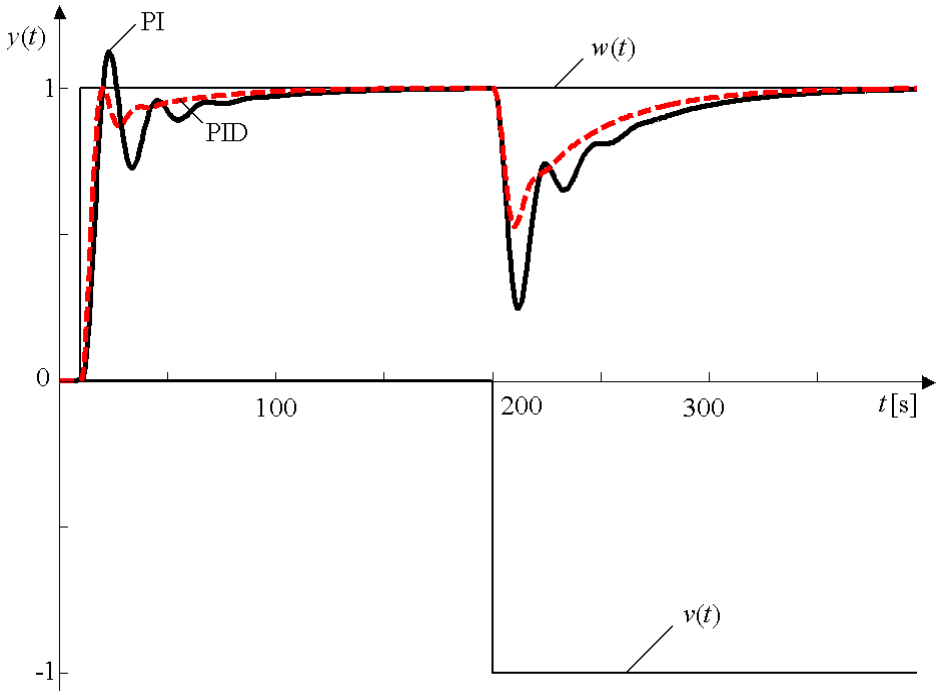
b) Experimentální Tyreusova-Luybenova metoda kritických parametrů

Pro hodnoty kritických parametrů $K_{Pc} = 5{,}3$ a $T_c = 14{,}5$ získané v předchozím bodě a) na základě tab. 6.2 se dostane:

PI: $K_P^* = 0{,}31K_{Pc} = 1{,}64$; $T_I^* = 2{,}2T_c = 31{,}9$ s;

PID: $K_P^* = 0{,}45K_{Pc} = 2{,}39$; $T_I^* = 2{,}2T_c = 31{,}9$ s; $T_D^* = 0{,}16T_c = 2{,}32$ s.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 6.13.



Obr. 6.13 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením Tyreusovou-Luybenovou metodou kritických parametrů – příklad 6.1

c) Experimentální metoda čtvrtinového tlumení

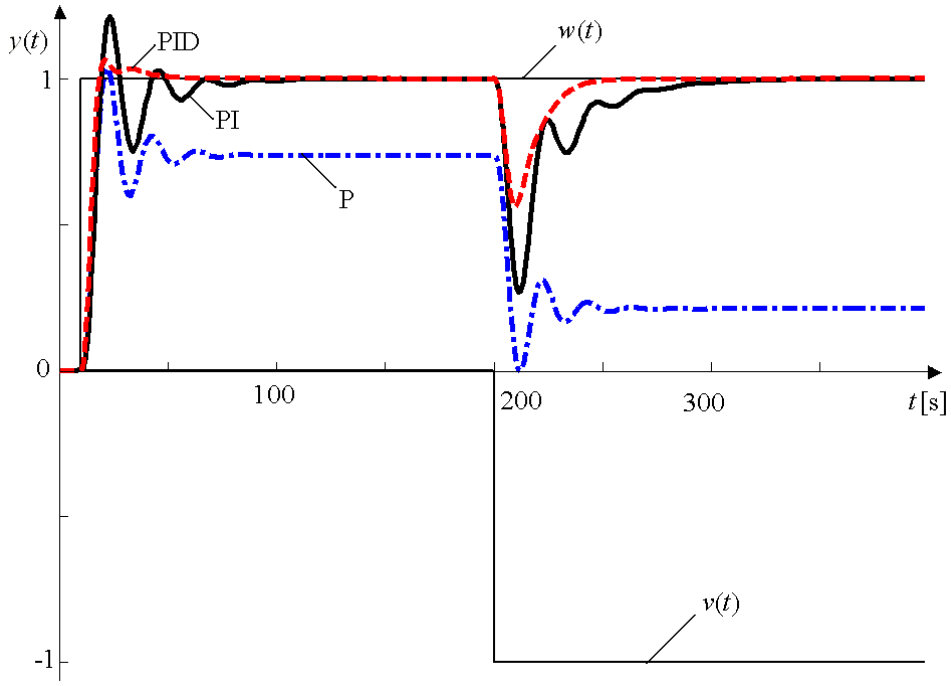
Po vyřazení integrační a derivační složky postupným zvyšováním zesílení regulátoru K_P byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ získán kmitavý průběh regulované veličiny $y(t)$ s poměrem $B/A \approx 1/4$ (obr. 6.10). Z analogového regulátoru bylo odečteno zesílení $K_{P1/4} = 1{,}9$ a perioda $T_{1/4} = 20{,}5$ s. Na základě tab. 6.3 byly vypočteny hodnoty stavitelných parametrů:

P: $K_P^* = K_{P1/4} = 1{,}9$;

PI: $K_P^* = 0{,}9K_{P1/4} = 1{,}71$; $T_I^* = T_{1/4} = 20{,}5\,\text{s}$;

PID: $K_P^* = 1{,}2K_{P1/4} = 2{,}28$; $T_I^* = 0{,}6T_{1/4} = 12{,}3\,\text{s}$; $T_D^* = 0{,}15T_{1/4} = 3{,}08\,\text{s}$.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 6.14.



Obr. 6.14 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením metodou čtvrtinového tlumení – příklad 6.1

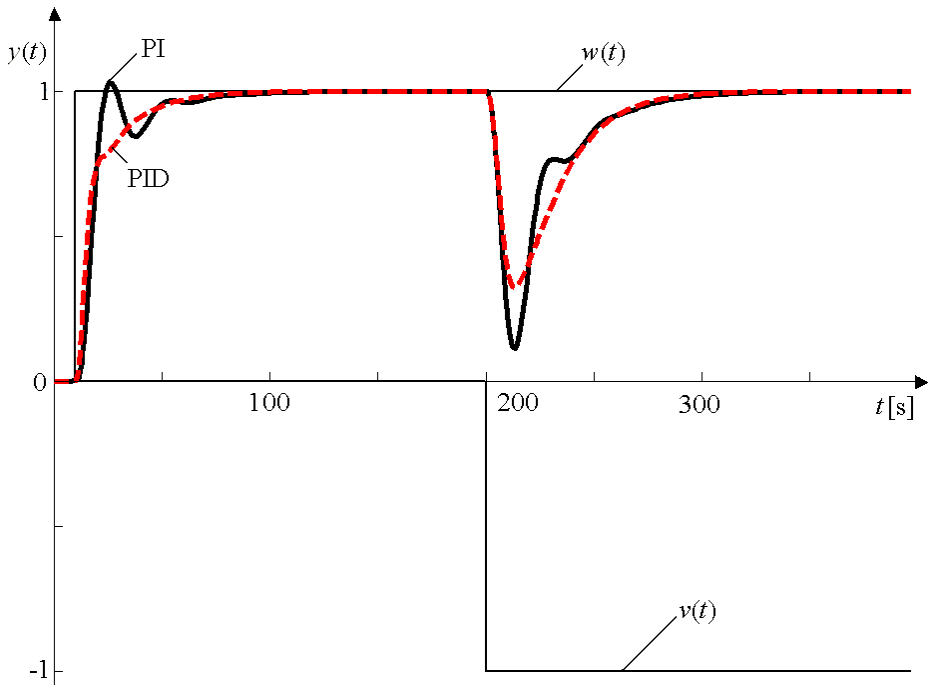
d) Metoda dobrého zesílení

Po vyřazení integrační a derivační složky postupným zvyšováním zesílení regulátoru K_P byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ v souladu s obr. 6.11 získán kmitavý průběh regulované veličiny $y(t)$, ze kterého byla určena doba T_{ou} = 11,6 s a z analogového regulátoru bylo odečteno zesílení K_{PGG} = 1,5. Hodnoty stavitelných parametrů byly určeny na základě vztahů (6.32) – (6.34):

PI: $K_P^* = 0{,}8K_{PGG} = 1{,}2$; $T_I^* = 1{,}5T_{ou} = 17{,}6\,\text{s}$;

PID: $K_P^* = 0{,}8K_{PGG} = 1{,}2$; $T_I^* = 1{,}5T_{ou} = 17{,}6\,\text{s}$; $T_D^* = 0{,}25T_I^* = 4{,}4\,\text{s}$.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 6.15.



Obr. 6.15 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením metodou „dobrého zesílení“ – příklad 6.1

Přesto, že na základě jedné soustavy nelze objektivně zhodnotit uvedené experimentální metody, je zřejmé, že Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů dává kmitavý regulační pochod s velkými překmity – seřízení je příliš agresivní. Obecně nezajišťuje stabilitu. Tyreusova-Luybenova metoda kritických parametrů je méně agresivní než Zieglerova-Nicholsova metoda. Velkou nevýhodou obou metod je nutnost přivedení regulačního obvodu na kmitavou mez stability, což u většiny reálných regulačních obvodů není přípustné.

Zbývající experimentální metody jsou velmi jednoduché a ve většině případů dávají prakticky přijatelné výsledky.

6.2.5 Zieglerova-Nicholsova metoda přechodové charakteristiky

Zieglerova-Nicholsova metoda přechodové charakteristiky (metoda otevřeného regulačního obvodu) vychází z nekmitavé přechodové charakteristiky proporcionální regulované soustavy, ze které se v souladu s obr. 4.5a určí doba průtahu T_u, doba náběhu T_n a koeficient přenosu k_1.

Hodnoty stavitelných parametrů pro zvolený typ analogového regulátoru jsou uvedeny v tab. 6.4 [2, 22, 29, 31].

Podobně jako u Zieglerovy-Nicholsovy metody kritických parametrů i zde se projevil destabilizující vliv integrační složky u analogového regulátoru PI snížením zesílení K_P^* oproti analogovému regulátoru P a stabilizující vliv derivační složky (při vhodné filtraci) u standardního analogového regulátoru PID zvýšením zesílení. Poměr $T_D^* / T_I^* = 1/4$ (porovnej s tab. 6.1)

Z tab. 6.4 a 6.1 vyplývá, že obě Zieglerovy-Nicholsovy metody v případě použití regulátoru P mají amplitudovou bezpečnost $m_A = 2$, tzn., že při dvojnásobném zvýšení zesílení regulátoru K_P se regulační obvod dostane na kmitavou mez stability.

Tab. 6.4 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu přechodové charakteristiky

Regulátor	K_P^*	T_I^*	T_D^*
P	$\frac{T_n}{k_1 T_u}$	–	–
PI	$0{,}9\frac{T_n}{k_1 T_u}$	$3{,}33T_u$	–
PID	$1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u}$	$2T_u$	$0{,}5T_u$

Metoda přechodové charakteristiky dává obecně agresivnější seřízení než metoda kritických parametrů [2].

Postup:

1. Z přechodové charakteristiky nekmitavé proporcionální regulované soustavy se určí doba průtahu T_u, doba náběhu T_n a koeficient přenosu k_1 (viz podkap. 4.2, obr. 4.5a).
2. Z tab. 6.4 se pro zvolený typ analogového regulátoru vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 6.2

Z přechodové charakteristiky nekmitavé proporcionální regulované soustavy s přenosem (časová konstanta je v sekundách)

$$G_P(s) = \frac{1{,}5}{(4s+1)^3}$$

byly získány identifikací parametry: T_u = 3,2 s, T_n = 14,8 s a k_1 = 1,5.

Zieglerovou-Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky je třeba seřídit regulační obvod pro analogové regulátory P, PI a PID.

Řešení:

Na základě tab. 6.4 lze psát:

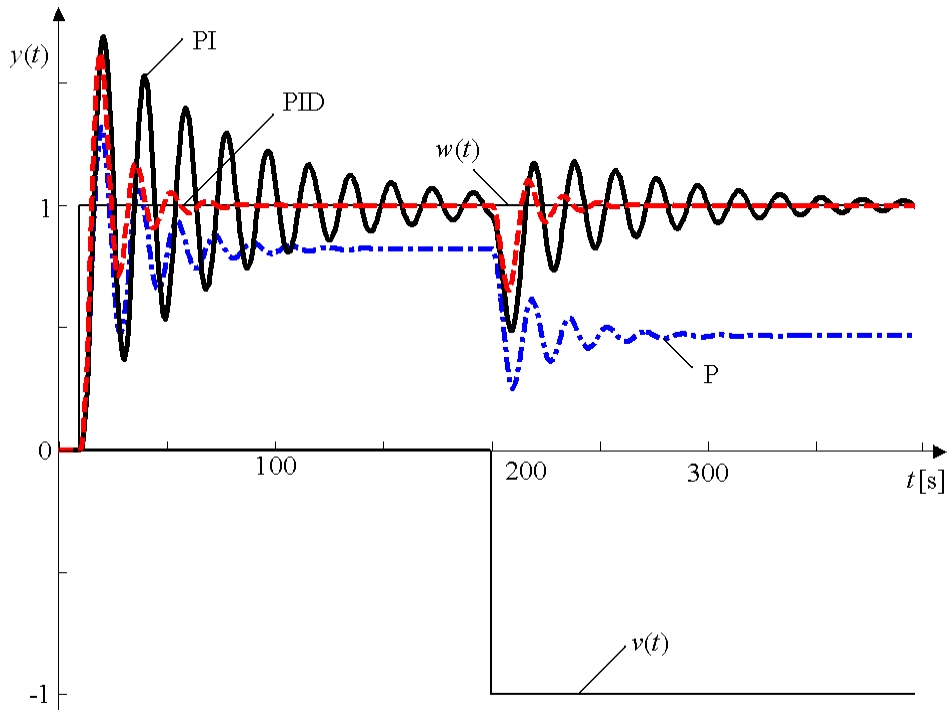
P: $K_P^* = \frac{T_n}{k_1 T_u} \doteq 3{,}08$;

PI: $K_P^* = 0{,}9\frac{T_n}{k_1 T_u} \doteq 2{,}78$; $T_I^* = 3{,}33T_u \doteq 10{,}66$ s;

PID: $K_P^* = 1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u} \doteq 3{,}08$; $T_I^* = 2T_u = 6{,}4$ s; $T_D^* = 0{,}5T_u = 1{,}6$ s.

Odezvy regulačního obvodu na skokové změny polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 6.16. Je zřejmé, že překmit

i kmitavost jsou dosti velké a navíc v případě použití regulátoru P zůstala v regulačním obvodu poměrně vysoká trvalá regulační odchylka.



Obr. 6.16 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením Zieglerovou-Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky – příklad 6.2

6.2.6 Univerzální experimentální metoda

Z mnoha existujících experimentálních metod je níže uvedena velmi jednoduchá, a přesto ve většině praktických případů účinná metoda, zde nazývaná **u**niverzální **e**xperimentální **m**etodou (UEM). Byla rozpracovaná v bývalém SSSR [4, 9]. Je vhodná pro soustavy s přenosy (tab. 6.5 a 6.6)

$$G_P(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{6.36}$$

a

$$G_P(s) = \frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{6.37}$$

Je dost podobná Chienově-Hronesově-Reswickově metodě [2].

Umožňuje seřídit konvenční analogové regulátory jak z hlediska žádané veličiny $w(t)$, tak i poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy, přičemž kritériem kvality regulace může být nejrychlejší odezva bez překmitu, nejrychlejší odezva s relativním překmitem $\kappa = 0{,}2$ (20 %) a minimální kvadratická regulační plocha. Za nekmitavý regulační pochod se považuje takový, u kterého je maximální relativní překmit od 0,02 (2 %) do 0,05 (5 %).

Tab. 6.5 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro univerzální experimentální metodu (UEM)

$\frac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$		Regulační pochod				
		Nejrychlejší odezva bez překmitu		Nejrychlejší odezva s překmitem 20 %		Minimální kvadratická regulační plocha ISE
Regulátor typ		Seřízení z hlediska				
		žádané veličiny w	poruchové veličiny v	žádané veličiny w	poruchové veličiny v	poruchové veličiny v
P	K_P^*	$0{,}3\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}3\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{T_1}{k_1T_d}$	–
PI	K_P^*	$0{,}35\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}6\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}6\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{T_1}{k_1T_d}$	$\frac{T_1}{k_1T_d}$
	T_I^*	$1{,}17T_1$	$0{,}8T_d+0{,}5T_1$	T_1	$T_d+0{,}3T_1$	$T_d+0{,}35T_1$
PID	K_P^*	$0{,}6\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}95\frac{T_1}{k_1T_d}$	$0{,}95\frac{T_1}{k_1T_d}$	$1{,}2\frac{T_1}{k_1T_d}$	$1{,}4\frac{T_1}{k_1T_d}$
	T_I^*	T_1	$2{,}4T_d$	$1{,}36T_1$	$2T_d$	$1{,}3T_d$
	T_D^*	$0{,}5T_d$	$0{,}4T_d$	$0{,}64T_d$	$0{,}4T_d$	$0{,}5T_d$

Tab. 6.6 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro univerzální experimentální metodu (UEM)

$\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$		Regulační pochod				
		Nejrychlejší odezva bez překmitu		Nejrychlejší odezva s překmitem 20 %		Minimální kvadratická regulační plocha ISE
Regulátor typ		Seřízení z hlediska				
		žádané veličiny w	poruchové veličiny v	žádané veličiny w	poruchové veličiny v	poruchové veličiny v
P	K_P^*	$0{,}37\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}37\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1T_d}$	–
PI	K_P^*	$0{,}37\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}46\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}7\frac{1}{k_1T_d}$	$\frac{1}{k_1T_d}$
	T_I^*	∞	$5{,}75T_d$	∞	$3T_d$	$4{,}3T_d$
PID	K_P^*	$0{,}65\frac{1}{k_1T_d}$	$0{,}65\frac{1}{k_1T_d}$	$1{,}1\frac{1}{k_1T_d}$	$1{,}1\frac{1}{k_1T_d}$	$1{,}36\frac{1}{k_1T_d}$
	T_I^*	∞	$5T_d$	∞	$2T_d$	$1{,}6T_d$
	T_D^*	$0{,}4T_d$	$0{,}23T_d$	$0{,}53T_d$	$0{,}37T_d$	$0{,}5T_d$

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na tvar (6.36) nebo (6.37) postupy uvedenými v podkap. 4.2.
2. Podle požadavků na kvalitu regulace se zvolí regulátor a druh regulačního pochodu (bez překmitu, s relativním překmitem $\kappa = 0{,}2$, s minimální hodnotou integrálního kritéria ISE) a pro daný účel [seřízení z hlediska žádané veličiny $w(t)$, nebo poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy] se na základě tab. 6.5 pro přenos (6.36) a tab. 6.6 pro přenos (6.37) vypočtou jeho stavitelné parametry.

Příklad 6.3

Pro regulovanou soustavu s přenosem (viz příklad 6.1 a 6.2)

$$G_P(s) = \frac{1{,}5}{(4s+1)^3}$$

je třeba univerzální experimentální metodou seřídit regulátor PI (časová konstanta je v sekundách).

Řešení:

Přenos regulované soustavy $G_P(s)$ nemá požadovaný tvar (6.36), a proto v souladu se schématem (4.37) a tab. 4.1 lze psát ($i = 3$, $k_1 = 2$, $T_3 = 4$ s, $T_{d3} = 0$ s)

$$\frac{T_1}{T_3} = 1{,}980 \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = 1{,}98 \cdot 4 = 7{,}92\,\text{s};$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d3}}{T_3} = 1{,}232 \quad \Rightarrow \quad T_{d1} = 1{,}232 \cdot 4 + 0 \doteq 4{,}93\,\text{s};$$

$$G_P(s) = \frac{1{,}5}{(4s+1)^3} \approx \frac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_{d1}s} = \frac{1{,}5}{7{,}92s+1}\mathrm{e}^{-4{,}93s}.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska žádané veličiny $w(t)$ (tab. 6.5)

a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}35\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}37\,; \quad T_I^* = 1{,}17T_1 \doteq 9{,}27\,\text{s};$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

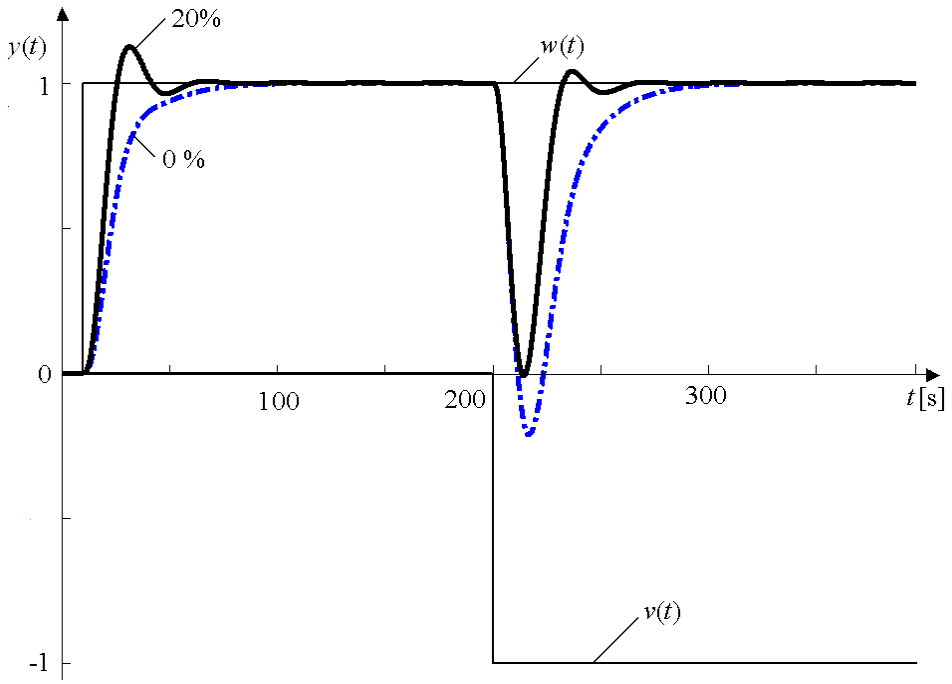
$$K_P^* = 0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}64\,; \quad T_I^* = T_1 = 7{,}92\,\text{s};$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy (tab. 6.5)

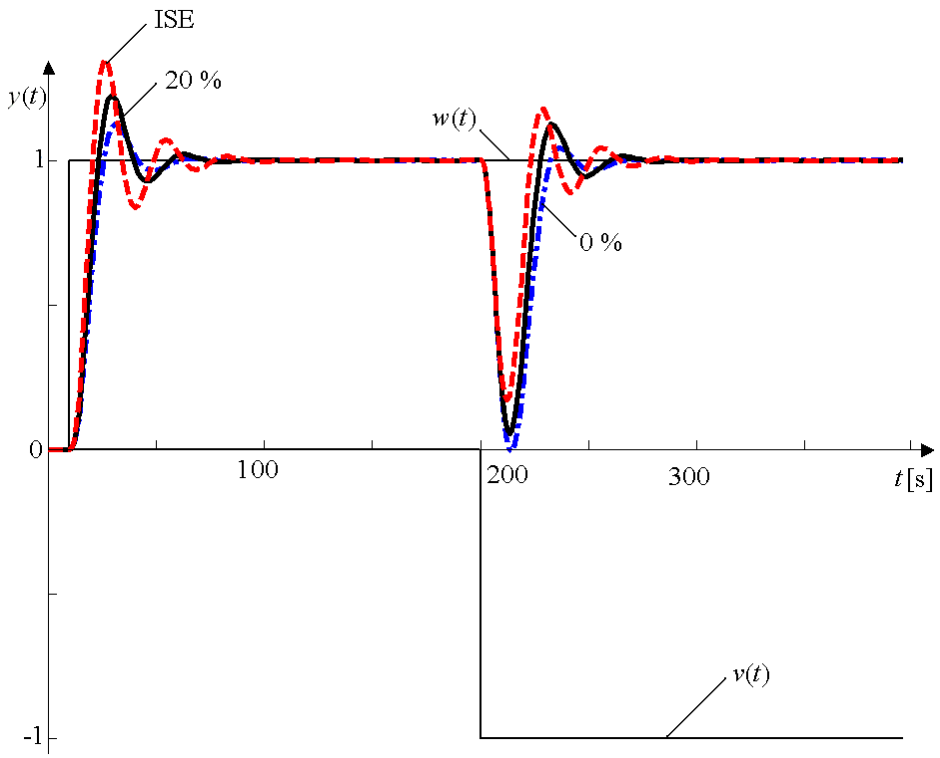
a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}64\,; \quad T_I^* = 0{,}8T_{d1} + 0{,}5T_1 \doteq 7{,}90\,\text{s};$$

a)



b)



Obr. 6.17 Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným univerzální experimentální metodou z hlediska: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy – příklad 6.3

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$K_P^* = 0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}75\,; \quad T_I^* = T_{d1} + 0{,}3T_1 \doteq 7{,}31\text{s};$$

c) min ISE

$$K_P^* = \frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 1{,}07\,; \quad T_I^* = T_{d1} + 0{,}35 T_1 \doteq 7{,}70\,\text{s}.$$

Na obr. 6.17a jsou ukázány odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným z hlediska žádané veličiny $w(t)$ a na obr. 6.17b z hlediska poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy.

Z obou obrázků je zřejmé, že uvedená metoda seřizování dává přijatelné výsledky i při velmi hrubé aproximaci přenosu regulované soustavy.

Příklad 6.4

Je třeba seřídit regulátor PI univerzální experimentální metodou pro integrační soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{0{,}05}{s(s+1)} \mathrm{e}^{-4s}.$$

Časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách.

Řešení:

Přenos soustavy musí být upraven na tvar (6.37). V souladu se vztahem (4.44) lze pro T_1 = 1 s a T_{d1} = 4 s psát:

$$T_d = T_{d1} + T_1 = 5\ \text{s};$$

$$G_S(s) = \frac{0{,}05}{s(s+1)} \mathrm{e}^{-4s} \approx \frac{0{,}05}{s} \mathrm{e}^{-5s}.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska žádané veličiny $w(t)$, viz tab. 6.6:

a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}37 \frac{1}{k_1 T_d} \doteq 1{,}48\,; \quad T_I^* = \infty\,;$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$K_P^* = 0{,}7 \frac{1}{k_1 T_d} = 2{,}8\,; \quad T_I^* = \infty\,.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy, viz tab. 6.6:

a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}46 \frac{1}{k_1 T_d} \doteq 1{,}84\,; \quad T_I^* = 5{,}75 T_d = 28{,}75\,\text{s};$$

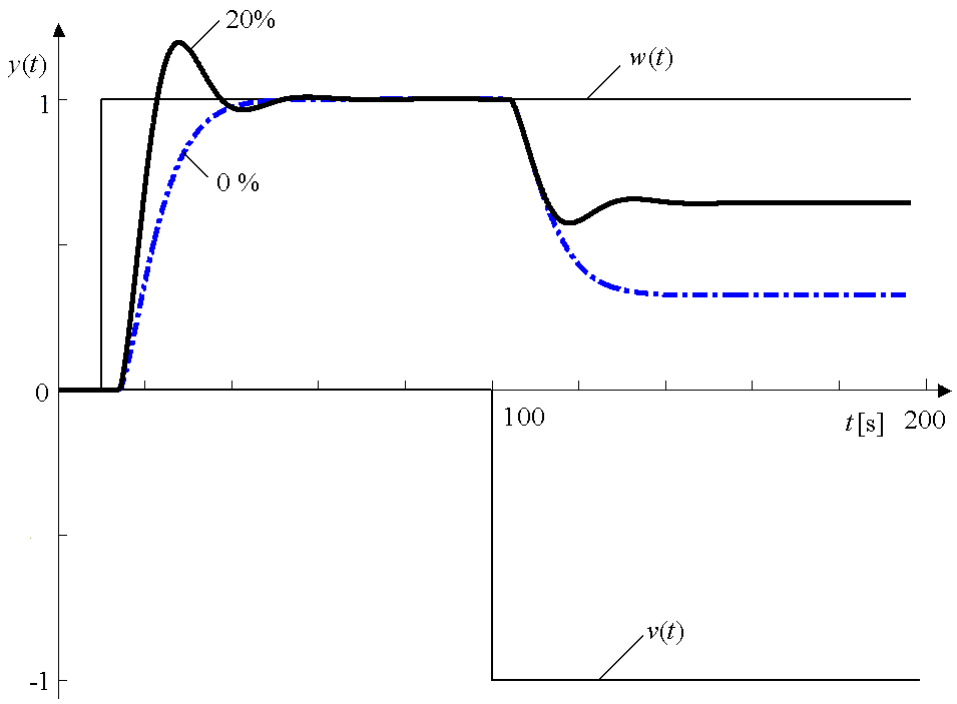
b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$K_P^* = 0{,}7 \frac{1}{k_1 T_d} = 2{,}8\,; \quad T_I^* = 3 T_d = 15\,\text{s};$$

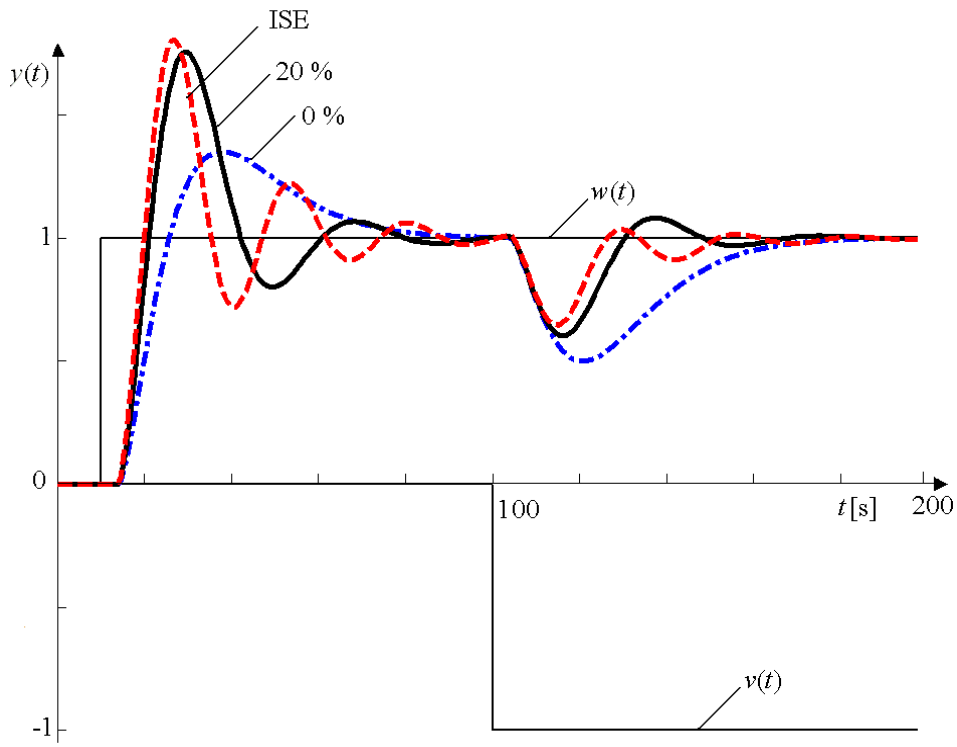
c) min ISE

$$K_P^* = \frac{1}{k_1 T_d} = 4\,, \quad T_I^* = 4{,}3T_d = 21{,}5\,\mathrm{s}.$$

a)



b)



Obr. 6.18 Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným univerzální experimentální metodou z hlediska: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy – příklad 6.4

Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným univerzální experimentální metodou jsou na obr. 6.18. Z obr. 6.18a je zřejmé, že v odezvě na poruchovou veličinu $v(t)$ vzniknou nepřípustně velké trvalé regulační odchylky. Je to způsobeno vyřazením integrační složky ($T_I^* = \infty$) u analogového regulátoru PI, který se stane vlastně regulátorem P. Při seřízení analogového regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny $v(t)$, jsou odezvy na poruchu přijatelné. Naproti tomu odezvy na žádanou veličinu $w(t)$ mají nepřípustně velké překmity, které nelze žádným seřízením konvenčních analogových (i číslicových) regulátorů obsahujících integrační složku odstranit [29, 30]. Vhodným řešením je použití regulátorů 2DOF.

6.2.7 Metoda SIMC

Mezi jednoduché, ale účinné metody seřizování analogových regulátorů patří metoda SIMC [20]. Vychází z regulace s vnitřním modelem – IMC (**i**nternal **m**odel **c**ontrol), a proto její autor navrhuje zkratku SIMC interpretovat jako „SIMple Control“ nebo „Skogestad IMC“. I když metoda SIMC vychází z regulace s interním modelem, pro návrh analogového regulátoru používá vztah pro přímou syntézu (viz např. obr. 6.3)

$$G_C(s) = \frac{1}{G_P(s)} \frac{G_{wy}(s)}{1 - G_{wy}(s)}, \tag{6.38}$$

kde

$$G_P(s) = G'_P(s) \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{6.39}$$

je přenos soustavy a

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{6.40}$$

je požadovaný přenos řízení a T_w je časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu.

Po dosazení (6.39) a (6.40) do (6.38) se dostane přenos navrhovaného regulátoru

$$G_C(s) = \frac{1}{G'_P(s)} \frac{1}{T_w s + 1 - \mathrm{e}^{-T_d s}}. \tag{6.41}$$

Použitím aproximace

$$\mathrm{e}^{-T_d s} \approx 1 - T_d s \tag{6.42}$$

se obdrží

$$G_C(s) = \frac{1}{G'_P(s)} \frac{1}{(T_w + T_d)s}. \tag{6.43}$$

Postup návrhu regulátoru bude ukázán pro soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s}, \quad T_1 \geq T_2. \tag{6.44}$$

Je zřejmé, že

$$G'_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

a proto po dosazení do (6.43) se získá přenos

$$G_C(s) = \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{k_1(T_w+T_d)s} = K'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)\left(T'_D s+1\right), \tag{6.45}$$

ze kterého vyplývá, že jde o regulátor PID se sériovou strukturou neboli interakcí, tj. $\mathrm{PID_i}$ [viz vztah (5.27)], kde

$$K'_P = \frac{T_1}{k_1(T_w+T_d)}, \quad T'_I = T_1, \quad T'_D = T_2 . \tag{6.46}$$

Tab. 6.7 Stavitelné parametry regulátorů pro metodu SIMC [29]

Regulovaná soustava		Regulátor			
		Typ	$K_P^*(K_P'^*)$	$T_I^*(T_I'^*)$	$T_D^*(T_D'^*)$
1	$k_1\,\mathrm{e}^{-T_d s}$	I	–	$2k_1T_d$	–
2	$\frac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$	PI	$\frac{T_1}{2k_1T_d}$	$\min[T_1, 8T_d]$	–
3	$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ $T_1 \geq T_2$	$\mathrm{PID_i}$	$\frac{T_1}{2k_1T_d}$	$\min[T_1, 8T_d]$	T_2
4*		PID	$\frac{T_1+T_2}{2k_1T_d}$	T_1+T_2	$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}$
5*			$\frac{T_1(T_2+8T_d)}{16k_1T_d^2}$	T_2+8T_d	$\frac{8T_2T_d}{T_2+8T_d}$
6	$\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$	PI	$\frac{1}{2k_1T_d}$	$8T_d$	–
7	$\frac{k_1}{s(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$	$\mathrm{PID_i}$	$\frac{1}{2k_1T_d}$	$8T_d$	T_2
8		PID	$\frac{T_2+8T_d}{16k_1T_d^2}$	T_2+8T_d	$\frac{8T_2T_d}{T_2+8T_d}$
9	$\frac{k_1}{s^2}\mathrm{e}^{-T_d s}$	$\mathrm{PID_i}$	$\frac{1}{16k_1T_d^2}$	$8T_d$	$8T_d$
10		PID	$\frac{1}{8k_1T_d^2}$	$16T_d$	$4T_d$

*Řádek 4 platí pro $T_1 \leq 8T_d$, řádek 5 pro $T_1 > 8T_d$. Stavitelné parametry $K_P'^*$, $T_I'^*$ a $T_D'^*$ platí pro regulátor s interakcí $\mathrm{PID_i}$.

Volbou časové konstanty T_w lze získat různě rychlé odezvy, ale současně i odpovídající požadavky na akční veličinu.

Je zřejmé, že čím agresivnější bude seřízení, tím rychlejší bude odezva, ale tím současně budou větší nároky na akční veličinu.

Někdy se časová konstanta T_w označuje písmenem λ a pak se hovoří o λ-seřízení.

Seřízení podle vztahů (6.46) dává velmi kvalitní a rychlou odezvu na změnu žádané veličiny $w(t)$, ale v případě

$$T_1 >> T_d \tag{6.47}$$

velmi pomalou odezvu na změnu poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy. Z tohoto důvodu Skogestad algoritmus (6.46) modifikuje, a to volbou integrační časové konstanty T_I podle vztahu

$$T_I' = \min\left[T_1,\ 4(T_w + T_d)\right]. \tag{6.48}$$

Další modifikace Skogestada spočívá v tom, že doporučuje volit

$$T_w = T_d\,. \tag{6.49}$$

Takovým způsobem byl obdržen např. řádek 3 v tab. 6.7.

Volby (6.48) a (6.49) zaručují poměrně rychlou odezvu na poruchovou veličinu $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy a současně zaručují dobrou robustnost seřízení [20], viz tab. 6.8.

Případy v řádcích 1, 2, 3 (pro $T_1 \le 8T_d$) a 4 v tab. 6.7 jsou shodné s metodou požadovaného modelu pro relativní překmit $\kappa \approx 0{,}05$ (5 %), viz odstavec 6.2.8.

Tab. 6.8 Základní ukazatelé kvality pro regulační obvod seřízený metodou SIMC podle tab. 6.7

Ukazatele kvality	Řádky v tab. 6.7	
	1, 2, 3 (pro $T_1 \le 8T_d$) a 4	6, 7
M_S	1,59	1,70
m_A	3,14	2,96
m_L [dB]	9,94	9,43
γ [deg]	61,4	46,9
γ [rad]	1,07	0,82
$A_{wy}(\omega_R)$	1,00	1,30
$\omega_p T_d$	1,57	1,49
$\omega_g T_d$	0,50	0,51
$\Delta T_d / T_d$	2,14	1,59

Pro $T_1 \le 4(T_w + T_d)$, resp. $T_1 \le 8T_d$ metoda SIMC je metoda kompenzační, protože čitatel přenosu regulátoru kompenzuje odpovídající výraz ve jmenovateli přenosu soustavy.

Základní ukazatelé kvality jsou pro metodu SIMC pro tab. 6.7, tj. pro $T_w = T_d$, uvedeny v tab. 6.8 [20].

Pro řádky 2, 3 (pro $T_1 > 8T_d$) a 5 v tab. 6.7 hodnoty ukazatelů kvality leží mezi hodnotami v obou sloupcích, přičemž pravý sloupec je mezním případem.

V posledním řádku tab. 6.8 je uvedena **relativní změna dopravního zpoždění**, při které dojde k nestabilitě regulačního obvodu [13]. Určí se ze vztahu

$$\frac{\Delta T_d}{T_d} = \frac{\gamma}{\omega_g T_d}. \tag{6.50}$$

Hodnoty ukazatelů kvality v tab. 6.8 jsou v doporučených mezích [viz vztahy (6.9), (6.17), (6.18) a (6.24)] a ukazují na dobrou robustnost regulačních obvodů seřízených metodou SIMC podle tab. 6.7.

Poslední dva řádky v tab. 6.7 se týkají integrační soustavy 2. řádu s dopravním zpožděním, pro kterou seřízení regulačního obvodu s konvenčním regulátorem představuje velmi obtížný problém, protože v tomto případě typ regulačního obvodu je q = 3.

Postup:

1. Přenos soustavy se libovolnou metodou z podkap. 4.2 upraví na vhodný tvar z tab. 6.7, který současně určuje doporučený regulátor.
2. Pro doporučený regulátor se podle tab. 6.7 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 6.5

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} \mathrm{e}^{-3s}$$

je třeba seřídit analogové regulátory PI a PID metodou SIMC (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

Řešení:

V souladu s "pravidlem poloviny" lze psát (T_{10} = 6, T_{20} = 4, T_{30} = 2, T_{d0} = 3, k_1 = 1):

a) Náhradní přenos (4.29) [viz (4.54)]:

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2} = 8, \quad T_d = T_{d0} + \frac{T_{20}}{2} + T_{30} = 7;$$

$$G_P(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} \mathrm{e}^{-3s} \approx \frac{1}{8s+1} \mathrm{e}^{-7s}.$$

Protože $T_1 < 8T_d$, na základě řádku 2 v tab. 6.7 se dostane

$$K_P^* = 0{,}57; \quad T_I^* = 8\,\mathrm{s}.$$

b) Náhradní přenos (4.35) [viz (4.55)]:

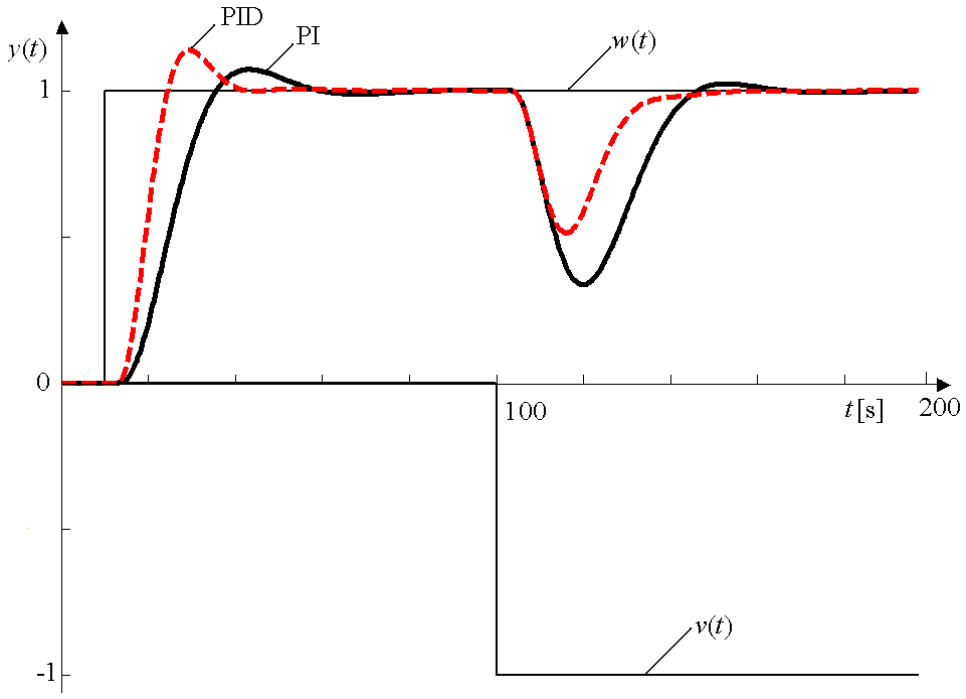
$$T_1 = T_{10} = 6, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 5, \quad T_d = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} = 4;$$

$$G_P(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} \mathrm{e}^{-3s} \approx \frac{1}{(6s+1)(5s+1)} \mathrm{e}^{-4s} .$$

Protože $T_1 < 8T_d$, na základě řádku 4 v tab. 6.7 se dostane

$$K_P^* = 1{,}38; \quad T_I^* = 11\ \mathrm{s}; \quad T_D^* = 2{,}73\ \mathrm{s} .$$

Odezvy na jednotkovou skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ jsou ukázány na obr. 6.19. Z jejich průběhů je zřejmé, že metoda SIMC dává i při velmi hrubé aproximaci přenosů regulovaných soustav výsledky, které mohou být s úspěchem využívány v technické praxi.



Obr. 6.19 Odezvy regulačního obvodu seřízeného metodou SIMC na jednotkové skokové změny žádané $w(t)$ a poruchové $v(t)$ veličiny – příklad 6.4

6.2.8 Metoda požadovaného modelu

Metoda **p**ožadovaného **m**odelu (MPM), dříve nazývaná také metoda inverze dynamiky, byla rozpracována na Fakultě strojní VŠB – Technické univerzitě Ostrava [22, 29]. Je to metoda velmi jednoduchá.

Metoda požadovaného modelu vychází ze vztahu pro přímou syntézu (6.38)

$$G_C(s) = \frac{1}{G_P(s)} \frac{G_{wy}(s)}{1 - G_{wy}(s)} , \tag{6.51}$$

kde

$$G_P(s) = G_P'(s) \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{6.52}$$

je přenos soustavy,

$$G_{wy}(s) = \frac{k_o}{s + k_o \mathrm{e}^{-T_d s}} \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{6.53}$$

je požadovaný přenos řízení a k_o je zesílení otevřeného regulačního obvodu.

Požadovanému přenosu řízení (6.53) odpovídá velmi jednoduchý přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{k_o}{s}\,\mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{6.54}$$

Po dosazení (6.52) a (6.53) do (6.51) se dostane přenos navrhovaného regulátoru

$$G_C(s) = \frac{k_o}{sG'_P(s)}. \tag{6.55}$$

Je zřejmé, že stejný vztah se dostane z přenosu otevřeného regulačního obvodu (6.54) pro (6.52).

Aby na základě vztahu (6.55) byl obdržen přenos konvenčního regulátoru, musí přenos soustavy mít některý z tvarů uvedených v tab. 6.9, a pokud je třeba použít konkrétní konvenční regulátor, pak je třeba přenos soustavy upravit na odpovídající tvar.

Velmi důležité je, že přenosy v tab. 6.9 nemají ve své části $G'_P(s)$ žádné nestabilní nuly ani póly, a proto použití vztahu (6.51), resp. (6.55) je plně oprávněné.

Např. pro soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\,\mathrm{e}^{-T_d s},\ T_1 \geq T_2 \tag{6.56}$$

se pro [viz (6.52)]

$$G'_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

po dosazení do (6.55) dostane přenos pro regulátor $\mathrm{PID_i}$

$$G_C(s) = \frac{k_o(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{k_1 s} = K'_P\,\frac{(T'_I s+1)(T'_D s+1)}{T'_I s},$$

kde

$$K'_P = \frac{k_o T_1}{k_1},\quad T'^{*}_I = T_1,\quad T'^{*}_D = T_2, \tag{6.57}$$

resp. po použití přepočetních vztahů (5.29) se dostane přenos standardního regulátoru PID se stavitelnými parametry

$$K_P = \frac{k_o(T_1+T_2)}{k_1},\quad T^{*}_I = T_1+T_2,\quad T^{*}_D = \frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}. \tag{6.58}$$

Podobně jednoduchým způsobem lze získat vztahy pro stavitelné parametry konvenčních regulátorů pro všechny zbývající řádky v tab. 6.9.

Zbývá ještě určit vhodné zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o. Právě požadovaný přenos řízení (6.53) ve tvaru anizochronního matematického modelu [32] má výhodu nejenom v relativní jednoduchosti, ale především v tom, že změnou zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o lze snadno dosáhnout různého průběhu odezvy na skokovou změnu žádané veličiny $w(t)$ od nekmitavého až po kmitavý s různým překmitem, tj. lze dosáhnout různé kvality regulačního pochodu, viz obr. 6.20.

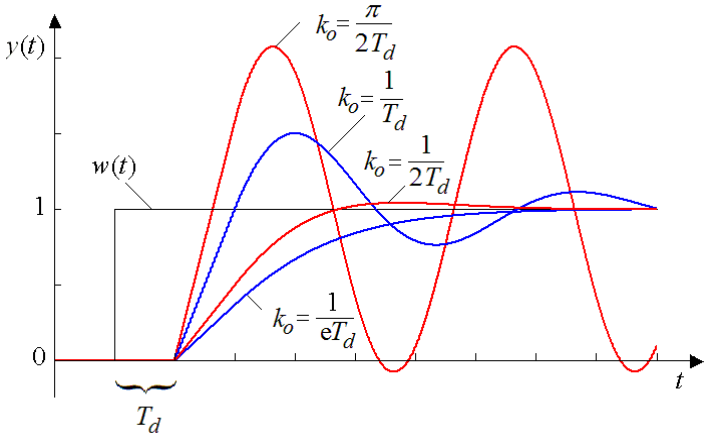
Zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o pro mezní nekmitavý průběh a pro kmitavý průběh na mezi stability lze snadno určit analyticky za předpokladu, že nedominantní póly a nuly regulačního obvodu mají na jeho vlastnosti zanedbatelný vliv [22, 29].

Pro mezní nekmitavý průběh z charakteristického kvazimnohočlenu regulačního obvodu [viz jmenovatel požadovaného přenosu řízení (6.53)]

$$N(s) = s\,\mathrm{e}^{T_d s} + k_o \tag{6.59}$$

lze určit dvojnásobný reálný dominantní pól s_2 a odpovídající zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o ze soustavy rovnic

$$\left.\begin{aligned} N(s) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}N(s)}{\mathrm{d}s} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} s\,\mathrm{e}^{T_d s} + k_o &= 0 \\ T_d s + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{T_d}, \\ k_o &= \frac{1}{\mathrm{e}T_d}. \end{aligned} \tag{6.60}$$



Obr. 6.20 Vliv zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o na průběh přechodové charakteristiky regulačního obvodu

Zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o pro kmitavou mez stability (tj. kritické zesílení) lze získat pro $s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\omega_c$ z charakteristické rovnice

$$s\,\mathrm{e}^{T_d s} + k_o = 0 \tag{6.61}$$

jako hlavní řešení, tj.

$$\pm \mathrm{j}\omega_c\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_c T_d} + k_o = 0 \;\Rightarrow\; \omega_c = \frac{\pi}{2T_d},\; k_o = \frac{\pi}{2T_d}. \tag{6.62}$$

Při řešení komplexní rovnice (6.61) byl použit Eulerův vztah

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}x} = \cos x \pm \mathrm{j}\sin x. \tag{6.63}$$

Z obou vztahů (6.60) a (6.62) lze pro zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o učinit závěr, že může být vyjádřeno ve tvaru

$$k_o = \frac{1}{\beta T_d}, \tag{6.64}$$

kde β je koeficient závislý na průběhu přechodové charakteristiky regulačního obvodu (obr.

6.20), tj. na relativním překmitu κ [viz vztah (6.1)]

$$\begin{aligned} \kappa = 0 &\Rightarrow \beta = \mathrm{e}, \\ \kappa = 1 &\Rightarrow \beta = \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \tag{6.65}$$

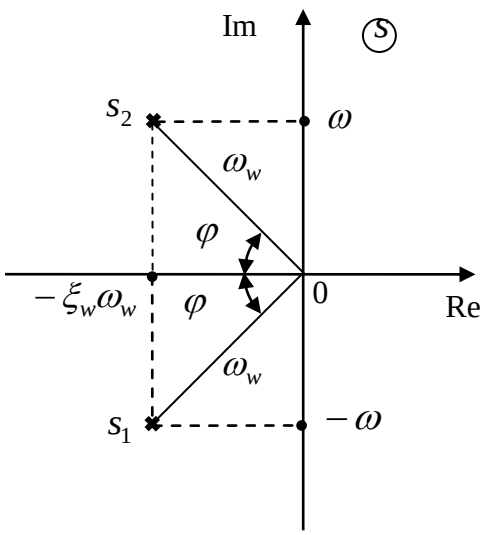
Aby bylo možné určit závislost koeficientu β na relativním překmitu κ, je třeba porovnat dva dominantní póly regulačního obvodu s přenosem řízení (6.53) (viz obr. 6.21)

$$s_{1,2} = -\omega \operatorname{cotg}\varphi \pm \mathrm{j}\omega \tag{6.66}$$

s odpovídající dvojicí pólů regulačního obvodu s přenosem řízení (viz obr. 6.21)

$$G_{wy}(s) = \frac{\omega_w^2}{s^2 + 2\xi_w \omega_w s + \omega_w^2} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{6.67}$$

kde ξ_w a ω_w je relativní tlumení a úhlový kmitočet netlumených kmitů regulačního obvodu.



Obr. 6.21 Rozložení dominantních pólů regulačního obvodu s analogovým regulátorem v komplexní rovině s

Po dosazení (6.66) do (6.61) a úpravě se dostane komplexní rovnice

$$-\omega \operatorname{cotg}\varphi \pm \mathrm{j}\omega + k_o \mathrm{e}^{-T_d(-\omega \operatorname{cotg}\varphi \pm \mathrm{j}\omega)} = 0. \tag{6.68}$$

Po uvažování Eulerova vztahu (6.63) lze komplexní rovnici (6.68) vyjádřit ekvivalentní soustavou dvou reálných rovnic

$$\begin{aligned} -\omega \operatorname{cotg}\varphi + k_o \mathrm{e}^{\omega T_d \operatorname{cotg}\varphi} \cos \omega T_d &= 0, \\ \omega - k_o \mathrm{e}^{\omega T_d \operatorname{cotg}\varphi} \sin \omega T_d &= 0, \end{aligned} \tag{6.69}$$

jejichž hlavní řešení je

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\varphi}{T_d}, \\ k_o &= \frac{\varphi}{T_d \sin\varphi} \mathrm{e}^{-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Tab. 6.9 Stavitelné parametry konvenčních regulátorů pro metodu požadovaného modelu (MPM)

Regulovaná soustava		Regulátor				
		Typ	$K_P^*(K_P'^*)$		$T_I^*(T_I'^*)$	$T_D^*(T_D'^*)$
			$T_d = 0$	$T_d > 0$		
1	$\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$	P	$\frac{1}{k_1 T_w}$	$\frac{1}{k_1 \beta T_d}$	–	–
2	$\frac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$	PI	$\frac{T_1}{k_1 T_w}$	$\frac{T_1}{k_1 \beta T_d}$	T_1	–
3	$\frac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$	PD	$\frac{1}{k_1 T_w}$	$\frac{1}{k_1 \beta T_d}$	–	T_1
4	$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$	$\mathrm{PID_i}$	$\frac{T_1}{k_1 T_w}$	$\frac{T_1}{k_1 \beta T_d}$	T_1	T_2
5	$T_1 \geq T_2$	PID	$\frac{T_1+T_2}{k_1 T_w}$	$\frac{T_1+T_2}{k_1 \beta T_d}$	T_1+T_2	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$
6	$\frac{k_1}{T_0^2 s^2+2\xi_0 T_0 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ $0{,}5 < \xi_0 \leq 1$	PID	$\frac{2\xi_0 T_0}{k_1 T_w}$	$\frac{2\xi_0 T_0}{k_1 \beta T_d}$	$2\xi_0 T_0$	$\frac{T_0}{2\xi_0}$

Stavitelné parametry $K_P'^*$, $T_I'^*$ a $T_D'^*$ platí pro regulátor s interakcí $\mathrm{PID_i}$.

Koeficient β tedy je [viz (6.64)]

$$\beta = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\mathrm{e}^{\frac{\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi}}. \tag{6.71}$$

Např. je zřejmé, že pro

$$\varphi = 0 \Rightarrow \beta = \mathrm{e} \Rightarrow k_o = \frac{1}{\mathrm{e}T_d}$$

a

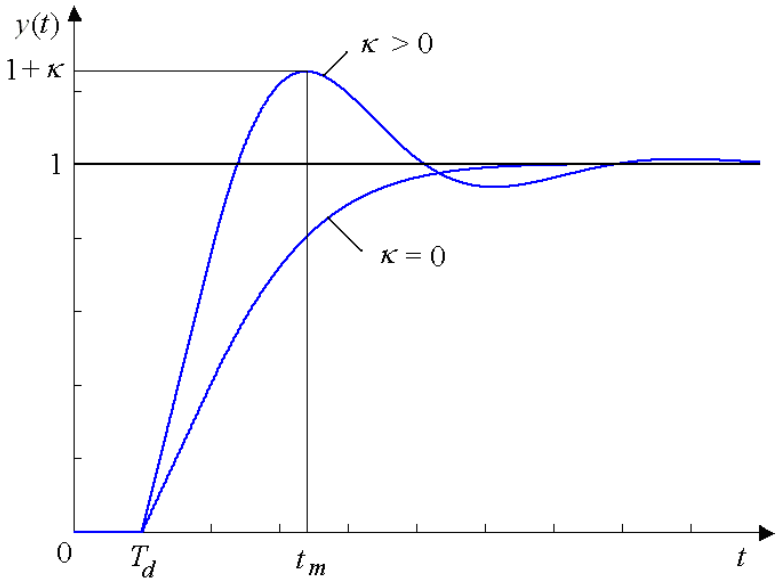
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{2}{\pi} \Rightarrow k_o = \frac{\pi}{2T_d},$$

byly obdrženy stejné vztahy jako (6.60) a (6.62).

Protože úhel φ (obr. 6.21) je pro regulační obvod s přenosem řízení (6.67) dán relativním tlumením ξ_w, tj.

$$\varphi = \arccos \xi_w, \tag{6.72}$$

proto požadovaný průběh přechodové charakteristiky lze obdržet vhodnou volbou relativního tlumení ξ_w.



Obr. 6.22 Přechodové charakteristiky regulačního obvodu

Pro praxi je vhodnější používat místo relativního tlumení ξ_w relativní překmit κ (obr. 6.22), který lze určit z přechodové funkce regulačního obvodu (6.67)

$$y(t) = \left\{1 - \frac{\omega_w}{\omega}\,\mathrm{e}^{-(t-T_d)\xi_w\omega_w}\sin\left[(t-T_d)\omega + \arcsin\frac{\omega}{\omega_w}\right]\right\}\eta(t-T_d)\,, \tag{6.73a}$$

$$\frac{\omega}{\omega_w} = \sqrt{1-\xi_w^2}\,, \tag{6.73b}$$

kde $\eta(t)$ je Heavisideův jednotkový skok.

Maximální překmit vystoupí v čase t_m, kdy derivace přechodové funkce (6.73a) podle času (tj. impulsní funkce)

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t} = \left\{\frac{\omega_w^2}{\omega}\,\mathrm{e}^{-(t-T_d)\xi_w\omega_w}\sin\left[(t-T_d)\omega\right]\right\}\eta(t-T_d) \tag{6.74}$$

bude pro $t > T_d$ poprvé nulová, tj.

$$t_m = \frac{\pi}{\omega} + T_d\,. \tag{6.75}$$

Po dosazení (6.75) do (6.73) se dostane

$$y(t_m) = 1 + \kappa = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi\xi_w}{\sqrt{1-\xi_w^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa = \mathrm{e}^{-\frac{\pi\xi_w}{\sqrt{1-\xi_w^2}}} \Rightarrow \tag{6.76}$$

$$\Rightarrow \xi_w = \frac{|\ln\kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\kappa}}\,. \tag{6.77}$$

Na základě vztahů (6.77), (6.72) a (6.71) lze pro zadaný (požadovaný) relativní překmit κ vypočíst hodnoty koeficientu β, a tedy i odpovídající zesílení otevřeného regulačního obvodu k_o (6.64).

Pro relativní překmit v rozmezí $0 \le \kappa \le 0{,}5$ (0 – 50 %) byly vypočteny odpovídající hodnoty ξ_w, φ [rad] a β, viz tab. 6.10.

Tab. 6.10 Hodnoty koeficientů β' a β pro zadaný relativní překmit κ

κ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
ξ_w	1	0,690	0,591	0,517	0,456	0,404	0.358	0,317	0,280	0,246	0,215
φ	0	0,809	0,938	1,028	1,097	1,155	1,205	1,248	1,287	1,322	1,354
β'	2,718	1,935	1,710	1,549	1,423	1,319	1,230	1,153	1,086	1,026	0,972
β	2,718	1,944	1,720	1,561	1,437	1,337	1,248	1,172	1,104	1,045	0,992

V tab. 6.10 jsou hodnoty β vypočtené na základě vztahů (6.77), (6.72) a (6.71) označeny jako β', protože jde o přibližné hodnoty získané porovnáním dvojice pólů regulačního obvodu (6.67) s dvojicí dominantních pólů regulačního obvodu (6.53) za předpokladu, že jeho nedominantní póly mají na výsledné vlastnosti zanedbatelný vliv [22, 29]. Hodnoty upřesněné číslicovou simulací jsou v tab. 6.10 označeny jako β. Rozdíl mezi hodnotami β' získanými analytickou cestou a experimentálně upřesněnými hodnotami β není větší než 2 % a pro relativní překmit v rozmezí $0 \le \kappa \le 0{,}2$ (0 – 20 %) je dokonce menší než 1 %.

V publikaci [1] byl pro výpočet koeficientu β navržen vztah

$$\beta(\kappa) = 2{,}718 - 0{,}4547\kappa^{0{,}3432}, \tag{6.78}$$

kde κ je relativní překmit v procentech.

Pro regulační obvod s konvenčním regulátorem seřízeným MPM jsou rovněž určeny základní ukazatelé kvality, viz tab. 6.11.

Relativní změna dopravního zpoždění, při které dojde k nestabilitě regulačního obvodu, byla určena na základě vztahu (6.50)

$$\frac{\Delta T_d}{T_d} = \frac{\gamma}{\omega_g T_d}.$$

Z tab. 6.11 vyplývá, že MPM pro $0 \le \kappa \le 0{,}2$ (0 – 20 %) vyhovuje všem doporučovaným hodnotám nejdůležitějších ukazatelů kvality, viz (6.9), (6.17), (6.18) a (6.24), a proto MPM pro $\kappa \le 0{,}2$ (20 %) zaručuje dobrou robustnost regulačního obvodu s konvenčním regulátorem.

Ze srovnání tab. 6.9 – 6.11 pro κ = 0,05 (5 %) s tab. 6.7 a 6.8 je zřejmé, že MPM je pro seřízení proporcionálních soustav ekvivalentní metodě SIMC pro $T_1 \le 8T_d$ a $T_w = T_d$; přesně metoda MPM používá β = 1,944 a metoda SIMC β = 2. Z tohoto důvodu jsou téměř shodné i hodnoty základních ukazatelů kvality, porovnej tab. 6.8 (levý sloupec) s tab. 6.11 pro κ = 0,05.

Zásadní rozdíl mezi oběma metodami spočívá ve volbě požadovaného přenosu řízení. Metoda SIMC předpokládá požadovaný přenos řízení pro $T_w = T_d$ ve tvaru [viz (6.40)]

Tab. 6.11 Základní ukazatelé kvality pro regulační obvod seřízený MPM

κ	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
M_S	1,394	1,615	1,737	1,859	1,987	2,123	2,282	2,458	2,665
m_A	4,27	3,05	2,70	2,45	2,26	2,10	1,96	1,84	1,73
m_L [dB]	12,609	9,686	8,627	7,783	7,082	6,444	5,845	5,296	4,761
γ [deg]	68,9	60,5	56,7	53,3	50,1	47,1	44,1	41,1	38,1
γ[rad]	1,20	1,06	0,99	0,93	0,88	0,82	0,77	0,72	0,67
$A_{wy}(\omega_R)$	1	1,002	1,056	1,142	1,247	1,367	1,512	1,678	1,876
$L_{wy}(\omega_R)$ [dB]	0	0,017	0,473	1,153	1,917	2,715	3,591	4,496	5,465
$\omega_p T_d$	$\frac{\pi}{2} \doteq 1{,}57$								
$\omega_g T_d$	0,37	0,51	0,58	0,64	0,70	0,75	0,80	0,85	0,91
$\Delta T_d/T_d$	3,27	2,05	1,70	1,45	1,26	1,10	0,96	0,84	0,73

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$$

a metoda MPM pro (6.64) ve tvaru [viz (6.53)]

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{\beta T_d s + \mathrm{e}^{-T_d s}} \mathrm{e}^{-T_d s}.$$

Je zřejmé, že metoda SIMC ve své základní podobě, tj. pro $T_1 \leq 8T_d$ a $T_w = T_d$ nikdy nemůže zajistit vlastnosti regulačního obvodu vyjádřené přenosem řízení (6.40). Naproti tomu MPM zajistí vlastnosti regulačního obvodu dané přenosem řízení nejenom pro hodnotu β = 1,944 (≈ 2), ale i pro jiné hodnoty β v tab. 6.10, a to s vysokou přesností.

Tab. 6.9 může být rozšířena i pro proporcionální soustavu bez setrvačnosti s dopravním zpožděním

$$G_P(s) = k_1 \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{6.79}$$

s doporučeným konvenčním regulátorem I

$$G_C(s) = \frac{1}{T_I s} \tag{6.80}$$

pro

$$T_I^* = k_1 \beta T_d. \tag{6.81}$$

MPM lze použít i pro soustavy bez dopravního zpoždění, tj. T_d = 0, ale v tom případě požadovaný přenos řízení se předpokládá v jednoduchém tvaru [porovnej s (6.53)]

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}, \tag{6.82}$$

kde T_w je časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu. Přenos doporučeného regulátoru se získá po dosazení (6.82) do (6.51)

$$G_C(s) = \frac{1}{G_P(s)T_w s}. \tag{6.83}$$

Např. pro soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 \geq T_2 \tag{6.84}$$

se na základě vztahu (6.83) dostane přenos regulátoru $\mathrm{PID_i}$

$$G_C(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{k_1 T_w s} = K'_P \frac{(T'_I s + 1)(T'_D s + 1)}{T'_I s},$$

kde

$$K'^*_P = \frac{T_1}{k_1 T_w}, \quad T'^*_I = T_1, \quad T'^*_D = T_2, \tag{6.85}$$

resp. po použití přepočetních vztahů (5.29) se dostane přenos standardního regulátoru PID [viz (5.26)] se stavitelnými parametry

$$K^*_P = \frac{T_1 + T_2}{k_1 T_w}, \quad T^*_I = T_1 + T_2, \quad T^*_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \tag{6.86}$$

Velikost časové konstanty T_w je třeba volit s ohledem na omezení akční veličiny $u(t)$ [čím je menší T_w, tím větší jsou nároky na velikost akční veličiny $u(t)$] a na požadovanou dobu regulace t_s. Např. pro zadanou relativní toleranci regulace δ platí [viz obr. 6.1]

$$\begin{aligned} \delta &= 0{,}05\ (5\ \%) \ \Rightarrow\ t_s \approx 3T_w, \\ \delta &= 0{,}02\ (2\ \%) \ \Rightarrow\ t_s \approx 4T_w. \end{aligned} \tag{6.87}$$

Příklad 6.6

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{2}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)^2}$$

je třeba seřídit MPM regulátory PI a PID tak, aby relativní překmit byl okolo 10 % (časové konstanty jsou v sekundách).

Řešení:

Přenos regulované soustavy neodpovídá tvarům přenosů v tab. 6.9, a proto ho upravíme na tvary vhodné pro použití regulátorů PI a PID, tj. na tvary v řádcích 2 a 5 v tab. 6.9.

V souladu s „pravidlem poloviny“ můžeme psát: $k_1 = 2$, $T_{10} = 6$, $T_{20} = 4$, $T_{30} = T_{40} = 2$.

Náhradní přenos (4.29) [viz (4.54)]:

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2} = 8\,\mathrm{s}, \quad T_d = \frac{T_{20}}{2} + T_{30} + T_{40} = 6\,\mathrm{s},$$

$$G_P(s) = \frac{2}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)^2} \approx \frac{2}{8s+1}\mathrm{e}^{-6s}.$$

Na základě tab. 6.9 (řádek 2) a tab. 6.10 pro $k_1 = 2$, $T_1 = 8$, $T_d = 6$ a $\kappa = 0{,}1 \Rightarrow \beta = 1{,}720$ můžeme psát

$$K_P^* = \frac{T_1}{k_1 \beta T_d} \doteq 0{,}39; \quad T_I^* = T_1 = 8\,\text{s}.$$

Náhradní přenos (4.35) [viz (4.55)]:

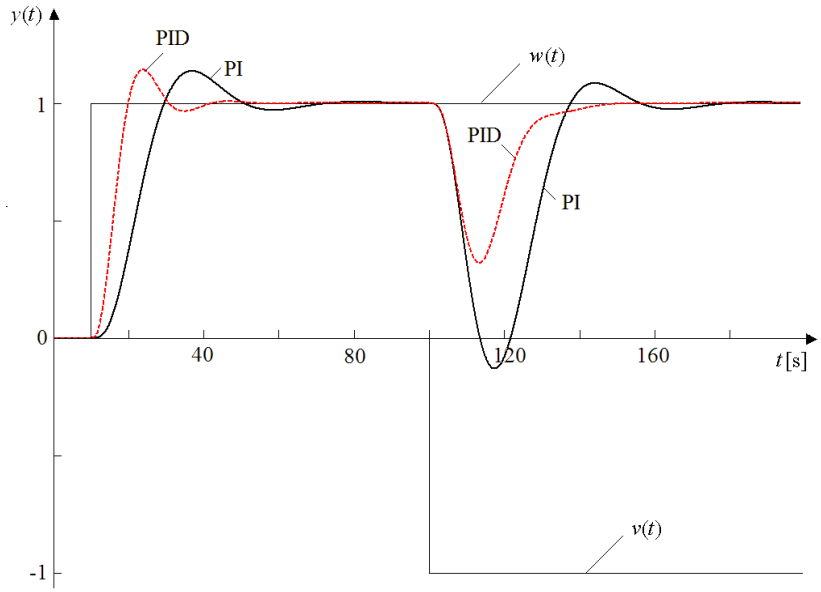
$$T_1 = T_{10} = 6\,\text{s}, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 5\,\text{s}, \quad T_d = \frac{T_{30}}{2} + T_{40} = 3\,\text{s},$$

$$G_P(s) = \frac{2}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)^2} \approx \frac{2}{(6s+1)(5s+1)} \mathrm{e}^{-3s}.$$

Na základě tab. 6.9 (řádek 5) a tab. 6.10 pro $k_1 = 2$, $T_1 = 6$, $T_2 = 5$, $T_d = 3$ a $\kappa = 0{,}1 \Rightarrow \beta = 1{,}720$ můžeme psát

$$K_P^* = \frac{T_1 + T_2}{k_1 \beta T_d} \doteq 1{,}07; \quad T_I^* = T_1 + T_2 = 11\,\text{s}, \quad T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \doteq 2{,}73\,\text{s}.$$

Odezvy regulačního obvodu jsou na obr. 6.23. Je zřejmé, že i přes hrubou aproximaci přenosu regulované soustavy získané odezvy ukazují na dobrou praktickou aplikovatelnost jak MPM, tak i „pravidla poloviny“.



Obr. 6.23 Odezvy regulačního obvodu seřízeného MPM – příklad 6.6

Příklad 6.7

Je třeba seřídit PID regulátor pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{2}{(5s+1)(3s+1)} \mathrm{e}^{-6s}$$

tak, aby relativní překmit byl $\kappa = 0$; 0,1 a 0,2 (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

Řešení:

Přenos regulované soustavy má požadovaný tvar pro regulátor PID (viz tab. 6.9, řádek 5), a proto pro $k_1 = 2$, $T_1 = 5$, $T_2 = 3$, $T_d = 6$ můžeme na základě tab. 6.9 a 6.10 přímo psát:

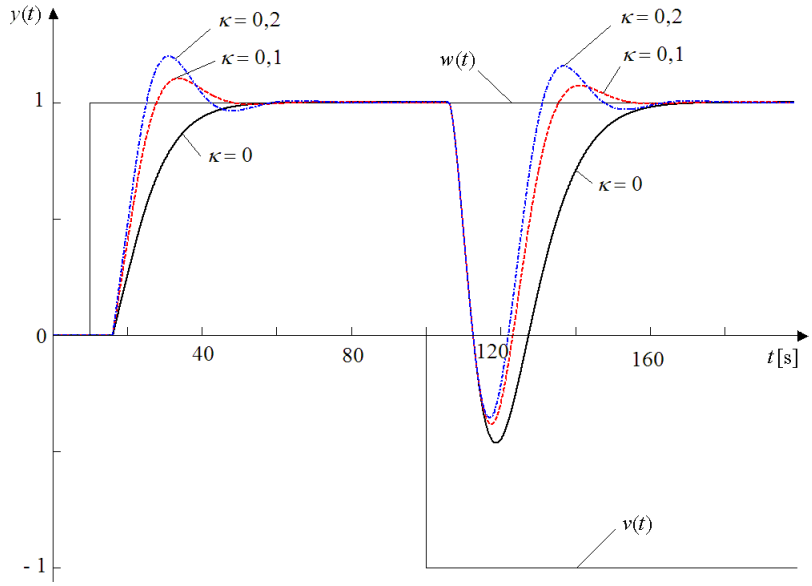
$$\kappa = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 2{,}718 \;\Rightarrow\; K_P^* = \frac{T_1 + T_2}{k_1 \beta T_d} \doteq 0{,}25\,;$$

$$\kappa = 0{,}1 \;\Rightarrow\; \beta = 1{,}720 \;\Rightarrow\; K_P^* \doteq 0{,}39\,;$$

$$\kappa = 0{,}2 \;\Rightarrow\; \beta = 1{,}437 \;\Rightarrow\; K_P^* \doteq 0{,}46\,;$$

$$T_I^* = T_1 + T_2 = 8\ \text{s},\ T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \doteq 1{,}88\ \text{s}\,.$$

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ jsou na obr. 6.24. Vidíme, že výsledné průběhy jsou velmi přesné.



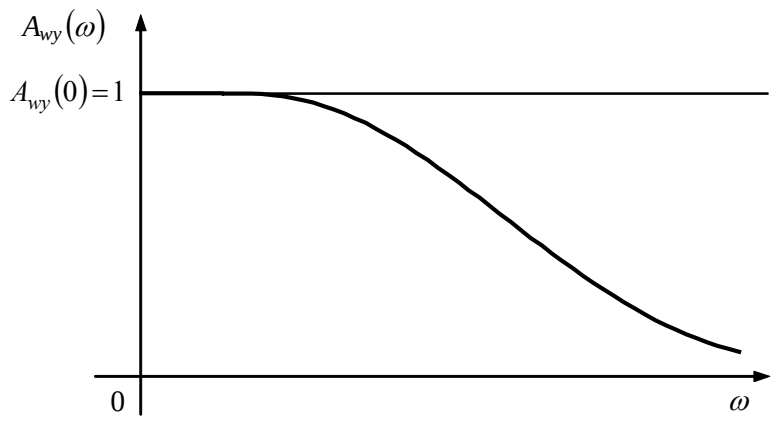
Obr. 6.24 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem PID seřízeným MPM – příklad 6.7

6.2.9 Metoda optimálního modulu

Mezi analytické metody seřizování regulátorů patří **m**etoda (kritérium) **o**ptimálního **m**odulu (MOM). Vychází z požadavku na přenos řízení, resp. modul kmitočtového přenosu řízení [7, 21, 22, 27, 29].

$$G_{wy}(s) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow A_{wy}(\omega) \to 1\,.$$

Předpokládá se, že požadovaný průběh $A_{wy}(\omega)$ by měl být monotónně klesající funkcí v souladu s obr. 6.25.



Obr. 6.25 Požadovaný průběh modulu kmitočtového přenosu řízení pro metodu optimálního modulu

Je zřejmé, že platí

$$A_{wy}(\omega) \to 1 \Leftrightarrow A_{wy}^2(\omega) \to 1.$$

Je to důležité, protože s druhou mocninou se lépe pracuje a navíc platí

$$(\alpha + \mathrm{j}\omega)(\alpha - \mathrm{j}\omega) = \alpha^2 + \omega^2 = |\alpha + \mathrm{j}\omega|^2,$$

a proto pro přenos řízení ve tvaru

$$G_{wy}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m \tag{6.88}$$

lze psát

$$A_{wy}^2(\omega) = G_{wy}(\mathrm{j}\omega) G_{wy}(-\mathrm{j}\omega) = \frac{B_m \omega^{2m} + B_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \ldots + B_1 \omega^2 + B_0}{A_n \omega^{2n} + A_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \ldots + A_1 \omega^2 + A_0}, \tag{6.89}$$

kde

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0^2 & B_0 &= b_0^2 \\
A_1 &= a_1^2 - 2a_0 a_2 & B_1 &= b_1^2 - 2b_0 b_2 \\
A_2 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4 & B_2 &= b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4 \\
&\vdots & &\vdots \\
A_i &= a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j a_{i-j} a_{i+j} & B_i &= b_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j b_{i-j} b_{i+j} \\
&\vdots & &\vdots \\
A_{n-1} &= a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n & B_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_{m-2} b_m \\
A_n &= a_n^2 & B_m &= b_m^2
\end{aligned} \tag{6.90}$$

pokud by platilo

$$\frac{B_0}{A_0} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} = \cdots = \frac{B_i}{A_i} = \cdots$$

a stupeň čitatele m by byl shodný se stupněm jmenovatele n přenosu řízení (6.88), pak

kvadrát modulu $A_{wy}^2(\omega)$, a tedy i modul $A_{wy}(\omega)$, by byl nezávislý na úhlovém kmitočtu ω. Z hlediska fyzikální realizace v technické praxi vždy platí $n > m$, a proto nezávislosti na úhlovém kmitočtu ω nelze dosáhnout. Regulační pochod bude vyhovující, bude-li $A_{wy}^2(\omega)$ s rostoucím úhlovým kmitočtem ω monotónně klesat, tj.

$$A_{wy}^2(0) = \frac{B_0}{A_0} \geq \frac{B_i}{A_i}. \tag{6.91}$$

Při použití metody optimálního modulu se prakticky postupuje tak, že podmínky (6.91) jsou uvažovány v počtu rovném počtu stavitelných parametrů regulátoru p, tj.

$$A_i B_0 = A_0 B_i, \quad i = 1,2,\ldots,p. \tag{6.92}$$

Pro regulační obvod typu $q = 1$ ($b_0 = a_0 \Leftrightarrow B_0 = A_0$) se vychází ze vztahů

$$A_i = B_i, \qquad i = 1,2,\ldots,p. \tag{6.93}$$

Protože podmínky (6.92), příp. (6.93) nemusí uvažovat všechny koeficienty charakteristického polynomu

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{6.94}$$

vystupujícího ve jmenovateli přenosu (6.88), metoda optimálního modulu obecně nezaručuje stabilitu, a tedy nemusí zajistit ani požadovanou kvalitu regulace. Tzn., že obecně při použití metody optimálního modulu je třeba kontrolovat stabilitu a nejlépe simulačně ověřit kvalitu regulace.

Má-li přenos regulované soustavy $G_P(s)$ některý ze tvarů uvedených v tab. 6.12, pak použitím doporučených regulátorů a odpovídajících hodnot stavitelných parametrů ($T = 0$) se obdrží tzv. **standardní tvar** přenosu řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}, \quad \xi_w = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad T_w = \sqrt{2} T_i, \tag{6.95}$$

kde pro řádek 1 a 2 v tab. 6.12 $i = 1$, pro řádek 3 a 4 $i = 2$ a pro řádek 5 $i = 3$.

V tomto případě není třeba kontrolovat stabilitu regulačního obvodu, protože tvar (6.95) je rovněž standardní tvar kritéria ITAE [viz (6.3e)]. Tento tvar vede na relativní překmit 4,3 %.

Při seřizování regulátorů podle tab. 6.12 byla použita tzv. **kompenzace časových konstant**, která spočívá ve vzájemném vykrácení jednoho nebo dvou stabilních dvojčlenů regulované soustavy jedním dvojčlenem u regulátorů PI a PD nebo dvěma dvojčleny u regulátoru PID. Dojde tím ke zjednodušení dynamiky regulačního obvodu, ale současně může dojít k pomalejším odezvám, protože stabilní nuly čitatele přenosu řízení $G_{wy}(s)$ mohou regulační pochod urychlit [22, 29].

Tab. 6.12 může být použita jak pro analogové regulátory ($T = 0$), tak i pro číslicové regulátory ($T > 0$), viz podkap. 6.3 [27, 29].

Metoda optimálního modulu se používá pro $q \leq 1$ především při regulaci elektrických pohonů, kde se malé časové konstanty (elektrické) zastupují náhradní součtovou časovou konstantou, viz podkapitola 4.2.

Postup:

1. Přenos regulované soustavy se upraví na vhodný tvar podle tab. 6.12 a pro doporučený regulátor se vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.
2. Pokud přenos regulované soustavy nejde upravit na některý z tvarů uvedených v tab. 6.12 nebo se chce použít jiný než doporučený regulátor, pak pro určení hodnot p stavitelných parametrů zvoleného regulátoru se pro $q = 0$ použijí vztahy (6.92) a pro $q = 1$ (6.93). Možné je rovněž použití kompenzace časových konstant.
3. V případě jiného tvaru přenosu řízení než standardního tvaru pro metodu optimálního modulu (6.95) je nutno zkontrolovat stabilitu (pokud regulační obvod je nestabilní, metoda optimálního modulu nemůže být použita) a nejlépe simulačně ověřit získanou kvalitu regulace.

Tab. 6.12 Stavitelné parametry regulátorů pro metodu optimálního modulu (MOM)

Regulovaná soustava		Regulátor	< analogový číslicový	$T = 0$ $T > 0$	
		Typ	K_P^*	T_I^*	T_D^*
1	$\frac{k_1}{T_1 s + 1}$	I	–	$2k_1(T_1 - 0{,}5T)$	–
2	$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}$	P	$\frac{1}{2k_1 T_1}$	–	–
3	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2$	PI	$\frac{T_I^*}{2k_1 T_2}$	$T_1 - 0{,}5T$	–
4	$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2$	PD	$\frac{1}{2k_1(T_2 + 0{,}5T)}$	–	$T_1 - 0{,}5T$
5	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2 \geq T_3$	PID	$\frac{T_I^*}{2k_1(T_3 + 0{,}5T)}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$

Příklad 6.8

Metodou optimálního modulu je třeba seřídit regulátor PI pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \qquad T_1 \geq T_2$$

s použitím kompenzace.

Řešení:

Pro regulátor PI s přenosem

$$G_C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{K_P(T_I s + 1)}{T_I s}$$

přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{K_P k_1 (T_I s + 1)}{T_I s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

ze kterého vyplývá, že typ regulačního obvodu $q = 1$.

Pro $T_I^* = T_1$ dojde ke vzájemnému zkrácení stabilních dvojčlenů $T_1 s + 1$ a přenos otevřeného regulačního obvodu se podstatně zjednoduší

$$G_o(s) = \frac{K_P k_1}{T_1 s(T_2 s + 1)}.$$

Přenos řízení má tvar

$$G_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K_P k_1}{T_1 T_2 s^2 + T_1 s + K_P k_1},$$

kde $a_0 = b_0 = K_P k_1$, $a_1 = T_1$, $a_2 = T_1 T_2$.

Ze vztahů (6.90) a (6.93) pro $p = 1$ se dostane

$$A_1 = a_1^2 - 2a_0 a_2 = T_1^2 - 2K_P k_1 T_1 T_2,$$
$$B_1 = 0,$$
$$A_1 = 0 \Rightarrow T_1^2 - 2K_P k_1 T_1 T_2 = 0 \Rightarrow K_P^* = \frac{T_1}{2k_1 T_2}.$$

Hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI jsou

$$K_P^* = \frac{T_1}{2k_1 T_2}, \quad T_I^* = T_1.$$

Stejné hodnoty by byly získány přímo z tab. 6.12 (řádek 3).

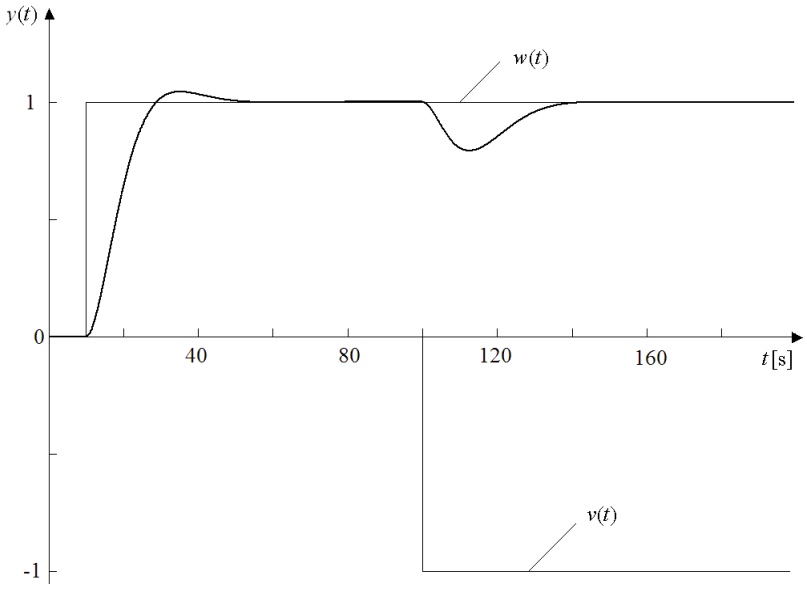
Po dosazení těchto hodnot do přenosu řízení se po úpravě dostane

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{2T_2^2 s^2 + 2T_2 s + 1} = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1},$$

kde

$$\xi_w = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad T_w = \sqrt{2}T_2.$$

Je zřejmé, že byl získán standardní tvar přenosu řízení pro metodu optimálního modulu, viz (6.95), a proto kontrola stability regulačního obvodu je zbytečná.



Obr. 6.26 Průběh regulované veličiny $y(t)$ pro regulátor PI seřízený MOM – příklad 6.8

Např. pro $k_1 = 3$, $T_1 = 6$ s a $T_2 = 4$ s se dostane,

$$K_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_2} = 0{,}25; \qquad T_I^* = T_1 = 6\,\text{s}.$$

Průběh regulované veličiny $y(t)$ je na obr. 6.26.

6.2.10 Metoda symetrického optima

Metoda **s**ymetrického **o**ptima (MSO) je vhodná pro seřizování regulačních obvodů typu $q \geq 2$, a především v případě působení poruch před regulovanou soustavou [2, 7, 21, 29]. Zde se předpokládá $q = 2$ a přenos řízení regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI ve standardním tvaru (viz obr. 5.5)

$$G'_{wy}(s) = \frac{4T_i s + 1}{8T_i^3 s^3 + 8T_i^2 s^2 + 4T_i s + 1} = \frac{4T_i s + 1}{(2T_i s + 1)(4T_i^2 s^2 + 2T_i s + 1)}, \tag{6.96}$$

kde $i = 1, 2$ v souladu s odpovídajícím řádkem v tab. 6.13.

Pro výpočet hodnot stavitelných parametrů je třeba řešit soustavu dvou rovnic [viz (6.90)]

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^2 - 2a_0a_2 &= 0 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 &= 0 \end{aligned}. \tag{6.97}$$

Např. pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \tag{6.98}$$

je třeba zvolit regulátor PI (aby $q = 2$) s přenosem

$$G_C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right). \tag{6.99}$$

Z přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{k_1 K_P (T_I s + 1)}{T_I s^2 (T_1 s + 1)}$$

se získá přenos uzavřeného regulačního obvodu (přenos řízení)

$$G'_{wy}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{k_1 K_P T_I s + k_1 K_P}{T_1 T_I\, s^3 + T_I\, s^2 + k_1 K_P T_I s + k_1 K_P}, \tag{6.100}$$

ze kterého je zřejmé, že $q = 2$ (poslední dva koeficienty v čitateli a jmenovateli jsou shodné.

Pro $a_0 = k_1 K_P$, $a_1 = k_1 K_P T_I$, $a_2 = T_I$ a $a_3 = T_1 T_I$ po dosazení do (6.97) se dostane (viz řádek 1 v tab. 6.13 pro $T = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &(k_1 K_P T_I)^2 - 2k_1 K_P T_I = 0 \\ &T_I^2 - 2k_1 K_P T_1 T_I^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_P^* &= \frac{1}{2k_1 T_1}. \\ T_I^* &= 4T_1 \end{aligned} \tag{6.101}$$

Je zřejmé, že po dosazení (6.101) do (6.100) se pro $i = 1$ dostane standardní tvar přenosu (6.96).

Podobným způsobem se pro $T_1 >> T_2$ získá řádek 2 v tab. 6.13 pro $T = 0$, protože lze psát

$$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{\left(s + \dfrac{1}{T_1}\right)(T_2 s + 1)} \approx \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{s(T_2 s + 1)}. \tag{6.102}$$

Protože v čitateli přenosu řízení (6.96) vystupuje stabilní nula a navíc $q = 2$, vzniká v regulačním obvodě poměrně veliký překmit okolo 43 %. Veliký překmit může být podstatně snížen na hodnotu okolo 8 % použitím vstupního filtru (viz obr. 5.5)

$$G_F(s) = \frac{1}{4T_i s + 1}, \tag{6.103}$$

Tab. 6.13 Stavitelné parametry regulátoru PI pro metodu symetrického optima (MSO)

Regulovaná soustava		Regulátor PI < analogový $T = 0$, číslicový $T > 0$		
		K_P^*	T_I^*	Filtr
1	$\dfrac{k_1}{s(T_1 s + 1)}$	$\dfrac{4}{k_1(8T_1 + 3T)}$	$4T_1 - 0{,}5T$	$\dfrac{1}{4T_1 s + 1}$
2	$\dfrac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 >> T_2$	$\dfrac{4T_1}{k_1(8T_2 + 3T)}$	$4T_2 - 0{,}5T$	$\dfrac{1}{4T_2 s + 1}$

který v případě použití regulátoru PI se dvěma stupni volnosti lze realizovat volbou váhy žádané veličiny u proporcionální složky $b = 0$, viz vztah (5.36) pro $T_I = 4T_i$ a $T_D = 0$.

Tab. 6.13 může být použita pro seřízení analogových regulátorů ($T = 0$) nebo číslicových regulátorů ($T > 0$), viz podkap. 6.3 [29].

Metoda symetrického optima, podobně jako metoda optimálního modulu, se převážně používá u elektrických pohonů, kde se místo vstupního filtru nebo regulátoru PI se dvěma stupni volnosti používá omezení rychlosti nárůstu žádané veličiny [7, 21].

Např. přenos stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením (Příklad 3.6) může být na tvar (6.98) snadno upraven (viz také podkap. 4.2), protože indukčnost obvodu kotvy motoru je často zanedbatelná, tj. $L_a \approx 0$.

Stejný tvar (6.98) má také zjednodušený linearizovaný model dvojčinného přímočarého hydromotoru, viz příklad 4.1.

Postup:

1. Přenos regulované soustavy musí mít tvar uvedený v tab. 6.13, jinak je ho třeba na tento tvar upravit, např. postupem dle podkap. 4.2.
2. Na základě tab. 6.13 se určí hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI a v případě použití regulátoru PI se dvěma stupni volnosti se volí $b = 0$.

Příklad 6.9

Metodou symetrického optima je třeba seřídit regulátor PI pro soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{0{,}05}{s(10s+1)(2s+1)}.$$

Časové konstanty jsou v sekundách.

Řešení:

Přenos regulované soustavy nemá vhodný tvar pro MSO (viz tab. 6.13), a proto je ho nutno upravit. Pro $k_1 = 0{,}05$; $T_{10} = 10$ a $T_{20} = 2$ se na základě rovnosti doplňkových ploch nad náhradní a původní přechodovou charakteristikou soustavy (viz podkap. 4.2) dostane:

$$T_1 = T_{10} + T_{20} = 12 \Rightarrow$$

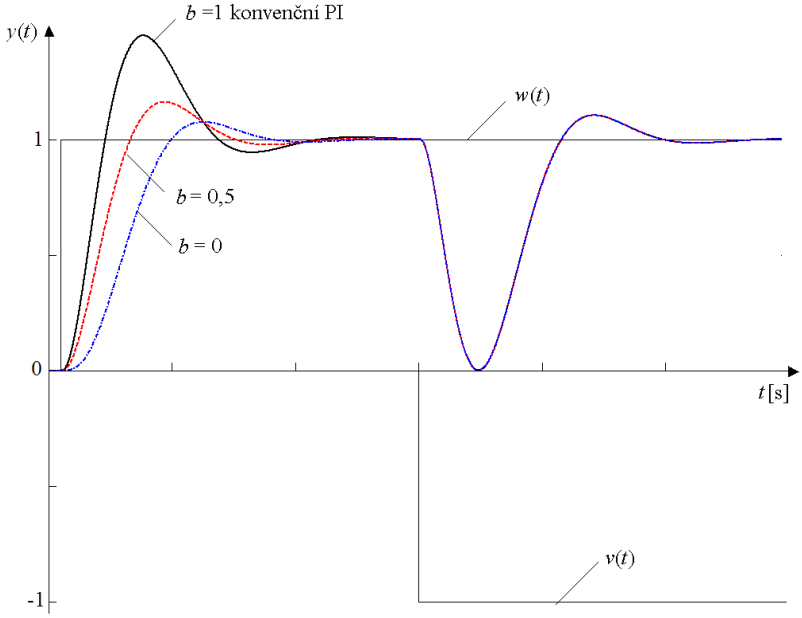
$$G_P(s) = \frac{0{,}05}{s(10s+1)(2s+1)} \approx \frac{0{,}05}{s(12s+1)}.$$

Z tab. 6.13 se pak obdrží hodnoty stavitelných parametrů ($k_1 = 0{,}05$; $T_1 = 12$).

Regulátor PI ($T = 0$)

$$K_P^* = \frac{1}{2k_1T_1} \doteq 0{,}84;\ T_I^* = 4T_1 = 48\,\text{s}.$$

Na obr. 6.27 jsou ukázány průběhy regulované veličiny $y(t)$ pro různé hodnoty váhy žádané veličiny u proporcionální složky b. Pro $b = 1$ regulátor je konvenční (1DOF). Je zřejmé, že použitím regulátoru PI 2DOF došlo k podstatnému snížení překmitu v odezvě na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$.



Obr. 6.27 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem PI 2DOF seřízeným MSO pro různé hodnoty váhy *b* – příklad 6.9

6.3 Číslicová regulace

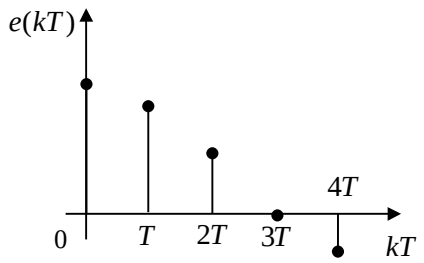
S rozvojem číslicové techniky a současně s poklesem její ceny se i v regulaci stále častěji používají i číslicové regulátory, které v diskrétní formě realizují stejné algoritmy jako odpovídající analogové regulátory. Vzhledem k předpokládané zanedbatelně malé kvantizační chybě pojmy číslicový (diskrétní v úrovni i čase) a diskrétní (spojitý v úrovni a diskrétní v čase) nebudou rozlišovány. Např. analogovému regulátoru typu PID odpovídá číslicový (diskrétní) regulátor typu PSD (proporcionálně sumačně diferenční)

$$u(kT) = K_P\left\{e(kT) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(iT) + \frac{T_D}{T}\left\{e(kT) - e[(k-1)T]\right\}\right\}, \tag{6.104}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,$$

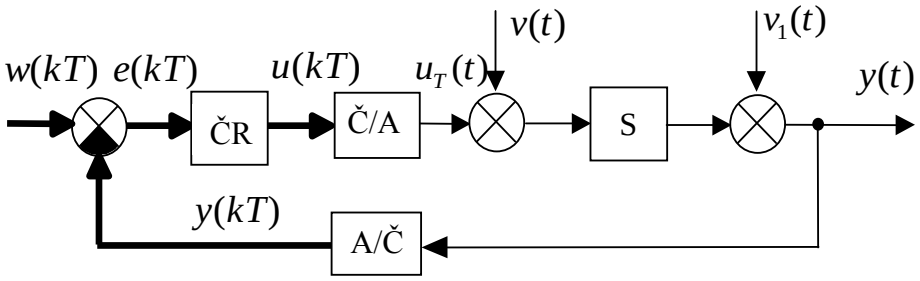
kde T je **vzorkovací perioda**, kT – **diskrétní čas**.

Je zřejmé, že u číslicových regulátorů vystupuje další stavitelný parametr – vzorkovací perioda T, jejíž správná volba je velmi důležitá z hlediska kvality regulace. Protože vzorkovací ***perioda T zvyšuje vliv sumační činnosti (sumační činnost destabilizuje regulační pochod) a snižuje vliv diferenční činnosti (diferenční činnost stabilizuje regulační pochod), její vliv na kvalitu regulace je vždy negativní***. Vyplývá to rovněž z toho, že mezi okamžiky vzorkování $kT \le t < (k+1)T$ číslicový regulátor nemá informaci o okamžité hodnotě regulační odchylky $e(t)$, viz obr. 6.28.

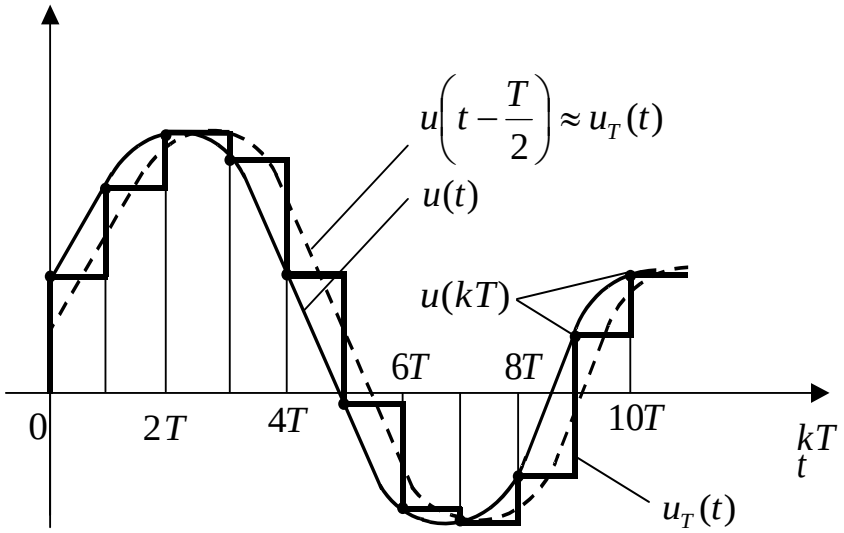


Obr. 6.28 Průběh regulační odchylky v regulačním obvodu s číslicovým regulátorem

Převedení spojité (analogové) veličiny na veličinu diskrétní (v čase) provádí **analogově číslicový převodník** (A/Č převodník), který je nejčastěji zapojen ve zpětné vazbě, jako na obr. 6.29. Výstupní veličinou číslicového regulátoru (ČR) je diskrétní akční veličina $u(kT)$, kterou **číslicově analogový převodník** (Č/A převodník) převádí na spojitou v čase, tzv. **tvarovanou veličinu** $u_T(t)$ mající nejčastěji stupňovitý průběh (obr. 6.30)



Obr. 6.29 Regulační obvod s číslicovým regulátorem



Obr. 6.30 Průběhy akčních veličin v regulačním obvodu s číslicovým regulátorem

Číslicový regulátor typu PSD patří k nejsložitějším konvenčním regulátorům. V praxi se používají i jednodušší typy:

číslicový regulátor PS (proporcionálně sumační)

$$u(kT) = K_P\left[e(kT) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(iT)\right], \tag{6.105}$$

číslicový regulátor PD (proporcionálně diferenční)

$$u(kT) = K_P\left\{e(kT) + \frac{T_D}{T}\{e(kT) - e[(k-1)T]\}\right\}, \tag{6.106}$$

číslicový regulátor S (sumační)

$$u(kT) = \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(iT), \tag{6.107}$$

číslicový regulátor P (proporcionální)

$$u(kT) = K_P e(kT). \tag{6.108}$$

V praxi se algoritmy číslicové regulace se sumační činností realizují v tzv. přírůstkovém tvaru [na rozdíl od absolutního vyjádření (6.104) – (6.108)], tj.:

číslicový regulátor PSD

$$\left.\begin{aligned} &u(kT) = u[(k-1)T] + q_0 e(kT) + q_1 e[(k-1)T] + q_2 e[(k-2)T], \\ &q_0 = K_P\left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}\right),\ q_1 = -K_P\left(1 + 2\frac{T_D}{T}\right),\ q_2 = K_P\frac{T_D}{T}, \end{aligned}\right\} \tag{6.109}$$

číslicový regulátor PS

$$\left.\begin{aligned} &u(kT) = u[(k-1)T] + q_0 e(kT) + q_1 e[(k-1)T], \\ &q_0 = K_P\left(1 + \frac{T}{T_I}\right),\ q_1 = -K_P, \end{aligned}\right\} \tag{6.110}$$

číslicový regulátor S

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{T_I} e(kT). \tag{6.111}$$

Někdy, především v zahraniční literatuře, se typy číslicových regulátorů označují stejně jako u analogových regulátorů, ale vždy se tam vyskytuje slovo „číslicový“ (např. číslicový regulátor PI atd.). Často je rovněž sumační činnost realizována jinou než zpětnou obdélníkovou metodou (např. lichoběžníkovou metodou) a index *i* v sumaci začíná od 1 a ne od 0.

Při vhodně zvolené hodnotě vzorkovací periody *T* jsou tyto rozdíly zanedbatelné a navíc výrobce často ani neuvádí způsob realizace sumace.

U číslicové regulace veličina vstupující do diferenční složky musí být vždy vhodně filtrována [18, 22, 29].

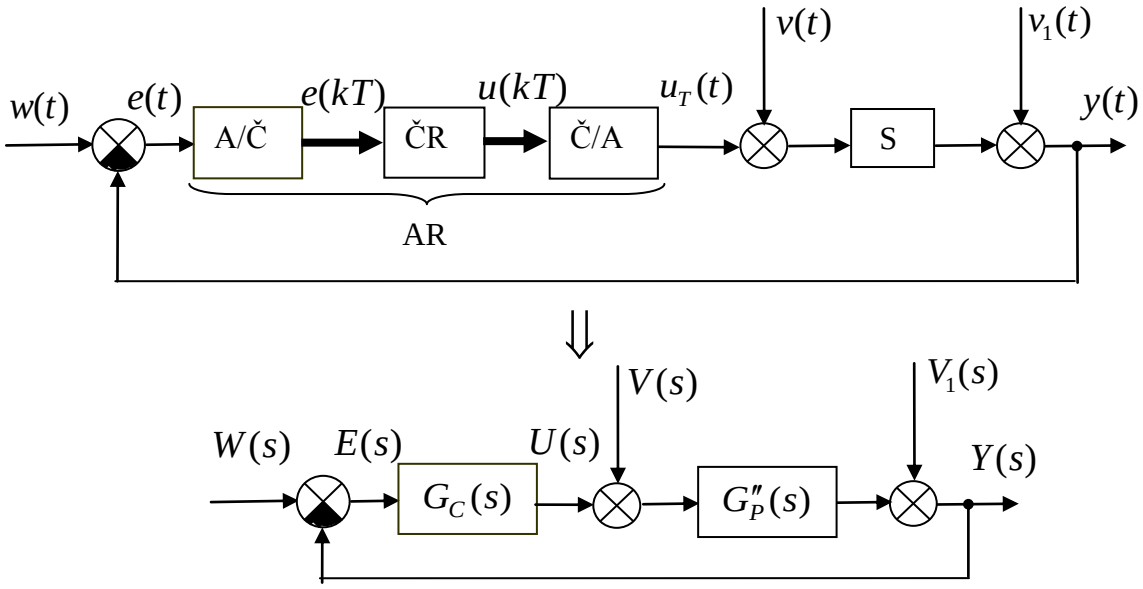
Číslicové regulátory, podobně jako analogové regulátory, mohou být rovněž konstruovány se dvěma stupni volnosti.

Při použití konvenčního číslicového regulátoru, ve srovnání se stejným typem analogového regulátoru, vždy dochází ke snížení kvality regulačního pochodu. Je to způsobeno tím, že mezi okamžiky vzorkování číslicový regulátor není informován o skutečné

regulační odchylce e a navíc zvyšováním velikosti vzorkovací periody T dochází k destabilizaci regulačního obvodu, jak již bylo výše uvedeno.

Je tedy zřejmé, že volba vzorkovací periody i problematika číslicové regulace je velmi složitá. Níže bude uvedeno zjednodušené seřízení konvenčních číslicových regulátorů, které je pro běžnou regulační praxi plně vyhovující.

Přesune-li se A/Č převodník ze zpětné vazby před číslicový regulátor (obr. 6.31 nahoře), pak na číslicový regulátor s oběma převodníky lze pohlížet přibližně jako na analogový regulátor. Proto pro přibližnou syntézu regulačního obvodu s číslicovým regulátorem lze použít spojitý regulační obvod na obr. 6.31 (dole).



Obr. 6.31 Transformace regulačního obvodu s číslicovým regulátorem na spojitý regulační obvod

Za předpokladu, že Č/A převodník má vlastnosti vzorkovače a tvarovače nultého řádu, tvarovaná akční veličina $u_T(t)$ má tvar stupňovité časové funkce, viz obr. 6.30.

Z průběhu tvarované akční veličiny $u_T(t)$ vyplývá, že pro dostatečně malou vzorkovací periodu T může být přibližně vyjádřena jako $u(t - T/2)$. Proto regulační obvod s číslicovým regulátorem může být zastoupen spojitým regulačním obvodem se soustavou

$$G''_P(s) = G_P(s)\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} = G'_P(s)\mathrm{e}^{-T_d s}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} = G'_P(s)\mathrm{e}^{-\left(T_d + \frac{T}{2}\right)s}, \tag{6.112}$$

kde $G'_P(s)$ je část přenosu regulované soustavy neobsahující dopravní zpoždění.

Pro tuto soustavu se navrhne a seřídí vhodný analogový regulátor $G_C(s)$. Hodnoty jeho stavitelných parametrů spolu se vzorkovací periodou T se pak použijí u odpovídajícího číslicového regulátoru.

Některé metody jsou odvozeny i pro číslicové regulátory. V této publikaci se to týká MOM a MSO (tab. 6.12 a 6.13), které jsou určeny pro regulované soustavy neobsahující dopravní zpoždění. Proto u těchto metod můžeme stavitelné parametry číslicových regulátorů určit přímo. U ostatních metod uvažujících regulované soustavy s dopravním zpožděním pro seřízení konvenčních číslicových regulátorů můžeme použít výše uvedený přibližný postup.

Pokud pro metody seřizování regulátorů uvedené v této publikaci budou splněny nerovnosti [29]

$$T < 0{,}3T_1 \quad \text{a} \quad T < 0{,}3T_d\,, \tag{6.113}$$

pak lze předpokládat, že zhoršení kvality regulace ve srovnání s odpovídající analogovou regulací nebude větší než asi 15 % [kritérium IAE (6.3e)].

Za časovou konstantu T_1 v nerovnosti (6.113) je třeba uvažovat časovou konstantu regulované soustavy s největší hodnotou.

Příklad 6.10

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)}$$

je třeba seřídit analogový i číslicový regulátor tak, aby relativní překmit byl okolo 5%.

Řešení:

Protože relativní překmit 5 % dovedou zajistit MOM a MPM (pro danou regulovanou soustavu také metoda SIMC), pro seřízení analogového i číslicového regulátoru PI použijeme tyto dvě metody.

Metoda optimálního modulu (MOM)

Přenos regulované soustavy má pro MOM požadovaný tvar (tab. 6.12, $k_1 = 1$, $T_1 = 6$, $T_2 = 4$), a proto můžeme přímo psát:

a) analogový regulátor PI ($T = 0$)

$$K_P^* = \frac{T_1}{2k_1T_2} = 0{,}75;\ T_I^* = T_1 = 6\,\text{s},$$

b) číslicový regulátor PI (PS)

V souladu s nerovnostmi (6.113) volíme např. $T = 1$ s.

$$K_P^* = \frac{T_1 - 0{,}5T}{2k_1T_2} \doteq 0{,}69;\ T_I^* = T_1 - 0{,}5T = 5{,}5\,\text{s}.$$

Odezvy regulačního obvodu seřízeného MOM pro poruchu $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy jsou na obr. 6.32a.

Metoda požadovaného modelu (MPM)

Přenos regulované soustavy nemá vhodný tvar pro MPM (tab. 6.9), a proto ho musíme nejdříve upravit (pro „pravidlo poloviny“: $k_1 = 1$, $T_{10} = 6$, $T_{20} = 4$).

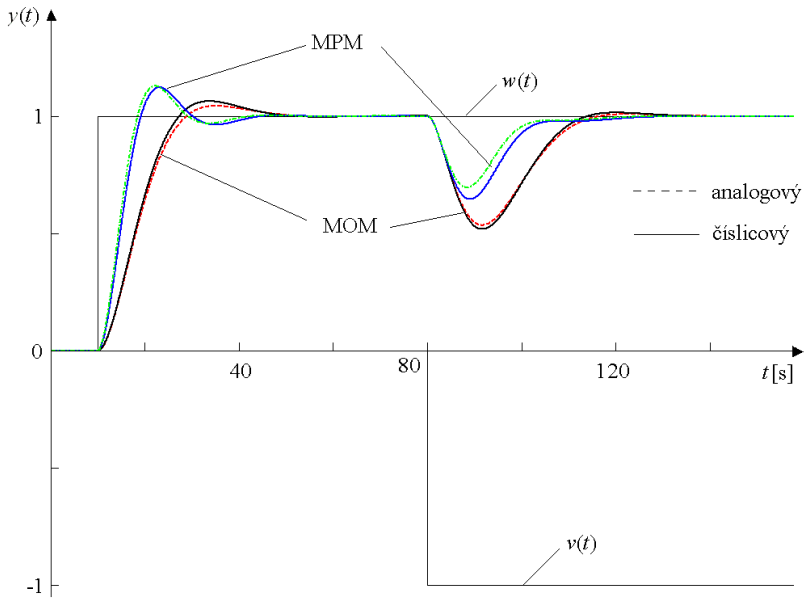
V souladu s (4.54) můžeme psát

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2} = 8\,\text{s}, \qquad T_{d1} = \frac{T_{20}}{2} = 2\,\text{s}\,,$$

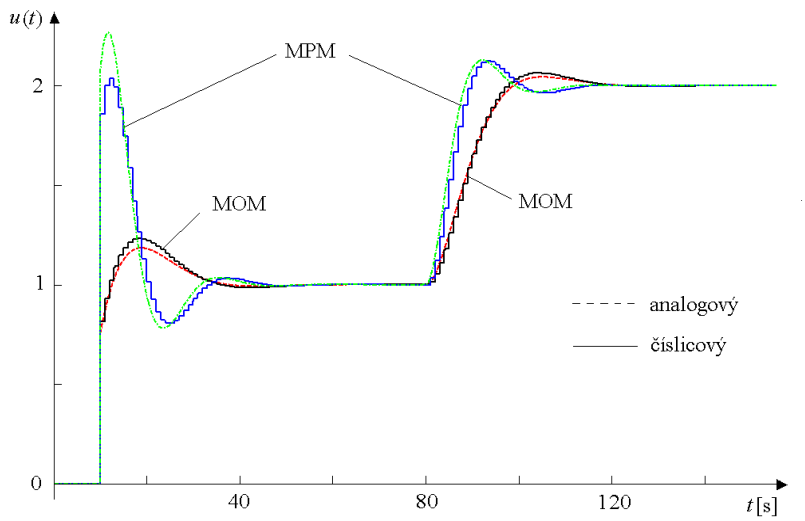
$$G_P(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)} \approx \frac{1}{8s+1}\,\text{e}^{-2s}\,.$$

Pro MPM použijeme tab. 6.9 a 6.10 ($k_1 = 1$, $T_1 = 8$, $T_d = 2$):

a)



b)



Obr. 6.32 Regulační obvod s analogovým a číslicovým regulátorem PI – příklad 6.10: a) průběhy regulovaných veličin, b) průběhy akčních veličin

a) analogový regulátor PI ($T = 0$)

$$\kappa = 0{,}05 \;\Rightarrow\; \beta = 1{,}944\,,$$

$$K_P^* = \frac{T_1}{k_1 \beta T_d} \doteq 2{,}06;\;\; T_I^* = T_1 = 8\,\text{s},$$

b) číslicový regulátor PI (PS)

Použijeme stejnou vzorkovací periodu $T = 1$ s z důvodu porovnání MPM a MOM.

$$K_P^* = \frac{T_1}{k_1 \beta \left(T_d + \dfrac{T}{2} \right)} \doteq 1{,}65;\;\; T_I^* = T_1 = 8\,\text{s}.$$

Odezvy jsou na obr. 6.32a. Jsou tam rovněž ukázány odpovídající průběhy akčních veličin (obr. 6.32b).

Z průběhů odezev na obr. 6.32a vyplývá, že i když v MPM byla použita poměrně hrubá aproximace přenosu regulované soustavy, dává rychlejší odezvu s větším překmitem. U MPM lze překmit snadno snížit snížením zesílení regulátoru K_P.

Získané průběhy na obr. 3.32 rovněž ukazují, že zjednodušené seřízení číslicových regulátorů dává výsledky přijatelné pro regulační praxi.

6.4 Kaskádová regulace

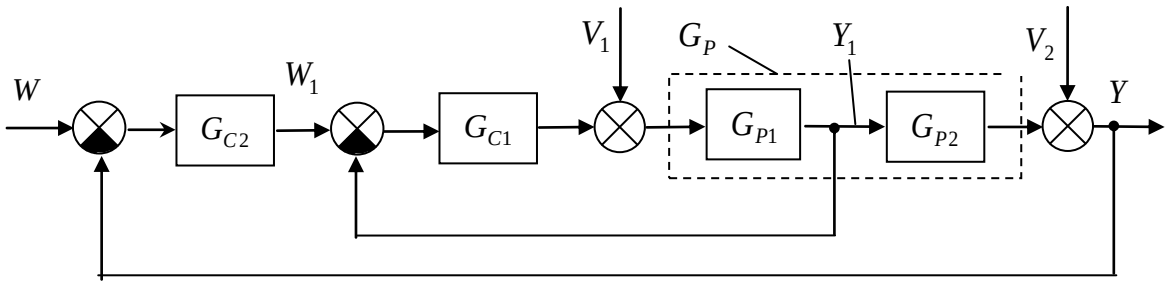
Jednoduché regulační obvody s konvenčními regulátory (tj. regulační obvody s jednoduchou jednosmyčkovou strukturou) nemusí vždy zajistit požadovanou kvalitu regulačního pochodu. V tomto případě je možné použít regulátory se složitější strukturou, příp. složitější strukturu mohou mít regulační obvody.

V prvém případě návrh, seřízení, a především pozdější údržba v provozních podmínkách jsou velmi náročné jak z odborného, tak i finančního hlediska. Často nenákladný a schůdný je druhý případ, kdy použitím složitější, tzv. rozvětvené struktury regulačního obvodu lze dosáhnout podstatného zvýšení kvality regulačního pochodu. Takové regulační obvody se nazývají **rozvětvené** a vyznačují se tím, že mají složitější strukturu, ale pouze jednu hlavní žádanou veličinu $w(t)$ a jednu hlavní regulovanou veličinu $y(t)$.

Význam rozvětvených regulačních obvodů v současné době je veliký, protože dostupnost kvalitní měřicí a výpočetní techniky umožňuje rozvětvené struktury snadno implementovat v průmyslové praxi. Níže bude uveden pouze **kaskádový regulační obvod**.

Tam, kde nebudou uvedeny argumenty, závěry se budou týkat jak spojitých regulačních obvodů s analogovými regulátory, tak i diskrétních regulačních obvodů s číslicovými regulátory.

Blokové schéma kaskádového regulačního obvodu (regulačního obvodu s pomocnou regulovanou veličinou) je na obr. 6.33. Ze schématu vyplývá, že se skládá s pomocného (podřízeného) regulačního obvodu (tj. vnitřní smyčky) a z hlavního (nadřazeného) regulačního obvodu (tj. vnější smyčky). Regulovaná veličina y_1 se nazývá pomocná, podobně jako žádaná veličina w_1.



Obr. 6.33 Kaskádový regulační obvod

Pro pomocný regulační obvod v souladu s obr. 6.33 lze psát

$$G_{w_1y_1} = \frac{G_{C1}G_{P1}}{1+G_{C1}G_{P1}} = \frac{1}{\dfrac{1}{G_{C1}G_{P1}}+1}, \quad G_{v_1y_1} = \frac{G_{P1}}{1+G_{C1}G_{P1}} = (1-G_{w_1y_1})G_{P1}, \tag{6.114}$$

pak pro hlavní regulační obvod platí

$$G_{wy} = \frac{G_{C2}G_{P2}G_{w_1y_1}}{1+G_{C2}G_{P2}G_{w_1y_1}}, \; G_{v_1y} = \frac{(1-G_{w_1y_1})G_{P1}G_{P2}}{1+G_{C2}G_{P2}G_{w_1y_1}}, \; G_{v_2y} = \frac{1}{1+G_{C2}G_{P2}G_{w_1y_1}}. \tag{6.115}$$

Bude-li pomocný regulační obvod správně seřízen, pak pro dostatečně veliký modul otevřené vnitřní smyčky platí

$$|G_{C1}G_{P1}| \to \infty \quad \Rightarrow \quad G_{w_1y_1} \to 1 \tag{6.116}$$

a přenosy hlavního regulačního obvodu mohou být zjednodušeny

$$G_{wy} \approx \frac{G_{C2}G_{P2}}{1+G_{C2}G_{P2}}, \; G_{v_1y} \approx 0, \; G_{v_2y} \approx \frac{1}{1+G_{C2}G_{P2}}. \tag{6.117}$$

Seřízením hlavního regulačního obvodu (tj. vnější smyčky) se pak zajistí požadovaná kvalita regulačního pochodu.

Z výše uvedeného je zřejmé, že kaskádový regulační obvod se dá použít v tom případě, kdy regulovaná soustava může být rozdělena na dvě části s přenosy G_{P1} a G_{P2} (tj. na vhodném místě lze měřit y_1). Jeho základní vlastností je, že v podstatě eliminuje vnitřní smyčku včetně poruch působících na vstupu nebo výstupu první části regulované soustavy a případných jejích nelinearit. Vnitřní smyčka by neměla obsahovat dopravní zpoždění a její regulátor by měl být co nejjednodušší, aby nezvyšoval dynamiku, tj. pomocný regulátor G_{C1} je nejčastěji typu P. Hlavní regulátor G_{C2} by měl obsahovat integrační (sumační) složku, a proto se nejčastěji volí typu PI (PS), případně typu PID (PSD).

Kaskádové regulační obvody se používají při regulaci elektrických pohonů a výkonových servomechanismů. V tomto případě mohou mít i více smyček [7, 21, 22]. Velmi časté je rovněž jejich použití při regulaci kotlů, destilačních kolon a jaderných reaktorů a jiných tepelně-energetických zařízení.

Postup:

1. Nejdříve se seřídí vnitřní smyčka (tj. pomocný regulační obvod) pro první část regulované soustavy nejčastěji při použití regulátoru typu P (není na závadu, že vystupují trvalé regulační odchylky).
2. Pak se nahradí vnitřní smyčka pokud možno co nejjednodušším dynamickým členem s přenosem G_{w1y1} (v případě možnosti se zastoupí 1).
3. Nakonec se seřídí vnější smyčka (tj. hlavní regulační obvod) při použití regulátoru typu PI (PS) nebo PID (PSD) a nejlépe simulačně ověří dosažená kvalita regulačního pochodu.

Příklad 6.11

Pro regulovanou soustavu

$$G_P(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)}\mathrm{e}^{-T_ds} = \frac{k_1}{s}\frac{k_2}{T_1s+1}\mathrm{e}^{-T_ds}$$

je třeba navrhnout takovou regulaci, která zajistí regulační pochod bez překmitu a bez trvalé regulační odchylky při skokové změně polohy poruchové veličiny $v(t)$ na vstupu regulované soustavy.

Řešení:

Vzhledem k tomu, že je možné měřit veličinu za integračním členem, lze regulovanou soustavu popsat dvěma sériově řazenými přenosy

$$G_{P1}(s) = \frac{k_1}{s}, \quad G_{P2}(s) = \frac{k_2}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$$

a je možné použít kaskádovou regulaci dle obr. 6.34.

Ve vnitřní smyčce použijeme regulátor pypu P

$$G_{C1}(s) = K_{P1}$$

a ve vnější smyčce regulátor typu PI

$$G_{C2}(s) = K_{P2}\left(1 + \frac{1}{T_{I2} s}\right).$$

Pro pomocný regulační obvod (tj. vnitřní smyčku) lze psát

$$G_{w_1 y_1}(s) = \frac{G_{C1}(s) G_{P1}(s)}{1 + G_{C1}(s) G_{P1}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K_{P1} k_1} s + 1}$$

$$G_{v_1 y_1}(s) = \frac{G_{P1}(s)}{1 + G_{C1}(s) G_{P1}(s)} = \left[1 - G_{w_1 y_1}(s)\right] G_{P1}(s)$$

Je zřejmé, že vnitřní smyčku bude možno zanedbat teoreticky pro $K_{P1} \to \infty$, prakticky, pokud její časová konstanta bude podstatně menší než časová konstanta T_1, tj.

$$\frac{1}{K_{P1}^* k_1} << T_1 \quad \Rightarrow \quad G_{w_1 y_1}(s) \to 1, \; G_{v_1 y_1}(s) \to 0.$$

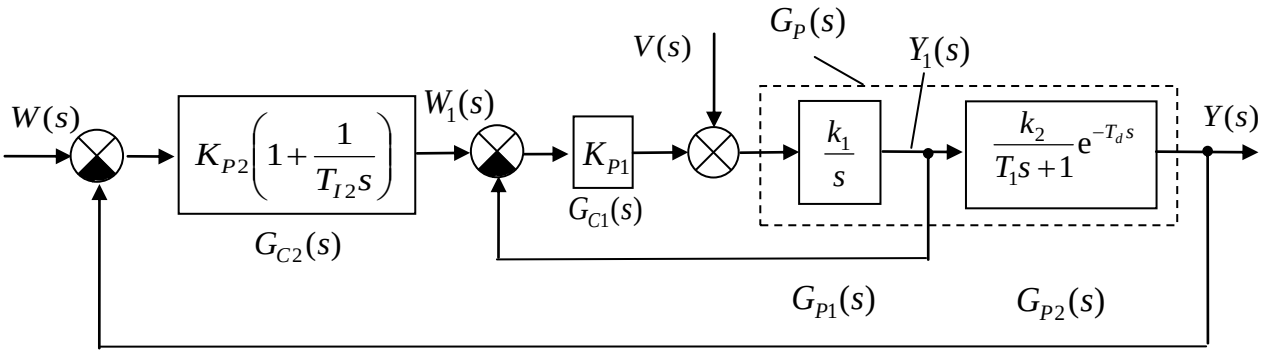
Potom na hlavní regulační obvod (tj. vnější smyčku) lze pohlížet jako na jednoduchý jednosmyčkový regulační obvod, kde $G_{w1y1}(s) \approx 1$. V tomto případě je možno hlavní regulátor typu PI seřídit pouze pro druhou část regulované soustavy s přenosem $G_{P2}(s)$.

Z hlediska požadavku na nekmitavý regulační pochod pro seřízení regulátoru lze použít metodu požadovaného modelu. Na základě tab. 6.9 a 6.10 lze psát (pro $\kappa = 0 \Rightarrow \beta = 2{,}718$)

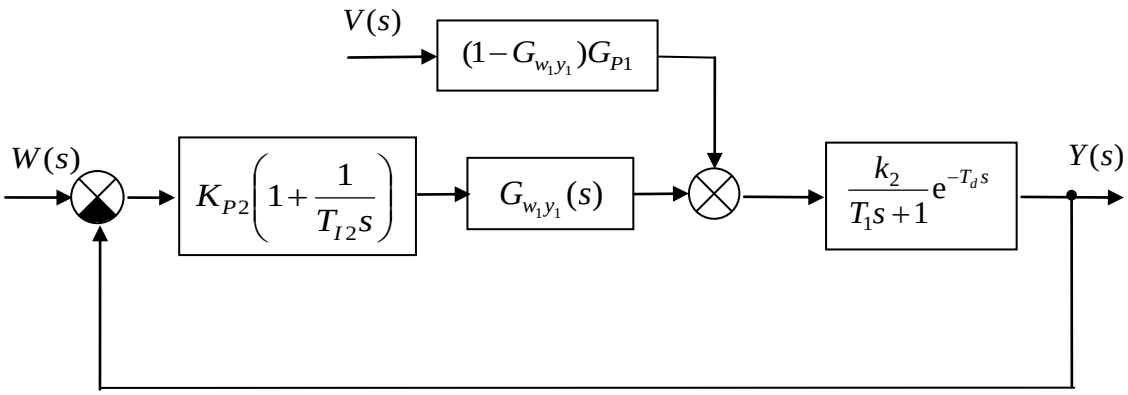
$$K_P^* = \frac{T_1}{k_2 \beta T_d}; \; T_I^* = T_1.$$

Pro $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $T_1 = 5$ s, $T_d = 5$ s, na základě metody požadovaného modelu byly obdrženy hodnoty stavitelných parametrů obou regulátorů: $K_{P1}^* = 5$ ($K_{P1} k_1 = 2T_1$); $K_P^* \doteq 0{,}368$; $T_I^* = 5$ s.

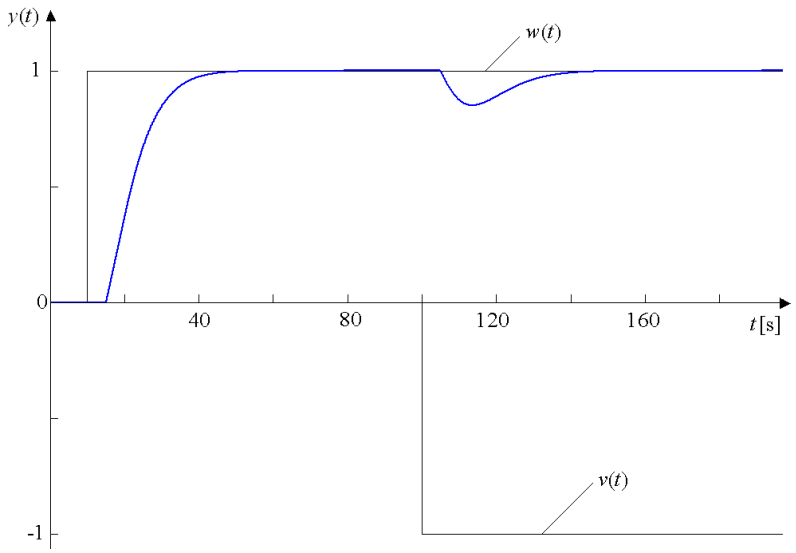
Odezvy kaskádového regulačního obvodu jsou na obr. 6.36. Vyplývá z nich, že i s konvenčními regulátory lze i pro integrační regulované soustavy dosáhnout kvalitních průběhů bez překmitů.



Obr. 6.34 Kaskádový regulační obvod s pomocnou regulovanou veličinou – příklad 6.11



Obr. 6.35 Upravený kaskádový regulační obvod – příklad 6.11



Obr. 6.36 Odezvy kaskádového regulačního obvodu – příklad 6.11

Příklad 6.12

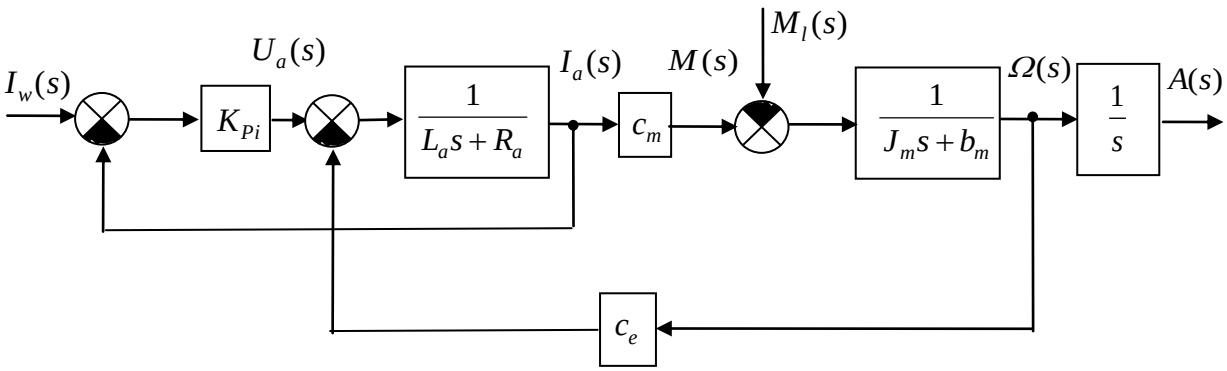
Pro stejnosměrný motor s konstantním cizím buzením z příkladu 3.6 je třeba navrhnout kaskádovou regulaci polohy. Předpokládá se, že motor je napájen výkonovým zesilovačem.

Řešení:

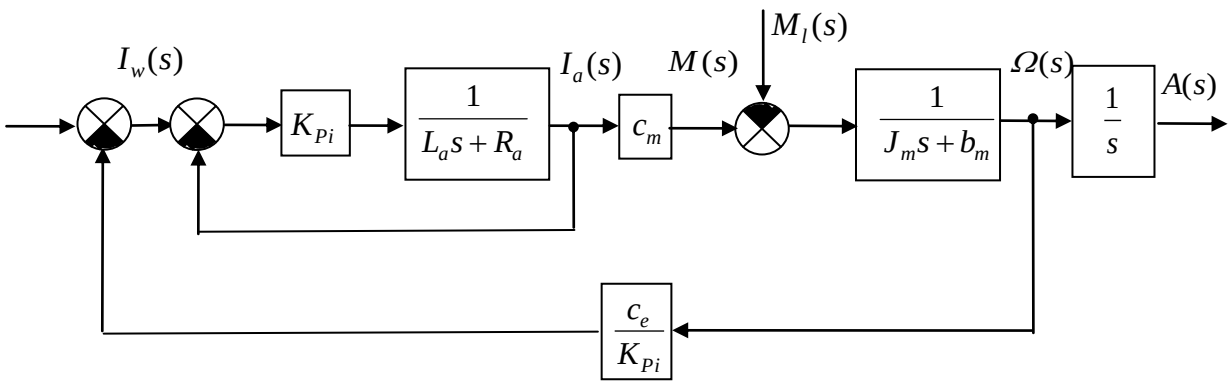
Z rovnic (3.94) i blokového schématu na obr. 3.24 vyplývá, že moment motoru $m(t)$ je přímo úměrný proudu kotvy $i_a(t)$. Z toho důvodu je vhodné tento proud regulovat.

Předpokládejme, že výkonový zesilovač má zanedbatelnou dynamiku a že pro regulaci proudu $i_a(t)$ použijeme proporcionální regulátor se zesílením K_{Pi}, viz obr. 6.37a.

a)



b)



Obr. 6.37 Blokové schéma stejnosměrného motoru s proudovou smyčkou: a) původní, b) transformované – příklad 6.12

Přesunutím sumačního uzlu (tab. 3.1) obdržíme transformované blokové schéma na obr. 6.37b.

V souladu s blokovým schématem na obr. 6.37b pro proudovou smyčku platí

$$\frac{I_a(s)}{I_w(s)} = \frac{\dfrac{K_{Pi}}{K_{Pi}+R_a}}{\dfrac{L_a}{K_{Pi}+R_a}s+1} = \frac{k_a}{T_a s+1},$$

$$k_a = \frac{K_{Pi}}{K_{Pi}+R_a},\ T_a = \frac{L_a}{K_{Pi}+R_a}.$$

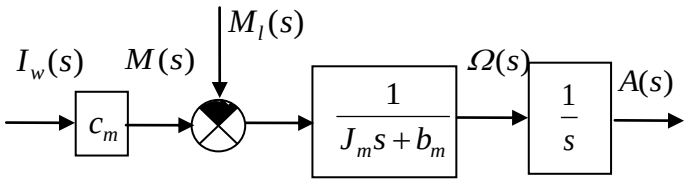
Pro dostatečně velké K_{Pi} dostaneme

$$k_a \approx 1,\quad T_a = 0 \Rightarrow \frac{I_a(s)}{I_w(s)} \approx 1.$$

Protože současně platí (viz obr. 6.37b)

$$\frac{c_e}{K_{Pi}} \approx 0\,,$$

můžeme blokové schéma na obr. 6.37 podstatně zjednodušit, jak je to ukázáno na obr. 6.38.



Obr. 6.38 Zjednodušené blokové schéma stejnosměrného motoru se seřízenou proudovou smyčkou – příklad 6.12

Pro rychlostní smyčku použijeme rovněž proporcionální regulátor se zesílením $K_{P\omega}$ a v souladu s blokovým schématem na obr. 6.39 dostaneme

$$\frac{\Omega(s)}{\Omega_w(s)} = \frac{\dfrac{K_{P\omega}c_m}{K_{P\omega}c_m+b_m}}{\dfrac{J_m}{K_{P\omega}c_m+b_m}s+1} = \frac{k_\omega}{T_\omega s+1},$$

$$k_\omega = \frac{K_{P\omega}c_m}{K_{P\omega}c_m+b_m},\ T_\omega = \frac{J_m}{K_{P\omega}c_m+b_m},$$

$$\frac{\Omega(s)}{M_l(s)} = -\frac{\dfrac{1}{K_{P\omega}c_m+b_m}}{\dfrac{J_m}{K_{P\omega}c_m+b_m}s+1} = -\frac{k_l}{T_\omega s+1},$$

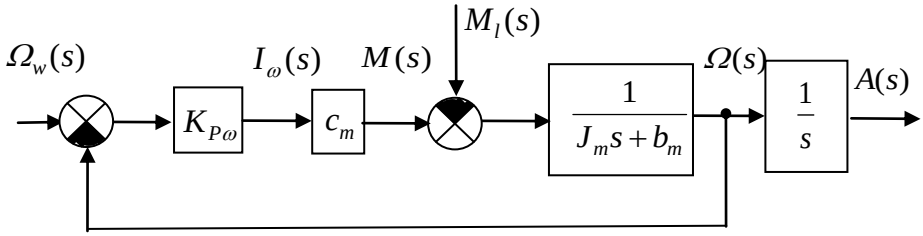
$$k_l = \frac{1}{K_{P\omega}c_m+b_m}.$$

Podobně jako v případě proudové smyčky pro dostatečně vysoké zesílení $K_{P\omega}$ pro proporcionální regulátor rychlostní smyčky obdržíme

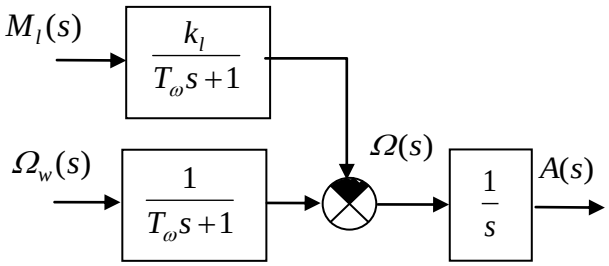
$$k_\omega \approx 1,\qquad \frac{\Omega(s)}{\Omega_\omega(s)} \approx \frac{1}{T_\omega s+1}.$$

Zde nemůžeme časovou konstantu T_ω zanedbat, protože celkový moment setrvačnosti J_m často mívá vysokou hodnotu.

Zjednodušené blokové schéma stejnosměrného motoru se seřízenou proudovou i rychlostní smyčkou je na obr. 3.40.



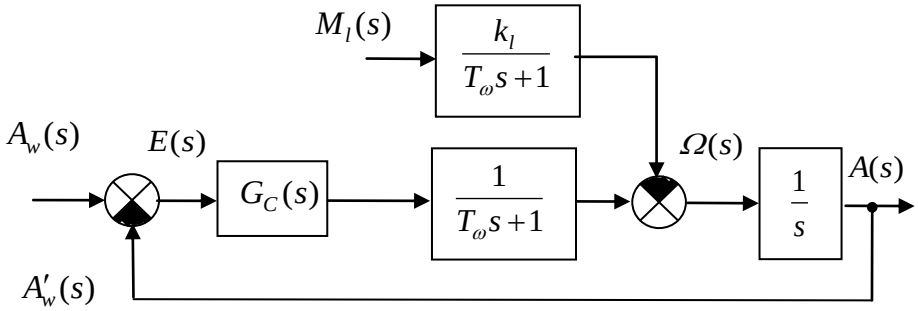
Obr. 6.39 Blokové schéma rychlostní smyčky stejnosměrného motoru se seřízenou proudovou smyčkou – příklad 6.12



Obr. 6.40 Zjednodušené blokové schéma stejnosměrného motoru se seřízenou proudovou i rychlostní smyčkou – příklad 6.12

U polohové smyčky na obr. 6.41 budeme uvažovat nejdříve také proporcionální regulátor se zesílením K_P. V souladu s obr. 6.41 pro

$$G_C(s) = K_P$$



pro PI regulátor

Obr. 6.41 Blokové schéma polohové smyčky stejnosměrného motoru se seřízenou proudovou i rychlostní smyčkou – příklad 6.12

dostaneme

$$\frac{A(s)}{A_w(s)} = \frac{1}{\frac{T_\omega}{K_P}s^2 + \frac{1}{K_P}s + 1},$$

$$\frac{A(s)}{M_l(s)} = -\frac{\frac{k_l}{K_P}}{\frac{T_\omega}{K_P}s^2 + \frac{1}{K_P}s + 1}.$$

Pro seřízení proporcionálního regulátoru se zesílením K_P použijeme standardní tvar MOM (6.95), pro který platí

$$\left.\begin{aligned} T_w^2 &= \frac{T_\omega}{K_P} \\ 2\xi_w T_w &= \frac{1}{K_P} \\ \xi_w &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_P^* = \frac{1}{2T_\omega}.$$

Po dosazení do předchozích přenosů dostaneme

$$\frac{A(s)}{A_w(s)} = \frac{1}{2T_\omega^2 s^2 + 2T_\omega s + 1},$$

$$\frac{A(s)}{M_l(s)} = -\frac{2k_l T_\omega}{2T_\omega^2 s^2 + 2T_\omega s + 1}.$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že při použití proporcionálního regulátoru v polohové smyčce, při skokové změně zátěžného momentu $m_l(t) = m_{l0}\eta(t)$ v regulačním obvodě zůstane trvalá regulační odchylka $e_m(\infty)$.

Protože platí (viz obr. 6.41)

$$\frac{E_m(s)}{M_l(s)} = -\frac{A(s)}{M_l(s)} = \frac{2k_l T_\omega}{2T_\omega^2 s^2 + 2T_\omega s + 1},$$

trvalá regulační odchylka může být snadno určena

$$e_m(\infty) = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{E_m(s)}{M_l(s)}\frac{m_{l0}}{s} \right] = 2k_l T_\omega m_{l0}.$$

Nyní použijeme v polohové smyčce regulátor PI s přenosem

$$G_C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right).$$

Protože stejnosměrný motor po seřízení proudové a rychlostní smyčky má tvar vhodný pro MSO, viz obr. 6.40 a tab. 6.13, a proto můžeme přímo psát ($T = 0$, $k_1 = 1$, $T_1 = T_\omega$)

$$K_P^* = \frac{1}{2k_1T_1} = \frac{1}{2T_\omega},$$

$$T_I^* = 4T_1 = 4T_\omega.$$

V souladu s obr. 6.41 pro regulátor PI dostaneme

$$\frac{A(s)}{A'_w(s)} = \frac{4T_\omega s + 1}{8T_\omega^3 s^3 + 8T_\omega^2 s^2 + 4T_\omega s + 1},$$

$$\frac{A(s)}{M_l(s)} = -\frac{8k_l T_\omega^2 s}{8T_\omega^3 s^3 + 8T_\omega^2 s^2 + 4T_\omega s + 1}.$$

Protože v posledním vztahu v čitateli vystupuje komplexní proměnná s, skoková změna zátěžného momentu $m_l(t) = m_{l0}\eta(t)$ nezpůsobí trvalou regulační odchylku (viz věta o koncové hodnotě, příloha A).

MSO dává vysoký překmit. Je to způsobeno stabilním dvojčlenem

$$4T_\omega s + 1$$

v čitateli přenosu řízení, a proto je třeba použít regulátor PI 2DOF pro $b = 0$ nebo vstupní filtr s přenosem (viz tab. 6.13)

$$G_F(s) = \frac{1}{4T_\omega s + 1}.$$

Výsledný přenos řízení má pak tvar

$$\frac{A(s)}{A_w(s)} = G_F(s)\frac{A(s)}{A'_w(s)} = \frac{1}{8T_\omega^3 s^3 + 8T_\omega^2 s^2 + 4T_\omega s + 1}.$$

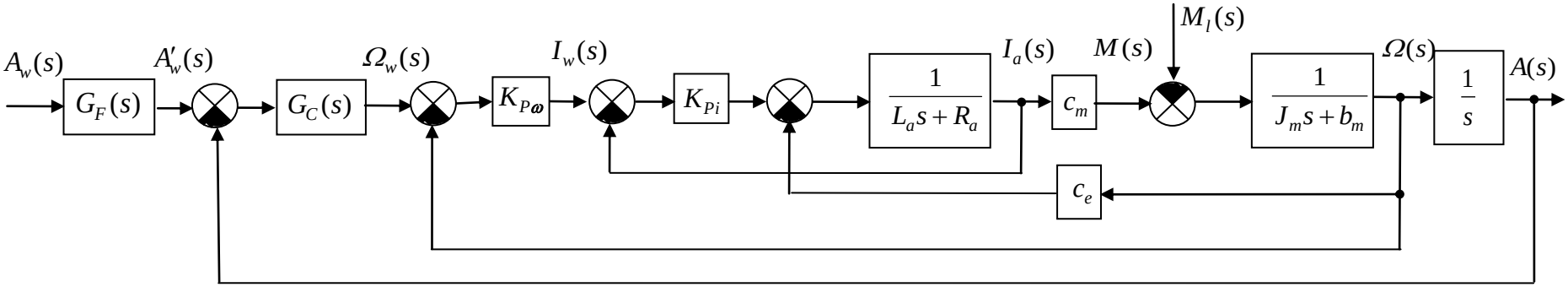
Na základě výše odvozených vztahů byla provedena simulace navržené kaskádové regulace polohy (úhlového natočení) hřídele stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením pro následující hodnoty parametrů: $J_m = 0{,}02$ kg m^2, $L_a = 0{,}2$ H, $R_a = 1\ \Omega$, $c_m = c_e = 0{,}05$ N m A^{-1} = V s rad^{-1}, $b_m = 0{,}01$ N m s rad^{-1}, $\alpha_{w0} = 1$ rad, $m_{l0} = 0{,}5$ N m.

Proudová smyčka

V proudové smyčce je použit proporcionální regulátor P s dostatečně vysokým zesílením K_{Pi}, volíme např.

$$K_{Pi}^* = 10 \Rightarrow k_a = \frac{K_{Pi}}{K_{Pi} + R_a} \doteq 0{,}91 \approx 1;$$

$$T_a = \frac{L_a}{K_{Pi} + R_a} \doteq 0{,}018 \approx 0;\ \frac{c_e}{K_{Pi}} \doteq 0{,}005 \approx 0.$$



Obr. 6.42 Blokové schéma kaskádové regulace polohy (úhlového natočení) u stejnosměrného motoru s cizím konstantním buzením – příklad 6.12

Rychlostní smyčka

Rovněž i tady je použit proporcionální regulátor P s dostatečně vysokým zesílením $K_{P\omega}$, volíme např.

$$K_{P\omega}^{*} = 10 \Rightarrow k_{\omega} = \frac{K_{P\omega} c_m}{K_{P\omega} c_m + b_m} \doteq 0{,}98 \approx 1;$$

$$T_{\omega} = \frac{J_m}{K_{P\omega} c_m + b_m} \doteq 0{,}039; \; k_l = \frac{1}{K_{P\omega} c_m + b_m} \doteq 1{,}96.$$

Polohová smyčka

a) Regulátor P

V blokových schématech na obr. 6.41 a 6.42 je třeba uvažovat

$$G_C(s) = K_P$$

a na obr. 6.42

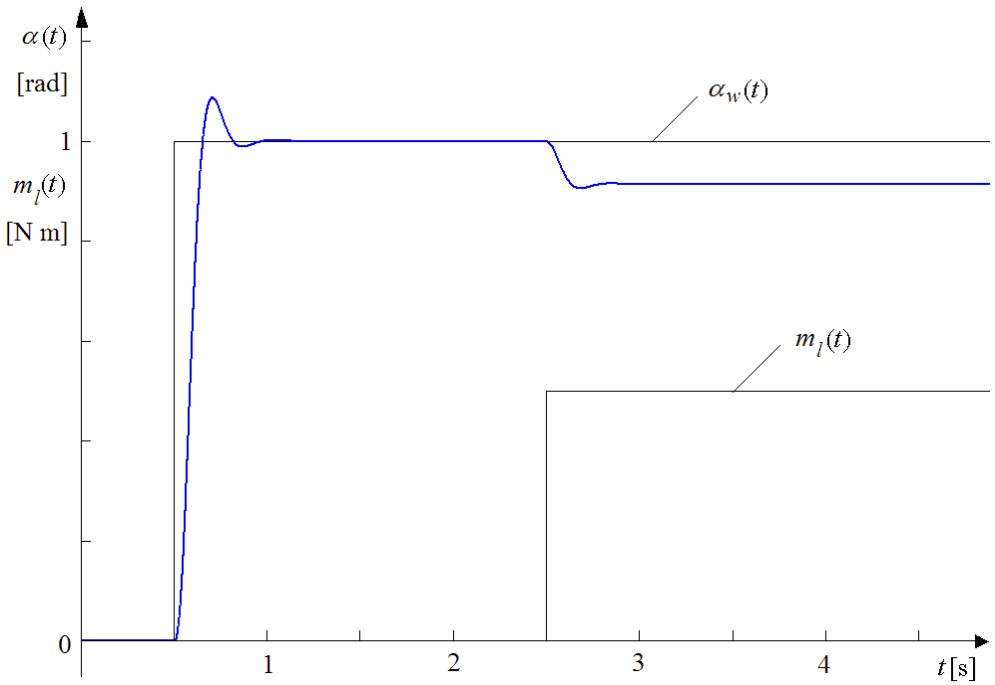
$$G_F(s) = 1.$$

V souladu s dříve uvedenými vztahy můžeme psát

$$K_P^{*} = \frac{1}{2T_{\omega}} \doteq 12{,}82;$$

$$e_m(\infty) = 2k_l T_{\omega} m_{l0} \doteq 0{,}077 \text{ rad}.$$

Odezva stejnosměrného motoru s kaskádovou regulací s proporcionálním regulátorem v polohové smyčce je na obr. 6.43.



Obr. 6.43 Odezva stejnosměrného motoru s kaskádovou regulací s proporcionálním regulátorem v polohové smyčce – příklad 6.12

b) Regulátor PI

V blokových schématech na obr. 6.41 a 6.42 je třeba uvažovat

$$G_C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

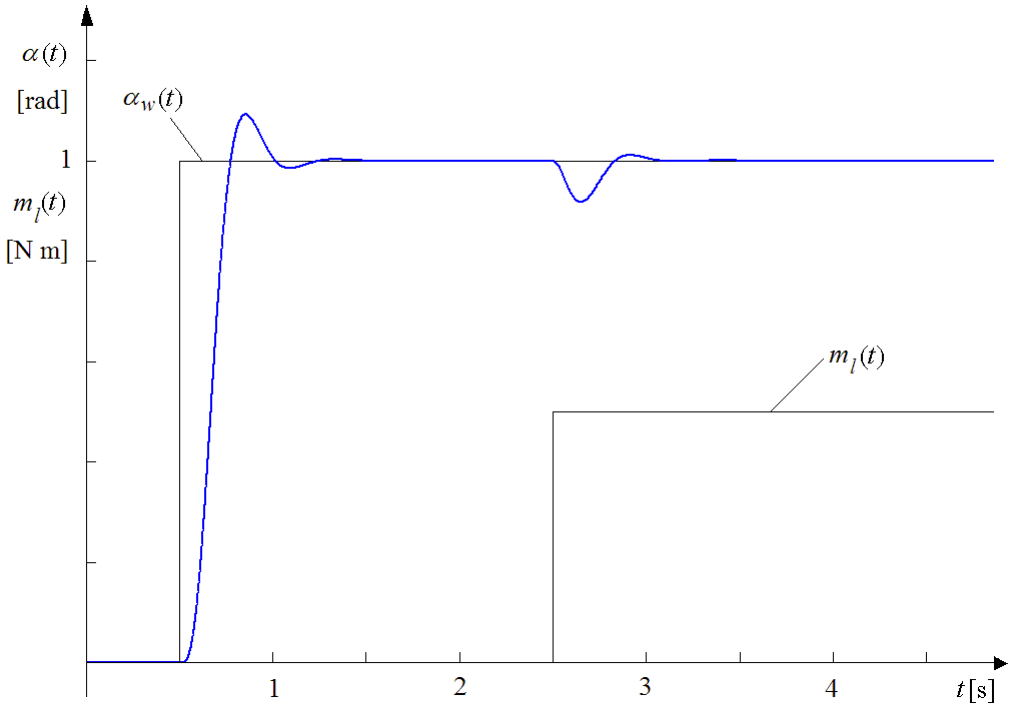
a na obr. 6.42

$$G_F(s) = \frac{1}{4T_\omega s + 1}.$$

Určíme stavitelné parametry regulátoru PI

$$K_P^* = \frac{1}{2T_\omega} \doteq 12{,}82;\ T_I^* = 4T_\omega \doteq 0{,}16.$$

Získaná odezva stejnosměrného motoru s kaskádovou regulací je na obr. 6.44.



Obr. 6.44 Odezva stejnosměrného motoru s kaskádovou regulací s regulátorem PI v polohové smyčce – příklad 6.12

Z obou obr. 6.43 a 6.44 vyplývá, že i při velkých zjednodušeních výsledky simulace ukazují na dobrou shodu s předpoklady.

Reálná kaskádová regulace u stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením musí v proudové smyčce uvažovat maximální přípustný proud a v rychlostní smyčce maximální přípustnou úhlovou rychlost. Tato omezení způsobují podstatnou nelinearitu kaskádové regulace. Nejčastěji v proudové a rychlostní smyčce se používají regulátory PI, protože je nutné uvažovat dynamiku výkonového zesilovače (měniče), snímačů a filtrů. V polohové smyčce se používá regulátor P nebo PI.

7 STAVOVÉ ŘÍZENÍ

V kapitole je stručně popsán návrh stavového regulátoru a pozorovatele pro jednorozměrový lineární dynamický systém.

7.1 Stavový regulátor

Rozvoj stavového řízení je spjat s rozvojem letectví a kosmonautiky. Umožňuje řídit i nestabilní systémy, u kterých běžná regulace s regulátory 1DOF nebo 2DOF ani v rozvětvených strukturách nedává uspokojivé výsledky.

Uvažujme jednorozměrový řízený lineární dynamický systém (v metodách stavového prostoru se většinou používá pojem „řízený systém“ místo pojmu regulovaná soustava)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{7.1a}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t), \tag{7.1b}$$

který je řiditelný, pozorovatelný a silně fyzikálně realizovatelný [viz (3.36) a (3.37)]. Jeho charakteristický mnohočlen má tvar

$$N(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n), \tag{7.2}$$

kde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jsou póly daného systému.

Úkolem **stavového regulátoru** reprezentovaného vektorem (obr. 7.1)

$$\boldsymbol{k} = [k_1, k_2, \ldots, k_n]^T, \tag{7.3}$$

je zajistit u uzavřeného systému řízení charakteristický mnohočlen

$$\begin{aligned} N_w(s) &= \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_w) = s^n + a_{n-1}^w s^{n-1} + \ldots + a_1^w s + a_0^w = \\ &= (s - s_1^w)(s - s_2^w)\ldots(s - s_n^w) \end{aligned} \tag{7.4}$$

se zadanými póly $s_1^w, s_2^w, \ldots, s_n^w$.

Vektor $\boldsymbol{k}$ zpětnovazebního stavového regulátoru můžeme získat porovnáním koeficientů charakteristického mnohočlenu systému řízení s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického systému řízení u stejných mocnin komplexní proměnné s. Získá se tak n lineárních rovnic pro n neznámých složek vektoru $\boldsymbol{k}$. Při velkém n je tento postup náročný.

Uzavřený systém řízení se zpětnovazebním stavovým regulátorem může být v souladu s obr. 7.1 popsán stavovým modelem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_w \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}w'(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{7.5a}$$

$$y_w(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t), \tag{7.5b}$$

kde matice uzavřeného systému řízení je dána vztahem (viz obr. 7.1b)

$$\boldsymbol{A}_w = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T. \tag{7.6}$$

Závislost mezi výstupem $y_w(t)$ a vstupem $w'(t)$ v ustáleném stavu ($t \to \infty$) můžeme určit na základě vztahu (3.39), tj.

$$y_w = \lim_{s \to 0} [\boldsymbol{c}^T (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_w)^{-1} \boldsymbol{b}] w' \Rightarrow$$

$$y_w = -\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{A}_w^{-1} \boldsymbol{b} w' \,. \tag{7.7}$$

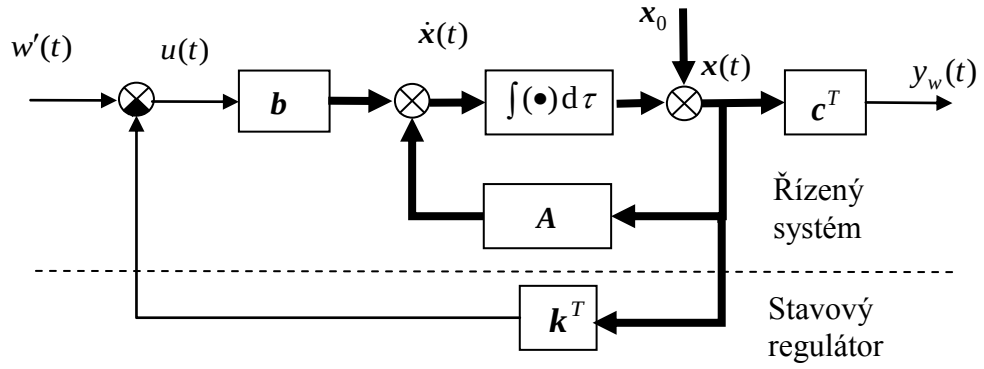
Aby v ustáleném stavu platilo

$$y_w = w, \tag{7.8}$$

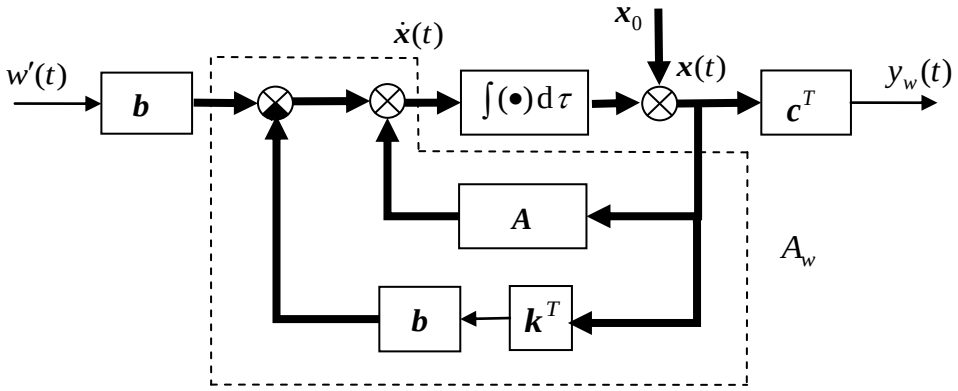
musíme do vstupu umístit korekci (obr. 7.2)

$$k_w = -\frac{1}{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{A}_w^{-1} \boldsymbol{b}} \,. \tag{7.9}$$

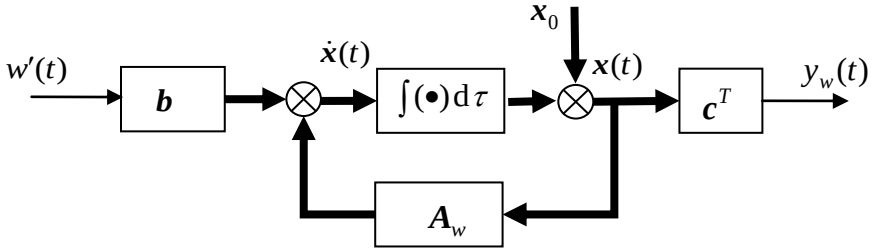
a)



b)

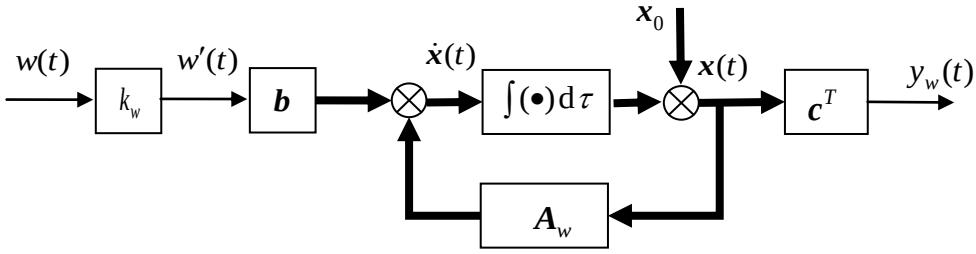


c)



Obr. 7.1 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem bez vstupní korekce: a) původní, b) upravené, c) výsledné

Návrh stavového regulátoru je snadný pro stavový model řízeného systému v kanonickém tvaru řízení (3.42).



Obr. 7.2 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem

Uvažujme, že matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}_w$ jsou transformovány na kanonické tvary řízení v souladu se vztahy (3.36), (3.47), (3.49) a (3.50), pak rovnici (7.6) můžeme zapsat pro kanonické tvary řízení

$$\boldsymbol{A}_{wc} = \boldsymbol{A}_c - \boldsymbol{b}_c \boldsymbol{k}_c^T . \tag{7.10a}$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^w & -a_1^w & -a_2^w & \dots & -a_{n-1}^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_{c1}, k_{c2}, \dots, k_{cn}]. \tag{7.10b}$$

Vidíme, že platí rovnosti

$$-a_{i-1}^w = -a_{i-1} - k_{ci} \Rightarrow$$

$$k_{ci} = a_{i-1}^w - a_{i-1} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{7.11}$$

Poslední vztah můžeme zapsat vektorově

$$\boldsymbol{k}_c = \boldsymbol{a}^w - \boldsymbol{a} , \tag{7.12}$$

kde

$$\boldsymbol{a}^w = [a_0^w, a_1^w, \dots, a_{n-1}^w]^T , \tag{7.13a}$$

$$\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T \tag{7.13b}$$

jsou vektory koeficientů charakteristických mnohočlenů $N_w(s)$ a $N(s)$ [viz (7.4) a (7.2)].

Obdrželi jsme vektor zpětnovazebního stavového regulátoru $\boldsymbol{k}_c$ v kanonickém tvaru řízení, a proto ho musíme transformovat pro původní řízený systém (7.1). Protože platí

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}_c^T \boldsymbol{x}_c &= \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_c &= \boldsymbol{T}_c^{-1} \boldsymbol{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{k}^T = \boldsymbol{k}_c^T \boldsymbol{T}_c^{-1} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{k}^T = (\boldsymbol{a}^w - \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{T}_c^{-1}, \tag{7.14}$$

kde transformační matice $\boldsymbol{T}_c$ je dána vztahy [viz (3.47), (3.49) a (3.50)]

$$\boldsymbol{T}_c = \boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\boldsymbol{Q}, \tag{7.15a}$$

$$\boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}], \tag{7.15b}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.15c}$$

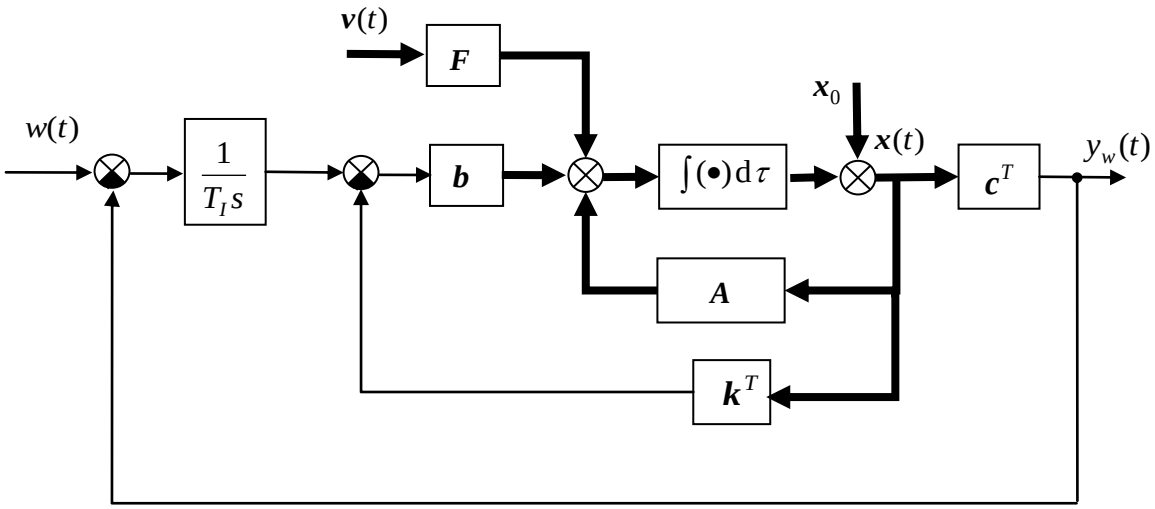
Stavový regulátor dovede zajistit požadované rozložení pólů systému řízení, tj. dovede zajistit jeho dynamické vlastnosti, ale nedovede odstranit škodlivé působení poruchových veličin.

V případě působení poruch $\boldsymbol{v}(t)$ stavový model řízeného systému bude mít tvar

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t),$$

kde $\boldsymbol{v}(t)$ je vektor poruch dimenze p, $\boldsymbol{F}$ – matice typu (n, p).



Obr. 7.3 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem a dodatečnou smyčkou pro potlačení poruch

Aby byly odstraněny poruchy $\boldsymbol{v}$, přidává se ke stavovému regulátoru dodatečná smyčka s regulátorem I (PI), viz obr. 7.3. Je zřejmé, že dojde ke zvýšení počtu pólů o 1. Tímto případem se z důvodu omezeného rozsahu publikace již nebudeme zabývat.

Postup:

1. Zkontrolovat řiditelnost a pozorovatelnost řízeného systému [vztahy (3.36) a (3.37)].
2. Formulovat požadavky na kvalitu řízení a vyjádřit ji požadovaným rozložením pólů systémů řízení.
3. Určit koeficienty charakteristických mnohočlenů $N(s)$ a $N_w(s)$ [vztahy (7.2) a (7.4)].
4. Porovnat koeficienty charakteristického mnohočlenu systému řízení s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu systému řízení u stejných mocnin komplexní proměnné s a řešit soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých složek vektoru $\boldsymbol{k}$. V případě vysokého n použít transformační matici (7.15) a vztah (7.14).
5. Na základě vztahu (7.9) určit vstupní korekci k_w.
6. Simulačně ověřit obdrženou kvalitu řízení.

Příklad 7.1

Pro jednorozměrový lineární dynamický řízený systém

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 - 4x_3 + 2u, \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + u, \\
\dot{x}_3 &= -4x_3 - 2u, \\
y &= -2x_1 + 4x_2 + x_3
\end{aligned}$$

je třena navrhnout stavový regulátor, který zajistí u uzavřeného systému řízení póly

$$s_1^w = s_2^w = s_3^w = -2\,.$$

Řešení:

Je zřejmé, že pro řízený systém platí

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ověření řiditelnosti:

$$\boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -38 \\ 1 & 6 & -16 \\ -2 & 8 & -32 \end{bmatrix},$$

$\det \boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = -504 \neq 0 \ \Rightarrow$ řízený systém je řiditelný.

Ověření pozorovatelnosti:

$$\boldsymbol{Q}_{ob}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^T)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^T\\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 1\\ 10 & -8 & -4\\ -26 & 16 & -8\end{bmatrix},$$

$\det \boldsymbol{Q}_{ob}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^T)=432\neq 0 \Rightarrow$ řízený systém je pozorovatelný.

Z přenosu řízeného systému

$$G_{uy}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T)-\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\frac{-2s^2+6s+92}{s^3+7s^2+14s+8}$$

vyplývá: $a_0 = 8$, $a_1 = 14$, $a_2 = 7$, $a_3 = 1$, $b_0 = 92$, $b_1 = 6$, $b_2 = -2$, tj.

$$\boldsymbol{a}=[8,\quad 14,\quad 7]^T,\ \boldsymbol{c}_c=[92,\quad 6,\quad -2]^T.$$

Požadovaný charakteristický mnohočlen systému řízení má tvar

$$N_w(s)=(s+2)^3=s^3+6s^2+12s+8,$$

a proto vektor jeho koeficientů je

$$\boldsymbol{a}^w=[8,\quad 12,\quad 6]^T.$$

Transformační matice (7.15) má tvar

$$\boldsymbol{T}_c=\boldsymbol{Q}_{co}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ a_2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 20 & 2\\ 40 & 13 & 1\\ -4 & -6 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{126} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{84}\\ \frac{19}{126} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{21}\\ -\frac{47}{126} & \frac{2}{9} & -\frac{16}{21}\end{bmatrix}.$$

Na základě vztahů (7.14) se dostane

$$\boldsymbol{k}^T=(\boldsymbol{a}_w-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{T}_c^{-1}=\left[\frac{1}{14},\quad 0,\quad \frac{4}{7}\right].$$

Stavový model uzavřeného systému řízení bez vstupní korekce bude mít tvar

$$\boldsymbol{A}_w=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T=\begin{bmatrix}-\frac{8}{7} & 0 & -\frac{36}{7}\\ \frac{27}{14} & -2 & -\frac{18}{7}\\ \frac{1}{7} & 0 & -\frac{20}{7}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}=[2,\quad 1,\quad -2]^T,\ \boldsymbol{c}=[-2,\quad 4,\quad 1]^T,$$

tj.

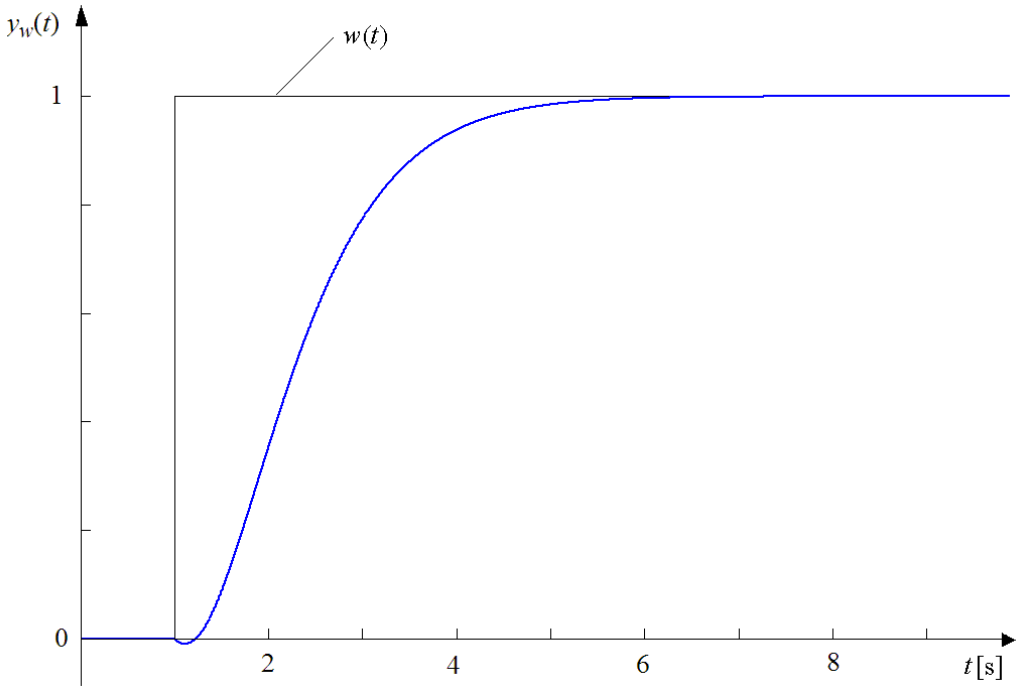
$$\dot{x}_1 = -\frac{8}{7}x_1 - \frac{36}{7}x_3 + 2w',$$
$$\dot{x}_2 = \frac{27}{14}x_1 - 2x_2 - \frac{18}{7}x_3 + w',$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{7}x_1 - \frac{20}{7}x_3 - 2w',$$
$$y_w = -2x_1 + 4x_2 + x_3.$$

Vstupní korekce je dána vztahem (7.9)

$$k_w = -\frac{1}{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{A}_w^{-1}\boldsymbol{b}} = \frac{2}{23}.$$

a odpovídající stavový model se vstupní korekcí

$$\dot{x}_1 = -\frac{8}{7}x_1 - \frac{36}{7}x_3 + \frac{4}{23}w,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{27}{14}x_1 - 2x_2 - \frac{18}{7}x_3 + \frac{2}{23}w,$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{7}x_1 - \frac{20}{7}x_3 - \frac{4}{23}w,$$
$$y_w = -2x_1 + 4x_2 + x_3.$$



Obr. 7.4 Průběh přechodové charakteristiky systému řízení se stavovým regulátorem a vstupní korekcí – příklad 7.1

Přechodová charakteristika systému řízení se stavovým regulátorem a vstupní korekcí je na obr. 7.4. Počáteční podkmit je způsoben nestabilní nulou ($s_1^0 \doteq 8{,}446$).

7.2 Stavový pozorovatel

U reálných dynamických systémů často nelze stavové proměnné měřit, a to buď z důvodu jejich nedostupnosti, vysokých nákladů nebo velikého zašumění. V těchto případech je třeba použít **pozorovatel** (pozorovač, rekonstruktor, estimator) stavu.

Budeme se věnovat návrhu **Luenbergerova asymtoptického pozorovatele plného řádu** (dále jen pozorovatele), tj. takového pozorovatele, u kterého se odhady stavových proměnných asymptoticky blíží ke skutečným stavovým proměnným.

Uvažujme jednorozměrový lineární dynamický systém (7.1), který je řiditelný, pozorovatelný a silně fyzikálně realizovatelný s charakteristickým mnohočlenem (7.2).

Pro tento dynamický systém Luenbergerův pozorovatel má tvar (obr. 7.5)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}_l \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}_l u(t) + \boldsymbol{l} y(t), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0, \\ \hat{y}(t) &= \boldsymbol{c}_l^T \hat{\boldsymbol{x}}(t), \end{aligned} \tag{7.16}$$

kde $\boldsymbol{A}_l$ – čtvercová matice dynamiky pozorovatele řádu n [$(n\times n)$], $\boldsymbol{b}_l$ – vektor vstupu pozorovatele dimenze n, $\boldsymbol{c}_l$ – vektor výstupu pozorovatele dimenze n, $\boldsymbol{l}$ – vektor korekce stavu pozorovatele dimenze n, stříškou „^“ jsou označeny asymptotické odhady odpovídajících proměnných.

Po zavedení vektoru odchylky stavu $\boldsymbol{\varepsilon}$ definovaného vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{7.17}$$

a po uvažování (7.1) a (7.16) se dostane

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}_l \hat{\boldsymbol{x}}(t) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_l)u(t). \tag{7.18}$$

Je zřejmé, že vektor odchylek stavu $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ by neměl záviset na vstupní proměnné $u(t)$ a odhad $\hat{y}(t)$ pro skutečný stav $\boldsymbol{x}(t)$ by měl být $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$, a proto musí platit

$$\boldsymbol{b}_l = \boldsymbol{b}, \;\; \boldsymbol{c}_l = \boldsymbol{c}. \tag{7.19}$$

Pokud se zvolí

$$\boldsymbol{A}_l = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T \tag{7.20}$$

a za předpokladu, že platí (7.19), obdrží se lineární diferenciální rovnice

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0 \tag{7.21}$$

popisující časový průběh vektoru odchylek stavu $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Počáteční odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ se většinou předpokládá nulový.

Je zřejmé, že pro asymptotický odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ musí platit

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; \hat{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}(t) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\varepsilon}(t) \to \boldsymbol{0}, \tag{7.22}$$

tj. lineární diferenciální rovnice (7.21) musí být asymptoticky stabilní.

Dále je zřejmé, že aby odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ byl i při změnách skutečného stavu $\boldsymbol{x}(t)$ dostatečně přesný a rychlý, dynamika pozorovatele (7.16) vyjádřena charakteristickými (vlastními) čísly matice $\boldsymbol{A}_l$ musí být rychlejší než dynamika pozorovaného systému (7.1)

vyjádřena charakteristickými čísly matice $\boldsymbol{A}$. V případě stavového řízení dynamika pozorovatele musí být rychlejší než dynamika uzavřeného systému řízení.

Charakteristický mnohočlen pozorovatele je dán vztahem

$$\begin{aligned} N_l(s) &= \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_l) = \\ &= s^n + a_{n-1}^l s^{n-1} + \ldots + a_1^l s + a_0^l = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n), \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\boldsymbol{a}^l = [a_0^l, a_1^l, \ldots a_{n-1}^l]^T, \tag{7.24}$$

kde p_i jsou charakteristická čísla matice $\boldsymbol{A}_l$, tj. póly pozorovatele, $\boldsymbol{a}^l$ – vektor koeficientů charakteristického mnohočlenu pozorovatele.

Podobně charakteristický mnohočlen pozorovaného systému (7.1) je dán vztahem (7.2) a vektor $\boldsymbol{a}$ je dán jeho koeficienty (7.13b)

Asymptotická stabilita pozorovatele vyžaduje splnění podmínek

$$\operatorname{Re} p_i < 0 \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{7.25}$$

a dále, aby pozorovatel měl rychlejší dynamiku než pozorovaný systém, musí všechny jeho póly p_i ležet vlevo od všech pólů s_i pozorovaného systému, tj.

$$\min_{1 \le i \le n} |\operatorname{Re} p_i| > \max_{1 \le i \le n} |\operatorname{Re} s_i|. \tag{7.26}$$

Konvergence $\hat{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}(t)$ bude tím rychlejší, čím větší bude rezerva v nerovnosti (7.26). Často se uvádí desetinásobek, ale je třeba si uvědomit, že příliš veliká rezerva v nerovnosti (7.26) vede na veliké hodnoty složek l_i vektoru korekce stavu $\boldsymbol{l}$, a tedy k velikému zesilování šumů. Proto tato rezerva se volí dvojnásobná až pětinásobná (neplatí pro integrační systémy).

Póly pozorovatele se nejčastěji volí násobné reálné

$$p_i = -p, \tag{7.27}$$

a proto podmínky (7.26) mohou být zapsány ve tvaru

$$|p| > \max_{1 \le i \le n} |\operatorname{Re} s_i|. \tag{7.28}$$

V tom případě charakteristický mnohočlen pozorovatele v souladu s binomickou větou má tvar

$$N_l(s) = (s + p)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j s^{n-j} = s^n + nps^{n-1} + \ldots + np^{n-1}s + p^n. \tag{7.29}$$

Použití násobných reálných pólů pozorovatele zaručuje konvergenci (7.22) s relativním tlumením 1. Velmi vhodná, pokud je to možné, je volba násobných dvojic

$$-(1 \pm j)p, \tag{7.30}$$

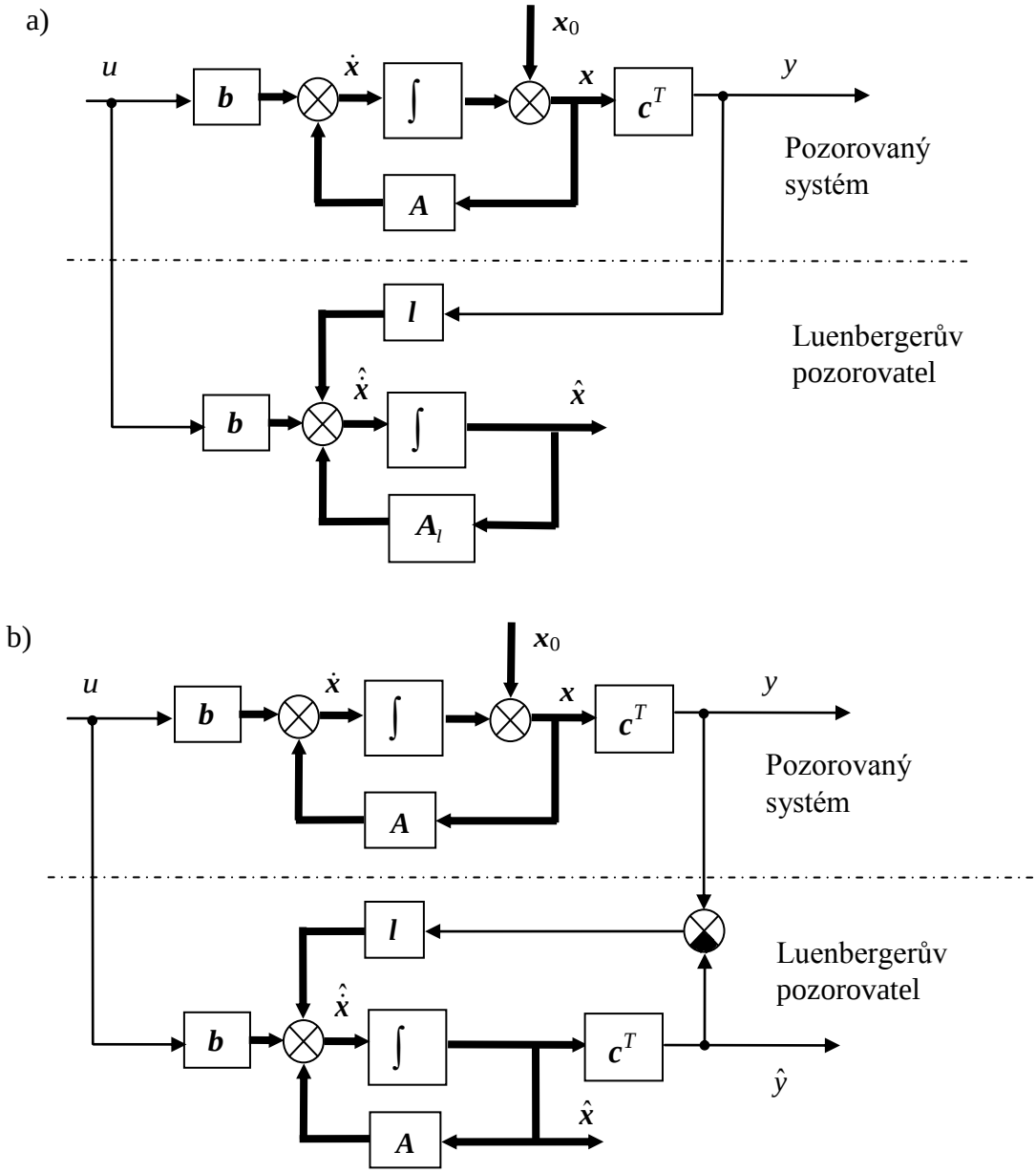
která zaručuje konvergenci (7.22) s relativním tlumením $1/\sqrt{2} \doteq 0{,}707$. Tato volba zajistí rychlou konvergenci a navíc snížení hodnoty p. Dvojici odpovídá dílčí charakteristický mnohočlen

$$s^2 + 2ps + 2p^2. \tag{7.31}$$

Schéma na obr. 7.5a může být transformováno na ekvivalentní schéma na obr 7.5b, ze kterého vyplývá interpretace činnosti pozorovatele. Na základě rozdílu výstupních proměnných $y(t)-\hat{y}(t)$ je korigován odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$. Je zřejmé, že Luenbergerův pozorovatel je vlastně modelem pozorovaného systému s průběžnou zpětnovazební korekcí

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{l}[y(t)-\hat{y}(t)]. \tag{7.32}$$

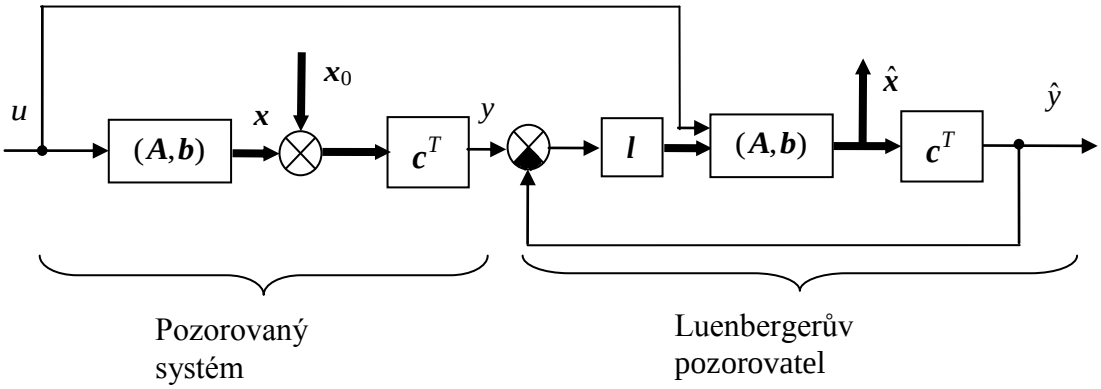
Je to v podstatě regulační obvod, který se snaží anulovat rozdíl $y(t)-\hat{y}(t)$, a tím také vektor odchylky stavu $\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$. Názorně to ukazuje obr. 7.6. Vektor $\boldsymbol{l}$ je proto také zároveň vektorem zesílení pozorovatele.



Obr. 7.5 Blokové schéma Luenbergerova pozorovatele: a) původní, b) transformované

Při návrhu pozorovatele v souladu se vztahy (7.16) a (7.19) je třeba určit neznámý vektor korekce stavu $\boldsymbol{l}$. Lze ho např. určit porovnáním koeficientů charakteristického mnohočlenu pozorovatele s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického

mnohočlenu pozorovatele u stejných mocnin komplexní proměnné s. Získá se tak n rovnic lineárních vzhledem k neznámým n složkám l_i vektoru korekce stavu $\boldsymbol{l}$. Při velkém n je tento postup náročný.



Obr. 7.6 Interpretace Luenbergerova pozorovatele

Úlohu návrhu pozorovatele lze řešit snadno, má-li model pozorovaného podsystému (7.1) kanonický tvar pozorování (3.44)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_o(t) &= \boldsymbol{A}_o \boldsymbol{x}_o(t) + \boldsymbol{b}_o u(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{c}_o^T \boldsymbol{x}_o(t), \end{aligned} \tag{7.33a}$$

kde

$$\boldsymbol{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{7.33b}$$

$$\boldsymbol{b_o} = [b_0, b_1, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}]^T, \tag{7.33c}$$

$$\boldsymbol{c}_o^T = [0,0,\dots,0,1]. \tag{7.33d}$$

Kanonický tvar pozorování lze tedy získat přímo ze znalosti přenosu (3.41) nebo také pomocí transformace (3.51)

$$\boldsymbol{x}_o(t) = \boldsymbol{T}_o^{-1} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{A}_o = \boldsymbol{T}_o^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}_o, \quad \boldsymbol{b}_o = \boldsymbol{T}_o^{-1} \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}_o^T = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{T}_o, \tag{7.34}$$

kde regulární čtvercová transformační matice řádu n [$(n \times n)$]

$$\boldsymbol{T}_o^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_{ob}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{c}^T) \tag{7.35}$$

je dána maticí pozorovatelnosti pozorovaného podsystému (7.1), tj. (3.37) a matice $\boldsymbol{Q}$ je dána vztahem (7.15c) [viz též (3.49)].

Pozorovatel (7.16) pro (7.19) může být vyjádřen rovněž v kanonickém tvaru pozorování

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_o(t) &= \boldsymbol{A}_{lo}\hat{\boldsymbol{x}}_o(t) + \boldsymbol{b}_o u + \boldsymbol{l}_o y(t),\\ \hat{y}(t) &= \boldsymbol{c}_o^T \hat{\boldsymbol{x}}_o(t),\end{aligned} \tag{7.36a}$$

kde

$$\boldsymbol{A}_{lo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0^l \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1^l \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2}^l \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}^l \end{bmatrix} \tag{7.36b}$$

je čtvercová matice dynamiky pozorovatele řádu n, v jejímž posledním sloupci vystupují záporné koeficienty charakteristického mnohočlenu pozorovatele (7.23)]

Bloková schémata pro kanonické tvary pozorování jsou stejná jako na obr. 7.5 s tím, že je třeba u všech vektorů a matic uvažovat index „o“.

V souladu se vztahem (7.20) lze psát

$$\boldsymbol{A}_{lo} = \boldsymbol{A}_o - \boldsymbol{l}_o \boldsymbol{c}_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - l_{o1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - l_{o2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 - l_{o3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} - l_{o,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - l_{on} \end{bmatrix}. \tag{7.37}$$

Ze srovnání vztahů (7.36b) a (7.37) vyplývá

$$l_{oi} = a_{i-1}^l - a_{i-1} \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\dots,n,$$

tj. v souladu s (7.24) a (7.13b)

$$\boldsymbol{l}_o = \boldsymbol{a}^l - \boldsymbol{a}, \tag{7.38}$$

kde $\boldsymbol{l}_o$ je vektor korekce stavu pro pozorovatel v kanonickém tvaru pozorování (7.36).

Protože platí (7.34), lze psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}_o y &= \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{l} y \;\Rightarrow\\ \boldsymbol{l} &= \boldsymbol{T}_o \boldsymbol{l}_o = \boldsymbol{T}_o(\boldsymbol{a}^l - \boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{7.39}$$

Uvažujme nyní, že stavový regulátor využívá pro řízení odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, tj.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T \hat{\boldsymbol{x}}(t).$$

Protože platí

$$-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T \hat{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

můžeme stavovou rovnici systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem zapsat ve tvaru [viz (7.6)]

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}_w \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{\varepsilon}(t),\\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{\varepsilon}(t),\end{aligned} \tag{7.40a}$$

resp.

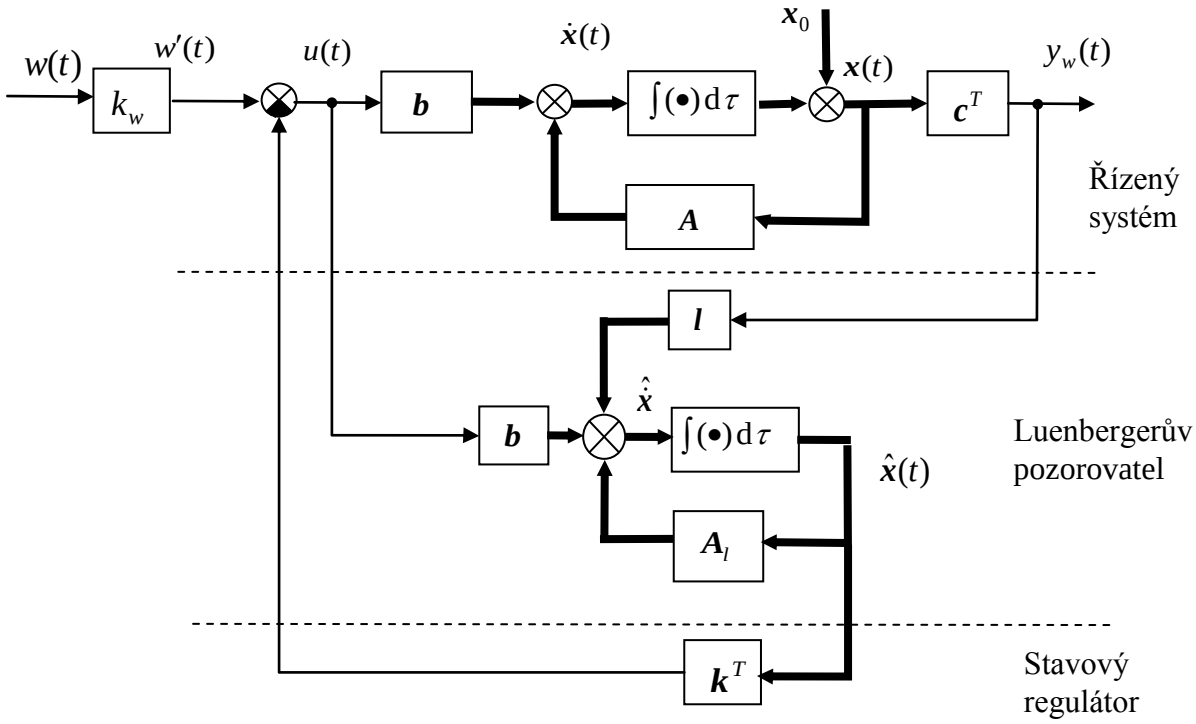
$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_w & \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(t)\end{bmatrix}. \tag{7.40b}$$

Je to horní trojúhelníková bloková matice, jejíž charakteristický mnohočlen je dán vztahem

$$N_w(s)N_l(s) = \det(sI - \boldsymbol{A}_w)\det(sI - \boldsymbol{A}_l)\,. \tag{7.41}$$

Znamená to, že dynamické vlastnosti systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerova pozorovatele jsou vzájemně nezávislé.

Je to tzv. **princip separability**.



Obr. 7.7 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem

Je to velmi důležité, protože stavový pozorovatel a stavový regulátor můžeme navrhnout nezávisle na sobě. Tzn., že můžeme navrhnout stavový regulátor, který zajistí požadovanou kvalitu řízení a zvlášť můžeme navrhnout stavový pozorovatel, který zajistí pro stavový regulátor správné odhady stavových proměnných. Dobře navržený stavový pozorovatel zhorší výslednou dynamiku systému řízení se stavovým regulátorem neznačně.

Postup:

1. Zkontrolovat řiditelnost a pozorovatelnost řízeného systému [vztahy (3.36) a (3.37)].

2. Určit koeficienty charakteristických mnohočlenů $N(s)$ a $N_l(s)$ [vztahy (7.2) a (7.23)].
3. Na základě pólu řízeného systému s největší absolutní reálnou části určit násobný pól (7.27), resp. násobnou dvojici pólů (7.30) tak, aby byla zajištěna dostatečně rychlá dynamika pozorovatele.
4. Porovnat koeficienty charakteristického mnohočlenu pozorovatele s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu pozorovatele u stejných mocnin komplexní proměnné s. Získá se tak n rovnic lineárních vzhledem k neznámým n složkám l_i vektoru korekce stavu $\boldsymbol{l}$. V případě vysokého n použít transformační matici (7.35) a vztah (7.39).
5. Simulačně ověřit obdrženou kvalitu odhadu stavových proměnných.

Příklad 7.2

Pro systém řízení se stavovým regulátorem z příkladu 7.1 je třeba navrhnout Luenbergerův stavový pozorovatel.

Řešení:

V příkladě 7.1 bylo ukázáno, že daný řízený systém je řiditelný a pozorovatelný a že jeho charakteristický mnohočlen má tvar

$$N(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = (s+1)(s+2)(s+4),$$

kde

$$s_1 = -1,\ s_2 = -2,\ s_3 = -4$$

jsou póly podsystému a

$$a_0 = 8,\ a_1 = 14,\ a_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = [8,\ 14,\ 7]^T$$

koeficienty jeho charakteristického mnohočlenu, resp. vektor těchto koeficientů.

Protože

$$\max_{1 \le i \le 3} |s_i| = 4,$$

je možné zvolit

$$p_1 = p_2 = p_3 = p = -8,$$

tj. požadovaný charakteristický mnohočlen pozorovatele je

$$N_l(s) = (s-p)^3 = (s+8)^3 = s^3 + 24s^2 + 192s + 512 \Rightarrow$$

$$a_0^l = 512,\ a_1^l = 192,\ a_2^l = 24 \Rightarrow \boldsymbol{a}^l = [512,\quad 192,\quad 24]^T.$$

a) Přímé řešení

Matice dynamiky pozorovatele je

$$\boldsymbol{A}_l = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2l_1 - 1 & -4l_1 & -l_1 - 4 \\ 2l_2 + 2 & -4l_2 - 2 & -l_2 - 2 \\ 2l_3 & -4l_3 & -l_3 - 4 \end{bmatrix}.$$

Po nepříjemných a zdlouhavých úpravách lze určit charakteristický mnohočlen pozorovatele

$$N_l(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_l) =$$
$$= s^3 + (-2l_1 + 4l_2 + l_3 + 7)s^2 + (-4l_1 + 20l_2 + 3l_3 + 14)s + 16l_1 + 16l_2 - 22l_3 + 8.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin komplexní proměnné s obou charakteristických mnohočlenů pozorovatele se dostane soustava algebraických rovnic lineárních vzhledem k neznámým složkám l_1, l_2 a l_3 vektoru korekce pozorovatele $\boldsymbol{l}$, tj.

$$\left.\begin{aligned} 16l_1 + 16l_2 - 22l_3 &= 504 \\ -4l_1 + 20l_2 + 3l_3 &= 178 \\ -2l_1 + 4l_2 + l_3 &= 17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} l_1 &= \frac{773}{54} \\ l_2 &= \frac{332}{27} \\ l_3 &= -\frac{32}{9} \end{aligned}$$

b) Řešení pomocí transformační matice

V souladu s (7.15c) se dostane

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nyní může být určena transformační matice

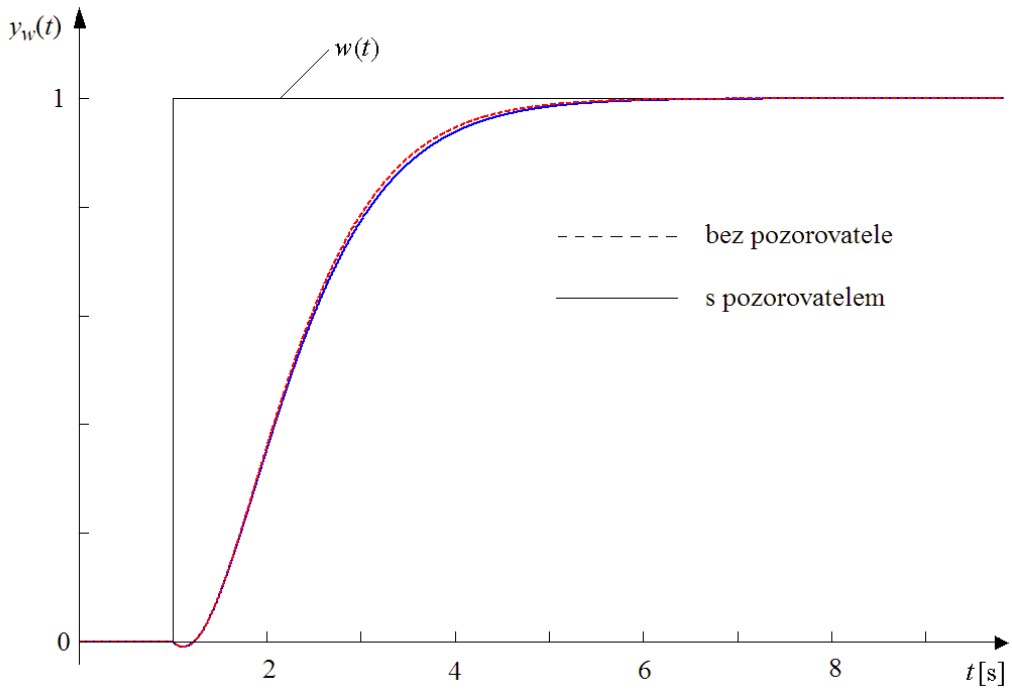
$$\boldsymbol{T}_o^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_{ob}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{c}^T) = \begin{bmatrix} 16 & 16 & -22 \\ -4 & 20 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{T}_o = \begin{bmatrix} -\frac{1}{54} & \frac{13}{54} & -\frac{61}{54} \\ \frac{1}{216} & \frac{7}{108} & -\frac{5}{54} \\ -\frac{1}{18} & \frac{2}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

Po dosazení do vztahu na vektor korekce stavu pozorovatele $\boldsymbol{l}$ se obdrží

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{T}_o(\boldsymbol{a}^l - \boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \frac{773}{54} \\ \frac{332}{27} \\ -\frac{32}{9} \end{bmatrix}$$

Výsledek je samozřejmě stejný jako u přímého řešení.



Obr. 7.8 Vliv stavového pozorovatele na průběh přechodové charakteristiky systému se stavovým regulátorem – příklad 7.2

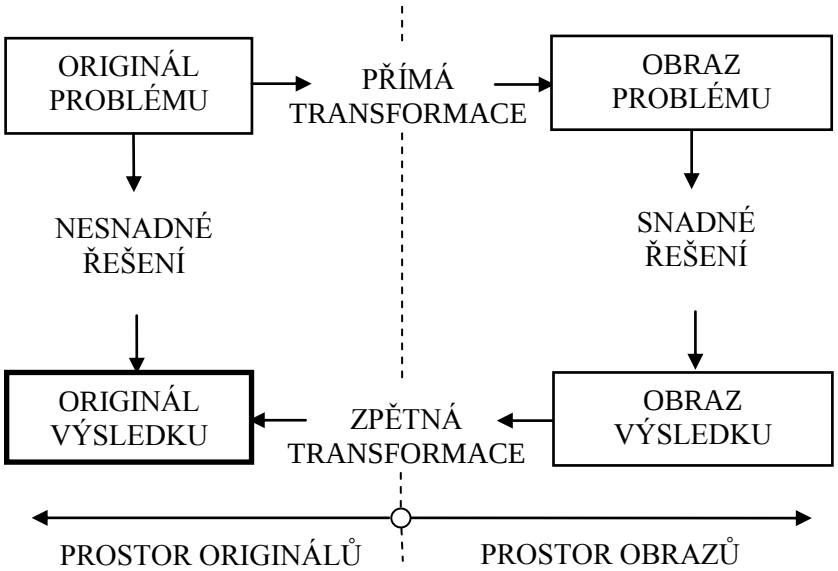
Přechodová charakteristika systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem je na obr. 7.8, ze kterého je zřejmé, že navržený pozorovatel pracuje správně.

PŘÍLOHA – A

LAPACEOVA TRANSFORMACE

L-transformace (Laplaceova transformace) představuje velmi účinný nástroj při popisu, analýze a syntéze spojitých lineárních systémů řízení.

Účelem transformace je převést složitý problém z prostoru originálů do prostoru obrazů, kde se tento transformovaný problém vyřeší velmi snadno a pak se převede zpět do prostoru originálů v souladu s obr. A.1.



Obr. A. 1. Obecné schéma řešení problémů pomocí transformace

Prostor originálů v našem případě bude časová oblast a prostor obrazů bude oblast komplexní proměnné. Za složité problémy v časové oblasti budeme považovat matematické operace, jako jsou např. derivování a integrování. Těmto operacím v oblasti komplexní proměnné odpovídají jednoduché algebraické operace násobení a dělení komplexní proměnnou. Stejně tak řešení lineárních diferenciálních rovnic v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné řešení algebraických rovnic.

L-transformace (Laplaceova transformace) je definována vztahy

$$X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{A.1}$$

$$x(t) = \mathrm{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} X(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \tag{A.2}$$

kde $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ je komplexní proměnná ($\alpha = \mathrm{Re}\, s$, $\omega = \mathrm{Im}\, s$), t – reálná proměnná (v našem případě **čas**), $x(t)$ – **originál** (L-originál) – reálná funkce definovaná v oblasti pro $t \in \langle 0,\infty)$, $X(s)$ – **obraz** (L-obraz) – komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ – imaginární jednotka, L – **operátor přímé L-transformace**, L^{-1} – **operátor zpětné** (inverzní) **L-transformace**, c – reálná konstanta zvolená tak, aby v polorovině $\mathrm{Re}\, s > c$

funkce $X(s)$ neměla žádné singulární body.

Ze vztahu (A.1) vyplývá, že L-transformace zobrazuje funkci reálné proměnné $x(t)$ na komplexní funkci komplexní proměnné $X(s)$. Hodnota originálu $x(t)$ pro $t \geq 0$ představuje ve fyzikálních interpretacích zpravidla velikost určité fyzikální veličiny v časovém okamžiku t. Z tohoto důvodu v těchto případech fyzikální rozměr komplexní proměnné s je čas^{-1} [s^{-1}]. Imaginární část komplexní proměnné, tj. $\omega = \operatorname{Im} s$ má fyzikální interpretaci úhlového kmitočtu s rozměrem čas^{-1} [s^{-1}]. Protože čas t se mění spojitě, hovoříme o spojité transformaci a je zřejmé, že L-transformace bude vhodná především pro spojité systémy, jejichž vlastnosti se dají vyjádřit pomocí lineárních diferenciálních, integrálních a integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Aby časová funkce $x(t)$ byla originálem (předmětem), musí být:

a) nulová pro záporný čas, tj.:

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0; \end{cases} \tag{A.3}$$

b) exponenciálního řádu, tj. musí vyhovovat nerovnosti

$$\left.\begin{aligned} &|x(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{\alpha_0 t}, \\ &M > 0, \alpha_0 \in (-\infty, \infty), t \in \langle 0, \infty); \end{aligned}\right\} \tag{A.4}$$

c) po částech spojitá.

Poslední dvě podmínky většina časových funkcí používaných v technice splňuje. Druhé podmínce nevyhovuje např. funkce $x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$.

První podmínku lze splnit vždy vynásobením dané časové funkce **Heavisideovým jednotkovým skokem**, definovaným vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{A.5}$$

Protože v podstatě každá spojitá funkce $x(t)$ před použitím L-transformace musí být vynásobena Heavisideovým jednotkovým skokem, proto zápis $x(t)\eta(t)$ se většinou zjednodušuje a symbol $\eta(t)$ se vynechává.

Originál značíme malým písmenem a jeho obraz stejným velkým písmenem. Vztah mezi originálem a jeho obrazem se nazývá **korespondence** a zapisuje se ve tvaru

$$x(t) \mathrel{\hat{=}} X(s) \tag{A.6}$$

Korespondence mezi originálem a obrazem v L-transformaci je jednoznačná, považujeme-li za ekvivalentní takové časové funkce, jejichž funkční hodnoty se liší o konečnou hodnotu pouze v konečném počtu izolovaných bodů.

Při L-transformaci počáteční hodnotu $x(0)$ v případě, že funkce $x(t)$ není v bodě $t = 0$ spojitá, je třeba chápat jako pravostrannou limitu

$$x(0) = x(0_+) = \lim_{t \to 0_+} x(t). \tag{A.7}$$

Totéž se týká i derivací funkce $x(t)$, a proto je třeba hodnoty $x(0)$, $\dfrac{\mathrm{d}\,x(0)}{\mathrm{d}\,t}, \ldots$ považovat za limity zprava.

Příklad A.1

Pomocí definičního vzorce přímé L-transformace (A.1) určíme obrazy časových funkcí (originálů):

a) $\eta(t - T_d)$, b) t, c) e^{-at}, d) $\sin \omega t$, e) $\delta(t)$ (a, ω, T_d jsou konstanty).

Řešení:

a) $$\mathrm{L}\{\eta(t-T_d)\} = \int_0^\infty \eta(t-T_d)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{T_d}^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_{T_d}^\infty = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}.$$

$$\eta(t-T_d) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{A.8}$$

Vidíme, že zpoždění originálu o dobu T_d odpovídá násobení obrazu exponenciální funkcí $\mathrm{e}^{-T_d s}$.

b) $$\mathrm{L}\{t\} = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[t\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

$$t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s^2} \tag{A.9}$$

Při integrování byla použita metoda integrace per partes.

$$\int_a^b u\dot{v}\,\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b \dot{u}v\,\mathrm{d}t, \tag{A.10}$$

kde $u = t$, $\dot{v} = \mathrm{e}^{-st}$.

c) $$\mathrm{L}\{\mathrm{e}^{-at}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s+a}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}.$$

$$\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s+a} \tag{A.11}$$

d) $$\mathrm{L}\{\sin \omega t\} = \int_0^\infty (\sin \omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left\{\left[-\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}\right]_0^\infty + \left[\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\right]_0^\infty\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

$$\sin \omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{A.12}$$

Byl použit Eulerův vztah

$$\sin \omega t = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right). \tag{A.13}$$

e) Symbol $\delta(t)$ označuje tzv. **Diracův jednotkový impuls**, který může být definován např. vztahy

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t)\,\mathrm{d}t = x(0) \\ &\delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\mathrm{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$$\delta(t) \mathrel{\hat{=}} 1 \tag{A.15}$$

Příklad A.2

Pomocí definičního vzorce přímé L-transformace určíme obrazy matematických operací: a) $a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t)$, kde a_1, a_2 jsou libovolné konstanty, mohou být i komplexní, b) $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$, c) $\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Řešení:

a) $$\mathrm{L}\{a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t)\} = \int_0^{\infty} [a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= a_1 \int_0^{\infty} x_1(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \pm a_2 \int_0^{\infty} x_2(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = a_1 X_1(s) \pm a_2 X_2(s).$$

$$a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t) \mathrel{\hat{=}} a_1 X_1(s) \pm a_2 X_2(s) \tag{A.16}$$

Odvozená korespondence (A.16) vyjadřuje **linearitu** L-transformace.

b) $$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[x(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} s x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = sX(s) - x(0).$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} \mathrel{\hat{=}} sX(s) - x(0) \tag{A.17}$$

Při integrování byla použita metoda integrace per partes (A.10), kde $u = \mathrm{e}^{-st}$, $\dot{v} = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$.

Podobně by bylo možné určit i obraz derivace *n*-tého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^n\,x(t)}{\mathrm{d}t^n} \mathrel{\hat{=}} s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}\,x(0)}{\mathrm{d}t} - \ldots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}\,x(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}} \tag{A.18}$$

Budou-li počáteční podmínky nulové, pak platí velmi jednoduchá, ale důležitá korespondence

$$\frac{\mathrm{d}^n\,x(t)}{\mathrm{d}t^n} \mathrel{\hat{=}} s^n X(s) \tag{A.19}$$

Vidíme, že derivaci *n*-tého řádu originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné násobení obrazu *n*-tou mocninou komplexní proměnné *s*.

c) $$\mathrm{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\left[\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty x(t)\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}X(s).$$

$$\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}X(s) \tag{A.20}$$

Byla použita metoda integrace per partes (A.10), kde $u = \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ \dot{v} = \mathrm{e}^{-st}$.

Vidíme, že integraci originálu v časové oblasti odpovídá v oblasti komplexní proměnné dělení obrazu komplexní proměnnou *s*.

V příkladech A.1 a A.2 byly odvozeny pomocí definičního vzorce přímé L-transformace (A.1) obrazy některých jednoduchých časových funkcí a matematických operací. Používání definičního vzorce zpětné L-transformace (A.2) je většinou velmi zdlouhavé a pracné, vyžaduje dobrou znalost teorie funkcí komplexní proměnné. Při praktickém používání L-transformace se s definičními vzorci (A.1) a (A.2) většinou nepracuje. S výhodou se využívá **slovník L-transformace**, ve kterém jsou uvedeny základní korespondence, viz tab. A.1 a A.2.

Příklad A.3

Na základě korespondence [viz (A.11)]

$$\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s+a} \tag{A.21}$$

a vlastností L-transformace z tab. A.1 odvodíme některé další korespondence.

Řešení:

a) Pro $a = 0$ (vlastnost 19 v tab. A.1) z korespondence (A.21) dostaneme

$$\mathrm{e}^0 = 1 \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}.$$

$$\eta(t) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s} \tag{A.22}$$

b) Na základě linearity (vlastnost 3 v tab. A.1) a korespondencí (A.21) a (A.22) můžeme psát

$$\eta(t) - \mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}\ .$$

$$1 - \mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{a}{s(s+a)} \tag{A.23}$$

c) Derivací korespondence (A.21) podle parametru a (vlastnost 20 v tab. A.1) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\mathrm{e}^{-at}\right) = -t\,\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{s+a}\right) = -\frac{1}{(s+a)^2}\,.$$

$$t\,\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{(s+a)^2} \tag{A.24}$$

d) Z korespondence (A.24) pro $a = 0$ (vlastnost 19 v tab. A.1) obdržíme [viz (A.9)]

$$t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s^2} \tag{A.25}$$

e) Na základě integrace v časové oblasti (vlastnost 12 v tab. A.1) můžeme z korespondence (A.25) získat novou korespondenci

$$\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\tau \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

$$\frac{t^2}{2} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s^3} \tag{A.26}$$

f) Z korespondence (A.26) pomocí vlastnosti 8 v tab. A.1 obdržíme

$$\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-at} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{(s+a)^3} \tag{A.27}$$

g) Z korespondence (A.21) pro $a = \pm\,\mathrm{j}\omega$ dostaneme

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{s \mp \mathrm{j}\omega}.$$

Z Eulerových vztahů [viz také (A.13)]

$$\sin\omega t = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right), \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

získáme další dvě důležité korespondence [srovnej s (A.12)]:

$$\sin\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

$$\sin\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{A.28}$$

$$\cos\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

$$\cos\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{A.29}$$

h) Z obou posledních korespondencí (A.28) a (A.29) na základě vlastnosti 8 v tab. A.1 dostaneme přímo další dvě důležité korespondence

$$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{A.30}$$

$$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t \mathrel{\hat{=}} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{A.31}$$

Snadno můžeme srovnáním s tab. A1 a A2 zjistit, že všechny odvozené korespondence jsou správné. Podobným způsobem lze získat i další korespondence. Vidíme, že při praktickém používání L-transformace většinou vystačíme se znalostí jejích základních vlastností a několika důležitých korespondencí.

Určování originálů z obrazů

Slovníku L-transformace můžeme použít přímo, pokud v něm najdeme originály nebo obrazy v odpovídajícím tvaru. Většinou vystačíme s jednoduchými úpravami. Potíže vznikají při zpětné transformaci, protože obrazy jsou složité a je nutné je rozložit na jednodušší výrazy, které již ve slovníku L-transformace najdeme. Nejčastěji používáme rozklad na parciální zlomky a metodu reziduí.

V praktických případech má obraz nejčastěji tvar **ryzí racionální lomené funkce**

$$X(s)=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0},\quad n>m. \tag{A.32}$$

Pokud stupeň jmenovatele n není větší než stupeň čitatele m, je třeba provést úpravu obrazu vydělením čitatele jmenovatelem.

Obraz ve tvaru racionální lomené funkce (A.32) můžeme zjednodušit rozložením na parciální (částečné) zlomky, pro které již ze slovníku L-transformace snadno najdeme odpovídající korespondence.

Pro mnohočlen ve jmenovateli platí

$$N(s)=a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0=a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n), \tag{A.33}$$

kde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jsou **kořeny** mnohočlenu $N(s)$ a současně **póly** (singulární body) obrazu $X(s)$.

Póly s_i mohou být jednoduché nebo násobné. Uvažujme nejdříve jednoduché póly, které mohou být reálné nebo komplexní. Pokud jsou komplexní, pak musí vystupovat vždy v komplexně sdružených dvojicích, např.

$$s_i=\alpha+\mathrm{j}\beta,\qquad s_{i+1}=\alpha-\mathrm{j}\beta. \tag{A.34}$$

Pro komplexně sdruženou dvojici (A.34) platí

$$(s-s_i)(s-s_{i+1})=s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2=s^2+cs+d. \tag{A.35}$$

Dvojice ryze imaginárních pólů

$$s_i=\mathrm{j}\beta,\qquad s_{i+1}=-\mathrm{j}\beta \tag{A.36}$$

je speciálním případem (A.34), resp. (A.35) pro $\alpha = c = 0$.

Nyní uvažujme násobné póly. Pro r-násobný reálný pól s_i lze psát

$$(s-s_i)^r\,. \tag{A.37}$$

Podobně můžeme i pro r-násobnou komplexně sdruženou dvojici pólů s_i a s_{i+1} v souladu s (A.35) psát

$$(s-s_i)^r(s-s_{i+1})^r=\left(s^2+cs+d\right)^r. \tag{A.38}$$

Obraz $X(s)$ ryzí racionální lomené funkce (A.32) pro uvedené typy pólů můžeme tedy zapsat ve tvaru (za předpokladu, že $a_n = 1$)

$$X(s)=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{M(s)}{(s-a)(s-b)^r\left(s^2+cs+d\right)\left(s^2+es+f\right)^q}, \tag{A.39}$$

kde $(s-a)$ odpovídá jednoduchému reálnému pólu a,

$(s-b)^r$ odpovídá r-násobnému reálnému pólu b,

(s^2+cs+d) odpovídá jednoduché komplexně sdružené dvojici pólů

$$\frac{1}{2}\left(-c\pm\sqrt{c^2-4d}\right), \tag{A.40}$$

$(s^2+es+f)^q$ odpovídá q-násobné komplexně sdružené dvojici pólů

$$\frac{1}{2}\left(-e\pm\sqrt{e^2-4f}\right). \tag{A.41}$$

Obraz $X(s)$ vyjádřený vztahem (A.39) může být zapsán v rozloženém tvaru

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{A}{s-a}+\frac{B_1}{s-b}+\frac{B_2}{(s-b)^2}+\ldots+\frac{B_r}{(s-b)^r}+\\&+\frac{Cs+D}{s^2+cs+d}+\frac{E_1s+F_1}{s^2+es+f}+\frac{E_2s+F_2}{(s^2+es+f)^2}+\ldots+\frac{E_qs+F_q}{(s^2+es+f)^q},\end{aligned} \tag{A.42}$$

kde konstanty A, B_1, B_2, ..., B_r, C, D, E_1, E_2, ..., E_q, F_1, F_2, ..., F_q se určí např. dosazovací metodou, metodou neurčitých koeficientů nebo se originál určí pomocí reziduí. Někdy je vhodné tyto metody kombinovat.

Uvedený postup se nazývá rozklad na parciální zlomky.

Příklad A. 4

Najdeme originál $x(t)$ k obrazu

$$X(s)=\frac{2s^3+7s^2+4s+1}{s^2(s+1)^2}. \tag{A.43}$$

Řešení:

Obraz (A.43) je ryze racionální lomenou funkcí, a proto v souladu s (A.42) můžeme psát

$$\frac{2s^3+7s^2+4s+1}{s^2(s+1)^2}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{B_1}{s+1}+\frac{B_2}{(s+1)^2} \tag{A.44}$$

a) Dosazovací metoda

Rovnici (A.44) vynásobíme jmenovatelem levé strany a dostaneme

$$2s^3 + 7s^2 + 4s + 1 = A_1 s(s+1)^2 + A_2(s+1)^2 + B_1 s^2(s+1) + B_2 s^2 . \qquad \text{(A.45)}$$

Rovnice (A.45) platí pro libovolné s, a proto musí platit i pro póly obrazu $X(s)$, tj.:

$$s = s_1 = 0 \quad \Rightarrow \; 1 = A_2,$$
$$s = s_2 = -1 \; \Rightarrow \; 2 = B_2.$$

Jako další hodnoty komplexní proměnné s zvolíme

$$s = 1 \; \Rightarrow \; 14 = 4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2$$

a po uvažování již určených hodnot konstant A_2, B_2 a po úpravě dostaneme

$$2A_1 + B_1 = 4 .$$

Dále zvolíme

$$s = -2 \; \Rightarrow \; 5 = -2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2$$

a podobně jako v předchozím případě budeme uvažovat již určené konstanty A_2 a B_2, po úpravě obdržíme

$$A_1 + 2B_1 = 2 .$$

Řešením jednoduché soustavy rovnic

$$2A_1 + B_1 = 4,$$
$$A_1 + 2B_1 = 2$$

dostaneme $A_1 = 2$ a $B_1 = 0$.

Rozklad obrazu (A.43) na parciální zlomky bude mít tedy tvar

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{(s+1)^2} .$$

Pomocí slovníku L-transformace tab. A.2 již snadno získáme hledaný originál

$$x(t) = 2\eta(t) + t + 2t\,\mathrm{e}^{-t} = 2 + t + 2t\,\mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0. \qquad \text{(A.46)}$$

b) Metoda neurčitých koeficientů

Vztah (A.45) upravíme podle mocnin komplexní proměnné s a dostaneme

$$2s^3 + 7s^2 + 4s + 1 = (A_1 + B_1)s^3 + (2A_1 + A_2 + B_1 + B_2)s^2 + (A_1 + 2A_2)s + A_2 .$$

Koeficienty u stejných mocnin komplexní proměnné s musí být stejné, a proto platí

$$2 = A_1 + B_1,$$
$$7 = 2A_1 + A_2 + B_1 + B_2,$$
$$4 = A_1 + 2A_2,$$
$$1 = A_2 .$$

Z této soustavy rovnic snadno již určíme hledané hodnoty koeficientů: $A_2 = 1$, $A_1 = 2$, $B_1 = 0$ a $B_2 = 2$ (pořadí koeficientů je uvedeno tak, jak byly počítány). Další postup je shodný s případem a).

c) Metoda reziduí

Z tab. A.1 použijeme vztah z řádku 22

$$x(t) = \sum_i \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \to s_i} \frac{\mathrm{d}^{r_i - 1}}{\mathrm{d}s^{r_i - 1}} \left[(s - s_i)^{r_i} X(s) \mathrm{e}^{st} \right],$$

kde $i = 1, 2$; $s_1 = 0$, $r_1 = 2$; $s_2 = -1$, $r_2 = 2$ ($n = r_1 + r_2 = 4$).

Po dosazení (A.43) postupně dostaneme:

$$x(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[\frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{(s+1)^2} \mathrm{e}^{st} \right] + \lim_{s \to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[\frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^2} \mathrm{e}^{st} \right] =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{6s^2 + 14s + 4}{(s+1)^2} \mathrm{e}^{st} - 2 \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{(s+1)^3} \mathrm{e}^{st} + \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{(s+1)^2} t \mathrm{e}^{st} \right] +$$

$$+ \lim_{s \to -1} \left[\frac{6s^2 + 14s + 4}{s^2} \mathrm{e}^{st} - 2 \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^3} \mathrm{e}^{st} + \frac{2s^3 + 7s^2 + 4s + 1}{s^2} t \mathrm{e}^{st} \right] =$$

$$= (4 - 2 + t) + \left(-4\mathrm{e}^{-t} + 4\mathrm{e}^{-t} + 2t\mathrm{e}^{-t} \right) = 2 + t + 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

Vidíme, že i v tomto případě jsme obdrželi shodný výsledek s (A.46).

Příklad A.5

Určíme originál $x(t)$ obrazu

$$X(s) = \frac{3s^2 + 22s + 13}{s(s^2 + 6s + 13)}. \tag{A.47}$$

Řešení:

Snadno zjistíme, že dvojčlen ve jmenovateli obrazu (A.47) má komplexně sdružené kořeny, a proto jeho rozklad na částečné zlomky bude mít tvar

$$\frac{3s^2 + 22s + 13}{s(s^2 + 6s + 13)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 6s + 13}. \tag{A.48}$$

a) Dosazovací metoda

Rovnici (A.48) vynásobíme jmenovatelem levé strany a obdržíme

$$3s^2 + 22s + 13 = A(s^2 + 6s + 13) + (Bs + C)s. \tag{A.49}$$

Protože tato rovnice platí pro libovolné s, zvolíme 3 různé hodnoty a dostaneme:

$$s = s_1 = 0 \;\Rightarrow\; 13 = 13A \;\Rightarrow A = 1,$$
$$s = 1 \;\Rightarrow\; 38 = 20A + B + C \;\Rightarrow\; B + C = 18,$$
$$s = -1 \;\Rightarrow\; -6 = 8A + B - C \;\Rightarrow\; B - C = -14.$$

Obdrželi jsme soustavu lineárních rovnic

$$B + C = 18,$$

$$B - C = -14,$$

jejíž řešení je $B = 2$ a $C = 16$.

V souladu s (A.47) a (A.48) můžeme tedy psát

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{2s + 16}{s^2 + 6s + 13}.$$

Nyní použijeme výsledky (A.30) a (A.31) z příkladu A.3.

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{2(s+3) + 2 \cdot 5}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{1}{s} + \frac{2(s+3)}{(s+3)^2 + 2^2} + \frac{2 \cdot 5}{(s+3)^2 + 2^2}.$$

Nyní již snadno určíme originál

$$x(t) = \eta(t) + 2\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t + 5\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t = 1 + 2\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t + 5\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t, \quad t \geq 0. \quad \text{(A.50)}$$

b) Metoda neurčitých koeficientů

Vztah (A.49) upravíme podle mocnin komplexní proměnné s a dostaneme

$$3s^2 + 22s + 13 = (A + B)s^2 + (6A + C)s + 13A.$$

Koeficienty u stejných mocnin musí být stejné, a proto lze psát

$$3 = A + B,$$

$$22 = 6A + C,$$

$$13 = 13A.$$

Z těchto rovnic snadno obdržíme $A = 1$, $B = 2$ a $C = 16$.

Další postup je stejný jako v případě a).

Použití metody reziduí při komplexních kořenech je značně pracnější, a proto ji nebudeme uvádět.

Příklad A.6

Odvodíme vztahy pro počáteční a koncovou hodnotu originálu na základě jeho obrazu (vlastnost 16 a 17 v tab. A.1).

Řešení:

a) Počáteční hodnota

Originál $x(t)$ rozvineme v MacLaurinovou řadu

$$x(t) = x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{1!}t + \frac{\ddot{x}(0)}{2!}t^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{3!}t^3 + \ldots$$

a použijeme L-transformaci

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2} + \frac{\ddot{x}(0)}{s^3} + \frac{\dddot{x}(0)}{s^4} + \ldots$$

Po vynásobení levé i pravé strany komplexní proměnnou s je zřejmé, že platí (pokud tato limita existuje)

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \tag{A.51}$$

b) Koncová hodnota

Pro obraz derivace $\dot{x}(t)$ platí [viz (A.17)]:

$$\mathrm{L}\{\dot{x}(t)\} = \int_0^\infty \dot{x}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = sX(s) - x(0),$$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \dot{x}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}[sX(s) - x(0)],$$

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} sX(s) - x(0),$$

$$x(\infty) - x(0) = \lim_{s\to 0} sX(s) - x(0).$$

Dostaneme tedy (pokud tato limita existuje)

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) \tag{A.52}$$

Příklad A.7

Odvodíme obrazy originálu násobeného exponenciální funkcí a zpožděného originálu (vlastnost 8 a 6 v tab. A.1).

Řešení:

a) Násobení exponenciální funkcí

$$\mathrm{L}\{\mathrm{e}^{\mp at}\, x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-(s\pm a)t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-ut}\mathrm{d}t = X(u) = X(s\pm a).$$

$$\mathrm{e}^{\mp at}\, x(t) \mathrel{\hat{=}} X(s\pm a) \tag{A.53}$$

Byla použita substituce $u = s \pm a$.

b) Zpoždění originálu $x(t-a)$, $a \geq 0$

$$x(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a, \\ x(t-a) & t \geq a, \end{cases}$$

$$\mathrm{L}\{x(t-a)\} = \int_0^\infty x(t-a)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty x(u)\mathrm{e}^{-s(u+a)}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-as}\int_0^\infty x(u)\mathrm{e}^{-su}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-as}\, X(s).$$

$$x(t-a) \mathrel{\hat{=}} \mathrm{e}^{-as}\, X(s) \tag{A.54}$$

Byla použita substituce $u = t - a$.

Tab. A.1 Definiční vztahy a základní vlastnosti Laplaceovy transformace

	Definiční vzorce
1	$X(s)=\mathrm{L}\{x(t)\}=\int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$
2	$x(t)=\mathrm{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$
	Linearita
3	$\mathrm{L}\{a_1x_1(t)\pm a_2x_2(t)\}=a_1X_1(s)\pm a_2X_2(s)$
	Podobnost obrazů
4	$\mathrm{L}\{ax(at)\}=X\left(\frac{s}{a}\right), a>0$
	Konvoluce v časové oblasti
5	$\mathrm{L}\left\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\}=\mathrm{L}\left\{\int_0^t x_2(t-\tau)x_1(\tau)d\tau\right\}=X_1(s)X_2(s)=X_2(s)X_1(s)$
	Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)
6	$\mathrm{L}\{x(t-a)\}=\mathrm{e}^{-as}X(s), a\geq 0$
	Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)
7	$\mathrm{L}\{x(t+a)\}=\mathrm{e}^{as}\left[X(s)-\int_0^a x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right], a\geq 0$
	Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti
8	$\mathrm{L}\left\{x(t)\mathrm{e}^{\mp at}\right\}=X(s\pm a)$
	Derivace v časové oblasti
9	Derivace 1.řádu $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sX(s)-x(0)$
10	Derivace *n*-tého řádu $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}=s^nX(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}\frac{\mathrm{d}^{i-1}x(0)}{\mathrm{d}t^{i-1}}$
	Derivace v oblasti komplexní proměnné
11	$\mathrm{L}\{tx(t)\}=-\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$

	Integrál v časové oblasti
12	$\mathrm{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$
	Hodnota integrálu
13	$\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} X(s)$
14	$\int_0^\infty t x(t)\,\mathrm{d}t = -\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$
	Obraz periodické funkce
15	$\mathrm{L}\{x(t)+x(t-a)+x(t-2a)+\ldots\} = X(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-as}}$ $\quad a$ – perioda, $a > 0$
	Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
16	$x(0) = \lim_{t\to 0_+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
	Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
17	$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$
	Operace podle nezávislého parametru
18	$\mathrm{L}\{x(t,a)\} = X(s,a)$
19	$\mathrm{L}\{\lim_{a\to a_0} x(t,a)\} = \lim_{a\to a_0} X(s,a)$
20	$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial x(t,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial X(s,a)}{\partial a}$
21	$\mathrm{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(t,a)\,\mathrm{d}a\right\} = \int_{a_1}^{a_2} X(s,a)\,\mathrm{d}a$
	Zpětná transformace pomocí reziduí
22	$x(t) = \sum_i \operatorname*{res}_{s=s_i}\left[X(s)\mathrm{e}^{st}\right] = \sum_i \left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\frac{\mathrm{d}^{r_i-1}}{\mathrm{d}s^{r_i-1}}\left[(s-s_i)^{r_i}X(s)\mathrm{e}^{st}\right]\right\}$ r_i – násobnost i-tého pólu obrazu $n = \sum_i r_i$ – stupeň mnohočlenu ve jmenovateli obrazu

Tab. A.2 Slovník Laplaceovy transformace

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
1	s	$\dot{\delta}(t)$
2	1	$\delta(t)$
3	$\frac{1}{s}$	$\eta(t)$
4	$\frac{1}{s^n},\quad n=1,2,\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
5	$\frac{s}{T_1 s+1}$	$\alpha_1\left[\delta(t)-\alpha_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\right],\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
6	$\frac{1}{T_1 s+1}$	$\alpha_1 \mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
7	$\frac{1}{s(T_1 s+1)}$	$1-\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
8	$\frac{1}{s^2(T_1 s+1)}$	$\frac{1}{\alpha_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-1\right)+t,\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
9	$\frac{b_1 s+1}{s(T_1 s+1)}$	$1+(\alpha_1 b_1-1)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
10	$\frac{b_1 s+1}{s^2(T_1 s+1)}$	$C_1\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\right)+t,\ C_1=b_1-\frac{1}{\alpha_1},\quad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
11	$\frac{s}{(T_1 s+1)^2}$	$\alpha_1^2(1-\alpha_1 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
12	$\frac{1}{(T_1 s+1)^2}$	$\alpha_1^2 t\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
13	$\frac{1}{s(T_1 s+1)^2}$	$1-(1+\alpha_1 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
14	$\frac{1}{s^2(T_1 s+1)^2}$	$t-\frac{2}{\alpha_1}+\left(\frac{2}{\alpha_1}+t\right)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$
15	$\frac{b_1 s+1}{(T_1 s+1)^2}$	$\alpha_1^2\left[b_1+(1-\alpha_1 b_1)t\right]\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad \alpha_1=\frac{1}{T_1}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
16	$\dfrac{b_1 s+1}{s(T_1 s+1)^2}$	$1-[1+\alpha_1(1-\alpha_1 b_1)t]\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
17	$\dfrac{b_1 s+1}{s^2(T_1 s+1)^2}$	$t+C_1-(C_1-C_2 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}$ $C_1=b_1-\dfrac{2}{\alpha_1},\ C_2=1-\alpha_1 b_1,\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
18	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)^n},\ n=2,3,\ldots$	$\alpha_1^n\dfrac{t^{n-2}}{(n-1)!}(n-1-\alpha_1 t)\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
19	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)^n},\ n=1,2,\ldots$	$\alpha_1^n\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
20	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)^n},\ n=1,2,\ldots$	$1-\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_1^i\dfrac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
21	$\dfrac{1}{s^2(T_1 s+1)^n},\ n=1,2,\ldots$	$t-\dfrac{n}{\alpha_1}+\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_1^{i-1}(n-i)\dfrac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$
22	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1\neq T_2$	$C_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$ $C_1=\dfrac{1}{T_1(T_2-T_1)},\ C_2=\dfrac{1}{T_2(T_2-T_1)}$
23	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1\neq T_2$	$C_1(\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}),\ C_1=\dfrac{1}{T_1-T_2},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$
24	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1\neq T_2$	$1+C_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$ $C_1=\dfrac{T_1}{T_2-T_1},\ C_2=\dfrac{T_2}{T_2-T_1}$
25	$\dfrac{1}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1\neq T_2$	$t-C_0+C_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ C_0=T_1+T_2$ $C_1=\dfrac{T_1^2}{T_1-T_2},\ C_2=\dfrac{T_2^2}{T_1-T_2},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$
26	$\dfrac{b_1 s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1\neq T_2$	$C_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$ $C_1=\dfrac{T_1-b_1}{T_1(T_1-T_2)},\ C_2=\dfrac{T_2-b_1}{T_2(T_1-T_2)}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
27	$\dfrac{b_1 s+1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1 \neq T_2$	$1+C_1\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}+C_2\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$ $C_1=\dfrac{b_1-T_1}{T_1-T_2},\ C_2=\dfrac{T_2-b_1}{T_1-T_2}$
28	$\dfrac{b_1 s+1}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ T_1 \neq T_2$	$t+C_0+C_1\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}+C_2\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ C_0=-T_1-T_2+b_1$ $C_1=\dfrac{(b_1-T_1)T_1}{T_2-T_1},\ C_2=\dfrac{(T_2-b_1)T_2}{T_2-T_1},\ \alpha_1=\dfrac{1}{T_1},\ \alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$
29	$\dfrac{s}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n=2,3,\ldots$ T_i – různé	$-\sum_{i=1}^{n} C_i\,\mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ C_i=\dfrac{T_i^{n-3}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i-T_k)},\ \alpha_i=\dfrac{1}{T_i}$
30	$\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n=2,3,\ldots$ T_i – různé	$\sum_{i=1}^{n} C_i\,\mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ C_i=\dfrac{T_i^{n-2}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i-T_k)},\ \alpha_i=\dfrac{1}{T_i}$
31	$\dfrac{1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n=2,3,\ldots$ T_i – různé	$1-\sum_{i=1}^{n} C_i\,\mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ C_i=\dfrac{T_i^{n-1}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i-T_k)},\ \alpha_i=\dfrac{1}{T_i}$
32	$\dfrac{1}{s^2\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)},\quad n=2,3,\ldots$ T_i – různé	$t-C_0+\sum_{i=1}^{n} C_i\,\mathrm{e}^{-\alpha_i t},\ \alpha_i=\dfrac{1}{T_i}$ $C_i=\dfrac{T_i^{n}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(T_i-T_k)},\ C_0=\sum_{i=1}^{n} T_i$
33	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
34	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
35	$\dfrac{s}{T_0^2 s^2+2\xi_0 T_0 s+1},$ $0\leq\xi_0<1$	$-C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t-\varphi),\ C_1=\dfrac{1}{\omega T_0^3},\ \gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0}$ $\omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2},\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\gamma}$
36	$\dfrac{1}{T_0^2 s^2+2\xi_0 T_0 s+1},$ $0\leq\xi_0<1$	$C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t,\ C_1=\dfrac{1}{\omega T_0^2},\ \gamma=\dfrac{\xi_0}{T_0},\ \omega=\dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
37	$\dfrac{1}{s\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)}$, $0 \le \xi_0 < 1$	$1 - C_1 \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$, $C_1 = \dfrac{1}{\omega T_0}$, $\gamma = \dfrac{\xi_0}{T_0}$ $\omega = \dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\gamma}$
38	$\dfrac{1}{s^2\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)}$, $0 \le \xi_0 < 1$	$t - C_0 + C_1 \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(\omega t + 2\varphi)$, $C_0 = 2\xi_0 T_0^2$ $C_1 = \dfrac{1}{\omega}, \gamma = \dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega = \dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\gamma}$
39	$\dfrac{b_1 s + 1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}$, $0 \le \xi_0 < 1$	$C_1 \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$, $C_1 = \dfrac{1}{\omega T_0^3}\sqrt{(1-2b_1\gamma)T_0^2 + b_1^2}$ $\gamma = \dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega = \dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega b_1}{1-\gamma b_1}$
40	$\dfrac{b_1 s + 1}{s\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)}$, $0 \le \xi_0 < 1$	$1 + C_1 \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi)$, $C_1 = \dfrac{1}{\omega T_0^2}\sqrt{(1-2b_1\gamma)T_0^2 + b_1^2}$ $\gamma = \dfrac{\xi_0}{T_0}$, $\omega = \dfrac{1}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega T_0^2}{b_1 - \gamma T_0^2}$

b_1, b_2 – reálné konstanty, $T_i > 0$, $i = 0, 1,...$

LIRETATURA

[1] ALFARO, V. M. *Evolución y tendencies en el desarrollo de los métodos de sintonizació de controladores PID.* Departamento de Automática, Esculea de Ingeniera Electrica Universidad de Costarica, 2004, 77 p.

[2] ÅSTRÖM, K. J., HÄGGLUND, T. *Advanced PID Control*. ISA – Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, 2006, 460 p.

[3] DORF, R.C., BISHOP, R. *Modern Control Systems*. 12th Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2011, 1082 p.

[4] FINDEISEN, W. *Automatic Control Technology (in Polish).* 2nd Edition. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1969, 441 p.

[5] FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., EMAMI-NAEIMI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Fourth Edition. Prentice-Hall, 2002, 910 p.

[6] HAUGEN, F. *The Good Gain method for PI (D) controller tuning*. Tech Teach, http://techteach.no (19. July 2010), 7 p.

[7] KALAŠ, V., JURIŠICA, L., ŽALMAN, M. *Technical Cybernetics of Electrical Drives (in Slovak).* Alfa, Bratislava, 1978, 390 p.

[9] KOPELOVIC, A. P. *Automatic Control in Metallurgy (in Russian).* Gosudarstvennoje naucno-techniceskoje izdatelstvo literatury po cernoj i cvetnoj metallurgii. Moskva, 1963, 408 p.

[10] KOWAL, J. *Basis of Automatic Control (in Polish).* Volume 1, Uczelniane wydawnictwa naukovo-dydaktyczne AGH, Krakow, 2006, 301 p.

[11] KOZÁKOVÁ, A. Tuning decentralized PID controllers for performance and robust stability. *ICIC Express Letters: Int. Journal of Research and Surveys/,* vol. 2, No.2 (June 2008), p. 117-122.

[12] KROKAVEC, D., FILASOVÁ, A. *Discrete Systems (in Slovak).* 2nd Edition. Elfa, Kosice, 2008, 334 p.

[13] LANDAU, I. D., ZITO, G. *Digital Control Systems. Design, Identification and Implementation*. Springer – Verlag, London, 2006, 484 p.

[14] MATUŠŮ, R., PROKOP, R. Robust Tuning of PI Controllers for Interval Systems. *Transactions of the VSB – Technical University of Ostrava, Mechanical Series*, No. 2, 2010, vol. LVI, article No. 1790, p. 123-130

[15] NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6th Edition. John Wiley and sons, Hoboken, New Jersey, 2011, 926 p.

[16] NOSKIEVIČ, P. *Modelling and System Identification (in Czech).* Montanex, Ostrava, 1999, 276 p.

[17] O´DWYER, A. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Third Edition. Imperial College Press, London, 2009, 608 p.

[18] PIVOŇKA, P., SCHMIDT, M. Comparative Analysis of Discrete Derivative Implementations in PID Controllers. In: *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on SYSTEMS*, Agios Nikolaos, Crete Island, Greece, July 23-25, 2007, p. 33-37

[19] ROSINOVÁ, D. Robust Decentralized PID Controller: A Case Study. *Transactions of the VSB – Technical University of Ostrava*, Nr. 2/2008, volume LIV, Mechanical Series, article Nr. 1631, p. 115-120

[20] SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Modeling, Identification and Control*, 2004, Vol. 25, No. 2, p. 85-120

[21] SZKLARSKI, L., JARACZ, K., VÍTEČEK, A. *Optimization of Electrical Drives (in Polish).* Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1989, 291 p.

[22] ŠULC, B., VÍTEČKOVÁ, M. *Theory and practice of control system design (in Czech)*. CTU Publishing House, Prague, 2004, 333 p.

[23] VAŠEK, V., KOLOMAZNÍK, K., JANÁČOVÁ, D. Optimization and Automatic Control of Chromium Recycling. Technology. In "*Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on Simulation, modeling and optimization*". Corfu, Greece, August 17-19, 2005, p. 391-394

[24] VISIOLI, A. *Practical PID Control*. Springer – Verlag, London, 2006, 310 p.

[25] VISIOLI, A. ZHONG, Q. *Control of Integral Processes with Dead Time*. Springer – Verlag, London, 2011, 251 p.

[26] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A., LANDRYOVÁ, L. *Basic Principles of Automatic Control*. Technical University of Ostrava, 2012, 115 p.

[27] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. Modulus Optimum for Digital Controllers. *Acta Montanistica Slovaca*. Ročník 8, 4/2003, p. 214-216

[28] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. 2DOF PI and PID Controllers Tuning. In *Proceedings of the 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS),* Prague, June 7-9, 2010, 6 p. on CD

[29] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Selected Controller Tuning Methods (in Czech)*. Technical University of Ostrava, 2011, 230 p.

[30] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. Unified Approach to Digital and Analog 2DOF PI Controller Tuning for Integrating Plants. In *Proceedings of the 12th International Carpathian Control Conference* ICCC´2011. Velke Karlovice, Czech Republic, VSB-Technical University of Ostrava, May 25-28, 2011, p. 437-440

[31] ZIEGLER, J. G., NICHOLS, N. B. Optimum Setting for Automatic Controllers. *Transactions of the ASME*, 64, 1942, p. 759-768

[32] ZÍTEK, P. Time Delay Control System Design Using Functional State Models. CTU Publishing House, Prague, 1998, 93p.

Autoři:	Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c. Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.
Katedra:	Katedra automatizační techniky a řízení
Název:	Zpětnovazební řízení mechatronických systémů
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2013, 1. vydání
Počet stran:	200
Vydavatel:	VŠB – Technická univerzita Ostrava 17. listopadu 15/2172 708 33 Ostrava - Poruba
Tisk:	REPRONIS, s.r.o. Teslova 2, 702 00 Ostrava
Počet kusů:	50

Neprodejné

ISBN 978-80-248-3232-6