**Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava**

**Fakulta strojní**

# VYBRANÉ METODY SEŘIZOVÁNÍ REGULÁTORŮ

**Miluše Vítečková, Antonín Víteček**

**Ostrava 2011**

Recenzenti: prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.
prof. Ing. Ivan Taufer, DrSc.
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.



**VYBRANÉ METODY SEŘIZOVÁNÍ REGULÁTORŮ**

**ISBN 978-80-248-2503-8**

# Předmluva

Monografie se zabývá vybranými problémy analogových a číslicových regulátorů s jedním i dvěma stupni volnosti a také jejich seřizováním. Jsou popisovány ty aspekty analogové a číslicové regulace, kterým v naší odborné literatuře je věnována malá, případně jim není věnována žádná pozornost. Jejím účelem není nahradit ucelenou publikaci z oblasti regulátorů a jejich seřizování, ale může sloužit jako vhodný doplněk ke studiu a také odborníkům z průmyslové praxe.

Monografie obsahuje řadu nových výsledků a přístupů, a to získaných jak z dostupné odborné literatury, tak i vlastních, které byly doposud publikovány v příspěvcích na konferencích nebo v časopisech. Při jejím zpracování autoři velmi často stáli před rozhodováním, zda danou metodu či přístup uvést, či nikoliv. Výběr byl subjektivní a byl dán především zaměřením autorů a také jednoduchostí a efektivností zvolené metody.

Při zpracování monografie bylo čerpáno z velkého množství knižních, časopiseckých a jiných publikací, většinou zahraničních, ale také i domácích od jiných autorů i vlastních. Nepodstatné, většinou vlastní, publikace nejsou uváděny.

Autoři děkují recenzentům prof. RNDr. Ing. Miloši Šedovi, Ph.D., prof. Ing. Ivanu Tauferovi, DrSc. a prof. Ing. Vladimíru Vaškovi, CSc. za cenné a podnětné připomínky, přínosné diskuse, doplňky a opravy, které přispěly k výraznému zlepšení obsahu monografie.

Monografie vznikla za podpory Grantové agentury České republiky, která přidělila finanční prostředky na řešení projektu č. 102/09/0894.

Autoři

# Obsah

# Seznam základních použitých symbolů

| | |
|---|---|
| $a_i$ | konstanty, výrazy |
| $a_s$ | amplituda šumu |
| $A, A_i, A', B, B_i, B'$ | konstanty, výrazy |
| $A(\omega) = \mathrm{mod}G(\mathrm{j}\omega) = \lvert G(\mathrm{j}\omega) \rvert$ | modul kmitočtového přenosu |
| $A_o$ | modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu |
| $A_{wy}$ | modul kmitočtového přenosu řízení (uzavřeného regulačního obvodu) |
| $b$ | váha žádané veličiny u proporcionální složky regulátoru 2DOF |
| $b_i$ | konstanty, výrazy |
| $c$ | váha žádané veličiny u derivační (diferenční) složky regulátoru 2DOF |
| $c_i$ | konstanty, výrazy |
| $C, C_i, C'$ | konstanty, výrazy |
| $d$ | relativní diskrétní dopravní zpoždění |
| $D_1, D_2$ | konstanty |
| D | operátor přímé D-transformace |
| $\mathrm{D}^{-1}$ | operátor zpětné D-transformace |
| $e$ | regulační odchylka |
| $e_v(\infty)$ | trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou $v(t)$ na vstupu soustavy |
| $e_{v_1}(\infty)$ | trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou $v_1(t)$ na výstupu soustavy |
| $e_w(\infty)$ | trvalá regulační odchylka způsobená žádanou veličinou $w(t)$ |
| $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ | kmitočet |
| $G(s)$ | L-přenos (Laplaceův přenos) |
| $G(z)$ | Z-přenos |
| $G(\gamma)$ | D-přenos |
| $G(\mathrm{j}\omega) = P(\omega) + \mathrm{j}Q(\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ | kmitočtový přenos |
| $G_D$ | přenos dopravního zpoždění (neinvertibilní část přenosu regulované soustavy) |

| | |
|---|---|
| $G_F$ | přenos vstupního filtru [žádané veličiny $w(t)$] |
| $G_F^{IMC}$ | přenos filtru pro regulační obvod s interním modelem |
| $G_K$ | přenos dopředného kompenzátoru |
| $G_o$ | přenos otevřeného regulačního obvodu |
| $G_P$ | část přenosu regulované soustavy, která neobsahuje dopravní zpoždění (invertibilní část přenosu regulované soustavy) |
| $G_R$ | přenos regulátoru |
| $G_R^{IMC}$ | přenos regulátoru pro regulační obvod s interním modelem |
| $G_S$ | přenos regulované soustavy |
| $G_{vy}$ | přenos poruchy $v(t)$ |
| $G_{v_1 y}$ | přenos poruchy $v_1(t)$ |
| $G_{ve}$ | odchylkový přenos poruchy $v(t)$ |
| $G_{v_1 e}$ | odchylkový přenos poruchy $v_1(t)$ |
| $G_{wy}$ | přenos řízení |
| $G_{w'y}$ | přenos řízení pro filtrovanou žádanou veličinu $w'(t)$ |
| $G_{we}$ | odchylkový přenos řízení |
| $h(t)$ | přechodová funkce |
| $h_S(t)$ | přechodová funkce regulované soustavy |
| $i$ | činitel interakce |
| $I_i$ | integrální kritéria kvality regulace ($i = IE, IAE, ISE, ITAE$) |
| $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ | imaginární jednotka |
| $k$ | relativní diskrétní čas |
| $k_i$ | koeficient přenosu |
| $kT$ | diskrétní čas |
| $K_D$ | váha derivační složky regulátoru |
| $K_I$ | váha integrační složky regulátoru |
| $K_P$ | zesílení regulátoru, váha proporcionální složky regulátoru |
| $K_{PGG}$ | zesílení regulátoru u metody dobrého zesílení |
| $K_{Pk}$ | kritické zesílení regulátoru |
| $K_{PO}$ | zesílení regulátoru u metody překmitu |
| L | operátor přímé L-transformace (Laplaceovy transformace) |
| $\mathrm{L}^{-1}$ | operátor zpětné L-transformace (Laplaceovy transformace) |

$L(\omega) = 20\log A(\omega)$ logaritmický modul kmitočtového přenosu

$L_o$ logaritmický modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu

$L_{wy}$ logaritmický modul kmitočtového přenosu řízení (uzavřeného regulačního obvodu)

$m_A$ amplitudová bezpečnost

$m_L = 20\log m_A$ logaritmická amplitudová bezpečnost

$M$ mnohočlen v čitateli přenosu (kořeny = nuly)

$M_s$ maximum modulu funkce citlivosti

$N$ charakteristický mnohočlen, mnohočlen ve jmenovateli přenosu (kořeny = póly), konstanta u filtru derivační (diferenční) složky regulátoru

$N(\mathrm{j}\omega)$ Michajlovova funkce

$N_P(\omega) = \mathrm{Re}N(\mathrm{j}\omega)$ reálná část Michajlovovy funkce

$N_Q(\omega) = \mathrm{Im}N(\mathrm{j}\omega)$ imaginární část Michajlovovy funkce

$p$ počet stavitelných parametrů regulátoru

$P(\omega) = \mathrm{Re}G(\mathrm{j}\omega)$ reálná část kmitočtového přenosu

$pp$ pásmo proporcionality

$q$ řád integračního členu, typ regulačního obvodu (řád astatismu)

$Q(\omega) = \mathrm{Im}G(\mathrm{j}\omega)$ imaginární část kmitočtového přenosu

$s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ komplexní proměnná, nezávisle proměnná u obrazu v L-transformaci (Laplaceově transformaci)

$s_i$ kořeny mnohočlenu s komplexní proměnnou $s$

$S$ doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou

$S(\mathrm{j}\omega)$ funkce citlivosti

$t$ (spojitý) čas

$t_m$ doba dosažení maximální hodnoty $y_m$ (maximálního překmitu)

$t_o$ rychlost odezvy

$t_r$ doba regulace

$T$ vzorkovací perioda, perioda

$T_d$ dopravní zpoždění u spojitých systémů (členů)

$T_D$ derivační časová konstanta

$T_f$, $T_F$ filtrační časová konstanta

$T_{GG}$ doba kmitu u metody dobrého zesílení

| | |
|---|---|
| $T_I$ | integrační časová konstanta |
| $T_{Ik}$ | kritická integrační časová konstanta |
| $T_i$ | setrvačná časová konstanta |
| $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k}$ | kritická perioda |
| $T_n$ | doba náběhu |
| $T_{ou}$ | doba půlkmitu u metody dobrého zesílení |
| $T_p$ | doba přechodu |
| $T_\Sigma$ | náhradní součtová časová konstanta |
| $T_u$ | doba průtahu |
| $T_w$ | (požadovaná) časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu, ladicí parametr |
| $T_y$ | doba kmitu |
| $T(\mathrm{j}\omega)$ | doplňková funkce citlivosti |
| $u$ | akční veličina, vstupní veličina (vstup) |
| $u_T$ | tvarovaná akční veličina |
| $v$ | poruchová veličina na vstupu soustavy |
| $v_1$ | poruchová veličina na výstupu soustavy |
| $w$ | žádaná veličina |
| $w'$ | filtrovaná žádaná veličina |
| $x$ | obecná proměnná, stav |
| $y$ | regulovaná veličina, výstupní veličina (výstup) |
| $y_m = y(t_m)$ | maximální hodnota regulované veličiny při překmitu (maximální překmit) |
| $y_u$ | hodnota prvního minima regulované veličiny při kmitavém průběhu |
| $z$ | komplexní proměnná u Z-transformace |
| $\mathrm{Z}$ | operátor přímé Z-transformace |
| $\mathrm{Z}^{-1}$ | operátor zpětné Z-transformace |
| | |
| $\alpha$ | sklon sektorové nelinearity, koeficient u MPM |
| $\alpha_i$, $\beta_i$ | konstanty, výrazy |
| $\alpha'$, $\beta'$ | váhy dopředného kompenzátoru $G_K$ |
| $\alpha = \mathrm{Re}\, s$ | reálná část komplexní proměnné $s$ |

| | |
|---|---|
| $\beta$ | sklon sektorové nelinearity, koeficient u MPM |
| $\gamma$ | fázová bezpečnost, komplexní proměnná u D-transformace |
| $\delta$ | relativní tolerance regulačního pochodu |
| $\delta(t)$ | Diracův jednotkový impuls |
| $\delta(kT)$ | diskrétní Diracův impuls |
| $\delta_\delta(kT)$ | diskrétní Diracův impuls v D-transformaci |
| $\Delta$ | přírůstek, tolerance regulačního pochodu |
| $\eta(t)$ | Heavisideův jednotkový skok |
| $\omega = 2\pi f$ | úhlový kmitočet |
| $\omega = \mathrm{Im}\, s$ | imaginární část komplexní proměnné $s$ |
| $\omega_m$ | mezní úhlový kmitočet |
| $\omega_k = \dfrac{2\pi}{T_k}$ | kritický úhlový kmitočet |
| $\omega_0$ | úhlový kmitočet netlumených kmitů, přirozený úhlový kmitočet |
| $\omega_R$ | rezonanční kmitočet |
| $\omega_ř$ | úhlový kmitočet řezu (průchodu), při kterém modul = 1 |
| $\omega_s$ | kmitočet namodulovaného šumu |
| $\omega_S$ | kmitočet, při kterém má funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ maximum |
| $\omega_w$ | úhlový kmitočet netlumených kmitů uzavřeného regulačního obvodu |
| $\omega_{-\pi}$ | úhlový kmitočet, při kterém fáze = $-\pi$ |
| $\varphi$ | úhel |
| $\varphi(\omega) = \arg G(\mathrm{j}\omega)$ | fáze kmitočtového přenosu |
| $\varphi_o$ | fáze otevřeného regulačního obvodu |
| $\xi_i$ | relativní tlumení |
| $\xi_w$ | relativní tlumení uzavřeného regulačního obvodu |
| $\kappa$ | relativní překmit |
| $\tau_j$ | časová konstanta |
| $\nabla$ | zpětná diference |

**Horní indexy**

| | |
|---|---|
| * | optimální, doporučený |
| -1 | inverzní |

**Zkratky**

| | |
|---|---|
| arg | argument |
| A/Č | analogově číslicový převodník |
| AR | analogový regulátor |
| Č/A | číslicově analogový převodník |
| ČR | číslicový regulátor |
| dB | decibel |
| deg | stupeň |
| dim | dimenze (rozměr) |
| D | derivační (diferenční) složka regulátoru |
| Im | imaginární, imaginární část |
| I | integrační regulátor, integrační složka regulátoru |
| konst | konstantní, konstanta |
| lim | limita |
| max | maximální, maximum |
| min | minimální, minimum |
| MNDP | metoda násobného dominantního pólu |
| mod | modul |
| MOM | metoda optimálního modulu |
| MPM | metoda požadovaného modelu |
| MSO | metoda symetrického optima |
| P | proporcionální regulátor, proporcionální složka regulátoru |
| PI | proporcionálně integrační regulátor |
| PD | proporcionálně derivační regulátor |
| PID | proporcionálně integračně derivační regulátor (standardní) |
| $PID_i$ | proporcionálně integračně derivační regulátor s interakcí (sériový) |
| R | regulátor |
| Re | reálný, reálná část |
| S | soustava, sumační složka regulátoru |

# Úvod

Regulátory PI a PID již po několik desetiletí patří k základním, a také nejdůležitějším prvkům většiny regulačních obvodů. Podle různých zdrojů, např. [Åström, Hägglund 1995, 2006; O´Dwyer 2009] více než 90 % regulátorů používaných v průmyslu tvoří právě regulátory typu PI a PID. Je to způsobeno jejich univerzálností, jednoduchostí, vysokou efektivitou, nízkými náklady na jejich údržbu a v neposlední řadě jejich nízkou cenou. Činnost regulátorů PID je snadná na pochopení. Skládá se ze tří dílčích složek, které vyjadřují váženou hodnotu regulační odchylky (informuje o její současnosti), vážený integrál z regulační odchylky (informuje o její historii) a váženou derivaci regulační odchylky (informuje o její budoucnosti). O významu regulátorů PI a PID svědčí např. i to, že kniha A. O'Dwyer *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, věnována jejich seřizování, vyšla během šesti let ve třech vydáních, přičemž třetí vydání mělo více než dvojnásobný počet stránek, než vydání první [O´Dwyer 2003 (275 str.), 2006 (375 str.), 2009 (608 str.)]. Vypovídá to také o obrovském zájmu odborné veřejnosti o tyto regulátory. Poslední vydání z roku 2009 obsahuje souhrnně 1731 různých pravidel seřízení pro analogové regulátory PI a PID. Přesto podle [O´Dwyer 2009] více než 30 % instalovaných regulačních obvodů pracuje v ručním režimu a 65 % pracuje v automatickém režimu, ale se špatně seřízenými regulátory. Tato čísla vyjadřují nedostatečné znalosti pracovníků zabývajících se regulací o vlastnostech a možnostech současných regulátorů a způsobech jejich seřizování.

Průmysl vyžaduje jednoduché metody seřizování regulátorů, které zajistí dostatečnou kvalitu, ale současně i robustnost regulačního procesu.

Monografie je věnována popisu struktur a vlastností analogových i číslicových regulátorů s jedním i dvěma stupni volnosti, ale především se zabývá vybranými metodami jejich seřizování. Kromě klasických metod, jako jsou Zieglerovy-Nicholsovy metody, jsou popsány i jiné méně známé metody, jejichž použití je jednoduché a efektivní. Hlavní pozornost je však věnována metodám, které byly rozpracovány a ověřeny na pracovišti autorů a u kterých je dobrý předpoklad jejich praktického využití. V monografii je obsaženo mnoho původních přístupů a metod.

Monografie obsahuje čtyři kapitoly a sedm příloh. V první kapitole jsou uvedeny stručně základní struktury regulačních obvodů a přístupy k jejich analýze a syntéze. Druhá kapitola je věnována analogovým i číslicovým regulátorům s jedním i dvěma stupni volnosti. Podrobně jsou vysvětleny jejich různé ekvivalentní struktury a speciální případy. Jsou zde popsány rovněž simulační modely použitých regulátorů. Ve třetí kapitole je ukázáno, jak je možné jednoduchými metodami upravit L-přenosy regulovaných soustav na vhodný tvar. Nejobsáhlejší je čtvrtá kapitola popisující metody seřizování regulátorů, které jsou rozděleny na metody vycházející z uzavřeného regulačního obvodu a které nevyžadují znalost matematického modelu regulované soustavy a na metody, které vycházejí z matematického modelu regulované soustavy ve tvaru jejího L-přenosu. Ke každé metodě a přístupu je uveden nejméně jeden aplikační příklad.

Seznam literatury je velmi obsáhlý. Může sloužit jako podnět k dalšímu studiu, případně k podrobnějším informacím o různých přístupech a metodách používaných v současné teorii i praxi v oblasti automatické regulace.

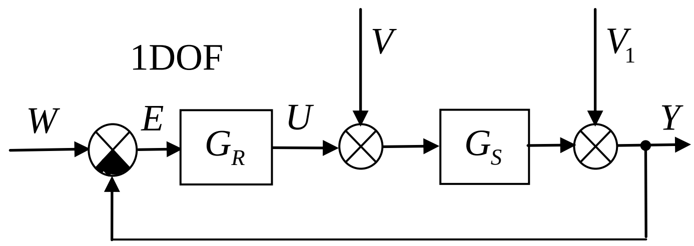
# 1 Regulační obvody

V kapitole jsou stručně popsány základní struktury analyzovaných regulačních obvodů a jsou naznačeny nejdůležitější problémy při jejich syntéze.

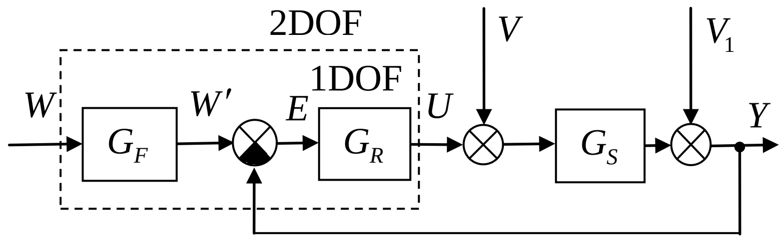
## 1.1 Základní struktury regulačních obvodů

V práci je uvažován jednoduchý regulační obvod s regulátorem s jedním stupněm volnosti na obr. 1.1a, příp. s regulátorem se dvěma stupni volnosti na obr 1.1b, kde $W$, $W'$, $E$, $U$, $V$, $V_1$ a $Y$ jsou obrazy žádané veličiny $w$, filtrované žádané veličiny $w'$, regulační odchylky $e$, akční veličiny $u$, poruchové veličiny před regulovanou soustavou $v$, poruchové veličiny za regulovanou soustavou $v_1$ a regulované veličiny $y$; $G_F$, $G_R$ a $G_S$ jsou přenosy vstupního filtru, regulátoru a regulované soustavy.

a)




b)




Obr. 1.1 Regulační obvod s regulátorem: a) s jedním stupněm volnosti (1DOF), b) se dvěma stupni volnosti (2DOF)

V případě regulačních obvodů s analogovým regulátorem (AR) je třeba uvažovat za nezávisle proměnnou u originálů spojitý čas $t$, u obrazů a přenosů komplexní proměnnou $s$ v L-transformaci (Laplaceově transformaci).

V případě regulačních obvodů s číslicovým regulátorem (ČR) je třeba u originálů uvažovat diskrétní čas $kT$ ($k$ je relativní diskrétní čas, $T$ – vzorkovací perioda), u obrazů a přenosů komplexní proměnnou $z$ v Z-transformaci.

V celé práci se předpokládá, že kvantizační chyba je zanedbatelně malá, a proto pojmy „číslicový“ a „diskrétní“ jsou považovány za ekvivalentní.

Regulátory s jedním stupněm volnosti (1DOF = 1 **d**egree **o**f **f**reedom) jsou nazývány konvečními regulátory nebo prostě regulátory, naproti tomu regulátory se dvěma stupni volnosti (2DOF = 2 **d**egrees **o**f **f**reedom) jsou nazývány a označovány jako regulátory 2DOF. Více o regulátorech je uvedeno v kapitole 2.

Přenos soustavy $G_S$ se může skládat z části $G_P$ neobsahující dopravní zpoždění a z části $G_D$ vyjadřující dopravní zpoždění, tj.

$$G_S = G_P G_D . \tag{1.1}$$

U regulačního obvodu s analogovým regulátorem má L-přenos soustavy tvar

$$G_S(s) = G_P(s)\mathrm{e}^{-T_d s}, \quad G_D(s) = \mathrm{e}^{-T_d s}, \quad T_d \ge 0 \tag{1.2}$$

a podobně u regulačního obvodu s číslicovým regulátorem má Z-přenos soustavy tvar

$$G_S(z) = G_P(z) z^{-d}, \quad G_D(z) = z^{-d}, \quad T_d = dT, \quad d \ge 0 , \tag{1.3}$$

kde $T_d$ je dopravní zpoždění, $T$ – vzorkovací perioda, $d$ – relativní diskrétní dopravní zpoždění, o kterém se nejčastěji předpokládá, že je celým číslem. Později bude ukázáno, že pro většinu případů tento předpoklad není omezující.

V obecném případě $G_P$ vyjadřuje invertibilní část a $G_D$ stabilní neinvertibilní část přenosu soustavy $G_S$ při předpokladu

$$\operatorname{mod} G_D = |G_D| = 1 , \tag{1.4}$$

kde mod je modul.

Je zřejmé, že tato podmínka je u přenosů $G_D$ ve vztazích (1.2) a (1.3) splněna.

Obecné podmínky na regulační obvod mohou být vyjádřeny pomocí cíle regulace, např. v obrazech ve tvaru

$$Y \to W , \tag{1.5}$$

ze kterého vyplývá dvojí úkol regulátoru, a to zajistit sledování žádané veličiny $w$ regulovanou veličinou $y$ při současném potlačení negativního vlivu poruch $v$ a $v_1$ na činnost regulačního obvodu. Je samozřejmé, že regulační obvod musí být stabilní a cíl regulace (1.5) musí být plněn se zadanou kvalitou.

Pro regulační obvod na obr. 1.1a a soustavu (1.1) platí

$$Y = G_{wy} W + G_{vy} V + G_{v_1 y} V_1 , \tag{1.6}$$

$$G_{wy} = \frac{Y}{W} = \frac{G_R G_P G_D}{1 + G_R G_P G_D} , \tag{1.7}$$

$$G_{vy} = \frac{Y}{V} = \frac{G_P G_D}{1 + G_R G_P G_D} = (1 - G_{wy}) G_P G_D, \tag{1.8}$$

$$G_{v_1 y} = \frac{Y}{V_1} = \frac{1}{1 + G_R G_P G_D} = 1 - G_{wy}, \tag{1.9}$$

kde $G_{wy}$ je přenos řízení, $G_{vy}$ – přenos poruchy pro $V$, $G_{v_1 y}$ – přenos poruchy pro $V_1$.

Ze vztahu (1.6) vyplývá, že cíl regulace (1.5) bude splněn, budou-li splněny podmínky

$$G_{wy} \to 1, \tag{1.10}$$

$$G_{vy} \to 0, \tag{1.11}$$

$$G_{v_1 y} \to 0. \tag{1.12}$$

Podmínky (1.10) – (1.12) mohou být splněny jedině tehdy, pokud soustava neobsahuje dopravní zpoždění $G_D$, tj. $G_D = 1$.

Ze vztahů (1.8) a (1.9) je zřejmé, že bude-li splněna podmínka pro přenos řízení (1.10), pak budou automaticky splněny podmínky (1.11) a (1.12) pro oba přenosy poruchy $G_{vy}$ a $G_{v_1 y}$. Proto při syntéze regulačního obvodu je často uvažován jen přenos řízení $G_{wy}$.

Při existenci dopravního zpoždění $G_D$ bude cíl regulace (1.5) splněn, budou-li platit podmínky

$$G_{wy} \to G_D, \tag{1.13}$$

$$G_{vy} \to (1 - G_D) G_P G_D, \tag{1.14}$$

$$G_{v_1 y} \to 1 - G_D. \tag{1.15}$$

Ze vztahů (1.13) – (1.15) vyplývají velmi důležité závěry. Nejdůležitějším závěrem je, že dopravního zpoždění (neinvertibilní části) $G_D$ se nelze žádným způsobem zbavit. Dalším důležitým závěrem je, že vystupuje-li v regulované soustavě dopravní zpoždění $G_D$ a působí-li porucha před soustavou, viz (1.14), pak zásah regulátoru se může projevit na výstupu nejdříve po uplynutí dvojnásobku dopravního zpoždění.

Regulace soustav s dopravním zpožděním patří mezi náročnější problémy teorie automatického řízení.

V jednoduchém regulačním obvodu na obr. 1.1a se nemá smysl zabývat poruchou $v_1$ působící na výstupu soustavy, protože ze vztahu (1.9) je zřejmé, že odezva na poruchu $v_1$ bude stejná jako odezva na žádanou veličinu $w = v_1$, ale pouze posunutá a obrácená.

Pokud jde o poruchu působící na vstupu soustavy, pak v přenosu $G_{vy}$ pro poruchu $v$ (1.8) vystupuje přenos (1.1), a proto regulátor s přenosem $G_R$ musí být seřízen kompromisně jak z hlediska žádané veličiny $w$, tak i z hlediska poruchové veličiny $v$. Ne vždy lze regulátor kompromisně seřídit. Velké problémy vystupují především u integračních soustav. Pak vhodným řešením je použití regulátoru 2DOF, viz obr. 1.1b. V tomto případě se změní pouze přenos řízení

$$G_{wy} = \frac{Y}{W} = G_F G_{w'y} = G_F \frac{G_R G_P G_D}{1 + G_R G_P G_D}, \tag{1.16}$$

$$G_{w'y} = \frac{Y}{W'} = \frac{G_R G_P G_D}{1 + G_R G_P G_D}, \tag{1.17}$$

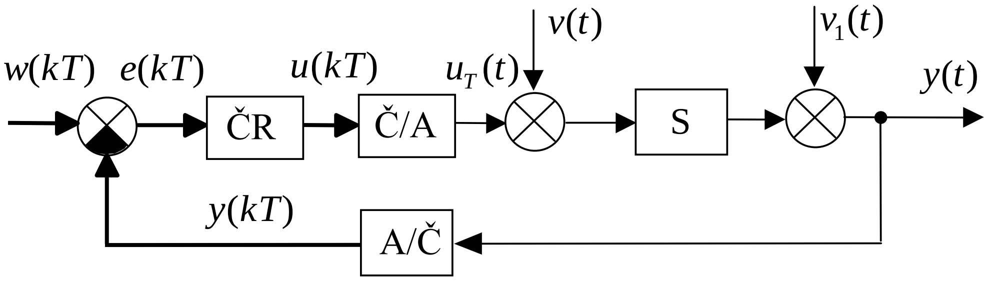
kde $G_{w'y}$ je přenos řízení pro filtrovanou žádanou veličinu $w'$.

Přenosy poruch (1.8) a (1.9) zůstávají stejné (pouze $G_{wy}$ je třeba zastoupit $G_{w'y}$).

V tomto případě se regulátor $G_R$ seřídí z hlediska poruchy $v$ a vstupní filtr $G_F$ z hlediska žádané veličiny $w$. Podrobněji viz podkap. 2.2.

## 1.2 Regulační obvod s číslicovým regulátorem

Regulační obvod s číslicovým regulátorem je na obr. 1.2, kde ČR je číslicový regulátor, S – regulovaná soustava, Č/A – číslicově analogový převodník, A/Č – analogově číslicový převodník, $u_T(t)$ – tvarovaná akční veličina.

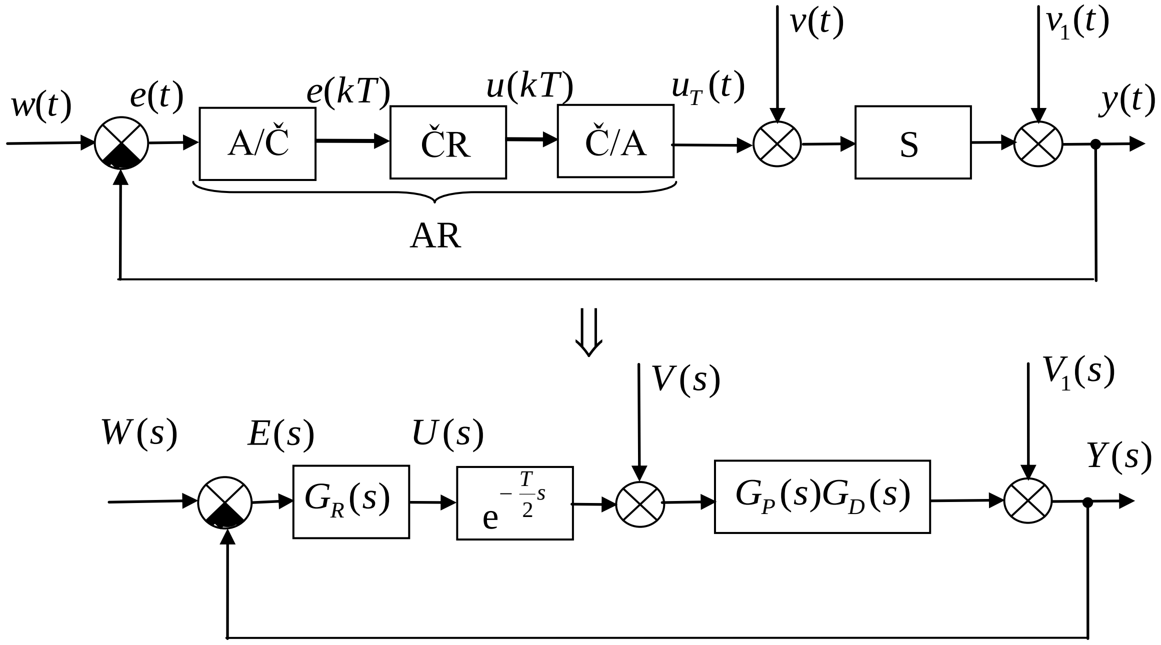



Obr. 1.2 Regulační obvod s číslicovým regulátorem

Pro větší názornost jsou diskrétní (číslicové) veličiny na obr. 1.2 – 1.4 zaznačeny tučnou čarou.

Pokud se přesune A/Č převodník ze zpětné vazby (obr. 1.2) před číslicový regulátor (obr. 1.3), pak na číslicový regulátor s oběma převodníky lze pohlížet jako na analogový regulátor. Proto pro přibližnou syntézu regulačního obvodu s číslicovým regulátorem lze použít spojitý regulační obvod, viz obr. 1.3 (dole).

Níže jsou uvedeny dva různé postupy při syntéze regulačních obvodů s číslicovým regulátorem při uvažování schématu na obr. 1.3.




Obr. 1.3 Transformace regulačního obvodu s číslicovým regulátorem na spojitý regulační obvod

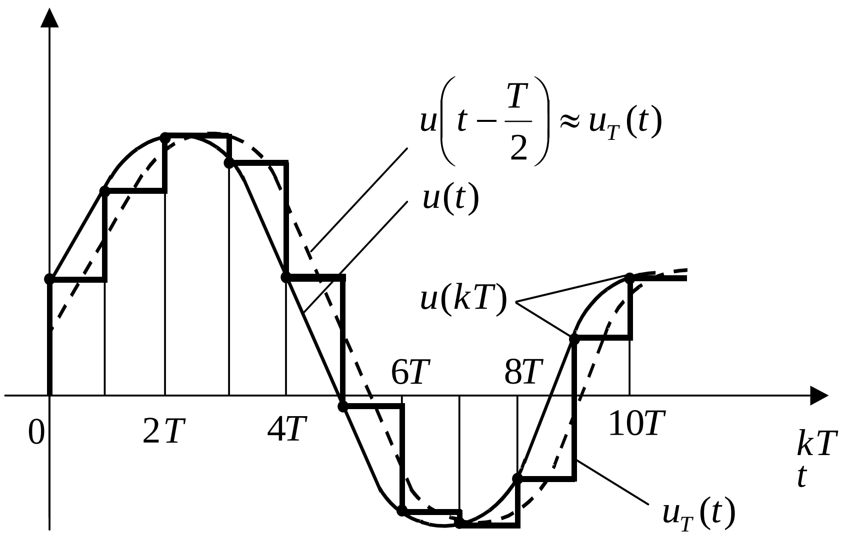
Za předpokladu, že Č/A převodník má vlastnosti vzorkovače a tvarovače nultého řádu, tvarovaná akční veličina $u_T(t)$ má tvar stupňovité časové funkce, viz obr. 1.4.

Z průběhu tvarované akční veličiny $u_T(t)$ vyplývá, že pro dostatečně malou vzorkovací periodu $T$ může být přibližně zastoupena akční veličinou $u(t)$ zpožděnou o polovinu vzorkovací periody $T/2$, tj. $u(t - T/2)$. Proto regulační obvod s číslicovým regulátorem může být zastoupen spojitým regulačním obvodem se soustavou

$$G'_S(s) = G_P(s)G_D(s)\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} . \tag{1.18}$$

Pro tuto soustavu se navrhne a seřídí vhodný analogový regulátor $G_R(s)$. Hodnoty jeho stavitelných parametrů spolu se vzorkovací periodou $T$ se pak použijí u odpovídajícího číslicového regulátoru. Tato přibližná metoda syntézy regulačního obvodu s číslicovým regulátorem pro dostatečně malou vzorkovací periodu $T$ dává většinou dobré výsledky.

Pokud soustava $G_S(s)$ neobsahuje dopravní zpoždění, tj. $G_D(s) = 1$, a pro syntézu spojitého regulačního obvodu se použijí metody, které nejsou vhodné pro dopravní zpoždění, je možné použít aproximaci dopravního zpoždění Taylorovým rozvojem




Obr. 1.4 Průběhy akčních veličin v regulačním obvodu s číslicovým regulátorem

$$\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{T}{2}s}} \approx \frac{1}{1+\frac{T}{2}s}, \tag{1.19}$$

příp.

$$\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}s}}{\mathrm{e}^{\frac{T}{4}s}} \approx \frac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}. \tag{1.20}$$

Většinou se používá aproximace (1.19). Přesnější aproximace než (1.20) se nepoužívají.

Je zřejmé, že dopravní zpoždění

$$\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} \tag{1.21}$$

přibližně vyjadřuje vlastnosti Č/A převodníku.

**Přibližný postup 1**

1. Pro zvolenou vzorkovací periodu $T$ a danou regulovanou soustavu s L-přenosem (1.18) se navrhne a seřídí vhodnou metodou analogový regulátor s L-přenosem $G_R(s)$.
2. Určené stavitelné parametry pro analogový regulátor s L-přenosem $G_R(s)$ spolu se zvolenou vzorkovací periodou $T$ se použijí pro odpovídající číslicový regulátor se Z-přenosem $G_R(z)$ v souladu s transformací (1.33) odpovídající tab. 2.2, příp. s transformací (1.34).

3. Regulační obvod s navrženým a seřízeným číslicovým regulátorem se simulačně ověří, zda jsou splněny požadavky na kvalitu regulace.

Jiná možnost uvažování vlastností Č/A převodníku spočívá v určení Z-přenosu soustavy $G_S(z)$ za předpokladu, že spojitá přechodová funkce soustavy $h_S(t)$ se v okamžicích vzorkování shoduje s diskrétní přechodovou funkcí $h_S(kT)$, tj.

$$h_S(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}G_S(z)\right\} = h_S(t)\Big|_{t=kT} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_S(s)\right\}\Bigg|_{t=kT}. \tag{1.22}$$

Použitím Z-transformace a jednoduchou úpravou se dostane Z-přenos soustavy invariantní vzhledem k přechodové funkci

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_S(s)\right\}\Bigg|_{t=kT}\right\}. \tag{1.23}$$

Diskretizace na základě vztahu (1.23) se nazývá invariantní vzhledem k přechodové funkci.

Vzhledem k tomu, že Č/A převodník realizuje na svém výstupu tvarovanou akční veličinu $u_T(t)$ ve tvaru stupňovité časové funkce, Z-přenos soustavy (1.23) popisuje soustavu v okamžicích vzorkování $kT$ přesně a navíc zahrnuje v sobě i vlastnosti Č/A převodníku.

Protože se předpokládá, že $G_D$ vyjadřuje dopravní zpoždění a $T_d = dT$ [viz (1.2) a (1.3)], tj. platí

$$G_D(s) = \mathrm{e}^{-T_d s} = \mathrm{e}^{-dTs} \;\Leftrightarrow\; G_D(z) = z^{-d}, \tag{1.24}$$

vztah (1.23) se prakticky používá pro část neobsahující dopravní zpoždění

$$G_P(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_P(s)\right\}\Bigg|_{t=kT}\right\}. \tag{1.25}$$

Pak Z-přenos soustavy s dopravním zpožděním je dán vztahem

$$G_S(z) = G_P(z)z^{-d}. \tag{1.26}$$

Z-přenos soustavy (1.26) se pomocí transformace

$$z = \frac{1}{1-Ts} \;\Leftrightarrow\; s = \frac{1}{T}\frac{z-1}{z}, \tag{1.27}$$

příp. bilineární transformace

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \;\Leftrightarrow\; s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{1.28}$$

převede do oblasti komplexní proměnné $s$, tj.

$$G_S'(s) = G_P(z)\Big|_{z=\frac{1}{1-Ts}} \mathrm{e}^{-T_d s}\,, \tag{1.29}$$

příp.

$$G_S'(s) = \mathrm{e}^{-T_d s} G_P(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}}\,. \tag{1.30}$$

Vztahy (1.27) odpovídají zpětné relativní diferenci a zpětné obdélníkové metodě sumace a získají se pomocí Taylorova rozvoje

$$z = \mathrm{e}^{Ts} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-Ts}} \approx \frac{1}{1-Ts}\,. \tag{1.31}$$

Podobně vztahy (1.28) odpovídají lichoběžníkové neboli Tustinově metodě sumace a získají se rovněž pomocí Taylorova rozvoje

$$z = \mathrm{e}^{Ts} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{T}{2}s}}{\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}} \approx \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}\,. \tag{1.32}$$

Pro soustavu s L-přenosem $G_S'(s)$ se provede syntéza spojitého regulačního obvodu (obr. 1.3), tj. navrhne se vhodný analogový regulátor $G_R(s)$. Pak se L-přenos analogového regulátoru $G_R(s)$ z oblasti komplexní proměnné $s$ převede na odpovídající Z-přenos číslicového regulátoru $G_R(z)$ v oblasti komplexní proměnné $z$ pomocí vztahů (1.27) a (1.28), tj.

$$G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}}\,, \tag{1.33}$$

příp.

$$G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}\,. \tag{1.34}$$

Nejčastěji se při zpětném převodu bilineární transformace (1.28) použije pouze pro integrační složku a pro derivační složku se použije vztah (1.27) pro zpětnou diferenci, tzn., že integrace je nahrazena lichoběžníkovou sumací a derivace relativní zpětnou diferencí.

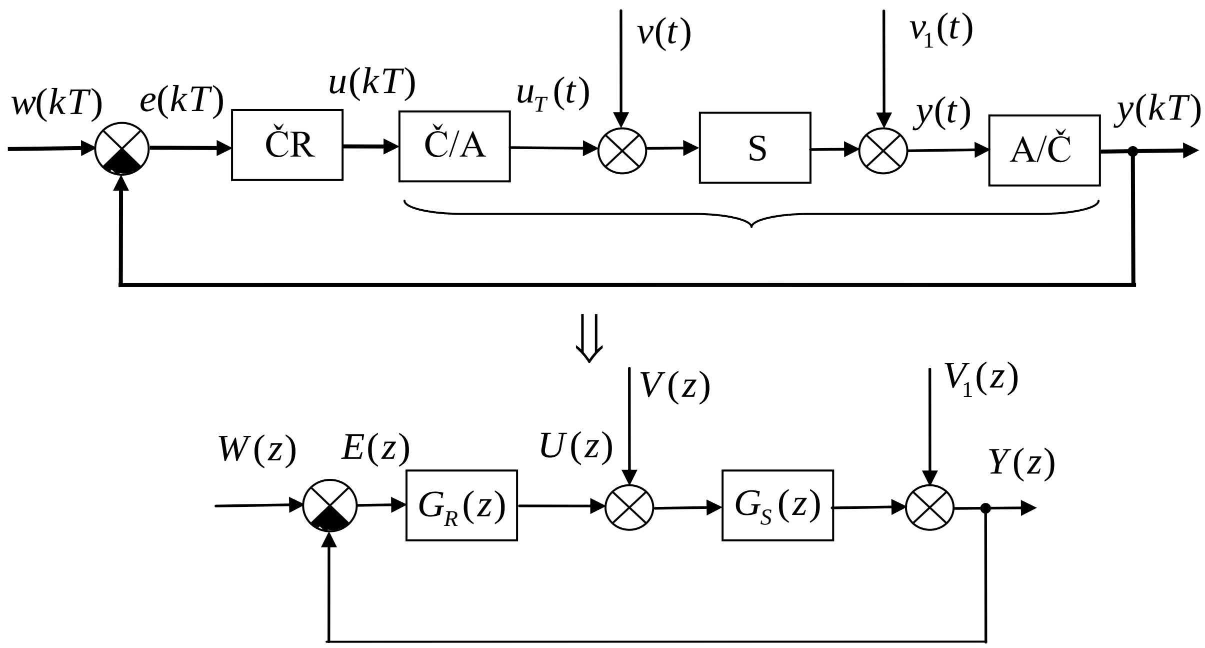
Tato přibližná metoda syntézy regulačních obvodů s číslicovým regulátorem dává většinou kvalitní regulační proces.

**Přibližný postup 2**

1. Pro zvolenou vzorkovací periodu $T$, jejíž celočíselným násobkem $d$ je dopravní zpoždění $T_d$, se určí Z-přenos dané soustavy $G_S(z)$ v souladu se vztahy (1.25) a (1.26).

2. Určený Z-přenos soustavy $G_S(z)$ se převede pomocí zvolené transformace (1.29), příp. (1.30) na L-přenos soustavy $G'_S(s)$, pro který se navrhne a seřídí vhodnou metodou analogový regulátor s L-přenosem $G_R(s)$.
3. Určené stavitelné parametry pro analogový regulátor s L-přenosem $G_R(s)$ spolu se zvolenou vzorkovací periodou $T$ se použijí pro odpovídající číslicový regulátor se Z-přenosem $G_R(z)$ v souladu s transformací (1.33) odpovídající tab. 2.2, příp. s transformací (1.34).
4. Regulační obvod s navrženým a seřízeným číslicovým regulátorem se simulačně ověří, zda jsou splněny požadavky na kvalitu regulace.

Přesune-li se A/Č převodník ze zpětné vazby u regulačního obvodu s číslicovým regulátorem na obr. 1.2 za soustavu v souladu s obr. 1.5 (nahoře), pak na soustavu, která má na vstupu Č/A převodník a na výstupu A/Č převodník, lze pohlížet jako na diskrétní (číslicovou) soustavu. Pro analýzu a syntézu regulačního obvodu s číslicovým regulátorem lze použít diskrétní regulační obvod na obr. 1.5 (dole).




Obr. 1.5 Transformace regulačního obvodu s číslicovým regulátorem na diskrétní regulační obvod

Pokud Č/A převodník má vlastnosti vzorkovače a tvarovače nultého řádu (viz obr. 1.4), pak Z-přenos soustavy se určí na základě vztahu (1.23), příp. vztahů (1.25) a (1.26).

Diskrétní regulační obvod umožňuje, na rozdíl od předchozích případů, přesnou analýzu a syntézu regulačního obvodu s číslicovým regulátorem pro libovolnou vzorkovací periodu $T$. Platí to však pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny *v*. Při jiném průběhu poruchové veličiny *v* dochází vzhledem k vlastnostem Č/A převodníku k určité, většinou nepodstatné, nepřesnosti.

## 1.3 Jednotný přístup k regulačním obvodům s analogovými a číslicovými regulátory

Jinou možností, jak vyjádřit vlastnosti diskrétních systémů a časových průběhů veličin, je použití D-transformace (delta transformace), která popisuje jejich vlastnosti v oblasti komplexní proměnné $\gamma$. Vlastnosti diskrétních systémů jsou popsány pomocí D-přenosů $G(\gamma)$ a diskrétních veličin (originálů) $x(kT)$ pomocí D-obrazů $X(\gamma)$. Velkou výhodou D-transformace je možnost snadného přechodu k Z-transformaci jednoduchou substitucí a k L-transformaci limitním přechodem pro $T \to 0$. Využívají se při tom vztahy:

komplexní proměnné

$$z = 1 + \gamma T, \qquad s = \lim_{T \to 0} \gamma, \tag{1.35}$$

obrazy

$$X(z) = \frac{1}{T} X(\gamma)\bigg|_{\gamma = \frac{z-1}{T}}, \qquad X(s) = \lim_{T \to 0} X(\gamma), \tag{1.36}$$

přenosy

$$G(z) = G(\gamma)\big|_{\gamma = \frac{z-1}{T}}, \qquad G(s) = \lim_{T \to 0} G(\gamma). \tag{1.37}$$

Při použití D-transformace syntézu regulačních obvodů s číslicovým regulátorem lze provádět na základě blokových schémat na obr. 1.1, kde je uvažována za nezávisle proměnnou komplexní proměnná $\gamma$. Získané výsledky jsou přímo použitelné pro číslicový regulátor a limitním přechodem pro $T \to 0$ se získají výsledky pro odpovídající analogový regulátor.

Základní vlastnosti D-transformace jsou popsány v příloze P1. Podrobně je možné se seznámit s D-transformací v publikacích [Midleton, Goodwin 1990; Feuer, Goodwin 1996; Goodwin, Graebe, Salgado 2003; Vítečková, Víteček et al. 2002; Halásek 2002].

# 2 Regulátory

Kapitola je věnována analogovým a číslicovým regulátorům s jedním a dvěma stupni volnosti. Jsou uvažovány především takové struktury regulátorů, se kterými se uživatel může setkat nejčastěji.

## 2.1 Analogové regulátory s jedním stupněm volnosti

L-přenos ideálního konvenčního analogového regulátoru PID (1DOF) může mít jeden ze tří následujících tvarů [Åström, Häglund 1995, 2006]

paralelní

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}, \tag{2.1}$$

standardní (bez interakce)

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s}, \tag{2.2}$$

sériový (s interakcí)

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K'_P\left(1 + \frac{1}{T'_I s}\right)\left(1 + T'_D s\right) = K'_P \frac{(T'_I s + 1)(T'_D s + 1)}{T'_I s}, \tag{2.3}$$

kde $K_P$, $K_I$, a $K_D$ jsou váhy proporcionální, integrační a derivační složky analogového regulátoru, $K'_P$ – zesílení regulátoru, $T_I$ ($T'_I$) – integrační časová konstanta, $T_D$ ($T'_D$) – derivační časová konstanta. Jsou to tzv. stavitelné parametry regulátoru.

Ve standardní struktuře analogového regulátoru PID (2.2) se $K_P$ nazývá zesílením analogového regulátoru. Standardní tvar regulátoru PID (2.2) je velmi často také nazýván paralelním tvarem.

Mezi stavitelnými parametry analogových regulátorů platí jednoduché převodní vztahy [Šulc, Vítečková 2004; Vítečková, Víteček 2008]:

$$K_I = \frac{K_P}{T_I}, \quad K_D = K_P T_D, \tag{2.4}$$

$$T_I = \frac{K_P}{K_I}, \quad T_D = \frac{K_D}{K_P}, \tag{2.5}$$

$$K_P = K'_P i, \quad T_I = T'_I i, \quad T_D = \frac{T'_D}{i}, \quad i = 1 + \frac{T'_D}{T'_I}, \tag{2.6}$$

$$K'_P = K_P\beta, \quad T'_I = T_I\beta, \quad T'_D = \frac{T_D}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{T_D}{T_I}}, \tag{2.7}$$

kde *i* je činitel interakce.

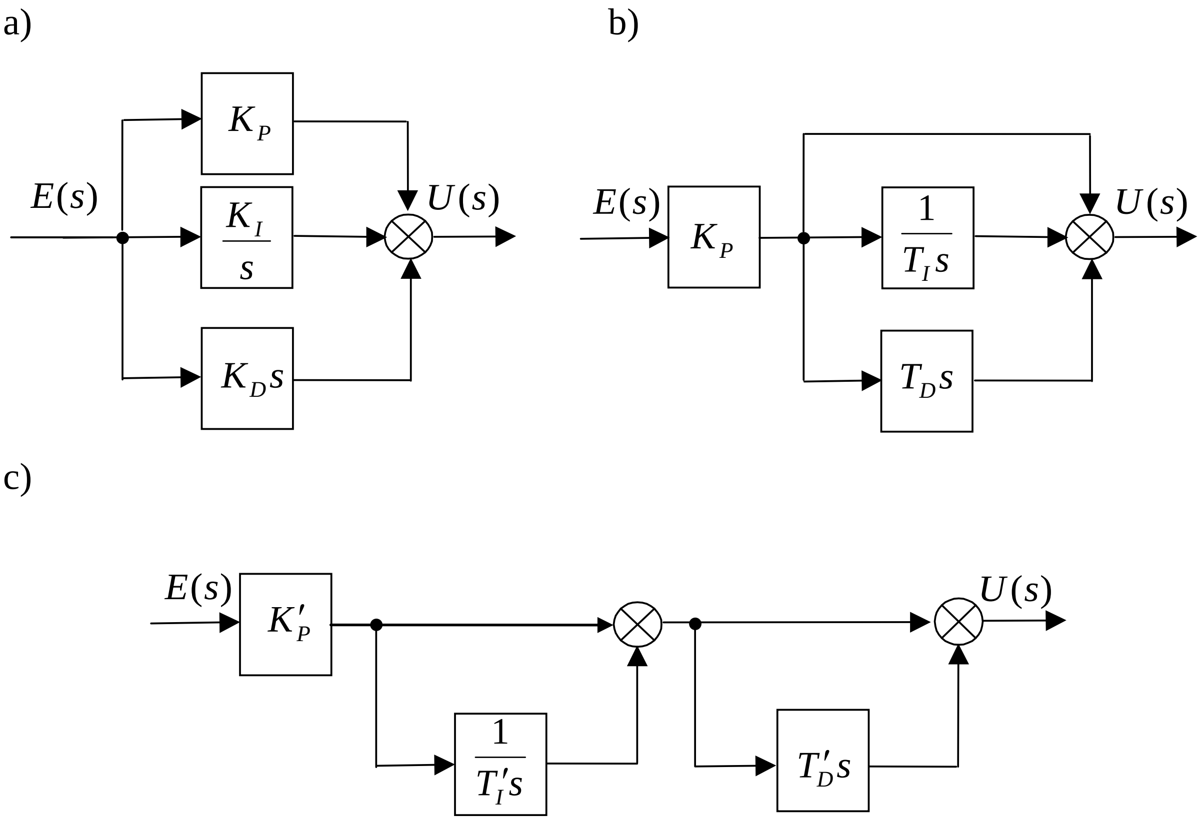
Někdy se u regulátorů používá pásmo proporcionality

$$pp = \frac{100}{K_P} \ [\%]. \tag{2.8}$$

Analogový regulátor se sériovou strukturou (2.3) bude označován jako $PID_i$. Ze vztahu (2.7) pro koeficient $\beta$ vyplývá, že u analogového regulátoru $PID_i$ vystupuje omezení, kterému u standardního analogového regulátoru PID odpovídá nerovnost

$$\frac{T_D}{T_I} \le \frac{1}{4}, \tag{2.9}$$

tj. analogový regulátor $PID_i$ se sériovou strukturou je méně obecný než standardní analogový regulátor PID. To znamená, že stavitelné parametry analogového regulátoru $PID_i$ se sériovou strukturou mohou být vždy přepočteny na stavitelné parametry standardního analogového regulátoru PID, ale naopak to platí pouze při splnění nerovnosti (2.9), viz též příloha P2.




Obr. 2.1 Struktury ideálních konvenčních analogových regulátorů PID:
a) paralelní, b) standardní (bez interakce), c) sériová (s interakcí)

I když analogový regulátor $PID_i$ má určité omezení, jeho realizace je snadnější a levnější. Také se s výhodou používá při kompenzačním seřízení, kdy dvojčleny v čitateli L-přenosu analogového regulátoru $PID_i$ (2.3) kompenzují odpovídající dvojčleny ve jmenovateli L-přenosu regulované soustavy.

Jednodušší analogové regulátory vzniknou z analogového regulátoru PID vynecháním jedné nebo dvou složek. Samostatná derivační složka (D) nemůže být použita, protože reaguje pouze na časové změny regulační odchylky a v ustáleném stavu způsobí jakoby rozpojení regulačního obvodu. Rovněž kombinace integrační (I) a derivační (D) složky se nepoužívá z důvodu nevyhovujících vlastností.

Konvenční typy analogových regulátorů jsou uvedeny v tab. 2.1.

Tab. 2.1 L-přenosy konvenčních analogových regulátorů

| | Typ | L-přenos |
|---|---|---|
| 1 | P | $K_P$ |
| 2 | I | $\dfrac{1}{T_I s}$ |
| 3 | PI | $K_P\left(1+\dfrac{1}{T_I s}\right)$ |
| 4 | PD | $K_P(1+T_D s)$ |
| 5 | PID | $K_P\left(1+\dfrac{1}{T_I s}+T_D s\right)$ |
| 6 | $PID_i$ | $K'_P\left(1+\dfrac{1}{T'_I s}\right)(1+T'_D s)$ |

Derivační složka má z teoretického hlediska kladný stabilizující vliv na regulační pochod. Z praktického hlediska má derivační složka nepříjemnou vlastnost, která spočívá v zesilování rychlých změn a šumu o vysokých úhlových kmitočtech. Např. pokud derivační složka analogového regulátoru PD nebo PID

$$K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} = K_P T_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.10}$$

zpracovává regulační odchylku $e(t)$, na kterou je aditivně namodulován šum o amplitudě $a_s$ a úhlovém kmitočtu $\omega_s$, tj.

$$e(t) + a_s \sin \omega_s t\,,$$

pak na výstupu derivační složky (2.10) se dostane

$$K_P T_D \left[ \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_s \omega_s \cos\omega_s t \right], \tag{2.11}$$

kde $\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ je užitečná část a $a_s \omega_s \cos\omega_s t$ je parazitní část.

Ze vztahu (2.11) vyplývá, že při vyšších úhlových kmitočtech $\omega_s$ bude parazitní část převládat nad užitečnou částí a výstup z derivační složky může způsobit nesprávnou činnost nejen vlastního regulátoru, ale i celého regulačního obvodu. Z tohoto důvodu je ideální derivační činnost prakticky nepoužitelná.

Pro snížení negativního vlivu parazitní části se používá filtr s přenosem

$$\frac{1}{T_F s + 1} = \frac{1}{\frac{T_D}{N} s + 1}, \tag{2.12}$$

který nejčastěji filtruje derivační složku (2.10), příp. regulační odchylku $e(t)$, viz příloha P2. Hodnota $N$ bývá v rozmezí 1 – 33 [Visioli 2006]. U průmyslových analogových regulátorů je $N$ = 5 – 20 [Åström, Häglund 1995, 2006; Johnson, Moradi 2005; Šulc, Vítečková 2004].

Úkolem filtru je potlačit parazitní šum, který obsahuje především regulovaná veličina $y(t)$, proto také bývá filtrována. Při hodnotách $N \geq 10$ se zásadním způsobem neovlivní výsledné vlastnosti analogových regulátorů, a proto se při jejich seřizování neuvažuje. U průmyslových analogových regulátorů je většinou přednastavena hodnota okolo $N = 10$.

Při menších hodnotách $N$ a při podrobném zkoumání vlastností analogových regulátorů PD a PID je třeba uvažovat vliv filtrace. Je zajímavé, že největší rozdíl mezi vlastnostmi ideálního standardního analogového regulátoru PID (2.2) a téhož regulátoru při filtraci derivační složky vzniká při poměru $T_D/T_I$ = 1/4, tj. při poměru používaném Zieglerem a Nicholsem [Visioli 2006].

V příloze P2 jsou uvedeny podrobné tabulky, které umožňují rychlý vzájemný přepočet stavitelných parametrů pro tři základní tvary analogových regulátorů (2.1) – (2.3) za předpokladu, že je filtrována derivační složka (2.10), příp. regulační odchylka $e(t)$ [Vítečková, Víteček 2009a].

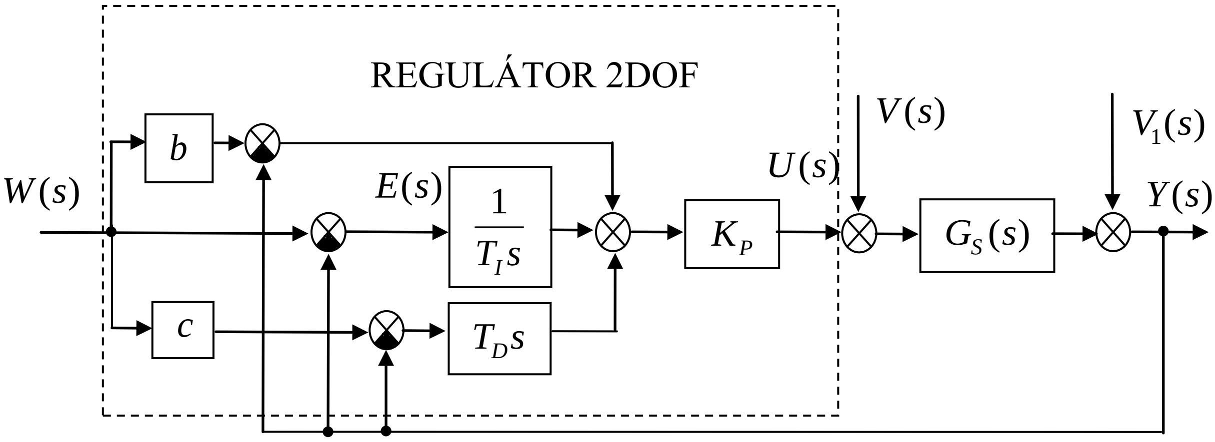
Při použití derivační složky je třeba brát v úvahu, že její nevhodná filtrace a příliš velké omezení akční veličiny $u(t)$ mohou způsobit při regulaci velké problémy a neočekávané chování.

## 2.2 Analogové regulátory se dvěma stupni volnosti

Vlastnosti ideálního analogového regulátoru PID 2DOF jsou nejčastěji popsány v tzv. ISA tvaru vztahem [Åström, Häglund 1995, 2006; Visioli 2006]

$$U(s) = K_P \left\{ bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s}[W(s) - Y(s)] + T_D s[cW(s) - Y(s)] \right\}, \quad (2.13)$$

kde $b$ je váha žádané veličiny u proporcionální složky, $c$ – váha žádané veličiny u derivační složky.




Obr. 2.2 Schéma regulačního obvodu s analogovým regulátorem PID 2DOF odpovídající vztahu (2.13)

Vztahu (2.13) přímo odpovídá schéma na obr. 2.2. Vztah (2.13) lze upravit na tvar

$$U(s) = K_P \left( b + \frac{1}{T_I s} + cT_D s \right) W(s) - K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) Y(s),$$

resp.

$$U(s) = G_{ff}(s)W(s) - G_R(s)Y(s), \quad (2.14)$$

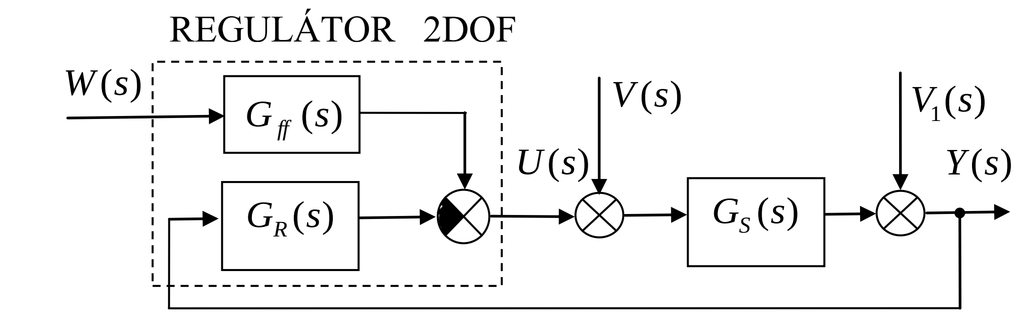
kde

$$G_{ff}(s) = K_P \left( b + \frac{1}{T_I s} + cT_D s \right) = K_P \frac{cT_D T_I s^2 + bT_I s + 1}{T_I s}, \quad (2.15)$$

$$G_R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \frac{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s}. \quad (2.16)$$

Vztah (2.16) vyjadřuje přenos standardního analogového regulátoru PID.

Vztahu (2.14) odpovídá schéma na obr. 2.3 [Åström, Hägglund 2006].




Obr. 2.3 Schéma regulačního obvodu s analogovým regulátorem 2DOF odpovídající vztahu (2.14)

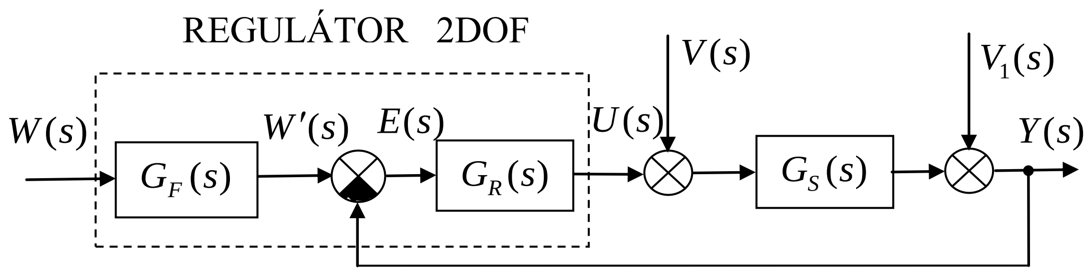
Schéma na obr. 2.3 lze upravit na schéma na obr. 2.4, pro které platí [Åström, Hägglund 2006]

$$U(s) = G_F(s)G_R(s)W(s) - G_R(s)Y(s), \tag{2.17}$$

kde

$$G_F(s) = \frac{G_{ff}(s)}{G_R(s)} = \frac{cT_DT_Is^2 + bT_Is + 1}{T_DT_Is^2 + T_Is + 1} \tag{2.18}$$

je přenos vstupního filtru, tj. filtru žádané veličiny.

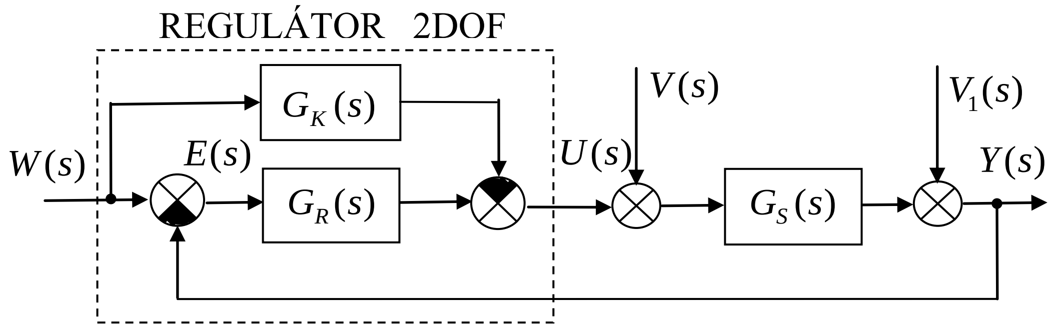



Obr. 2.4 Schéma regulačního obvodu s analogovým regulátorem 2DOF odpovídající vztahu (2.17)

Často je možno se setkat se strukturou regulačního obvodu s regulátorem PID 2DOF ukázanou na obr. 2.5, kde $G_K(s)$ je přenos dopředného kompenzátoru s přenosem [Taguchi, Araki 2000; Araki, Taguchi 2003]

$$G_K(s) = K_P(\alpha' + \beta' T_D s) \tag{2.19}$$

a $G_R(s)$ je přenos standardního analogového regulátoru PID (2.16).




Obr. 2.5 Schéma regulačního obvodu s analogovým regulátorem 2DOF odpovídající vztahu (2.20)

Pro akční veličinu regulačního obvodu na obr. 2.5 platí

$$U(s) = [G_R(s) - G_K(s)]W(s) - G_R(s)Y(s). \tag{2.20}$$

Dosazením (2.15) a (2.16) do (2.14) a (2.20) a porovnáním prvních výrazů jejich pravých stran se obdrží

$$K_P \frac{cT_D T_I s^2 + bT_I s + 1}{T_I s} = K_P \frac{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s} - K_P(\alpha' + \beta' T_D s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; b = 1 - \alpha', \; c = 1 - \beta' \quad . \tag{2.21}$$

Je tedy zřejmé, že všechny struktury regulačního obvodu s analogovým regulátorem PID 2DOF na obr. 2.2 – 2.5 jsou vzájemně ekvivalentní za předpokladu platnosti vztahů (2.21).

Pokud je použita filtrace u derivační složky [viz (2.12)]

$$D(s) = \frac{T_D s}{T_F s + 1} = \frac{T_D s}{\frac{T_D}{N} s + 1}, \tag{2.22}$$

pak ve všech výše uvedených vztazích místo výrazu $T_D s$ je třeba uvažovat výraz (2.22), tj. $D(s)$.

Pro $b = c = 1$ ($\alpha' = \beta' = 0$) vztahy vyjadřující vlastnosti standardního analogového regulátoru PID 2DOF (2.13), (2.14), (2.17) a (2.20) popisují standardní analogový regulátor PID (2.16) a všechna schémata regulačních obvodů na obr. 2.2 – 2.5 se redukují na schéma na obr. 1.1, tj. platí

$$W'(s) = W(s), \; G_{ff}(s) = G_R(s), \; G_F(s) = 1, \; G_K(s) = 0. \tag{2.23}$$

Pro $T_D = 0$ [$D(s) = 0$] vztahy (2.13), (2.14), (2.17) a (2.20) popisují analogový regulátor PI 2DOF, tj.

$$U(s) = K_P \left\{ bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s}[W(s) - Y(s)] \right\}. \tag{2.24}$$

Vztahy (2.15), (2.16), (2.18) a (2.19) budou mít odpovídající tvary

$$G_{ff}(s) = K_P\left(b + \frac{1}{T_I s}\right), \tag{2.25}$$

$$G_R(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right), \tag{2.26}$$

$$G_F(s) = \frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1}, \tag{2.27}$$

$$G_K(s) = \alpha' K_P\,. \tag{2.28}$$

Pro $b = 1$ ($\alpha' = 0$) vztah (2.24) vyjadřující vlastnosti analogového regulátoru PI 2DOF popisuje analogový regulátor PI s přenosem (2.26) a současně pro vztahy (2.25) – (2.28) platí (2.23).

Podobně pro $T_I \to \infty$ a $b = 1$ ($\alpha' = 0$) vztahy (2.13), (2.14), (2.17) a (2.20) popisují analogový regulátor PD 2DOF, tj.

$$U(s) = K_P\{W(s) - Y(s) + T_D s[cW(s) - Y(s)]\}. \tag{2.29}$$

Vztahy (2.15), (2.16), (2.18) a (2.19) budou mít tvary

$$G_{ff}(s) = K_P(1 + cT_D s), \tag{2.30}$$

$$G_R(s) = K_P(1 + T_D s), \tag{2.31}$$

$$G_F(s) = \frac{cT_D s + 1}{T_D s + 1}, \tag{2.32}$$

$$G_K(s) = \beta' K_P T_D s\,. \tag{2.33}$$

Pro $c = 1$ ($\beta' = 0$) vztah (2.29) popisuje vlastnosti analogového regulátoru PD s přenosem (2.31) a pro vztahy (2.30) – (2.33) platí (2.23).

Pro správnou funkci jakéhokoliv regulátoru je třeba, aby byl informován o skutečné regulační odchylce $e(t)$. Pokud regulátor obsahuje integrační složku, pak regulační odchylku $e(t)$ zpracovává integrační složka. Z tohoto důvodu váha žádané veličiny u integrační složky musí být vždy rovna 1, viz např. vztah (2.13) a obr. 2.2. V případě, že regulátor integrační složku neobsahuje, regulační odchylku zpracovává proporcionální složka, a proto musí být $b = 1$ ($\alpha' = 0$), viz např. vztah (2.29).

V analogových regulátorech 2DOF se často volí váhy žádané veličiny $b$ a $c$ ($\alpha'$, $\beta'$) jako nulové nebo jednotkové a pak vznikají analogové regulátory 2DOF, které mají své speciální označení [Åström, Hägglund 1995, 2006; Visioli 2006; Johnson, Moradi 2005].

Dále je uvažována struktura ideálního analogového regulátoru 2DOF uvedená na obr. 2.4.

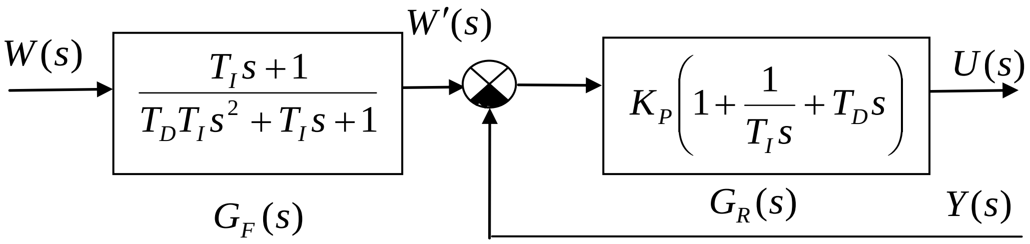
**Regulátor PI-D**

Analogový regulátor PI-D vznikne z analogového regulátoru PID 2DOF (2.13) pro $b$ = 1 a $c$ = 0 ($\alpha'$ = 0 a $\beta'$ = 1).

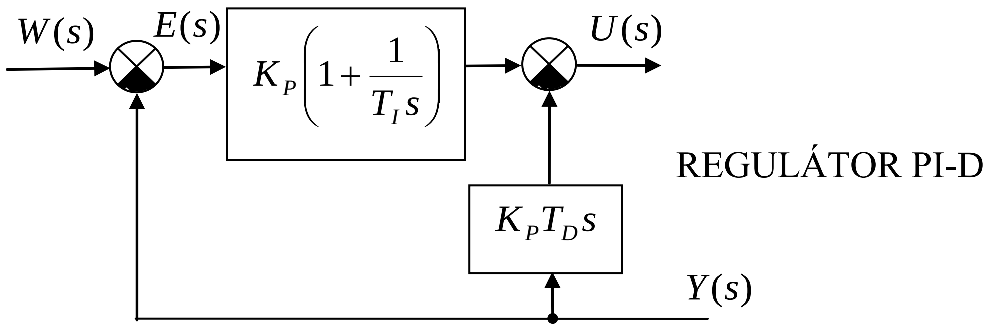
Po dosazení $b$ = 1 a $c$ = 0 do (2.18) se dostane struktura analogového regulátoru PI-D, která vyplývá z transformace schématu na obr. 2.6a na ekvivalentní schéma na obr. 2.6b a ze vztahu

$$U(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)E(s) - K_P T_D s Y(s)\,. \qquad (2.34)$$

a)




b)




Obr. 2.6 Schéma analogového regulátoru PI-D

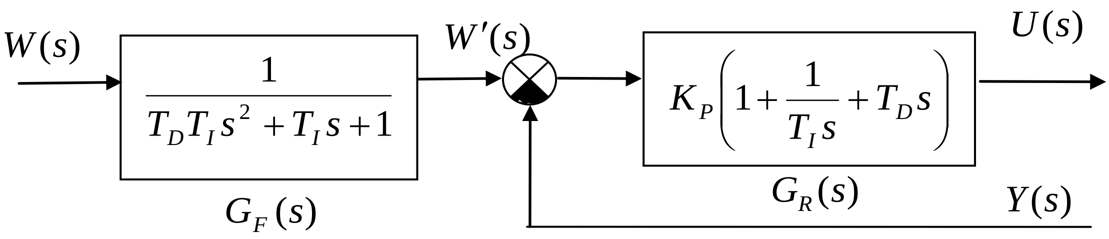
**Regulátor I-PD**

Analogový I-PD vznikne z analogového regulátoru PID 2DOF (2.13) pro $b = c = 0$ ($\alpha' = \beta' = 1$).

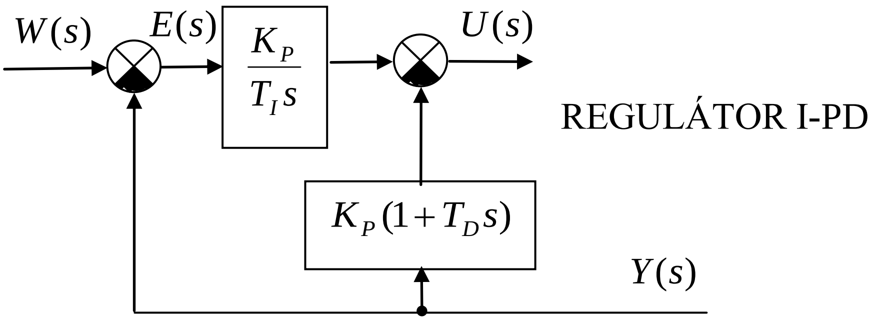
Po dosazení $b = c = 0$ do vztahu (2.18) se dostane struktura analogového regulátoru I-PD, která vyplývá z transformace schématu na obr. 2.7a na ekvivalentní schéma na obr. 2.7b a vztahu

$$U(s) = \frac{K_P}{T_I s}E(s) - K_P(1 + T_D s)Y(s)\,. \qquad (2.35)$$

a)




b)

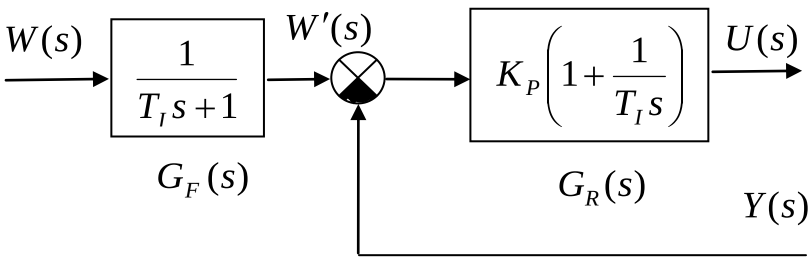



Obr. 2.7 Schéma analogového regulátoru I-PD

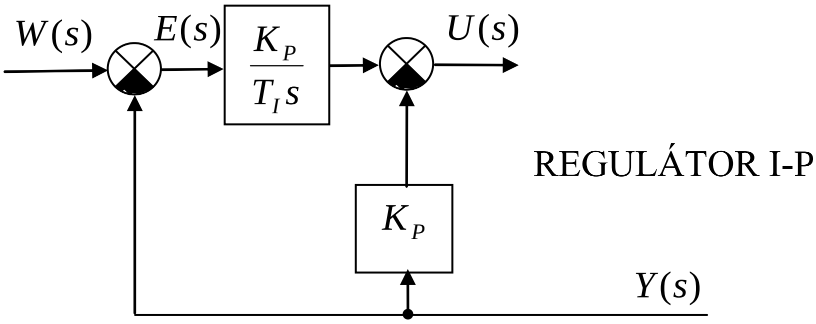
**Regulátor I-P**

Analogový regulátor I-P vznikne z analogového regulátoru PI 2DOF (2.24) pro $b$ = 0 ($\alpha'$ = 1).

a)




b)




Obr. 2.8 Schéma analogového regulátoru I-P

Po dosazení $b = 0$ do vztahu (2.27) se dostane struktura analogového regulátoru I-P, která je zřejmá z transformace schématu na obr. 2.8a na ekvivalentní schéma na obr. 2.8b a ze vztahu

$$U(s) = \frac{K_P}{T_I s} E(s) - K_P Y(s). \tag{2.36}$$

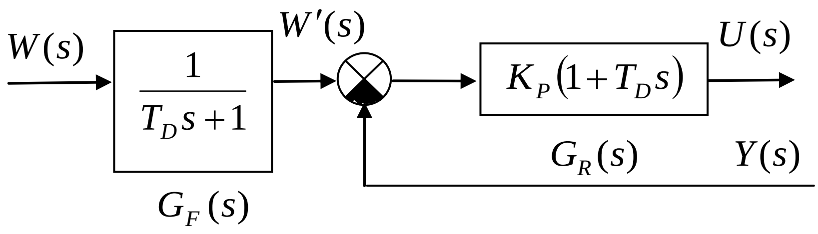
**Regulátor P-D**

Analogový regulátor P-D vznikne z analogového regulátoru PD 2DOF (2.29) pro $c = 0$ ($\beta' = 1$).

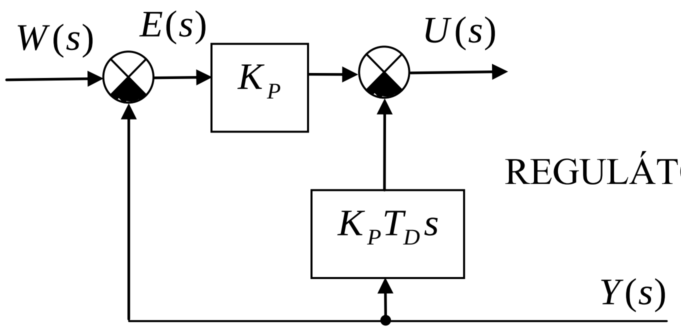
Po dosazení $c = 0$ do vztahu (2.32) se dostane struktura analogového regulátoru P-D, která je zřejmá z transformace schématu na obr. 2.9a na ekvivalentní schéma na obr. 2.9b a ze vztahu

$$U(s) = K_P E(s) - K_P T_D s Y(s). \tag{2.37}$$

a)




b)




Obr. 2.9 Schéma analogového regulátoru P-D

Analogové regulátory 2DOF umožňují seřízení jak z hlediska žádané veličiny $w(t)$, tak z hlediska jedné z poruchových veličin $v(t)$ nebo $v_1(t)$. Nejčastěji se jedná o poruchovou veličinu $v(t)$ působící na vstupu soustavy, ale může jít i o kompromisní seřízení z hlediska obou poruchových veličin.

Konvenční analogový regulátor s přenosem $G_R(s)$ se vždy seřídí běžnými postupy a metodami z hlediska zvolené poruchové veličiny, příp. kompromisně z hlediska obou poruchových veličin, a pak je třeba vhodně zvolit váhy $b$ a $c$ ($\alpha'$ a $\beta'$) z hlediska žádané veličiny $w(t)$.

Seřízení z hlediska poruchových veličin většinou způsobuje velké překmity při skokové změně polohy žádané veličiny $w'(t)$.

Pro regulační obvod na obr. 2.4 odchylkové L-přenosy mají tvar

$$G_{w'e}(s) = \frac{E(s)}{W'(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)}, \tag{2.38}$$

$$G_{we}(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{G_F(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = G_F(s)G_{w'e}(s), \tag{2.39}$$

$$G_{ve}(s) = \frac{E(s)}{V(s)} = -\frac{G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}, \tag{2.40}$$

$$G_{v_1 e}(s) = \frac{E(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)}. \tag{2.41}$$

Z odchylkových přenosů (2.38) – (2.41) vyplývá, že regulátor 2DOF nemá vliv na kvalitu regulace z hlediska poruchových veličin $v(t)$ a $v_1(t)$ a že seřízení konvenčního regulátoru $G_R(s)$ z hlediska žádané veličiny $w'(t)$ je ekvivalentní jeho seřízení z hlediska poruchové veličiny $v_1(t)$ působící na výstupu soustavy (až na znaménko). Tento závěr byl vysloven již v podkap. 1.1.

Ze vztahu (2.39) je zřejmé, že překmity při skokových nebo rychlých změnách žádané veličiny $w(t)$ lze potlačit vhodnou volbou vstupního filtru s L-přenosem $G_F(s)$, tj. vhodnou volbou vah žádané veličiny $b$ a $c$ ($\alpha'$ a $\beta'$).

Nejjednodušší interpretace funkce analogového regulátoru PID 2DOF vyplývá přímo ze vztahu (2.13) a jemu odpovídajícího obr. 2.2. Pro hodnoty vah žádané veličiny $0 \le b < 1$ a $0 \le c < 1$ dojde v podstatě ke snížení hodnoty skoku polohy žádané veličiny $w(t)$, a tím nutně i ke snížení překmitu. Velkou roli zde sehrává derivační složka regulátoru, jejíž výstupem na skokovou změnu v ideálním případě je Diracův impuls. Integrační složka regulátoru zde působí jako filtr, který výrazně potlačí vysoké kmitočty, a tím i vstupní skokovou změnu žádané veličiny $w(t)$.

Mezní případ $b = c = 0$ odpovídá analogovému regulátoru I-PD (obr. 2.7) a vstupnímu filtru s L-přenosem

$$G_F(s) = \frac{1}{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}. \tag{2.42}$$

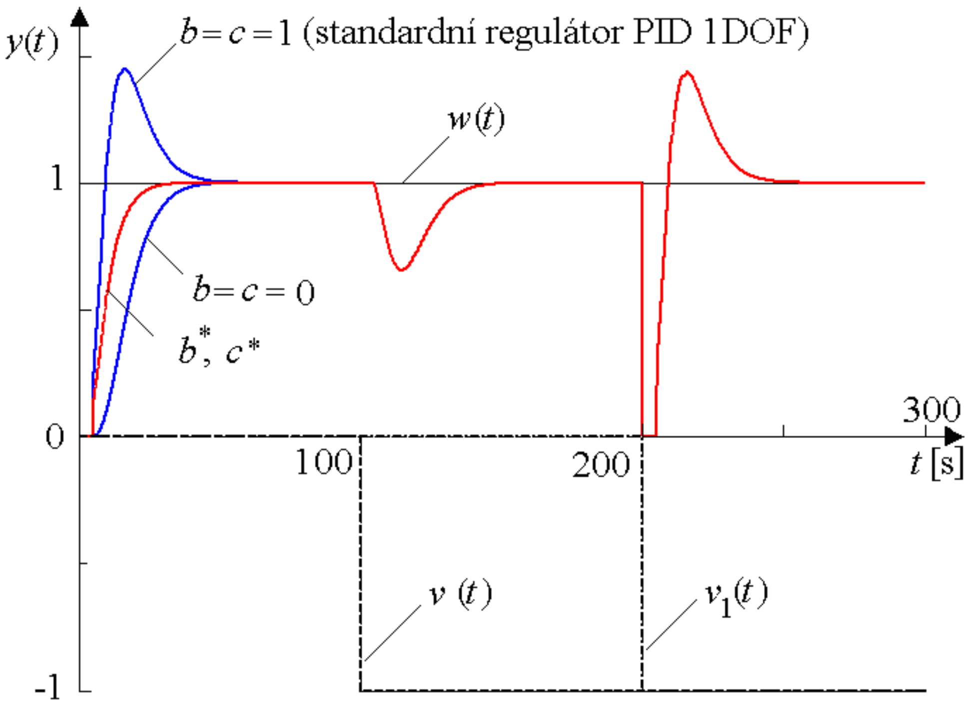
Překmit způsobují především stabilní nuly čitatele L-přenosu řízení, který v případě použití standardního analogového regulátoru PID má tvar [Vítečková, Víteček 2008]

$$G_{w'y}(s) = \frac{(T_D T_I s^2 + T_I s + 1)G_S(s)}{T_I s + (T_D T_I s^2 + T_I s + 1)G_S(s)}. \tag{2.43}$$

Zařazením vstupního filtru (2.42) do žádané veličiny se obdrží výsledný L-přenos řízení

$$G_{wy}(s) = G_F(s)G_{w'y}(s) = \frac{G_S(s)}{T_I s + (T_D T_I s^2 + T_I s + 1)G_S(s)} . \tag{2.44}$$

Dojde tím k výraznému potlačení překmitu, ale současně dojde ke zpomalení odezvy. Právě vhodnou volbou nenulových vah žádané veličiny *b* a *c* lze dosáhnout potlačení nežádoucího překmitu a současně dostatečně rychlé odezvy [Vítečková, Víteček 2009b, 2010b, 2011a,b]. Názorně to ukazuje obr. 2.10.




Obr. 2.10 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem PID 2DOF pro různé hodnoty vah *b* a *c*

Z obr. 2.10 je zřejmé, že analogový regulátor PID 2DOF umožňuje potlačit vysoký překmit způsobený skokovou změnou polohy žádané veličiny $w(t)$ při použití standardního analogového regulátoru PID 1DOF a že pro váhy $b^*$ a $c^*$ dává podstatně rychlejší odezvu, než pro běžně v praxi používané hodnoty vah $b = c = 0$ (regulátor I-PD). Rovněž je vidět, že analogový regulátor PID 2DOF nemá žádný vliv na odezvy způsobené poruchovými veličinami $v(t)$ a $v_1(t)$.

## 2.3 Číslicové regulátory s jedním stupněm volnosti

Z-přenos ideálního číslicového regulátoru PID (1DOF) závisí na způsobu náhrady integrace a derivace v rovnici popisující ideální analogový regulátor PID [viz rovněž (2.1) a (2.2)]

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} =$$

$$= K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \right] \tag{2.45}$$

pro $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Nejčastěji se používá aproximace integrálu zpětnou obdélníkovou metodou

$$\int_0^{t=kT} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau \approx T \sum_{i=1}^{k} e(iT) \tag{2.46}$$

a derivace relativní zpětnou diferencí

$$\left. \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \right|_{t=kT} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}. \tag{2.47}$$

Jako dolní mez sumace se ve vztahu (2.46) rovněž používá $i = 0$. Vzhledem k tomu, že při používání Z-přenosů se předpokládají nulové počáteční podmínky, tj. $e(0) = 0$, nemá to žádný vliv na výsledné vztahy.

Někdy se pro integraci používá lichoběžníková metoda

$$\int_0^{t=kT} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau \approx T \sum_{i=1}^{k} \frac{e(iT) - e[(i-1)T]}{2}. \tag{2.48}$$

Ze vztahů (2.46) a (2.47) vyplývají relace [porovnej s (1.27)]

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\sim \frac{Tz}{z-1}, \\ s &\sim \frac{z-1}{Tz} \end{aligned} \tag{2.49}$$

a ze vztahu (2.48) [porovnej s (1.28)]

$$\frac{1}{s} \sim \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \tag{2.50}$$

Vzhledem k tomu, že při dostatečně malé hodnotě vzorkovací periody $T$ jsou rozdíly z hlediska kvality regulace zanedbatelné [Vítečková 1992], navíc vztahy (2.49) jsou jednoduché a „symetrické“, budou dále používány vztahy odpovídající zpětné obdélníkové metodě sumace a zpětné relativní diferenci (2.49) [(1.27)].

V tomto případě se pro číslicový regulátor PID v analogii s (2.45) dostane vztah

$$u(kT) = K_P e(kT) + K_I T \sum_{i=1}^{k} e(iT) + \frac{K_D}{T} \{ e(kT) - e[(k-1)T] \} =$$

$$= K_P\left[e(kT) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=1}^{k} e(iT) + \frac{T_D}{T}\{e(kT) - e[(k-1)T]\}\right], \tag{2.51}$$

ze kterého je zřejmé, že počet stavitelných parametrů u číslicového regulátoru PID se zvýšil o vzorkovací periodu *T*. Její vliv na regulační pochod je vždy negativní. Zvyšuje vliv sumační složky, která regulační pochod destabilizuje a snižuje vliv diferenční složky, která regulační pochod stabilizuje (samozřejmě při vhodné filtraci). Stejný závěr vyplývá také z toho, že mezi okamžiky vzorkování $(k-1)T < t < kT$ číslicový regulátor není informován o skutečné hodnotě regulační odchylky $e(t)$, a tedy nemůže na ni vhodně reagovat.

Vzhledem k náhradě integrace sumací (S) a derivace diferencí (D) se číslicový regulátor (2.51) také nazývá PSD (proporcionálně sumačně diferenční) a slovo „číslicový“, příp. „diskrétní“ lze vynechat.

Vtah (2.51) popisuje polohové (absolutní) vyjádření algoritmu číslicového regulátoru PID. Při realizaci a implementaci se používá přírůstkové (rychlostní) vyjádření, které se dostane ze vztahu (2.51) tak, že od $u(kT)$ se odečte $u[(k-1)T]$ (je uvažováno pouze vyjádření s časovými konstantami)

$$\begin{aligned} u(kT) = u[(k-1)T] + K_P\left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}\right)e(kT) + \\ - K_P\left(1 + 2\frac{T_D}{T}\right)e[(k-1)T] + K_P\frac{T_D}{T}e[(k-2)T]. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Přírůstkové vyjádření (2.52) lze použít pouze tehdy, když algoritmus regulace obsahuje sumační (integrační) složku, protože jinak by číslicový regulátor neměl informaci o skutečné regulační odchylce $e(kT)$. Vyplývá to ze zápisu (2.52) pomocí zpětných diferencí

$$u(kT) = u[(k-1)T] + K_P\left[\nabla e(kT) + \frac{T}{T_I}e(kT) + \frac{T_D}{T}\nabla^2 e(kT)\right], \tag{2.53}$$

$$\nabla e(kT) = e(kT) - e[(k-1)T],$$

$$\nabla^2 e(kT) = \nabla e(kT) - \nabla e[(k-1)T] = e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T],$$

kde $\nabla e(kT)$ je zpětná diference regulační odchylky prvního řádu a $\nabla^2 e(kT)$ je zpětná diference regulační odchylky druhého řádu.

Přírůstkové vyjádření algoritmu číslicového regulátoru PID (2.52) má řadu výhod, které spočívají především ve snadné implementaci, jednoduché realizaci antiwindupu atd. Jeho nevýhodou je, že explicitně není zřejmé, jak na jeho činnost mají vliv jednotlivé stavitelné parametry. Z tohoto důvodu v této práci přírůstkové vyjádření nebude používáno. Další informace lze nalézt např. v publikacích [Åström, Häglund 1995, 2006; Landau, Zito 2006; Kozioł, Sawicki 1992; Sawicki, Piątek 2004; Williamson 1991; Houpis, Lamont 1992;

Šulc, Vítečková 2004; Pivoňka 2003; Goodwin, Graebe, Salgado 2003; Brzózka 2002; Kuo 1992].

Z-přenos ideálního číslicového regulátoru PID ve tvaru s časovými konstantami je v souladu s (2.45) a (2.49) dán vztahem

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_P\left(1 + \frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right). \tag{2.54}$$

Tab. 2.2 Z-přenosy konvenčních číslicových regulátorů

| | Typ | Z-přenos |
|---|---|---|
| 1 | P | $K_P$ |
| 2 | I (S) | $\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}$ |
| 3 | PI (PS) | $K_P\left(1 + \frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}\right)$ |
| 4 | PD | $K_P\left(1 + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$ |
| 5 | PID (PSD) | $K_P\left(1 + \frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$ |

Podobně jako u analogových regulátorů se v praxi používají jednodušší typy číslicových regulátorů, viz tab. 2.2.

U reálných číslicových regulátorů musí diferenční složka vždy obsahovat vhodný filtr. Používají se různé metody filtrace, viz např. [Åström, Häglund 1995, 2006; Brzózka 2002; Šulc, Vítečková 2004]. Tato problematika je podrobně studována v [Pivoňka 2003; Pivoňka, Schmidt 2007].

Jednou z jednodušších, ale účinných, možností je použití analogie s filtrací u analogových regulátorů (2.12). V souladu s (2.49) lze psát

$$\frac{1}{\frac{T_D}{N}s+1} \sim \frac{1}{\frac{T_D}{N}\frac{z-1}{Tz}+1} = \frac{NTz}{(T_D+NT)z - T_D}. \tag{2.55}$$

Pak ve všech vztazích u číslicové regulace je třeba diferenční složku

$$\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z} \tag{2.56}$$

uvažovat ve tvaru

$$NT_D \frac{z-1}{(T_D+NT)z-T_D}\,. \tag{2.57}$$

## 2.4 Číslicové regulátory se dvěma stupni volnosti

Vlastnosti ideálního číslicového regulátoru PID 2DOF mohou být v analogii s analogovým regulátorem PID 2DOF vyjádřeny vztahem

$$U(z)=K_P\left\{bW(z)-Y(z)+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}[W(z)-Y(z)]+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}[cW(z)-Y(z)]\right\}, \tag{2.58}$$

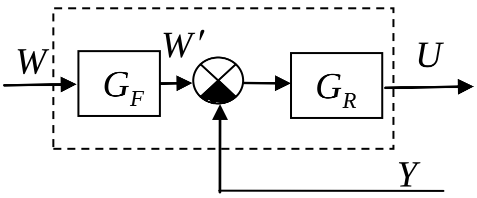
který může být upraven na tvar (viz podkapitola 2.2)

$$U(z)=G_F(z)G_R(z)W(z)-G_R(z)Y(z)\,, \tag{2.59}$$

$$G_R(z)=K_P\left(1+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right), \tag{2.60}$$

$$G_F(z)=\frac{b+\dfrac{T}{T_I}\dfrac{z}{z-1}+c\dfrac{T_D}{T}\dfrac{z-1}{z}}{1+\dfrac{T}{T_I}\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{T_D}{T}\dfrac{z-1}{z}}\,. \tag{2.61}$$

Tvar číslicového regulátoru PID 2DOF odpovídá struktuře na obr. 2.11.




Obr. 2.11 Blokové schéma regulátoru 2DOF

Vztahy (2.60) a (2.61) speciálně nejsou upravovány [viz (2.16) a (2.18)], aby bylo zřejmé, že pro číslicové regulátory 2DOF platí totéž, co pro odpovídající analogové regulátory 2DOF. Mohou tedy mít stejné struktury, jaké jsou na obr. 2.2 – 2.5. V práci je uvažována struktura číslicového regulátoru 2DOF v souladu se vztahem (2.59) a obr. 2.11.

Pro $T_D = 0$ se ze vztahů (2.58) – (2.61) obdrží číslicový regulátor PI 2DOF a pro $T_I \to \infty$ číslicový regulátor PD 2DOF. Pro $b = c = 1$ číslicový regulátor PID 2DOF je konvečním číslicovým regulátorem PID (1DOF). Je tedy zřejmé, že všechny analýzy a závěry týkající se analogových regulátorů 2DOF platí i pro odpovídající číslicové regulátory 2DOF s tím, že diferenční složka musí být vždy filtrována, viz vztahy (2.56) a (2.57). Ve vztazích (2.58), (2.60) a (2.61) filtrace není uvažována z důvodu přehlednosti a názornosti.

Pokud se u číslicového regulátoru 2DOF váhy žádané veličiny $b$ a $c$ volí jako nulové nebo jednotkové, dostanou se speciální číslicové regulátory 2DOF odpovídající blokovým schématům na obr. 2.6 – 2.9 a mají také stejné názvy. Číslicový regulátor PID 2DOF pro $b = c = 0$, tj. číslicový regulátor I-PD se často nazývá Takahashiho modifikace číslicového regulátoru PID.

## 2.5 Simulační modely regulátorů

Pro číslicovou simulaci bylo použito programové prostředí MATLAB-Simulink. Analogové i číslicové regulátory byly modelovány jako PID 2DOF a vhodnou volbou stavitelných parametrů $T_I$, $T_D$ a vah žádané veličiny $b$ a $c$ byly získány potřebné struktury regulátorů.

Pro analogové i číslicové regulátory 2DOF byla pro simulaci použita struktura na obr. 2.11.

Při simulacích nebylo uvažováno opatření proti pokračující integraci – antiwindup, které by podstatným způsobem zkreslilo získané výsledky. Naproti tomu při simulacích bylo vždy uvažováno omezení akční veličiny (v reálných podmínkách vystupuje vždy), které bylo nastaveno na relativně malou hodnotu, a proto v reálných podmínkách mohou být výsledky lepší.

**Analogový regulátor PID 2DOF**

Po uvažování filtrace (2.22) u derivační složky ve vztazích (2.16) a (2.18) se dostane

$$\begin{aligned} G_R(s) &= K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+\frac{T_D s}{\frac{T_D}{N}s+1}\right)= \\ &= \frac{K_P T_I T_D(1+N)s^2+K_P(NT_I+T_D)s+NK_P}{T_I T_D s^2+NT_I s}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} G_F(s) &= \frac{b+\dfrac{1}{T_I s}+c\dfrac{NT_D s}{T_D s+N}}{1+\dfrac{1}{T_I s}+\dfrac{NT_D s}{T_D s+N}}= \\ &= \frac{T_I T_D(b+cN)s^2+(bNT_I+T_D)s+N}{T_I T_D(1+N)s^2+(NT_I+T_D)s+N}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Při použití analogového regulátoru s derivační složkou vzniká velký problém, jak již bylo dříve uvedeno, jednak s filtrací, ale také s prudkou reakcí akční veličiny $u(t)$ na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$. Jde o tzv. „derivative kick“. Tuto počáteční hodnotu akční veličiny lze snadno určit.

Pro soustavu s L-přenosem

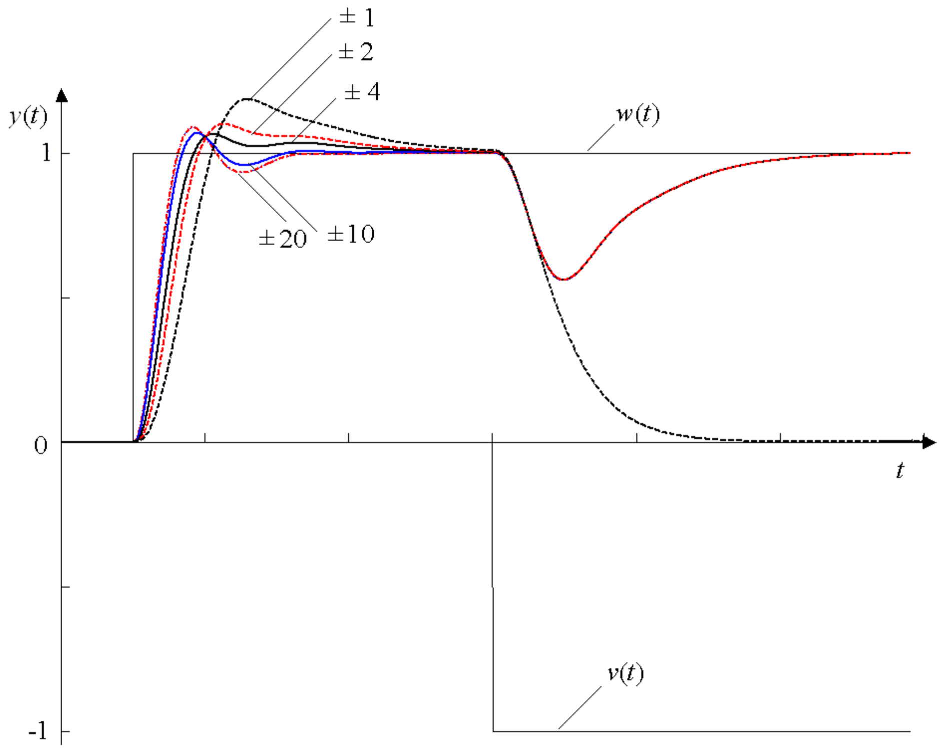
$$G_S(s) = \frac{M_S(s)}{N_S(s)} e^{-T_d s}, \ \ \deg N_S(s) > \deg M_S(s) \geq 0 \tag{2.64}$$

a standardní analogový regulátor s filtrací s L-přenosem (2.62) se v souladu s obr. 1.1 pro akční veličinu $u(t)$ dostane

$$U(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s) G_S(s)} W(s) = \tag{2.65}$$

$$= \frac{K_P[T_I T_D(1+N)s^2 + (NT_I + T_D)s + N] N_S(s)}{T_I s(T_D s + N) N_S(s) + K_P[T_I T_D(1+N)s^2 + (NT_I + T_D)s + N] M_S(s) e^{-T_d s}} W(s),$$

kde deg je stupeň.




Obr. 2.12 Vliv omezení akční veličiny $u(t)$ u analogového regulátoru PID na průběh regulované veličiny $y(t)$

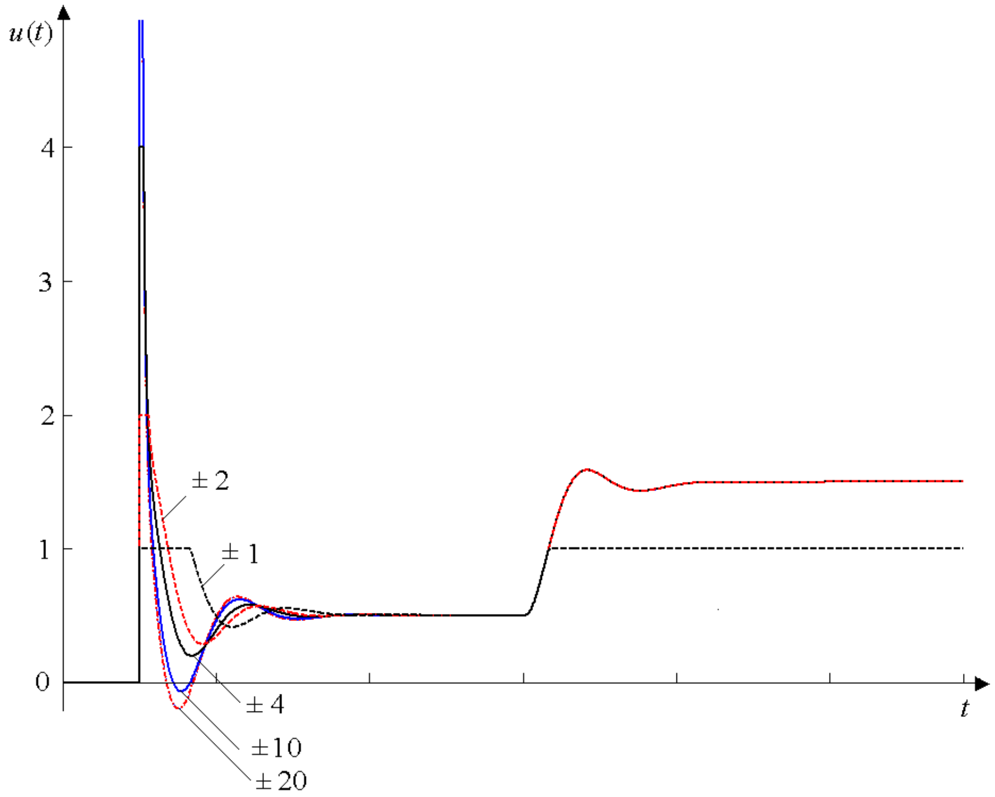
Pro skokovou změnu polohy $W(s) = w_0/s$ se ze vztahu (2.65) dostane počáteční hodnota akční veličiny

$$u(0) = \lim_{s \to \infty} [sU(s)] = K_P(1+N) w_0 . \tag{2.66}$$

Je zřejmé, že pro $N \to \infty$, tj. bez filtru, počáteční hodnota akční veličiny $u(0)$ roste neomezeně, teoreticky bude obsahovat Diracův impuls $\delta(t)$.

Z výše uvedeného vyplývá, že akční veličina $u(t)$ i pro běžnou hodnotu $N = 10$ se v reálných podmínkách pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t) = w_0$ dostane do nasycení. Z tohoto důvodu ve všech simulacích, pokud nebude řečeno jinak, se předpokládá $w(t) = w_0 = 1$, $v(t) = v_0 = -1$, $N = 10$ a omezení akční veličiny $u(t)$ je nastaveno na $\pm 4$.

Vliv omezení akční veličiny $u(t)$ pro $N = 10$ na průběh regulované veličiny $y(t)$ je ukázán na obr. 2.12, průběh akční veličiny $u(t)$ pro různé omezení je na obr. 2.13.




Obr. 2.13 Průběh akční veličiny $u(t)$ u analogového regulátoru PID při různých omezeních

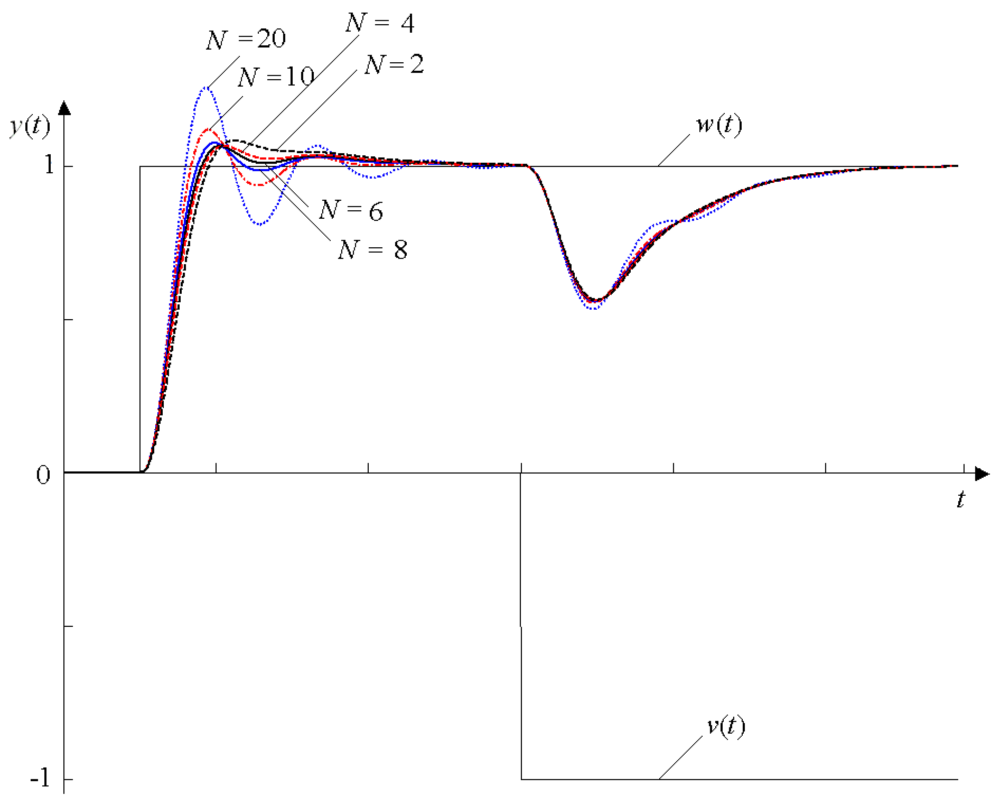
Z obr. 2.12 a 2.13 vyplývá, že pro omezení akční veličiny $u(t)$ na $\pm 1$ analogový regulátor PID již není schopen odstranit vliv poruchové veličiny $v(t)$. Obr. 2.13 ukazuje průběhy akční veličiny $u(t)$ pouze pro hodnoty $\leq 5$.

Vliv filtrace při omezení akční veličiny $u(t)$ na $\pm 4$ pro standardní analogový regulátor PID ukazují obr. 2.14 a 2.15.

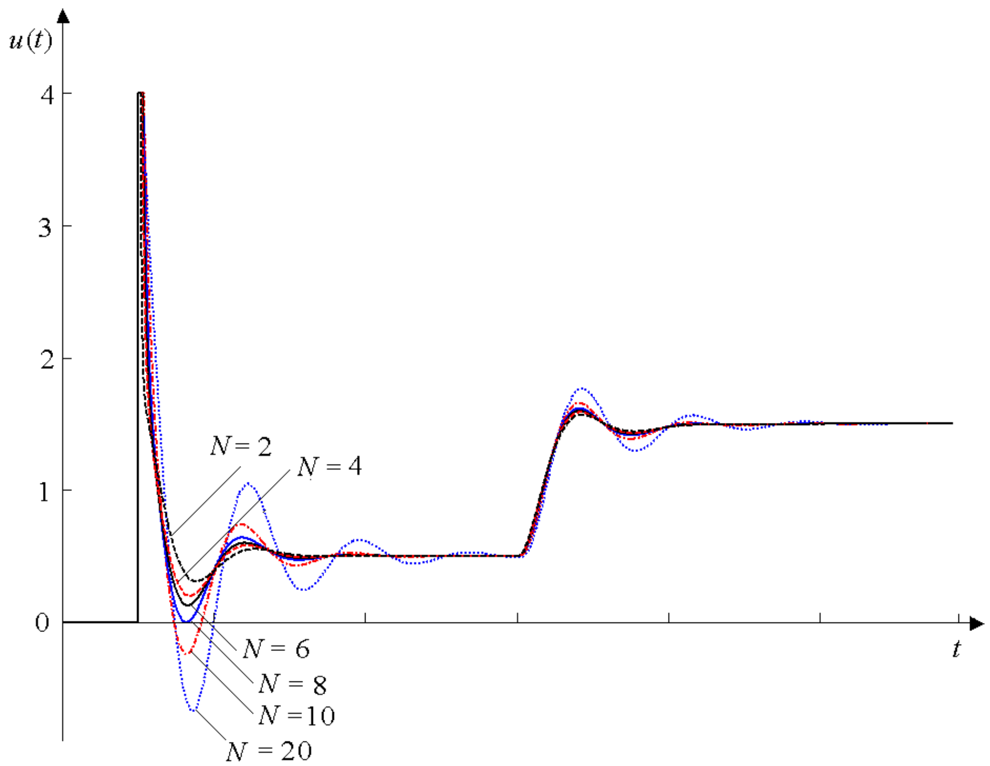
Počáteční hodnota akční veličiny $u(0)$ pro analogový regulátor PI, soustavu (2.64) a skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t) = w_0$ bude

$$U(s) = \frac{K_P T_I s N_S(s)}{T_I s N_S(s) + K_P(T_I s + 1) M_S(s) \mathrm{e}^{-T_d s}} W(s), \qquad (2.67)$$

$$u(0) = \lim_{s \to \infty} [sU(s)] = K_P w_0 . \qquad (2.68)$$




Obr. 2.14 Vliv filtrace derivační složky u analogového regulátoru PID na průběh regulované veličiny $y(t)$




Obr. 2.15 Vliv filtrace derivační složky u analogového regulátoru PID na průběh akční veličiny $u(t)$

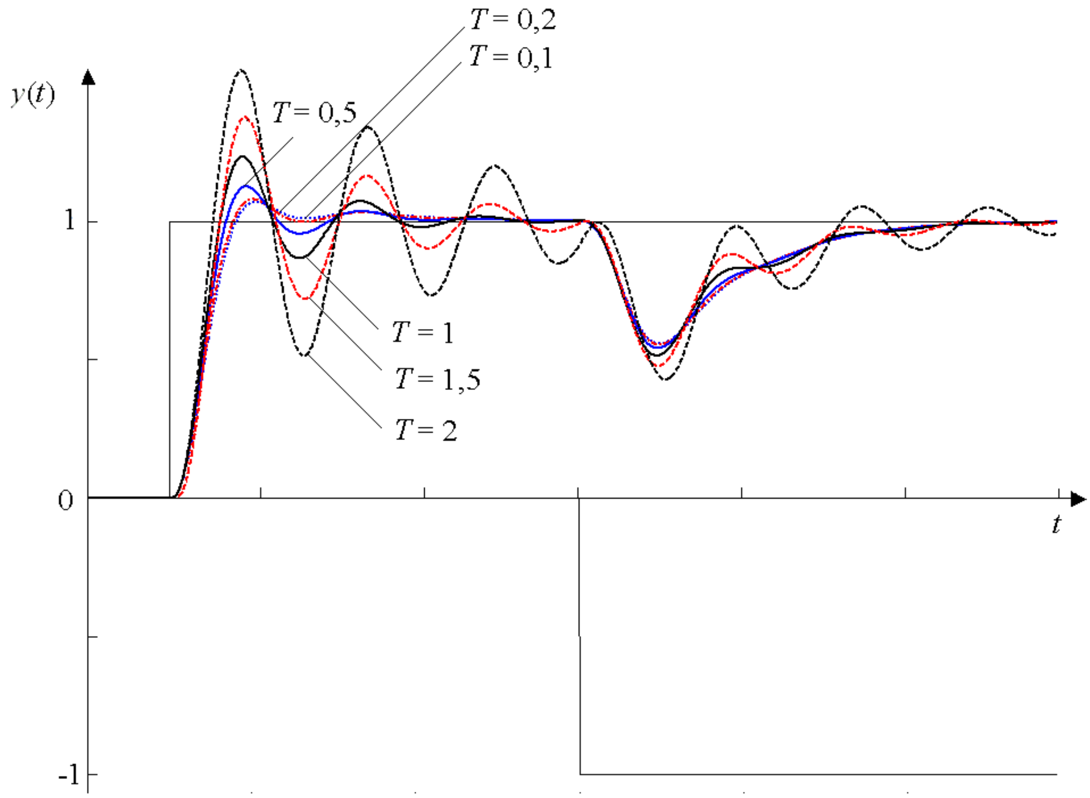
Zde jde o tzv. „proportional kick“, který je výrazně menší a ve většině případů nezpůsobuje nasycování akční veličiny $u(t)$.

**Číslicový regulátor PID 2DOF**

Podobně jako v předchozím případě po uvažování filtrace (2.57) ve vztazích (2.60) a (2.61) se dostane

$$\begin{aligned} G_R(z) &= K_P\left(1+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}+NT_D\frac{z-1}{(T_D+NT)z-T_D}\right)= \\ &= \frac{K_P A z^2 - K_P B z + K_P C}{T_I(T_D+NT)z^2 - T_I(2T_D+NT)z + T_I T_D}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} G_F(z) &= \frac{b+\dfrac{T}{T_I}\dfrac{z}{z-1}+cNT_D\dfrac{z-1}{(T_D+NT)z-T_D}}{1+\dfrac{T}{T_I}\dfrac{z}{z-1}+NT_D\dfrac{z-1}{(T_D+NT)z-T_D}}= \\ &= \frac{A'z^2 - B'z + C'}{Az^2 - Bz + C}. \end{aligned} \tag{2.70}$$




Obr. 2.16 Vliv vzorkovací periody $T$ na průběh regulované veličiny $y(t)$

kde pro pomocné proměnné *A*, *B*, *C* a *A*′, *B*′ *C*′ a platí

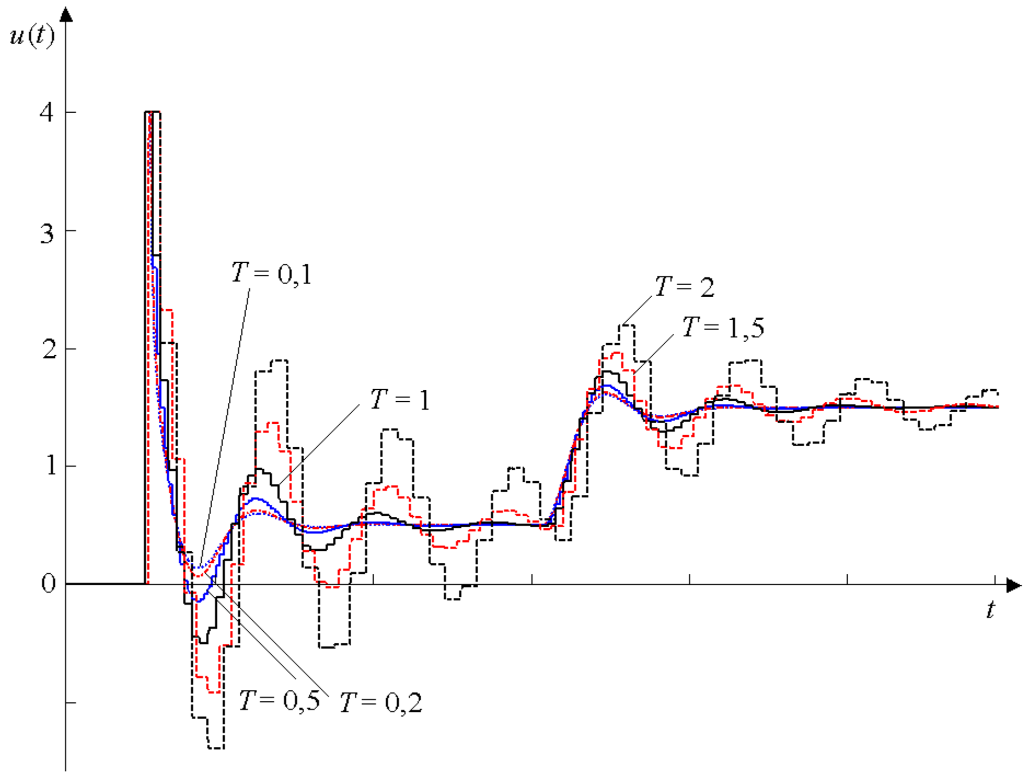
$$A' = C' + NT(bT_I + T) + TT_D\,,$$
$$A = A'\big|_{b=c=1} = C + NT(T_I + T) + TT_D\,, \tag{2.71}$$

$$B' = 2C' + T(bNT_I + T_D),$$
$$B = B'\big|_{b=c=1} = 2C + T(NT_I + T_D), \tag{2.72}$$

$$C' = T_I T_D (b + cN),$$
$$C = C'\big|_{b=c=1} = T_I T_D (1 + N). \tag{2.73}$$

U číslicových regulátorů vystupují stejné problémy jako u odpovídajících analogových regulátorů a navíc zde vystupuje problém se vzorkovací periodou *T*.

Vliv vzorkovací periody *T* pro standardní číslicový regulátor PID (PSD) s filtrací $N$ = 10 a omezením akční veličiny $u(t)$ na ± 4 na průběh regulované veličiny $y(t)$ a akční veličiny $u(t)$ je na obr. 2.16 a 2.17.




Obr. 2.17 Vliv vzorkovací periody *T* u číslicového regulátoru PID na průběh akční veličiny $u(t)$

Z obr. 2.16 a 2.17 jednoznačně vyplývá, že se zvyšováním hodnoty vzorkovací periody *T* dochází ke zhoršování kvality regulace.

Vliv omezení akční veličiny $u(t)$ a filtrace diferenční složky u číslicového regulátoru PID je stejný jako u odpovídajícího analogového regulátoru PID.

**Poznámka:**

Ve všech simulacích, pokud nebude řečeno jinak, se předpokládá $w(t) = w_0 = 1$, $v(t) = v_0 = -1$, $N = 10$ a omezení akční veličiny $u(t)$ je nastaveno na $\pm 4$.

# 3 Regulované soustavy

V kapitole jsou popsány jednoduché metody úprav L-přenosů soustav na tvary vyžadované některými metodami seřizování regulátorů. Jsou uvedeny metody vyžadující znalost přechodové charakteristiky i velmi jednoduché metody umožňující přímou úpravu L-přenosů soustav bez složitých výpočtů.

## 3.1 Úprava L-přenosů soustav na základě přechodové charakteristiky

Pokud tvar L-přenosu soustavy nevyhovuje zvolené metodě seřízení daného regulátoru a lze např. simulačně určit jeho přechodovou charakteristiku, pak je možné použít některý z následujících postupů. Všechny tyto postupy lze rovněž použít k jednoduché experimentální identifikaci za předpokladu, že průběhy přechodových charakteristik jsou vhodně upraveny (filtrovány, vyhlazeny atd.) a pracuje se s přírůstkovými veličinami, tj. průběhy začínají v počátku souřadnic. Předpokládá se, že časové konstanty splňují podmínku

$$T_i \geq T_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

tj. časová konstanta s nižším indexem má vyšší nebo stejnou hodnotu než časová konstanta s vyšším indexem.

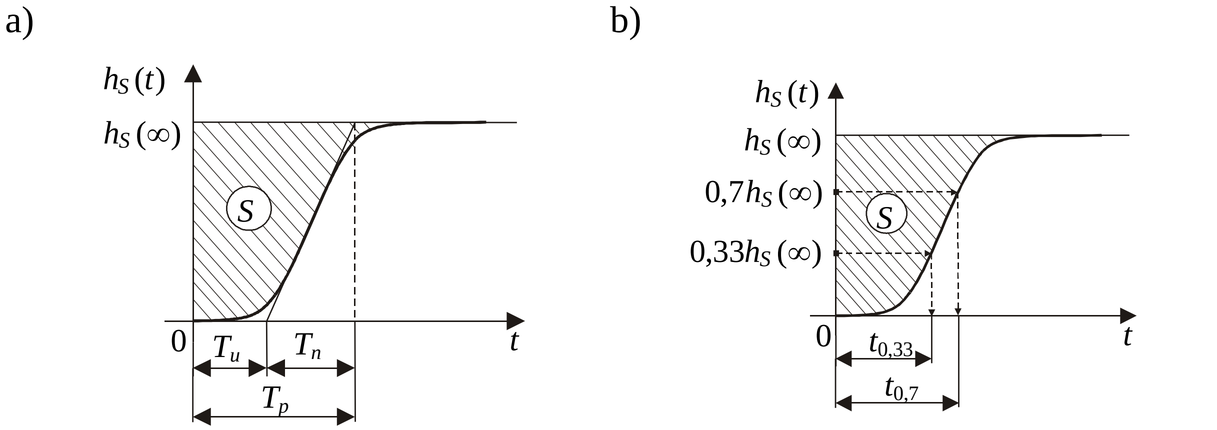
Úprava L-přenosu soustavy spočívá ve vykreslení přechodové charakteristiky a v následném určení jejího L-přenosu v požadovaném tvaru.

Pokud soustava je proporcionální nekmitavá a má přechodovou charakteristiku $h_S(t)$ podobnou jako na obr. 3.1a, pak nejjednodušší způsob určení jejího L-přenosu spočívá v určení doby průtahu $T_u = T_d$ a doby náběhu $T_n = T_1$ na základě úseků, které vytne tečna vedená inflexním bodem na časové ose a na ustálené hodnotě $h_S(\infty)$. Součet obou dob je doba přechodu $T_p$. L-přenos soustavy má pak tvar

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_{d1} s}, \tag{3.2}$$

kde $T_1$ je časová konstanta vyjadřující dobu náběhu $T_n$, $T_{d1}$ – dopravní zpoždění vyjadřující dobu průtahu $T_u$, $k_1$ – koeficient přenosu.

Takto určený L-přenos soustavy je velmi hrubý a je nejčastěji používán pro předběžné seřízení regulátoru Zieglerovou – Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky [Górecki 1971; Åström, Häglund 1995, 2006].




Obr. 3.1 Určení L-přenosu nekmitavé proporcionální soustavy:
a) pomocí doby průtahu $T_u$ a doby náběhu $T_n$, b) pomocí dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$

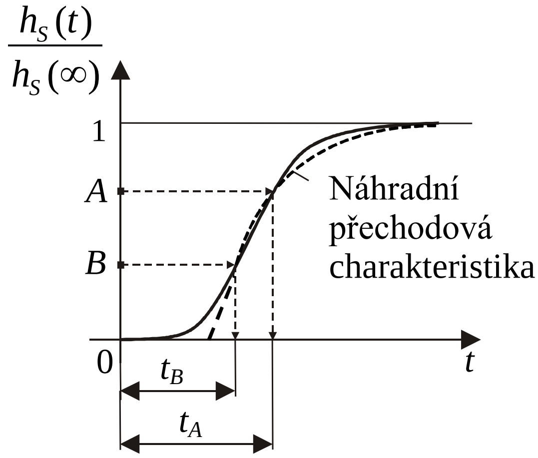
Značně kvalitnější určení L-přenosu proporcionální nekmitavé soustavy se setrvačností prvního řádu s dopravním zpožděním (3.2) lze obdržet použitím dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ v souladu s obr. 3.1b a vztahy

$$\begin{aligned} T_1 &\doteq 1{,}245\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right) \approx 1{,}25\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right), \\ T_{d1} &\doteq 1{,}498 t_{0,33} - 0{,}498 t_{0,7} \approx 1{,}5 t_{0,33} - 0{,}5 t_{0,7}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vztahy jsou určeny analyticky. Na základě obr. 3.2 lze pro normovanou přechodovou charakteristiku psát

$$\frac{h_S(t)}{h_S(\infty)} = (1 - \mathrm{e}^{-(t - T_{d1})/T_1})\eta(t - T_{d1})\,.$$

Zpožděný Heavisideův jednotkový skok $\eta(t - T_{d1})$ zajišťuje $h_S(t) = 0$ pro $t < T_{d1}$.




Obr. 3.2 Určení L-přenosu soustavy z normované přechodové charakteristiky pomocí dob $t_A$ a $t_B$

Pro hodnoty $A$ a $B$ platí rovnice

$$A = 1 - \mathrm{e}^{-(t_A - T_{d1})/T_1},$$

$$B = 1 - \mathrm{e}^{-(t_B - T_{d1})/T_1},$$

ze kterých se dostanou požadované vztahy

$$T_1 = \frac{1}{\ln(1-A) - \ln(1-B)}(t_B - t_A),$$

$$T_{d1} = \frac{1}{\ln(1-A) - \ln(1-B)}[t_B \ln(1-A) - t_A \ln(1-B)].$$

Je zřejmé, že hodnoty $A$ a $B$ normované přechodové charakteristiky by měly být zvoleny tak, aby byly přibližně v 1/3 a 2/3 a aby číselné hodnoty koeficientů ve výše uvedených vztazích byly snadno zapamatovatelné.

Např. pro $A$ = 0,33 a $B$ = 0,7 se dostane (3.3).

Podobně se pro $A$ = 0,28 a $B$ = 0,63 dostane

$$\begin{aligned} T_1 &\doteq 1{,}502(t_{0,63} - t_{0,28}) \approx 1{,}5(t_{0,63} - t_{0,28}), \\ T_{d1} &\doteq 1{,}493 t_{0,28} - 0{,}493 t_{0,63} \approx 1{,}5 t_{0,28} - 0{,}5 t_{0,63}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pomocí dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ lze získat L-přenos nekmitavé proporcionální soustavy se setrvačností druhého řádu s dopravním zpožděním

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2}\mathrm{e}^{-T_{d2}s}, \tag{3.5}$$

kde

$$\begin{aligned} T_2 &\doteq 0{,}794(t_{0,7} - t_{0,33}), \\ T_{d2} &\doteq 1{,}937 t_{0,33} - 0{,}937 t_{0,7}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pro přibližnou kontrolu lze využít doplňkovou plochu $S$ nad přechodovou charakteristikou (obr. 3.1)

$$T_1 + T_{d1} \approx \frac{S}{h_S(\infty)}, \qquad 2T_2 + T_{d2} \approx \frac{S}{h_S(\infty)}. \tag{3.7}$$

Vztahy (3.6) byly získány numericky ze shody náhradní přechodové charakteristiky se simulovanou (skutečnou, původní) přechodovou charakteristikou v hodnotách $h_S(0) = 0$, $h_S(t_{0,33}) = 0{,}33 h_S(\infty)$, $h_S(t_{0,7}) = 0{,}7 h_S(\infty)$ a $h_S(\infty)$ [Vítečková 1992, 1996; Šulc, Vítečková 2004].

Velmi dobrou aproximaci průběhu nekmitavé proporcionální regulované soustavy lze získat pomocí L-přenosu s rozdílnými časovými konstantami

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_{d2}s}, \tag{3.8}$$

kde

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_1^2}\right), T_2 = \frac{1}{2}\left(D_2 - \sqrt{D_2^2 - 4D_1^2}\right),$$

$$T_{d2} = 1{,}937t_{0,33} - 0{,}937t_{0,7}, \tag{3.9}$$

$$D_1 = 0{,}794\left(t_{0,7} - t_{0,33}\right), \qquad D_2 = \frac{S}{h_S(\infty)} - T_{d2}.$$

Aby mohl být použit L-přenos ve tvaru (3.8), musí platit $D_2 > 2D_1$, jinak je třeba použít přenos (3.5).

Pro vzájemné převedení L-přenosů soustav v souladu se schématem (3.10) lze použít tab. 3.1 [Vítečková 1996; Šulc, Vítečková 2004].

$$\begin{array}{ccc} & \dfrac{1}{(T_i s+1)^i}\mathrm{e}^{-T_{di}s} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \dfrac{1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_{d1}s} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(T_2 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_{d2}s} \end{array} \tag{3.10}$$

Tab. 3.1 Tabulka pro rychlý převod přenosů v souladu se schématem (3.10)

| $\frac{1}{(T_i s+1)^i}\mathrm{e}^{-T_{di}s}$ | $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_{d1}s}$ | $\frac{T_1}{T_i}$ | 1 | 1,568 | 1,980 | 2,320 | 2,615 | 2,881 |
| | $\frac{T_{d1}-T_{di}}{T_i}$ | 0 | 0,552 | 1,232 | 1,969 | 2,741 | 3,537 |
| $\frac{1}{(T_2 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_{d2}s}$ | $\frac{T_2}{T_i}$ | 0,638 | 1 | 1,263 | 1,480 | 1,668 | 1,838 |
| | $\frac{T_{d2}-T_{di}}{T_i}$ | * –0,352 | 0 | 0,535 | 1,153 | 1,821 | 2,523 |

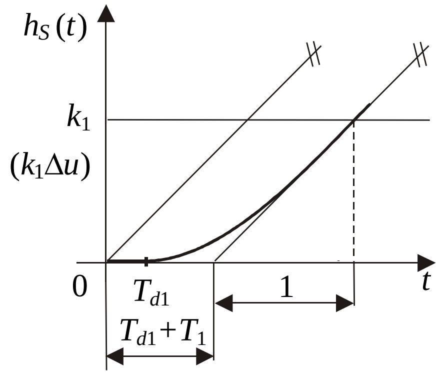
* Použitelné pro $T_{d1} > 0{,}352T_1$.

Tab. 3.1 byla získána numericky za předpokladu shody přechodových charakteristik regulovaných soustav v hodnotách $h_S(0)$, $h_S(t_{0,33})$, $h_S(t_{0,7})$ a $h_S(\infty)$.

Pro přibližné určení L-přenosu nekmitavé integrační soustavy

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_{d1}s} \tag{3.11}$$

lze použít její přechodovou charakteristiku (obr. 3.3), kde se odhadne dopravní zpoždění. Pokud vstupní skok akční veličiny není jednotkový, tj. $\Delta u(t) \neq \eta(t)$, ale $\Delta u(t) = \Delta u\eta(t)$, pak je třeba uvažovat hodnotu v závorce.




Obr. 3.3 Určení L-přenosu nekmitavé integrační regulované soustavy

## 3.2 Přímá úprava L-přenosů soustav

Nejjednodušší přímé úpravy L-přenosů soustav vycházejí z rovnosti doplňkových ploch nad náhradní a simulovanou (skutečnou, původní) přechodovou charakteristikou regulované soustavy.

**Nekmitavé proporcionální soustavy**

a)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_\Sigma s+1)},$$
$$T_\Sigma = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ T_1 >> T_i,\ i = 2,3,\ldots,n. \tag{3.12}$$

b)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)\prod_{i=2}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=2}^{n} T_i,\ T_1 >> T_i,\ i = 2,3,\ldots,n. \tag{3.13}$$

c)

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\prod_{i=3}^{n}(T_i s+1)} \approx \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=3}^{n} T_i,\ T_1 \geq T_2 >> T_i,\ i = 3,4,\ldots,n. \tag{3.14}$$

d)

$$\frac{k_1}{\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)\prod_{i=1}^{n}\left(T_i s + 1\right)} \approx \frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i, \;\; T_0 >> T_i, \;\; i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.15}$$

**Nekmitavé integrační soustavy**

a) $$\frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}\left(T_i s + 1\right)} \approx \frac{k_1}{s\left(T_\Sigma s + 1\right)}, \qquad T_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i\,, \tag{3.16}$$

b) $$\frac{k_1}{s\prod_{i=1}^{n}\left(T_i s + 1\right)} \approx \frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}, \qquad T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i\,, \tag{3.17}$$

c)

$$\frac{k_1}{s\left(T_1 s + 1\right)\prod_{i=2}^{n}\left(T_i s + 1\right)} \approx \frac{k_1}{s\left(T_1 s + 1\right)} \mathrm{e}^{-T_d s},$$
$$T_d = \sum_{i=2}^{n} T_i, \;\; T_1 >> T_i, \;\; i = 2,3,\ldots,n. \tag{3.18}$$

Výhodné je použití kombinace náhradní součtové časové konstanty $T_\Sigma$ a náhradního dopravního zpoždění $T_d$, viz níže „pravidlo poloviny“.

Pokud v čitateli přenosu regulované soustavy vystupují dvojčleny

$$1 \pm \tau_i s\,, \tag{3.19}$$

pak každý dvojčlen lze zastoupit výrazem

$$\mathrm{e}^{\pm \tau_i s} \tag{3.20}$$

za předpokladu, že výsledné dopravní zpoždění bude nezáporné.

Že ve výše uvedených jednoduchých úpravách jde o rovnosti doplňkových ploch nad přechodovými charakteristikami soustav, lze snadno ukázat. Jsou uvažovány L-přenosy soustav

$$G_S(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} \approx \frac{1}{T_\Sigma s + 1} = G_1(s)\,, \tag{3.21}$$

$$G_S(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} \approx \mathrm{e}^{-T_d s} = G_2(s)\,, \tag{3.22}$$

$$T_\Sigma = T_d = \sum_{i=1}^{n} T_i \,. \tag{3.23}$$

Je zřejmé, že platí (viz tab. P7.1)

$$\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} X(s)\,, \tag{3.24}$$

kde $X(s)$ je Laplaceův obraz časové funkce $x(t)$, tj.

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,.$$

Proto pro doplňkovou plochu nad přechodovou charakteristikou $h_S(t)$ lze psát

$$\int_0^\infty [1 - h_S(t)]\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1) - 1}{s\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} =$$

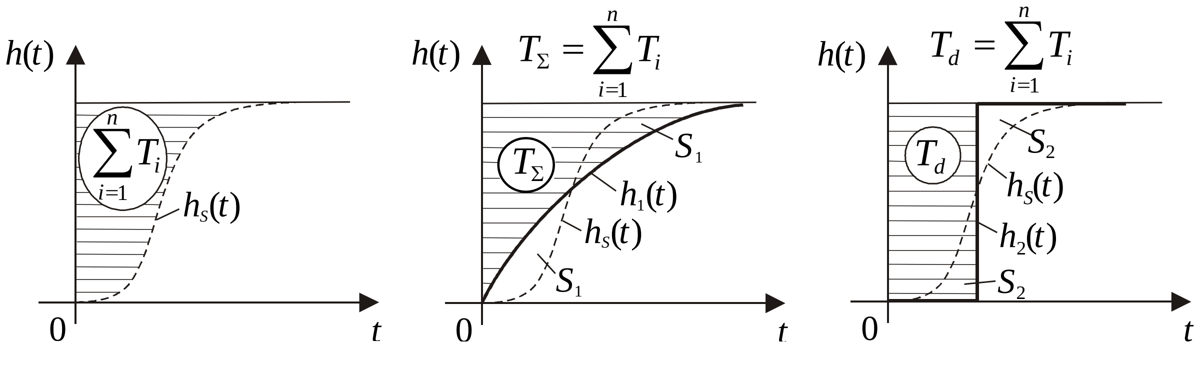
$$= \lim_{s\to 0}\frac{(\prod_{i=1}^{n} T_i)s^{n-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} T_i}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s + 1)} = \sum_{i=1}^{n} T_i \,. \tag{3.25}$$

Pro přenos $G_1(s)$ lze doplňkovou plochu nad přechodovou charakteristikou $h_1(t)$ získat na základě právě obdrženého vztahu

$$\int_0^\infty [1 - h_1(t)]\mathrm{d}t = T_\Sigma \,.$$

Pro přenos $G_2(s)$ se doplňková plocha nad přechodovou charakteristikou $h_2(t)$ získá na základě vztahu

$$\int_0^\infty [1 - h_2(t)]\mathrm{d}t = \int_0^\infty [1 - \eta(t - T_d)]\mathrm{d}t = T_d \,.$$




Obr. 3.4 Geometrická interpretace náhradní součtové časové konstanty $T_\Sigma$ a náhradního dopravního zpoždění $T_d$

Geometrická interpretace náhradní součtové časové konstanty $T_\Sigma$ a náhradního dopravního zpoždění $T_d$ je ukázána na obr. 3.4. Náhradní přechodové charakteristiky $h_1(t)$ a $h_2(t)$ se protnou s původní přechodovou charakteristikou $h_S(t)$ v takovém bodě, aby jimi vymezené plochy $S_1$ a $S_2$ nad a pod odpovídající náhradní přechodovou charakteristikou byly stejné.

Velmi jednoduchá, a současně efektivní, je metoda používající empirické „pravidlo poloviny“ [Skogestad 2003, 2004].

Za předpokladu, že L-přenos soustavy má tvar s nestabilními nulami

$$G_S(s) = \frac{\prod_j (1-\tau_{j0}s)}{\prod_i (T_{i0}s+1)} \mathrm{e}^{-T_{d0}s}, \tag{3.26}$$

$$T_{i0} \geq T_{i+1,0} \geq 0,\ \tau_{j0} \geq 0,\ T_{d0} \geq 0,$$

pak na základě „pravidla poloviny“ se pro náhradní přenos (3.2) dostane

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2}, \quad T_{d1} = T_{d0} + \frac{T_{20}}{2} + \sum_{i\geq 3} T_{i0} + \sum_j \tau_{j0}, \tag{3.27}$$

resp. pro přenos (3.8)

$$T_1 = T_{10}, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2}, \quad T_{d2} = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} + \sum_{i\geq 4} T_{i0} + \sum_j \tau_{j0}. \tag{3.28}$$

Je zřejmé, že platí

$$\sum_i T_{i0} + \sum_j \tau_{j0} + T_{d0} = T_1 + T_{d1} = T_1 + T_2 + T_{d2}, \tag{3.29}$$

tj. „pravidlo poloviny“ zachovává rovnost doplňkových ploch nad náhradními přechodovými charakteristikami a původní přechodovou charakteristikou, ale vhodně je rozdělí mezi setrvačnou časovou konstantu, příp. dvě časové konstanty a dopravní zpoždění.

Pro L-přenosy soustav se stabilními nulami postup uvedený v [Skogestad 2003, 2004] je již poměrně složitý. V tomto případě vhodnější, a především přesnější, postup je simulačně vykreslit přechodovou charakteristiku a na základě dob $t_{0,33}$ a $t_{0,7}$ určit L-přenos (3.2) nebo (3.5).

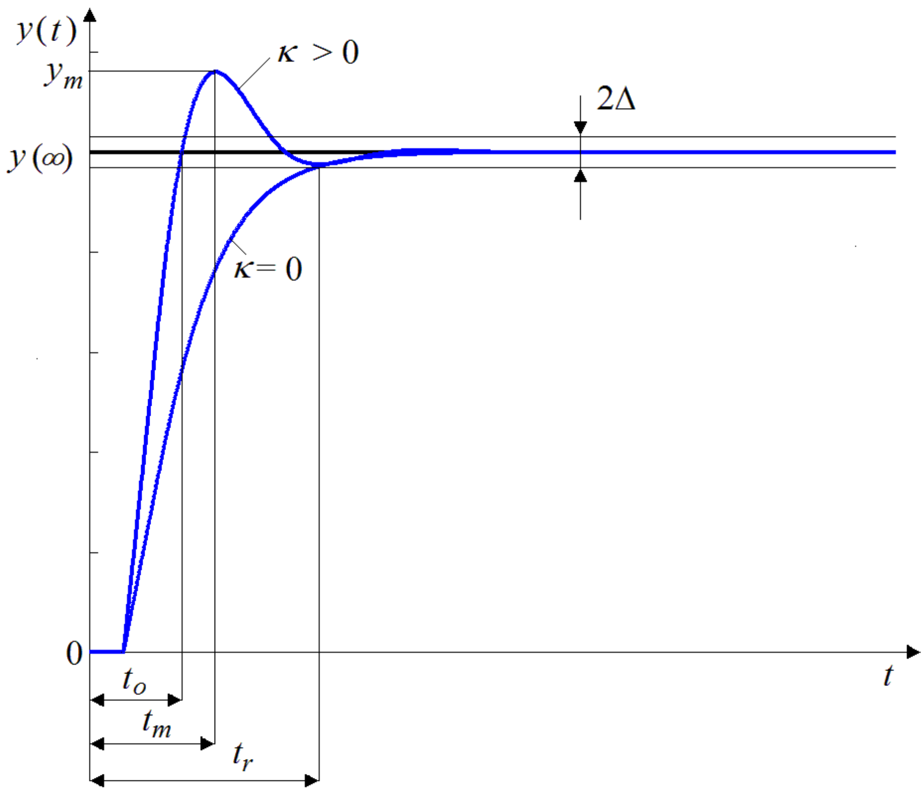
# 4 Seřizování regulátorů

Kapitola je věnována seřizování regulátorů. Jsou zde popsány vybrané známé i méně známé metody seřizování. Hlavní pozornost je věnována původním metodám a přístupům rozpracovaným autory.

## 4.1 Základní ukazatelé kvality regulace

Nejjednodušeji se kvalita regulace posuzuje podle průběhů odezev regulačního obvodu na skokové změny vstupních veličin. V kapitole 1 bylo řečeno, že zajištěním vhodných vlastností regulačního obvodu vzhledem k žádané veličině $w(t)$ budou většinou zajištěny i jeho vlastnosti vzhledem k poruchovým veličinám $v(t)$ a $v_1(t)$. Pro regulátor 1DOF a pro poruchu $v_1(t)$ působící na výstupu soustavy to platí vždy.

Na obr. 4.1 je odezva regulačního obvodu (přechodová charakteristika) na skokovou změnu žádané veličiny $w(t)$.




Obr. 4.1 Přechodová charakteristika regulačního obvodu s vyznačenými ukazateli kvality

Pod pojmem přechodová charakteristika se zde rozumí odezva na skokovou změnu polohy, která nemusí být vždy jednotková.

Na obr. 4.1 jsou dva typické průběhy požadovaných přechodových charakteristik regulačního obvodu vyvolaných skokovou změnou žádané veličiny $w(t)$.

Z praktického hlediska jsou pro posouzení kvality regulace nejdůležitější dva ukazatele, a to doba regulace $t_r$ (obr. 4.1) a relativní překmit (přeregulování)

$$\kappa = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad y_m = y(t_m), \tag{4.1}$$

kde $y_m$ je maximální hodnota regulované veličiny při překmitu, $t_m$ – doba dosažení maximální hodnoty $y_m$, $y(\infty)$ – ustálená hodnota regulované veličiny.

Doba regulace $t_r$ je dána časem, kdy regulovaná veličina $y(t)$ vejde do pásma o šířce $2\Delta$, tj. $y(\infty) \pm \Delta$, kde tolerance regulace je dána vztahem

$$\Delta = \delta\, y(\infty), \qquad \delta = 0{,}01 \div 0{,}05 \qquad (1 \div 5)\ \%. \tag{4.2}$$

Relativní tolerance regulace $\delta$ má nejčastěji hodnoty 0,05 nebo 0,02.

Relativní hodnoty (4.1) a (4.2) se uvádějí rovněž v procentech.

Při uvádění doby regulace $t_r$ musí být vždy také uvedena hodnota relativní tolerance regulace $\delta$. Pokud není uvedena, předpokládá se, že $\delta = 0{,}05$ (5 %).

Případ $\kappa = 0$ odpovídá nekmitavému (aperiodickému) regulačnímu pochodu, který je požadován u procesů, kde překmit by mohl způsobit nežádoucí účinky (jsou to především tepelné a chemické procesy, ale také pohyby robotů a manipulátorů apod.).

U nekmitavého regulačního pochodu se často požaduje, aby měl minimální dobu regulace $t_r$. Takový nekmitavý regulační pochod se nazývá mezní.

Pro $\kappa > 0$ bývá regulační pochod kmitavý a je rychlejší než nekmitavý pochod. Rychlost nárůstu regulované veličiny $y(t)$ se dá ocenit pomocí rychlosti odezvy $t_o$. Je to doba, za kterou regulovaná veličina $y(t)$ poprvé dosáhne ustálené hodnoty $y(\infty)$. Rychlost odezvy $t_o$ bývá také definována jako doba od dosažení hodnoty $0{,}1y(\infty)$ do dosažení hodnoty $0{,}9y(\infty)$. Takovým způsobem definovaný ukazatel rychlosti nárůstu regulované veličiny $y(t)$ je použitelný jak pro kmitavé, tak i nekmitavé regulační pochody a dokonce pro pochody s dopravním zpožděním.

Pro většinu procesů je vyhovující regulační pochod s relativním překmitem okolo 0,05 (5 %). Pokud se současně zajistí i minimální doba regulace $t_r$, pak takový regulační pochod je často považován za „prakticky optimální“. Používá se všude tam, kde malý překmit nevadí, příp. je žádoucí, např. u ručkových měřicích a zapisovacích přístrojů (v tomto případě umožňuje rychle interpolovat polohu ručičky při měření).

Protože soustava je vždy spojitá, proto se kvalita regulace posuzuje nejčastěji pro spojitý regulační obvod.

Pro komplexní zhodnocení kvality regulačního pochodu jsou velmi vhodná integrální kritéria. Vyšrafovaná plocha na obr. 4.2a vyjadřuje regulační plochu.

Je zřejmé, že čím regulační plocha bude menší, tím vyšší bude kvalita regulace. Aby se nemuselo pracovat se dvěma průběhy $y(t)$ a $w(t)$ (obr. 4.2a), pracuje se pouze s regulační odchylkou $e(t) = w(t) - y(t)$ (viz obr. 4.2b, c, d) a předpokládá se, že $e(\infty) = 0$. Pokud $e(\infty) \neq 0$, pak ve všech vztazích na integrální kritéria je třeba místo $e(t)$ dosadit výraz $e(t) - e(\infty)$.

**Lineární regulační plocha (obr. 4.2b)**

$$I_{IE} = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.3}$$

Kritérium lineární regulační plochy $I_{IE}$ (IE = **I**ntegral of **E**rror) je nejjednodušší. Není vhodné pro kmitavé regulační pochody, protože $I_{IE} = 0$ pro regulační pochod na mezi kmitavé stability (plochy označené na obr. 4.2b znaménky + a – se vzájemně odečtou). Jeho největší výhodou je, že lze snadno určit, protože platí (viz tab. P7.1)

$$I_{IE} = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.4}$$

**Absolutní regulační plocha (obr. 4.2c)**

$$I_{IAE} = \int_0^\infty |e(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.5}$$

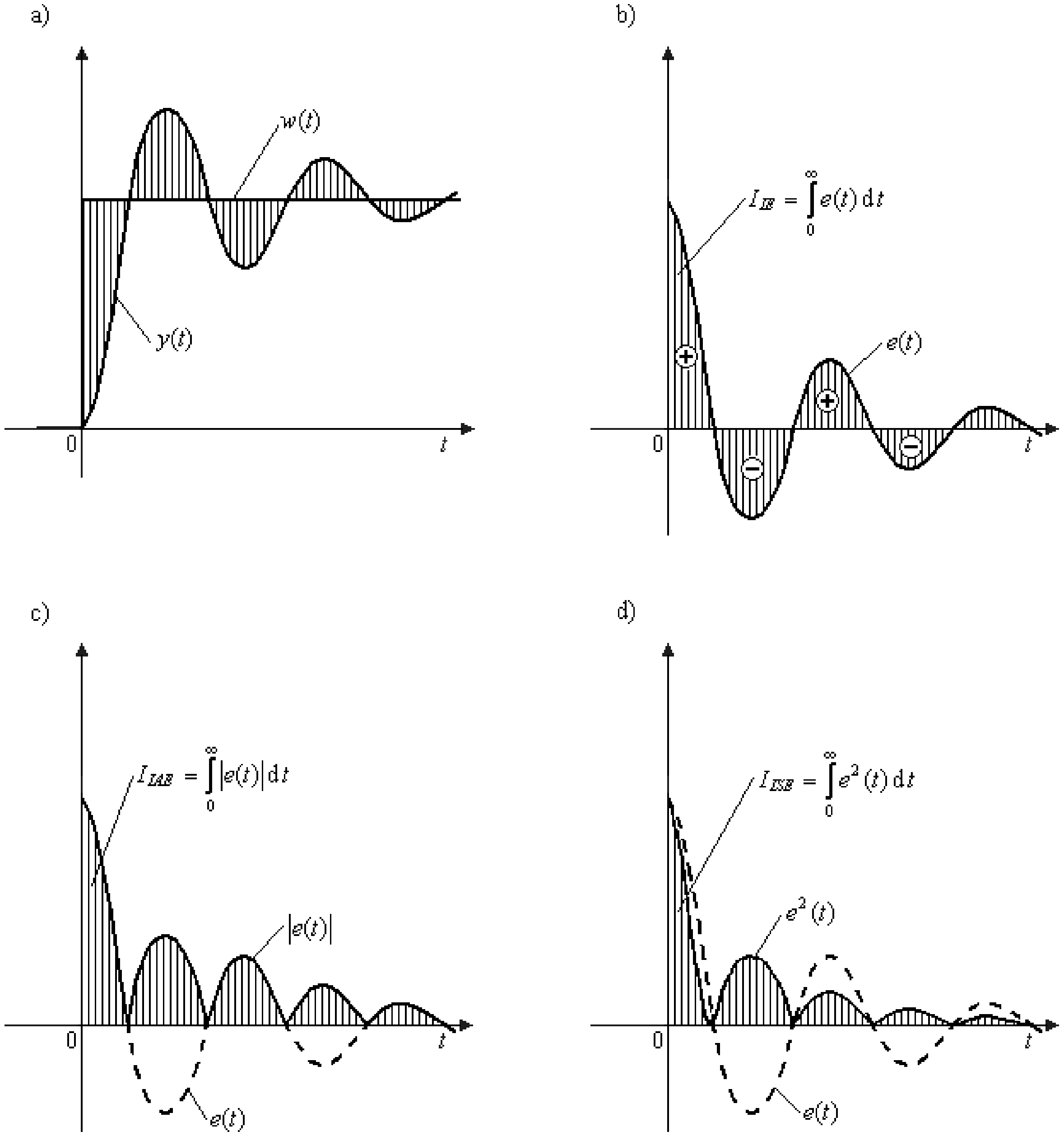
Kritérium absolutní regulační plochy $I_{IAE}$ (IAE = **I**ntegral of **A**bsolute **E**rror) odstraňuje nevýhodu předchozího kritéria $I_{IE}$ (viz obr. 4.2c), a proto je použitelné jak pro nekmitavé, tak i kmitavé regulační pochody. Má však velmi nepříjemnou vlastnost, spočívající v tom, že v bodech, ve kterých $e(t)$ mění znaménko není definována derivace $\dot{e}(t)$, a proto hodnotu kritéria absolutní regulační plochy nelze vypočítat analyticky. Jeho hodnotu lze určit pouze simulací.

Je zřejmé, že regulační plocha na obr. 4.2a je vlastně absolutní regulační plocha.

**Kvadratická regulační plocha (obr. 4.2d)**

$$I_{ISE} = \int_0^\infty e^2(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.6}$$

Kritérium kvadratické regulační plochy $I_{ISE}$ (ISE = **I**ntegral of **S**quared **E**rror) odstraňuje sice nedostatky obou předchozích integrálních kritérií $I_{IE}$ a $I_{IAE}$, protože je použitelné i pro kmitavé regulační pochody a jeho hodnotu lze určit analyticky [průběh $e^2(t)$ je hladký], ale výsledný průběh regulované veličiny $y(t)$ je příliš kmitavý. Použití je vhodné v těch případech, kdy žádaná $w(t)$ nebo poruchová $v(t)$ veličina mají náhodný charakter.




Obr. 4.2 Geometrická interpretace integrálních kritérií: a) regulační plocha, b) lineární regulační plocha $I_{IE}$, c) absolutní regulační plocha $I_{IAE}$, d) kvadratická regulační plocha $I_{ISE}$

**Kritérium ITAE**

$$I_{ITAE} = \int_0^\infty t|e(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.7}$$

Integrální kritérium $I_{ITAE}$ (ITAE = **I**ntegral of **T**ime multiplied by **A**bsolute **E**rror) v sobě zahrnuje čas i regulační odchylku, a proto při jeho minimalizaci dochází současně k minimalizaci jak absolutní regulační plochy, tak i doby regulace $t_r$. Je to velmi oblíbené integrální kritérium, i když jeho hodnotu v případě kmitavých průběhů lze určit pouze simulačně.

Byla uvedena pouze nejdůležitější integrální kritéria. Jejich minimalizací se získají hodnoty stavitelných parametrů zvoleného regulátoru. Minimalizace může být prováděna i simulačně.

Z kmitočtového přenosu řízení (1.7) lze získat modul (amplitudu), resp. logaritmický modul regulačního obvodu, tj.

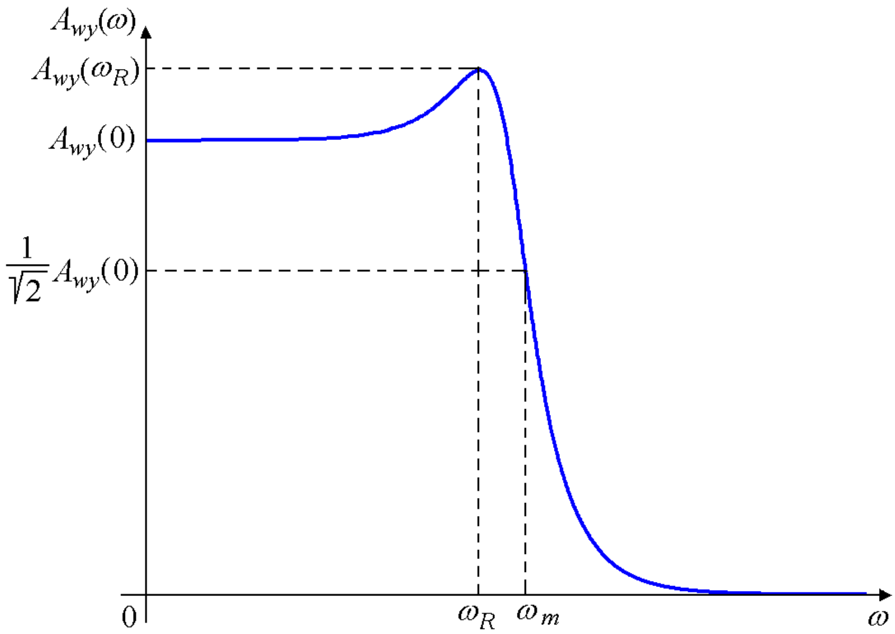
$$A_{wy}(\omega) = \operatorname{mod} G_{wy}(\mathrm{j}\omega) = \left|G_{wy}(\mathrm{j}\omega)\right|, \text{ resp. } L_{wy}(\omega) = 20 \log A_{wy}(\omega)\,. \qquad (4.8)$$

Typický průběh amplitudové kmitočtové charakteristiky regulačního obvodu $A_{wy}(\omega)$ je na obr. 4.3. Z jejího průběhu lze vyčíst ukazatele kvality: $A_{wy}(\omega_R)$ – amplitudové rezonanční převýšení, $\omega_R$ – rezonanční úhlový kmitočet, $\omega_m$ – mezní (hraniční) úhlový kmitočet.

Pro správně seřízený regulační obvod je doporučováno, aby platilo

$$A_{wy}(\omega_R) \le 1{,}1 \div 1{,}5, \text{ resp. } L_{wy}(\omega_R) \le (0{,}8 \div 3{,}5)\ \mathrm{dB}\,. \qquad (4.9)$$

Příliš vysoká hodnota amplitudového rezonančního převýšení dává velkou kmitavost a značný překmit.




Obr. 4.3 Amplitudová kmitočtová charakteristika regulačního obvodu

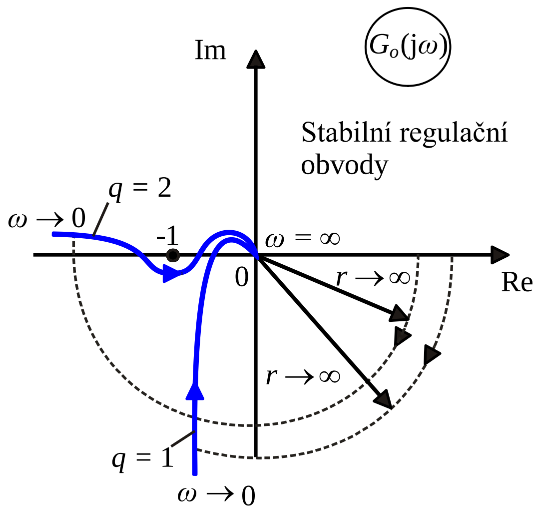
Mezní úhlový kmitočet $\omega_m$ určuje šířku pracovního pásma regulačního obvodu, tj. oblast pracovních úhlových kmitočtů. Čím je jeho hodnota vyšší, tím vyšší úhlové kmitočty dovede regulační obvod zpracovat. Jeho hodnota je dána poklesem modulu $A_{wy}(\omega)$ [$L_{wy}(\omega)$] na úroveň $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{wy}(0) \doteq 0{,}707 A_{wy}(0)$

[$L_{wy}(0)$ – 3 dB] a pokud vystupuje vysoké rezonanční převýšení $A_{wy}(\omega_R)$, pak vzrůstem modulu $A_{wy}(\omega)$ [$L_{wy}(\omega)$] na úroveň $\sqrt{2}A_{wy}(0) \doteq 1{,}414 A_{wy}(0)$ $[L_{wy}(0) + 3\ \mathrm{dB}]$.

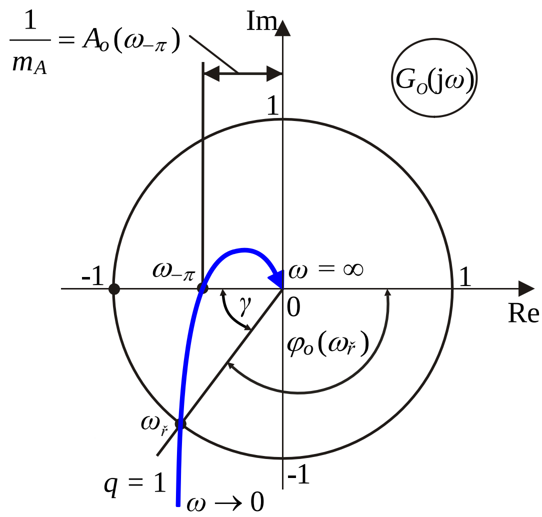
Z průběhu amplitudové kmitočtové charakteristiky regulačního obvodu $A_{wy}(\omega)$ lze rovněž určit jeho typ (řád astatismu) $q$, protože platí

$$A_{wy}(0) = 1,\ \text{resp.}\ L_{wy}(0) = 0\ \Rightarrow\ q \geq 1, \tag{4.10}$$

$$A_{wy}(0) < 1,\ \text{resp.}\ L_{wy}(0) < 0\ \Rightarrow\ q = 0. \tag{4.11}$$




Obr. 4.4 Průběhy amplitudofázových kmitočtových charakteristik otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ pro $q$ = 1 a $q$ = 2




Obr. 4.5 Amplitudová $m_A$ a fázová $\gamma$ bezpečnost

Určit přesně typ regulačního obvodu $q$ lze z průběhu amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ pro $\omega \to 0$, viz obr. 4.4 a 4.5.

Úhlový kmitočet řezu (průchodu) $\omega_ř$ je definován vztahem

$$A_o(\omega_ř) = 1 \tag{4.12}$$

a úhlový kmitočet $\omega_{-\pi}$

$$\varphi_o(\omega_{-\pi}) = -\pi \ , \tag{4.13}$$

kde

$$A_o(\omega) = \operatorname{mod} G_o(\mathrm{j}\omega) = |G_o(\mathrm{j}\omega)| \tag{4.14}$$

je modul kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu a

$$\varphi_o(\omega) = \arg G_o(\mathrm{j}\omega) \tag{4.15}$$

je fáze kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu.

Pro kmitavou mez stability platí [Vítečková, Víteček 2008]

$$\omega_k = \omega_ř = \omega_{-\pi} , \tag{4.16}$$

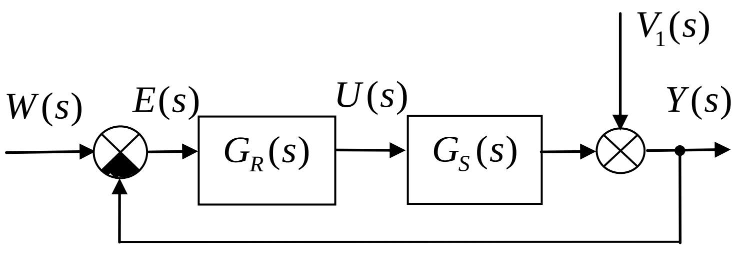
kde $\omega_k$ je kritický úhlový kmitočet.

Z amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ lze určit velmi důležité ukazatele kvality regulace, jako jsou amplitudová $m_A$ a fázová $\gamma$ bezpečnost (viz obr. 4.5 a 4.8). Pro běžné regulační obvody jsou doporučovány hodnoty

$$m_A = \mathbf{2} \div 5, \quad \text{resp. } m_L = 20 \log m_A = (\mathbf{6} \div 14) \text{ dB}, \tag{4.17}$$

$$\gamma = \mathbf{30}° \div 60° \quad \left( \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} \div \frac{\pi}{3} \right). \tag{4.18}$$

Hodnoty vyznačené tučně by v žádném případě neměly být překročeny [Åström, Häglund 1995, 2006; Findeisen 1969; Pułaczewski 1966; Strejc 1996; Rotač 1985; Šulc, Vítečková 2004].




Obr. 4.6 Schéma regulačního obvodu

Kmitočtové přenosy $G_{wy}(\mathrm{j}\omega)$ a $G_{v_1y}(\mathrm{j}\omega)$ [viz obr. 4.6 a vztahy (1.7), (1.9)] mají pro teorii automatického řízení zásadní význam, a proto se také označují speciálními symboly $T(\mathrm{j}\omega)$ a $S(\mathrm{j}\omega)$ a mají také své názvy. Ze vztahu (1.9) vyplývá, že platí

$$G_{wy}(\mathrm{j}\omega)+G_{v_1 y}(\mathrm{j}\omega)=1 \;\Leftrightarrow\; T(\mathrm{j}\omega)+S(\mathrm{j}\omega)=1 . \tag{4.19}$$

Funkce $S(\mathrm{j}\omega)$ se nazývá funkce citlivosti a funkce $T(\mathrm{j}\omega)$ doplňková (komplementární) funkce citlivosti.

Název funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ vyplývá z následujících úvah (obr. 4.6).

Ze vztahu

$$Y(\mathrm{j}\omega)=G_{wy}(\mathrm{j}\omega)W(\mathrm{j}\omega)=\frac{G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}{1+G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}W(\mathrm{j}\omega) \tag{4.20}$$

pro $W(\mathrm{j}\omega)$ = konst se dostane

$$\frac{\mathrm{d}Y(\mathrm{j}\omega)}{Y(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}, \tag{4.21}$$

tj. relativní změna regulované veličiny (jejího obrazu) je rovna relativní změně vlastností regulačního obvodu (jeho přenosu řízení). Podobně se odvodí z (4.20) vztah

$$\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}=\frac{1}{1+G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}\left[\frac{\mathrm{d}G_R(\mathrm{j}\omega)}{G_R(\mathrm{j}\omega)}+\frac{\mathrm{d}G_S(\mathrm{j}\omega)}{G_S(\mathrm{j}\omega)}\right],$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}Y(\mathrm{j}\omega)}{Y(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{d}G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}{G_{wy}(\mathrm{j}\omega)}=S(\mathrm{j}\omega)\left[\frac{\mathrm{d}G_R(\mathrm{j}\omega)}{G_R(\mathrm{j}\omega)}+\frac{\mathrm{d}G_S(\mathrm{j}\omega)}{G_S(\mathrm{j}\omega)}\right], \tag{4.22}$$

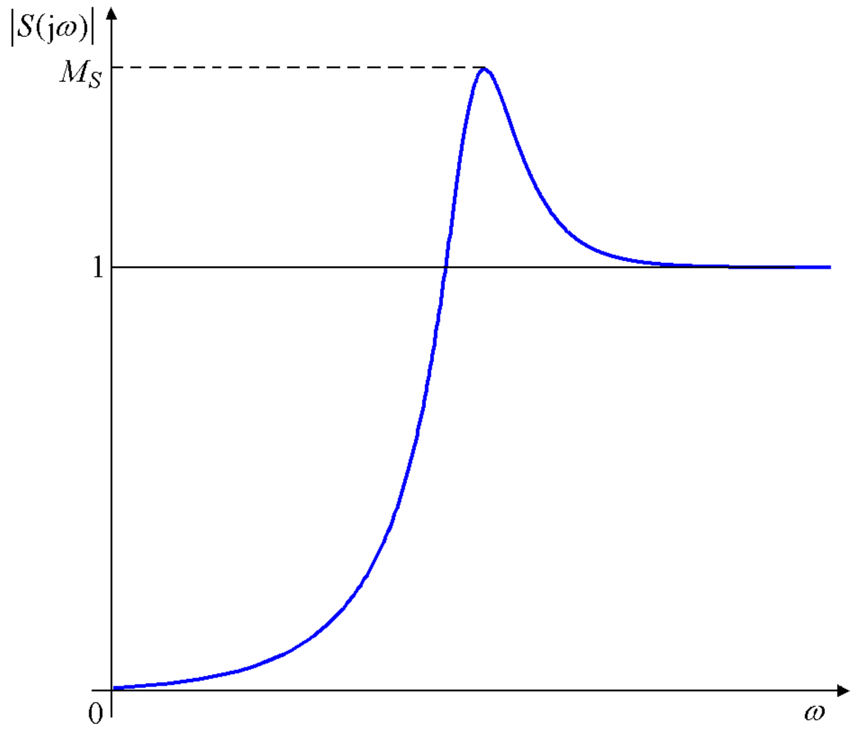
který vyjadřuje vliv relativních změn vlastností regulátoru (jeho přenosu) a regulované soustavy (jejího přenosu) na relativní změnu vlastností regulačního obvodu (jeho přenosu řízení), a tím i na relativní změnu regulované veličiny (jejího obrazu). Ze vztahu (4.22) je zřejmé, že tento vliv vyjadřuje právě funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$. Čím její hodnota bude nižší, tím nižší bude vliv relativních změn vlastností regulátoru a regulované soustavy na relativní změnu vlastností regulačního obvodu, a tedy i na relativní změnu regulované veličiny.

Funkce citlivosti $S(\mathrm{j}\omega)$ vyjadřuje tedy citlivost, resp. necitlivost regulačního obvodu k velmi malým, většinou blíže nespecifikovaným, změnám vlastností jeho členů.

Na obr. 4.7 je ukázán typický průběh modulu funkce citlivosti $|S(\mathrm{j}\omega)|=\operatorname{mod}S(\mathrm{j}\omega)$. Měřítko úhlového kmitočtu $\omega$ bývá nejčastěji logaritmické.

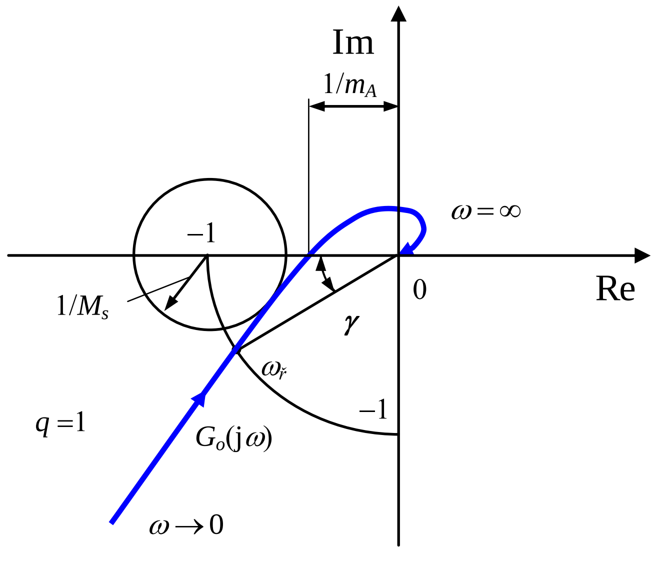
Velmi důležitou interpretaci má maximální hodnota modulu funkce citlivosti

$$M_S=\max_{0\le\omega<\infty}|S(\mathrm{j}\omega)|=\max_{0\le\omega<\infty}\left|\frac{1}{1+G_R(\mathrm{j}\omega)G_S(\mathrm{j}\omega)}\right|. \tag{4.23}$$




Obr. 4.7 Průběh modulu funkce citlivosti

Převrácená hodnota maxima modulu funkce citlivosti $1/M_S$ je vlastně nejkratší vzdálenost amplitudofázové kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $G_o(\mathrm{j}\omega)$ od kritického bodu –1, viz obr. 4.8.




Obr. 4.8 Geometrická interpretace maxima modulu funkce citlivosti $M_S$

U správně seřízeného regulačního obvodu by neměla hodnota $M_S$ překročit 2 a měla by být v rozmezí [Åström, Häglund 1995, 2006]

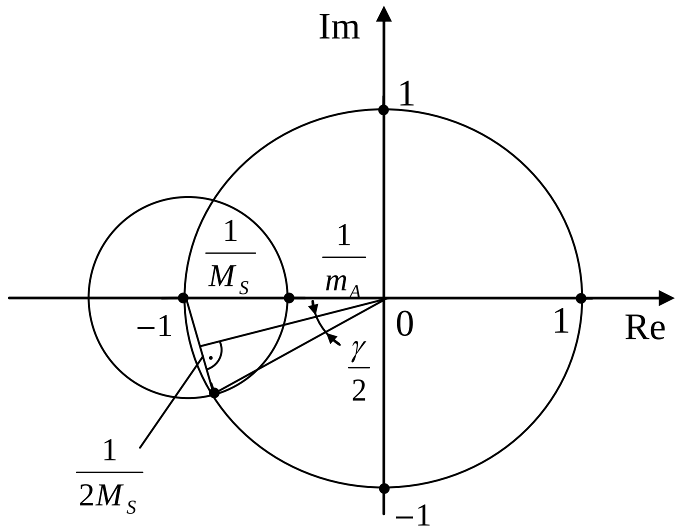
$$1{,}4 \leq M_S \leq \mathbf{2}\,. \tag{4.24}$$

Z obr. 4.9 vyplývají přímo odhady pro amplitudovou bezpečnost

$$m_A > \frac{M_S}{M_S - 1} \tag{4.25}$$

a fázovou bezpečnost

$$\gamma > 2 \arcsin \frac{1}{2M_S}\,. \tag{4.26}$$




Obr. 4.9 Geometrická interpretace nerovností (4.25) a (4.26)

Nerovnosti (4.25) a (4.26) byly získány z mezních případů (viz obr. 4.9), tj.

$$\frac{1}{M_S} + \frac{1}{m_A} = 1 \;\Rightarrow\; m_A = \frac{M_S}{M_S - 1},$$

$$\frac{1}{2M_S} = \sin\frac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; \gamma = 2\arcsin\frac{1}{2M_S}.$$

Maximum modulu funkce citlivosti $M_S$ je komplexním ukazatelem kvality regulačního obvodu, protože ze vztahů (4.25) a (4.26) vyplývá, že pro $M_S \leq 2$ zaručuje amplitudovou bezpečnost $m_A \geq 2$ a fázovou bezpečnost $\gamma > 29$ °. Podobně $M_S \leq 1{,}4$ zaručuje $m_A \geq 3{,}5$ a $\gamma > 42$ °. Opačné tvrzení neplatí, tj. $m_A$ a $\gamma$ nezaručují odpovídající hodnotu $M_S$.

Další velkou výhodou maxima modulu funkce citlivosti $M_S$ je, že jeho pomocí lze vyjádřit sklony sektorové nelinearity (obr. 4.10)

$$\alpha = \frac{M_S}{M_S + 1} \leq \frac{f(u_1)}{u_1} \leq \frac{M_S}{M_S - 1} = \beta\,, \tag{4.27}$$

při které regulační obvod s nelinearitou (obr. 4.11) bude asymptoticky stabilní [Åström, Häglund 1995, 2006; Landau, Zito 2006].

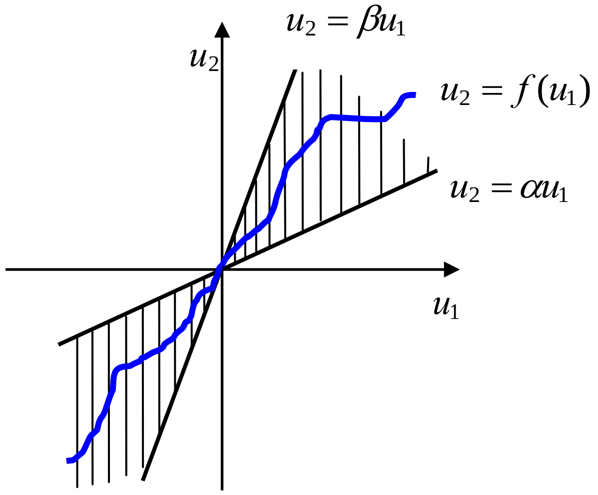
V reálných regulačních obvodech totiž často vystupují nelinearity, případně časově proměnná zesílení. Tyto případy lze popsat sektorovou nelinearitou

$$u_2 = f(u_1), \quad f(0) = 0,$$

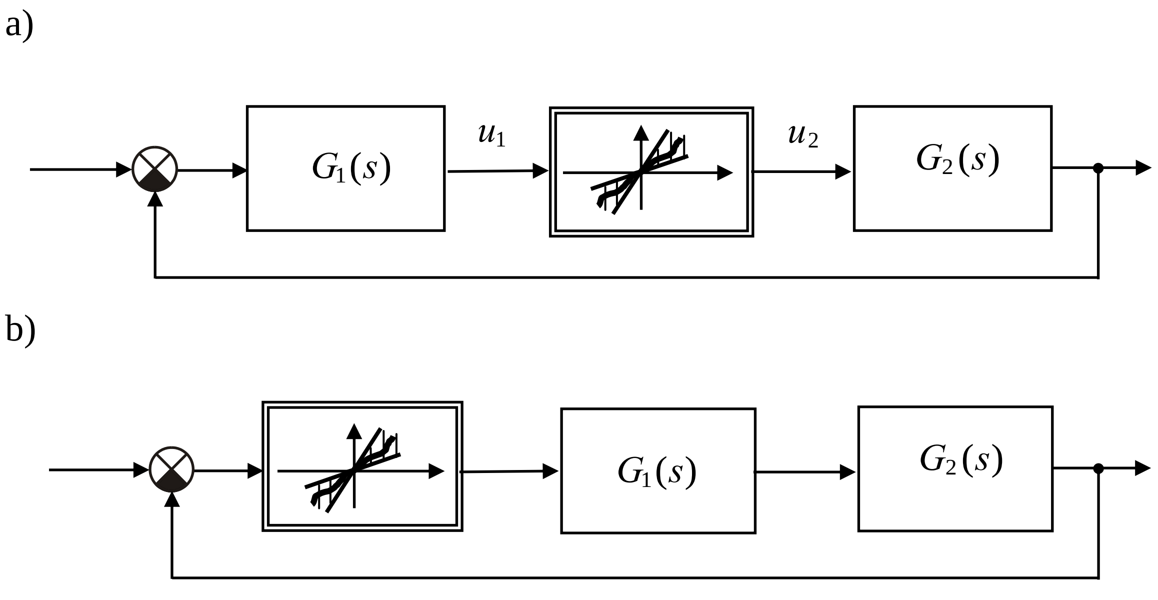
která prochází počátkem a je vymezena přímkami o sklonech $\alpha$ a $\beta$ (obr. 4.10)

$$0 < \alpha u_1 \leq f(u_1) \leq \beta u_1 \;\Rightarrow\; 0 < \alpha \leq \frac{f(u_1)}{u_1} \leq \beta . \tag{4.28}$$

Většinou se jedná o nelineární akční člen, viz obr. 4.11a. Pro účely stability, lze schéma na obr. 4.11a transformovat na schéma na obr. 4.11b.




Obr. 4.10 Nelinearita vymezena přímkami o sklonech $\alpha$ a $\beta$

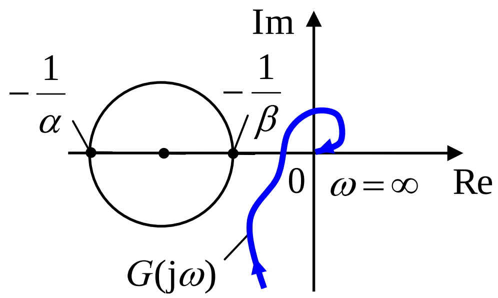



Obr. 4.11 Regulační obvod s nelinearitou: a) původní, b) upravený

Na základě kruhového kritéria regulační obvod s nelineární nebo časově proměnnou charakteristikou ležící v sektoru vymezeném přímkami o sklonech $\alpha$ a $\beta$ je asymptoticky stabilní, pokud amplitudofázová kmitočtová charakteristika stabilní lineární části s přenosem

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \tag{4.29}$$

leží napravo od kružnice procházející body $-\frac{1}{\alpha}$ a $-\frac{1}{\beta}$ na záporné poloose a se středem na záporné poloose (obr. 4.12) [Khalil 1996; Sastry 1999].




Obr. 4.12 Geometrická interpretace kruhového kritéria

Pro $\alpha = \beta > 0$ a $G_o(s) = \alpha G(s)$ je zřejmé, že kruhové kritérium přejde na Nyquistovo kritérium pro stabilní otevřené regulační obvody.

Např. na základě (4.27) pro $M_S = 2$ se dostanou sklony přímek vymezující sektorovou nelinearitu $\alpha = 0{,}67$ a $\beta = 2$, podobně pro $M_S = 1{,}4$ se dostane $\alpha = 0{,}58$ a $\beta = 3{,}5$.

S citlivostí, resp. necitlivostí regulačního obvodu k velmi malým změnám vlastností jeho členů velmi úzce souvisí robustnost regulačního obvodu, která vyjadřuje schopnost regulačního obvodu plnit cíl regulace při větších, většinou kvantitativně definovaných, změnách vlastností jeho členů i při určitém poklesu kvality, ale vždy při zajištění stability [Veselý, Harsányi 2008; Vilamova et al. 2010; Rosinová, Markech 2008; Rosinová 2008]. Např. maximum modulu funkce citlivosti $M_S$ vymezuje sektor pro nelinearitu nebo časovou změnu zesílení, které nezpůsobí ztrátu stability, tj. $M_S$ vyjadřuje určitým způsobem robustnost regulačního obvodu k dané nelinearitě nebo časovým změnám zesílení omezených sklony $\alpha$ a $\beta$.

## 4.2 Metody seřizování vycházející z uzavřeného regulačního obvodu

Tyto metody pracují se skutečným regulačním obvodem, a tedy pracují s reálnou soustavou a reálným regulátorem. Z tohoto důvodu nevyžadují v podstatě žádné znalosti o vlastnostech soustavy. Aplikují se nejčastěji na již existující regulační obvody, které je nutno doladit nebo seřídit po rekonstrukci nebo opravě.

V této podkapitole se předpokládá použití standardního analogového regulátoru PID (2.2).

### 4.2.1 Experimentální metoda „pokus – omyl“

Velmi jednoduchá a účinná je metoda uvedena v [Wade 1994, 2004]. Zde je mírně upravena.

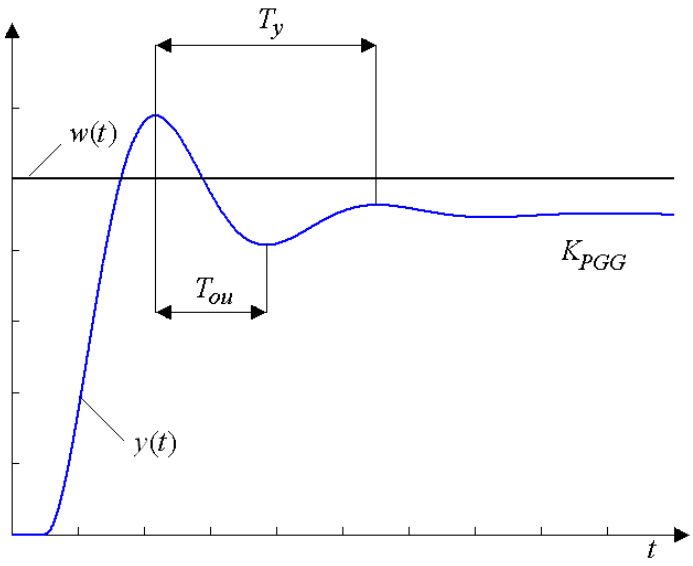
**Postup:**

1. U regulačního obvodu se zkontroluje celé zapojení a ověří se funkčnost všech jeho členů.
2. Nastaví se požadovaná hodnota žádané veličiny $w(t)$ a v ručním režimu se nastaví $y(t) \approx w(t)$, vyřadí se integrační složka ($T_I \to \infty$) a derivační složka ($T_D \to 0$), zesílení regulátoru $K_P$ se sníží a analogový regulátor se přepne do automatického režimu.
3. Zesílení regulátoru $K_P$ se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ se dostane kmitavý průběh regulované veličiny $y(t)$ s požadovaným tlumením (v případě proporcionální regulované soustavy zůstane trvalá regulační odchylka – nevadí).
4. Zesílení regulátoru $K_P$ se sníží na 0,75 – 0,9 (75 – 90 %) předchozí hodnoty a pomalu se začne snižovat integrační časová konstanta $T_I$, a to tak dlouho, až je odstraněna případná trvalá regulační odchylka a získá se při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ požadovaný průběh regulované veličiny $y(t)$. Rozumná hodnota integrační časové konstanty $T_I$ je

   $$T_I = 0{,}67 T_y\,, \tag{4.30}$$

   kde $T_y$ je doba kmitu určena z průběhu regulované veličiny $y(t)$ získaného v bodě 3 (obr. 4.13).
5. Konečný požadovaný průběh regulované veličiny $y(t)$ se získá doladěním zesílení regulátoru $K_P$.
6. V případě použití derivační složky se derivační časová konstanta $T_D$ nastaví na počáteční hodnotu $0{,}1T_I$. Pokud se nepříznivě projeví šumy nebo akční veličina $u(t)$ bude příliš aktivní, pak použití derivační složky není vhodné a znovu se vyřadí. Pokud dojde ke zlepšení regulačního procesu, hodnota derivační časové konstanty $T_D$ se zvýší až na maximální hodnotu $0{,}25T_I$, zesílení regulátoru $K_P$ se zvýší asi o 0,25 (25 %) předchozí hodnoty (tj. hodnoty získané v bodě 5) a hodnota integrační časové konstanty $T_I$ se sníží asi o 0,33 (33 %) předchozí hodnoty (tj. hodnoty získané v bodě 4).

Uvedený postup umožňuje experimentálně seřídit regulační obvod na požadovaný průběh regulované veličiny $y(t)$ z hlediska skokových změn polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v_1(t)$ působící na výstupu soustavy. Skok žádané veličiny $w(t)$ nesmí v žádném případě způsobovat nelineární chování, tj. především nasycení.




Obr. 4.13 Experimentální seřizování metodami „pokus – omyl“ a dobrého zesílení

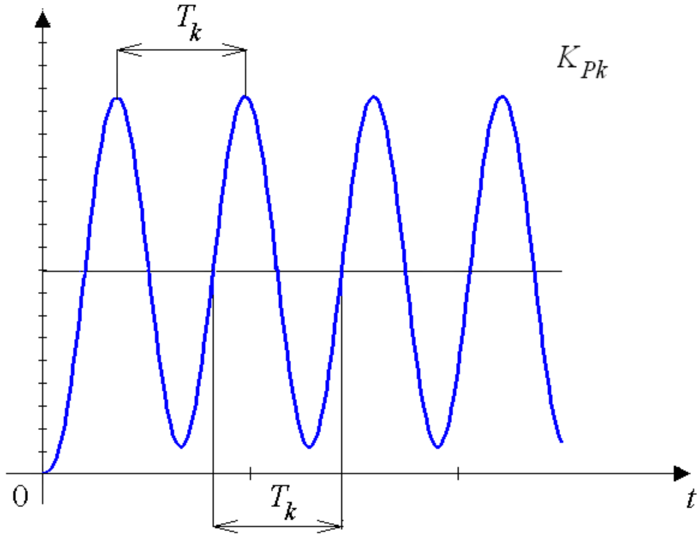
### 4.2.2 Experimentální metody kritických parametrů

Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů (metoda uzavřeného regulačního obvodu) vychází ze skutečného regulačního obvodu, který se při vyřazené integrační činnosti ($T_I \rightarrow \infty$) a derivační činnosti ($T_D \rightarrow 0$) zvyšováním zesílení regulátoru $K_P$ přivede na kmitavou mez stability [Ziegler, Nichols 1942].

Pak z periodického průběhu libovolné veličiny regulačního obvodu se odečte kritická perioda $T_k$ a z odpovídajícího nastavení analogového regulátoru – kritické zesílení $K_{Pk}$, viz obr. 4.14. Je zřejmé, že kritické zesílení $K_{Pk}$ se určí iteračně.

Hodnoty stavitelných parametrů zvoleného analogového regulátoru se vypočtou na základě tab. 4.1.

Destabilizující vliv integrační složky u analogového regulátoru PI se projevil snížením $K_P^*$ oproti analogovému regulátoru P a stabilizující vliv derivační složky (při vhodné filtraci) u standardního analogového regulátoru PID se projevil zvýšením zesílení $K_P^*$ (porovnej s tab. 4.6). Poměr $T_D^*/T_I^*$ = 1/4.




Obr. 4.14 Určení kritické periody $T_k$

Tab. 4.1 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu kritických parametrů

| Regulátor | $K_P^*$ | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
|---|---|---|---|
| P | $0{,}5K_{Pk}$ | – | – |
| PI | $0{,}45K_{Pk}$ | $\frac{T_k}{1{,}2} \doteq 0{,}83T_k$ | – |
| PID | $0{,}6K_{Pk}$ | $0{,}5T_k$ | $0{,}125T_k$ |

L-přenos standardního analogového regulátoru PID seřízeného metodou kritických parametrů má tvar

$$G_R(s) = K_P^*\left(1+\frac{1}{T_I^* s}+T_D^* s\right) = 0{,}6K_{Pk}\left(1+\frac{1}{0{,}5T_k s}+0{,}125T_k s\right) = \\ = 1{,}2\frac{K_{Pk}}{T_k}\frac{\left(\frac{T_k}{4}s+1\right)^2}{s}. \tag{4.31}$$

Ze vztahu (4.31) vyplývá, že při použití analogového regulátoru PID$_i$ (sériového s interakcí) $T_I'^* = T_D'^* = T_k/4$ a $K_P'^* = 0{,}3K_{Pk}$.

Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů je použitelná i pro analogové regulátory typu I. V tomto případě se regulační obvod přivede na kmitavou mez stability vhodným snížením integrační časové konstanty $T_I$. Při vystoupení kmitavé meze stability se z nastavení analogového regulátoru odečte kritická hodnota integrační časové konstanty $T_{Ik}$ a pak pro seřízení se použije hodnota

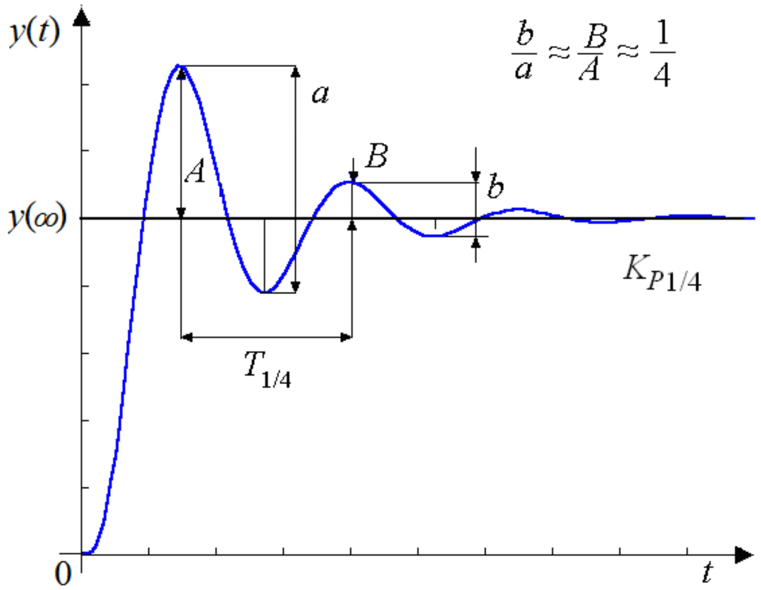
$$T_I^* = 2T_{Ik}\,. \tag{4.32}$$

I v tomto případě je amplitudová bezpečnost $m_A = 2$.

Pokud je požadován nekmitavý regulační pochod, pak se volí

$$T_I^* = (4 \div 6)T_{Ik} \tag{4.33}$$

s amplitudovou bezpečností $m_A = 4 \div 6$.




Obr. 4.15 Seřízení regulačního obvodu na čtvrtinové tlumení

Tab. 4.2 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro Tyreusovu-Luybenovu metodu kritických parametrů

| Regulátor | $K_P^*$ | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
|---|---|---|---|
| PI | $0{,}31K_{Pk}$ | $2{,}2T_k$ | – |
| PID | $0{,}45K_{Pk}$ | $2{,}2T_k$ | $\frac{T_k}{6{,}3} \doteq 0{,}16T_k$ |

Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů je výhodná především tím, že nepředpokládá žádnou znalost vlastností regulované soustavy a že pracuje s reálnou soustavou i regulátorem. Její zásadní vadou je, že musí přivést regulační obvod na mez kmitavé stability, tj. musí ho rozkmitat, což většina reálných soustav nedovoluje a dále, že se mohou výraznějším způsobem projevit jejich nelineární vlastnosti.

Její další vadou je, že je příliš agresivní, což vyplývá z požadavku na čtvrtinové tlumení, viz obr. 4.15. Reálný překmit po seřízení analogového regulátoru Ziglerovou-Nicholsovou metodou je od 10% do 60%, v průměru pro různé soustavy okolo 25 %. Seřízení Ziglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů bývá vhodné pro stabilizující regulaci v případě působení poruchové veličiny $v(t)$ na vstupu soustavy.

Kritické parametry pro seřízení analogových regulátorů PI a PID využívá Tyreusova-Luybenova metoda (tab. 4.2), která je však dost konzervativní [Seborg, Edgar, Mellichamp 2004].

V případě znalosti matematického modelu regulované soustavy kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$, příp. $T_{Ik}$ je možné získat analyticky (viz příloha P3). Pokud regulovaná soustava neobsahuje dopravní zpoždění, je výhodné použití Michajlovova kritéria stability.

Tab. 4.3 Určení L-přenosu soustavy na základě kritických parametrů

| L-přenos soustavy | Parametry soustavy | Poznámka |
|---|---|---|
| $k_1 \,\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $k_1 = \dfrac{1}{K_{Pk}}, \quad T_d = \dfrac{T_k}{2}$ | |
| $\dfrac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}$ | $k_1 = \dfrac{2\pi}{K_{Pk} T_k}, \; T_d = \dfrac{T_k}{4}$ | |
| $\dfrac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}$ | $T_1 = \dfrac{T_k}{2\pi}\sqrt{(K_{Pk}k_1)^2 - 1}$<br>$T_d = \dfrac{T_k}{2\pi}\left(\pi - \mathrm{arctg}\sqrt{(K_{Pk}k_1)^2 - 1}\right)$ | $k_1$ – známé |
| $\dfrac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \mathrm{e}^{-T_d s}$ | $T_1 = \dfrac{T_k}{2\pi}\sqrt{\left(\dfrac{K_{Pk}k_1T_k}{2\pi}\right)^2 - 1}$<br>$T_d = \dfrac{T_k}{2\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\sqrt{\left(\dfrac{K_{Pk}k_1T_k}{2\pi}\right)^2 - 1}\right]$ | $k_1$ – známé |
| $\dfrac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_d s}$ | $T_2 = \dfrac{T_k}{2\pi}\sqrt{K_{Pk}k_1 - 1}$<br>$T_d = \dfrac{T_k}{2\pi}\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{K_{Pk}k_1 - 1}\right)$ | $k_1$ – známé |

**Postup:**

1. a 2. Stejný postup jako u experimentální metody „pokus – omyl".
3. Zesílení regulátoru $K_P$ se postupně zvyšuje tak dlouho, až při malé změně žádané veličiny $w(t)$ v regulačním obvodu vystoupí kmity se stejnou amplitudou, co odpovídá kmitavé mezi stability.
4. Z periodického průběhu libovolné veličiny regulačního obvodu se určí kritická perioda $T_k$ a z nastavení regulátoru – kritické zesílení $K_{Pk}$.
5. Pro zvolený typ regulátoru se z tab. 4.1, příp. 4.2 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

**Poznámka:**

Na základě znalosti kritických parametrů $K_{Pk}$ a $T_k$ může být určen L-přenos soustavy [Vítečková, Víteček 2010a] a pak lze pro seřízení regulátorů použít i jinou vhodnější metodu, viz tab. 4.3 a příloha P3.

Kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$ mohou být přibližně určeny i metodou relé [Rotač 1964; Åström, Häglund 1995, 2006; Vítečková, Víteček 2005].

### 4.2.3 Metoda čtvrtinového tlumení

Metoda čtvrtinového tlumení je modifikací Zieglerovy-Nicholsovy metody kritických parametrů. Na rozdíl od této metody nepředpokládá rozkmitání regulačního obvodu, což umožňuje pracovat v lineární oblasti a použití u většího množství regulovaných soustav.

Tab. 4.4 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro metodu čtvrtinového tlumení

| Regulátor | $K_P^*$ | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
|---|---|---|---|
| P | $K_{P1/4}$ | – | – |
| PI | $0{,}9K_{P1/4}$ | $T_{1/4}$ | – |
| PID | $1{,}2K_{P1/4}$ | $0{,}6T_{1/4}$ | $0{,}15T_{1/4}$ |

**Postup:**

1. a 2. Stejný postup jako u experimentální metody „pokus – omyl".
3. Zesílení regulátoru $K_P$ se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ se obdrží přechodová charakteristika

regulačního obvodu $y(t)$ taková, aby podíl dvou po sobě následujících amplitud byl roven 1/4 (tj. útlum = 4), viz obr. 4.15.

4. Z přechodové charakteristiky se odečte doba kmitu $T_{1/4}$ a z nastavení regulátoru jeho zesílení $K_{P1/4}$.
5. Pro zvolený typ regulátoru se z tab. 4.4 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

### 4.2.4 Metoda dobrého zesílení

Metoda dobrého zesílení (Good Gain Method) je podobná experimentální metodě „pokus – omyl" a je popsána v [Haugen 2010a, 2010b].

**Postup:**

1. a 2. Stejný postup jako u experimentální metody „pokus – omyl".
3. Zesílení regulátoru $K_P$ se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ se dostane průběh s překmitem a pozorovatelným podkmitem (obr. 4.13). Tomuto průběhu odpovídá zesílení $K_{PGG}$ (Good Gain). Skok žádané veličiny $w(t)$ nesmí v žádném případě způsobovat nelineární chování, tj. především nasycení.
4. Integrační časová konstanta se nastaví na hodnotu

$$T_I^* = 1{,}5T_{ou} \tag{4.34}$$

a zesílení regulátoru na hodnotu

$$K_P^* = 0{,}8K_{PGG}. \tag{4.35}$$

Doba $T_{ou}$ (**o**vershoot – překmit, **u**ndershoot – podkmit) se určí v souladu s obr. 4.13.

5. V případě použití derivační složky se derivační časová konstanta nastaví na hodnotu

$$T_D^* = 0{,}25T_I^*. \tag{4.36}$$

Pokud se nepříznivě projeví šumy nebo akční veličina $u(t)$ bude příliš aktivní, pak použití derivační složky není vhodné a znovu se vyřadí.

6. Konečný požadovaný průběh regulované veličiny $y(t)$ se získá doladěním zesílení regulátoru $K_P$, případně integrační časovou konstantou $T_I$.

Určitou výhodou metody dobrého zesílení je to, že při mírně kmitavém průběhu první podkmit se určí lépe než druhý překmit.

Metoda dobrého zesílení vychází z následujících úvah [Haugen 2010a].

Předpokládá se, že uzavřený regulační obvod má vlastnosti, které můžeme vyjádřit L-přenosem řízení

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}. \tag{4.37}$$

Při relativním tlumení $\xi_0$ = 0,6 vznikne relativní překmit $\kappa \approx 0{,}1$ (10 %) a také je slabě pozorovatelný podkmit. Doba kmitu tohoto slabě kmitavého průběhu je

$$T_{GG} = \frac{2\pi T_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} = \frac{2\pi T_0}{0{,}8} = 2T_{ou}.$$

Regulační obvod s L-přenosem řízení (4.37) bude na kmitavé mezi stability pro $\xi_0$ = 0 s kritickou periodou

$$T_k = 2\pi T_0.$$

Vztah mezi dobou $T_{ou}$ tlumených kmitů pro metodu dobrého zesílení a periodou netlumených kmitů (kritickou periodou) $T_k$ je

$$T_k = 0{,}8T_{GG} = 1{,}6T_{ou}.$$

Pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu kritických parametrů platí (viz tab. 4.1)

$$T_I = \frac{T_k}{1{,}2} = \frac{1{,}6T_{ou}}{1{,}2} = 1{,}33T_{ou}.$$

Seřízení Zieglerovou-Nicholsovou metodou je příliš agresivní, a proto se volí

$$T_I^* = 1{,}5T_{ou}.$$

V Zieglerově-Nicholsově metodě zesílení $K_P$ u analogového regulátoru PI je 0,9 násobkem zesílení u analogového regulátoru P. Protože integrační složka destabilizuje regulační obvod, původní zesílení regulátoru $K_{PGG}$ je třeba snížit, tj.

$$K_P^* = 0{,}8K_{PGG}.$$

Je zřejmé, že uvedená metoda je použitelná pouze pro soustavy, u kterých lze získat průběhy v souladu s obr. 4.13.

### 4.2.5 Metoda překmitu

Metoda překmitu (Setpoint Overshoot method) je podrobně popsána v [Shamsuzzoha, Skogestad, Halvorsen 2010a,b] a její srovnání s jinými metodami je v [Haugen 2010b]. Původně byla navržena pro analogový regulátor PI a pro proporcionální soustavu se setrvačností prvního řádu s dopravním zpožděním a později rozšířena i na jiné soustavy.

**Postup:**

1. a 2. Stejný postup jako u experimentální metody „pokus – omyl“.
3. Zesílení regulátoru $K_P$ se postupně zvyšuje tak dlouho, až při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t) = w_0$ se obdrží přechodová

charakteristika regulačního obvodu $y(t)$ taková, aby relativní překmit $\kappa$ byl v rozmezí 0,1 – 0,6 (nejlépe okolo 0,3), viz obr. 4.16.

4. Z průběhu regulované veličiny $y(t)$ se určí:
   - doba dosažení prvního maxima $y_m = y(t_m)$, tj. $t_m$,
   - relativní překmit $\kappa = \dfrac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)}$, (4.38)
   - zesílení otevřeného regulačního obvodu

$$k_1 K_{PO} = \frac{b'}{1-b'},\quad b' = \frac{y(\infty)}{w_0}. \tag{4.39}$$

5. Vypočte se pomocný parametr

$$A' = 1{,}152\kappa^2 - 1{,}607\kappa + 1$$

a pak se určí hodnoty stavitelných parametrů analogového regulátoru PI

$$K_P^* = K_{PO}\frac{A'}{F}, \tag{4.40}$$

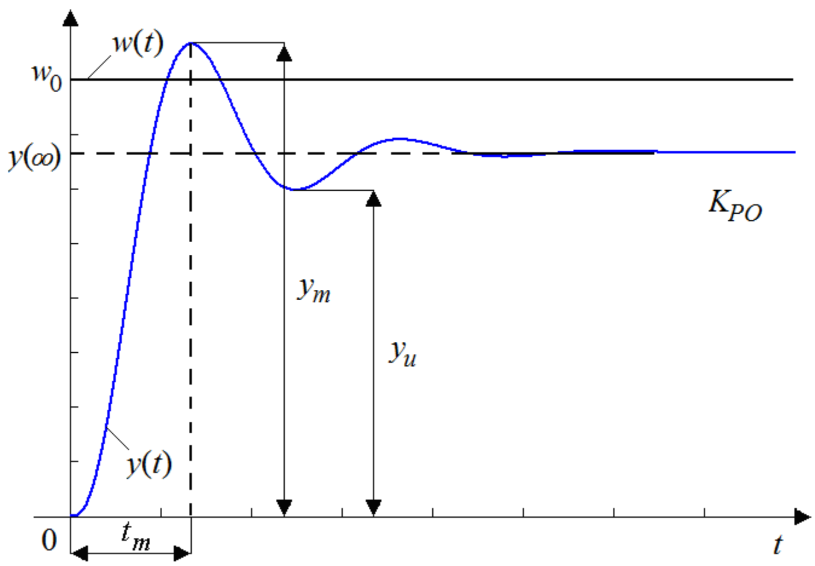
$$T_I^* = \min(0{,}86A't_m\frac{b'}{1-b'};\ 2{,}44t_m F), \tag{4.41}$$

kde $F$ je parametr „rozladění“ umožňující seřízení:

$F < 1$ rychlé, ale méně robustní,

$F = 1$ rychlé a robustní (odpovídá metodě SIMC),

$F > 1$ pomalejší, ale více robustní.




Obr. 4.16 Seřízení metodou překmitu

Pokud v bodě 4 nelze určit $y(\infty)$ z důvodu příliš krátkého průběhu regulované veličiny, pak podle [Samsuzzoha, Skogestad, Halvarsen 2010a,b] je možné použít odhad (obr. 4.16)

$$y(\infty) = 0{,}45(y_m + y_u)\,.$$

### 4.2.6 Zlepšení regulačního pochodu

Často je možné se setkat s pracujícími regulačními obvody, ale není jasné, zda jsou správně seřízeny. V publikacích [Wade 1994, 2004] je popsán postup, pomocí kterého lze stávající regulační pochod a seřízení posoudit a případně zlepšit. V následujícím postupu se předpokládá použití analogového regulátoru PI.

**Postup:**

1. Pokud je při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ nebo poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy regulační proces kmitavý s požadovaným tlumením vyjádřeným poměrem $B/A$ (obr. 4.17) a doba kmitu $T_y$ vyhovuje podmínce

   $$1{,}5T_I < T_y < 2{,}0T_I\,, \tag{4.42}$$

   pak analogový regulátor PI je správně seřízen.

   Pokud regulační proces není kmitavý (a je požadován kmitavý), upraví se zesílení regulátoru $K_P$ tak, aby bylo možné určit dobu kmitu $T_y$ při požadovaném tlumení $B/A$ a ověřuje se splnění nerovnosti (4.42).

2. Pokud $T_y > 2T_I$, pak aktuální integrační časová konstanta $T_I$ je příliš malá, a proto se zvýši na novou hodnotu vyhovující nerovnosti

   $$\frac{1}{2}T_y < T_I < \frac{2}{3}T_y \tag{4.43}$$

   a znovu se ověří splnění nerovnosti (4.42).

3. Pokud $T_y < 1{,}5T_I$, pak aktuální integrační časová konstanta $T_I$ je příliš velká nebo aktuální zesílení regulátoru $K_P$ je také příliš velké. Nová integrační časová konstanta se zvolí z intervalu (4.43) a případně se sníží zesílení regulátoru $K_P$ a znovu se ověří splnění nerovnosti (4.42).

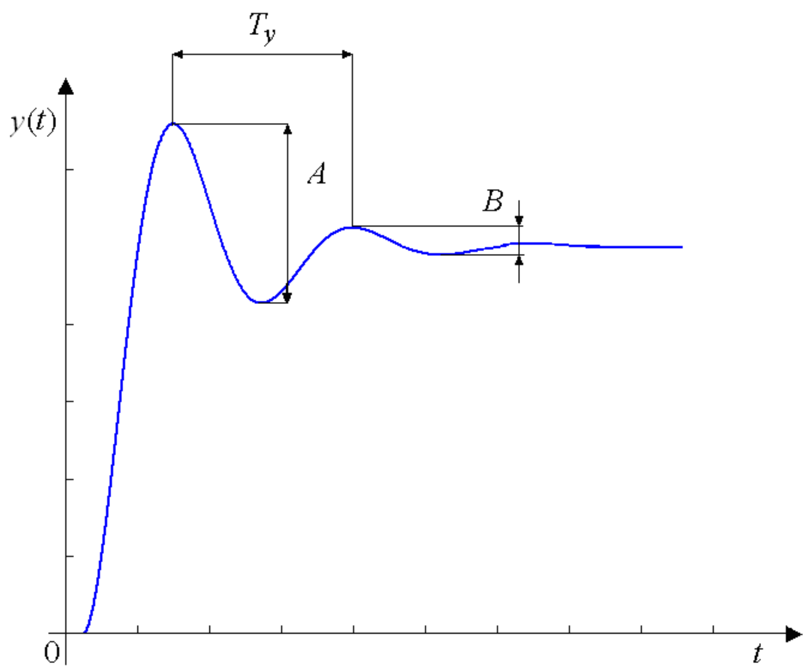
Výše uvedený postup se opakuje tak dlouho, až je obdržen regulační proces s požadovaným tlumením $B/A$ při nastavení, které vyhovuje nerovnosti (4.42).

V případě standardního analogového regulátoru PID je posuzování kvality regulačního procesu a seřízení trochu problematičtější. Při malém vlivu derivační složky lze přibližně použít předchozí postup. Při větším vlivu derivační složky, tj. $T_D/T_I \approx 1/4$ pro dobu kmitu $T_y$ přibližně platí

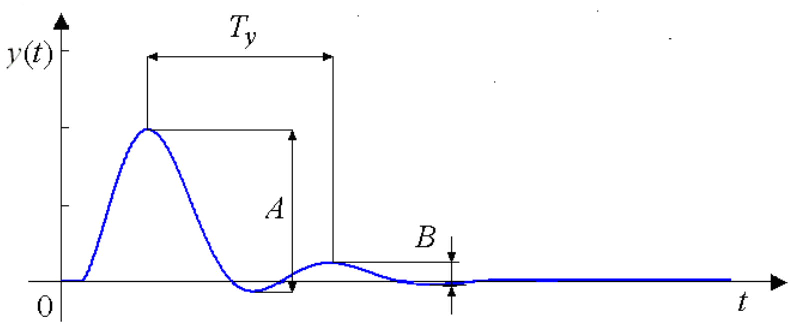
$$2T_I < T_y < 3{,}33T_I\,. \tag{4.44}$$

Omezení vyjádřena nerovnostmi (4.42) a (4.44) je třeba chápat jako měkká, jejich nevelké překročení nemusí vždy znamenat nevhodné seřízení [Wade 1994, 2004].

a)




b)




Obr. 4.17 Regulační proces při skokové změně polohy: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$

Tab. 4.5 Obecný vliv stavitelných parametrů standardního analogového regulátoru PID na rychlost a stabilitu regulačního obvodu

| Parametry regulátoru | Rychlost | Stabilita |
|---|---|---|
| zvýšení $K_P$ | zvýšení | snížení |
| zvýšení $T_I$ | snížení | zvýšení |
| zvýšení $T_D$ | zvýšení | zvýšení |

Při doladʼování regulátoru je třeba brát v úvahu, že vždy jde o určité kompromisní seřízení mezi rychlostí a stabilitou odezvy. Až na některé výjimky obecně platí, že proporcionální a integrační složky regulační obvod destabilizují a derivační složka při vhodné filtraci ho stabilizuje [Šulc, Vítečková 2004; Vítečková, Víteček 2008]. Pro standardní analogový regulátor PID to lze vyjádřit přehlednou tabulkou 4.5 [Åström, Häglund 1995, 2006].

**Příklad 4.1**

Regulovanou soustavu s L-přenosem

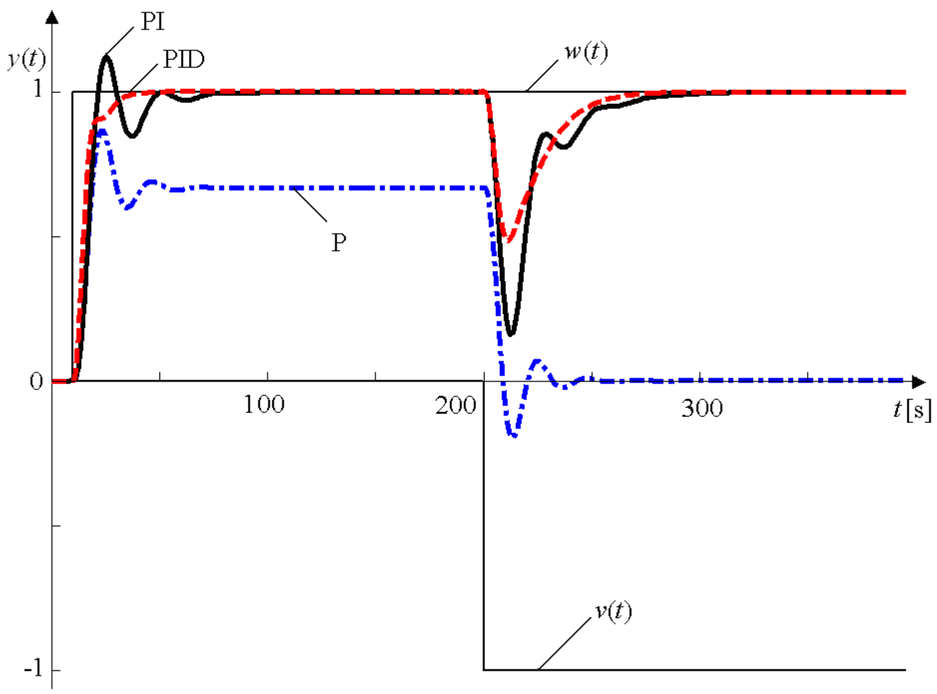
$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

je třeba seřídit experimentálními metodami uvedenými v podkap. 4.2.1 – 4.2.5 (časová konstanta je v sekundách).

**Řešení:**

**a) Experimentální metoda „pokus – omyl“**

Po vyřazení integrační a derivační složky postupným zvyšováním zesílení regulátoru $K_P$ na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ byl získán průběh regulované veličiny $y(t)$ s přibližně požadovanou kvalitou, viz obr. 4.18. Z analogového regulátoru bylo odečteno zesílení $K_{P1} = 1$ a doba kmitu $T_y = 23{,}1$ s.



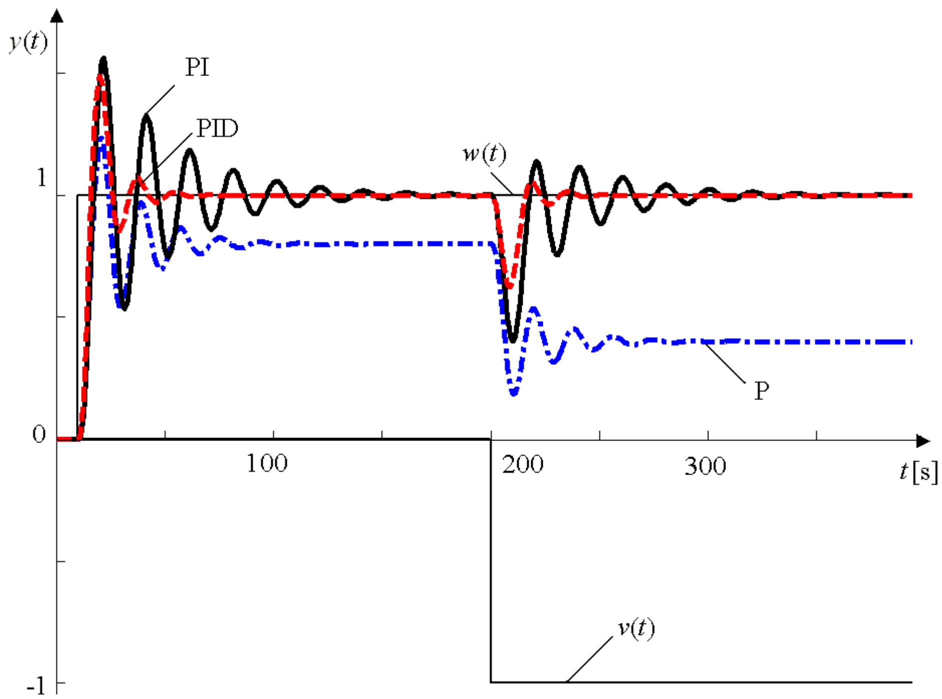

Obr. 4.18 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané postupným seřizováním metodou „pokus – omyl“ – příklad 4.1

V dalším kroku bylo sníženo zesílení regulátoru na hodnotu $K_P = 0{,}9K_{P1} = 0{,}9$ a integrační časová konstanta $T_I$ byla v souladu se vztahem (4.30) nastavena na hodnotu $T_I = 0{,}67T_y = 15{,}5$ s.

Trvalá regulační odchylka byla odstraněna a protože získaný průběh regulované veličiny má přibližně požadovanou kvalitu, v případě použití analogového regulátoru PI lze považovat hodnoty stavitelných parametrů $K_P^* = 0{,}9$ a $T_I^* = 15{,}5\,\text{s}$ za „optimální“. V případě prostředí, kde může být použit standardní analogový regulátor PID, se pro $K_P^* = 1{,}25$; $T_I^* = 15{,}5\,\text{s}$ a $T_D^* = 0{,}25T_I^* = 3{,}9\,\text{s}$ získal požadovaný průběh regulované veličiny $y(t)$, viz obr. 4.18. Na obr. 4.18 jsou rovněž ukázány odezvy regulované veličiny $y(t)$ na poruchovou veličinu $v(t)$ působící na vstupu soustavy.

**b) Experimentální Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů**

Po vyřazení integrační a derivační složky regulátoru postupným zvyšováním jeho zesílení $K_P$ byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ získán periodický průběh na mezi kmitavé stability. Z analogového regulátoru bylo odečteno kritické zesílení $K_{Pk} = 4$ a kritická perioda $T_k = 14{,}5$. Na základě tab. 4.1 byly vypočteny hodnoty stavitelných parametrů:




Obr. 4.19 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů – příklad 4.1

P: $K_P^* = 0{,}5K_{Pk} = 2$;

PI: $K_P^* = 0{,}45K_{Pk} = 1{,}8$; $T_I^* = 0{,}83T_k = 12{,}04$;

PID: $K_P^* = 0{,}6K_{Pk} = 2{,}4$; $T_I^* = 0{,}5T_k = 7{,}25$; $T_D^* = 0{,}125T_k = 1{,}81$.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 4.19.

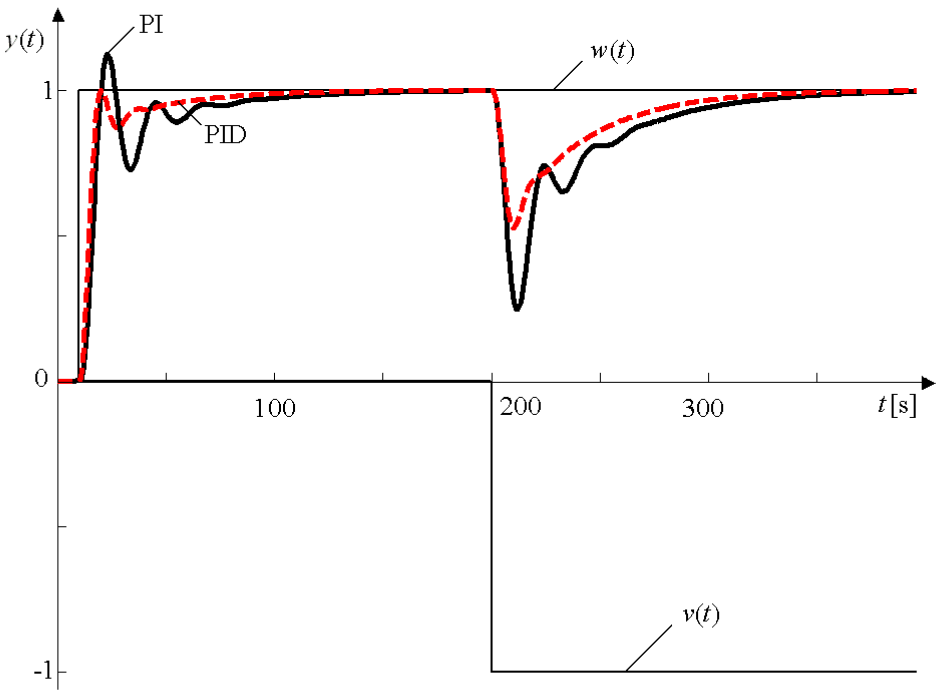
**c) Experimentální Tyreusova-Luybenova metoda kritických parametrů**

Pro hodnoty kritických parametrů $K_{Pk} = 4$ a $T_k = 14{,}5$ získané v předchozím bodě b) na základě tab. 4.2 se dostane:

PI: $K_P^* = 0{,}31K_{Pk} = 1{,}24$; $T_I^* = 2{,}2T_k = 31{,}9$;

PID: $K_P^* = 0{,}45K_{Pk} = 1{,}8$; $T_I^* = 2{,}2T_k = 31{,}9$; $T_D^* = 0{,}16T_k = 2{,}32$.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 4.20.




Obr. 4.20 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením Tyreusovou-Luybenovou metodou kritických parametrů – příklad 4.1

**d) Experimentální metoda čtvrtinového tlumení**

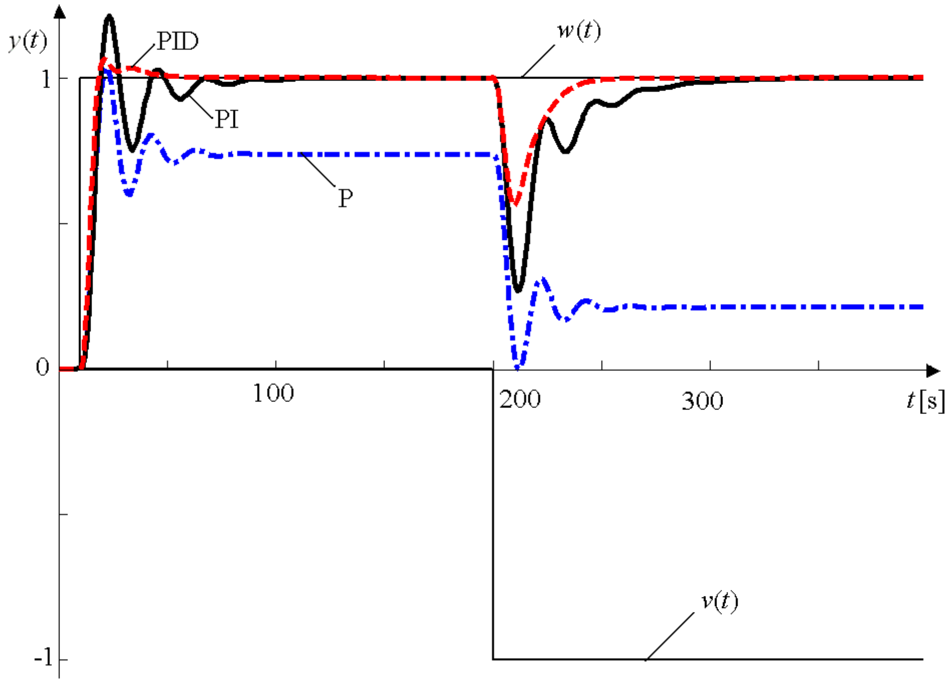
Po vyřazení integrační a derivační složky postupným zvyšováním zesílení regulátoru $K_P$ byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ získán kmitavý průběh regulované veličiny $y(t)$ s poměrem $B/A \approx 1/4$ (obr. 4.15). Z analogového regulátoru bylo odečteno zesílení $K_{P1/4} = 1{,}4$ a perioda $T_{1/4} = 20{,}5$. Na základě tab. 4.4 byly vypočteny hodnoty stavitelných parametrů:

P: $K_P^* = K_{P1/4} = 1{,}4$;

PI: $K_P^* = 0{,}9K_{P1/4} = 1{,}26$; $T_I^* = T_{1/4} = 20{,}5$;

PID: $K_P^* = 1{,}2K_{P1/4} = 1{,}68$; $T_I^* = 0{,}6T_{1/4} = 12{,}3$; $T_D^* = 0{,}15T_{1/4} = 3{,}08$.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 4.21.




Obr. 4.21 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením metodou čtvrtinového tlumení – příklad 4.1

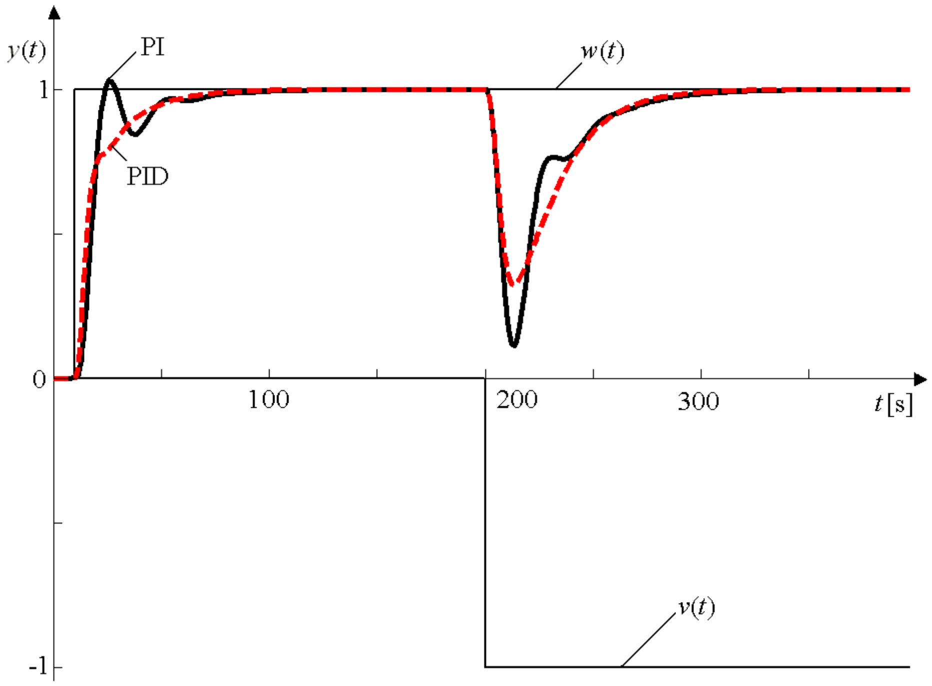
**e) Metoda dobrého zesílení**

Po vyřazení integrační a derivační složky postupným zvyšováním zesílení regulátoru $K_P$ byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ v souladu s obr. 4.13 získán kmitavý průběh regulované veličiny $y(t)$, ze kterého byla určena doba $T_{ou}$ = 11,6 s a z analogového regulátoru bylo odečteno zesílení $K_{PGG}$ = 1. Hodnoty stavitelných parametrů byly určeny na základě vztahů (4.34) – (4.36):

PI: $K_P^* = 0{,}8K_{PGG} = 0{,}8$; $T_I^* = 1{,}5T_{ou} = 17{,}4$;

PID: $K_P^* = 0{,}8K_{PGG} = 0{,}8$; $T_I^* = 1{,}5T_{ou} = 17{,}4$; $T_D^* = 0{,}25T_I^* = 4{,}4$.

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 4.22.




Obr. 4.22 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením metodou dobrého zesílení – příklad 4.1

**f) Metoda překmitu**

Po vyřazení integrační a derivační složky postupným zvyšováním zesílení regulátoru $K_P$ byl pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t) = w_0 = 1$ získán kmitavý průběh regulované veličiny $y(t)$ s relativním překmitem v rozmezí $\kappa = 0{,}1 – 0{,}6$. Z analogového regulátoru bylo určeno zesílení $K_{PO} = 1$ a z průběhu regulované veličiny: $y_m = 0{,}87$; $y(\infty) = 0{,}67$, $y_u = 0{,}6$ a $t_m = 13{,}4$.

Na základě vztahů (4.38) – (4.41) pro $F = 1$ byly vypočteny hodnoty stavitelných parametrů analogového regulátoru PI:

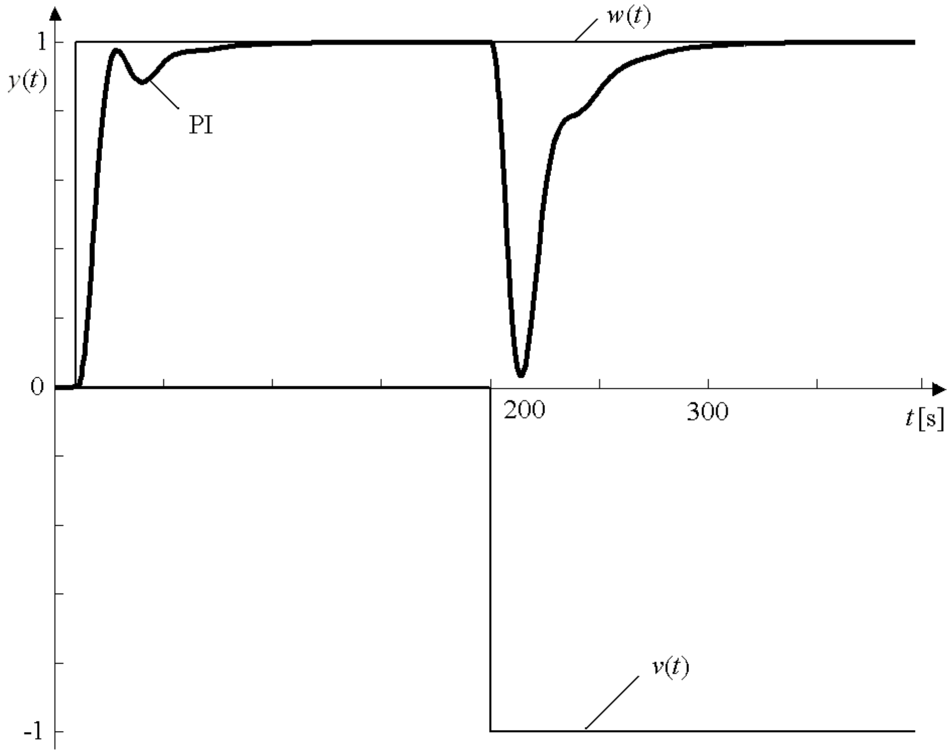
$$\kappa = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)} = 0{,}3; \quad b' = \frac{y(\infty)}{w_0} = 0{,}67;$$

$$A' = 1{,}152\kappa^2 - 1{,}607\kappa + 1 = 0{,}622;$$

$$K_P^* = K_{PO} A' = 0{,}62;$$

$$T_I^* = \min(0{,}86 A' t_m \frac{b'}{1-b'};\ 2{,}44 t_m) = \min(14{,}6;\ 32{,}7) = 14{,}6\,.$$

Získaný průběh regulované veličiny $y(t)$ i pro skokovou změnu polohy poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy je na obr. 4.23.




Obr. 4.23 Průběh regulované veličiny $y(t)$ získaný seřízením metodou překmitu – příklad 4.1

**Závěr k příkladu 4.1**

Přesto, že na základě jedné soustavy nelze objektivně zhodnotit uvedené experimentální metody, je zřejmé, že Zieglerova-Nicholsova metoda kritických parametrů dává kmitavý regulační pochod s velkými překmity – seřízení je příliš agresivní. Obecně nezajišťuje stabilitu, viz příklad 4.2. Tyreusova-Luybenova metoda kritických parametrů je méně agresivní než Zieglerova-Nicholsova metoda. Velkou nevýhodou obou metod je nutnost přivedení regulačního obvodu na kmitavou mez stability, což u většiny reálných regulačních obvodů není přípustné.

Zbývající experimentální metody jsou velmi jednoduché a ve většině případů dávají prakticky přijatelné výsledky.

**Příklad 4.2**

Je třeba seřídit analogový regulátor PI pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)^3}, \; T_1 > T_2 > 0, \; k_1 > 0$$

Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů pro $k_1 = 1$, $T_1 = 4$ s a $T_2 = 1$ s.

**Řešení:**

Protože soustava je dána svým L-přenosem, mohou být kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$ určeny analyticky.

Pro proporcionální regulátor

$$G_R(s) = K_P$$

se dostane L-přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_P k_1 (T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)^3} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}$$

a z něho charakteristický mnohočlen uzavřeného regulačního obvodu

$$N(s) = N_o(s) + M_o(s) = T_1^3 s^3 + 3T_1^2 s^2 + (3T_1 + K_P k_1 T_2)s + K_P k_1 + 1 .$$

Kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$ (přesněji jejich hodnoty) se nejjednodušeji získají z analytické verze Michajlovova kritéria stability [Vítečková, Víteček 2008], tj. pro kmitavou mez stability Michajlovova funkce $N(\mathrm{j}\omega)$ musí procházet počátkem:

$$N(\mathrm{j}\omega) = N(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = N_P(K_P,\omega) + \mathrm{j}N_Q(K_P,\omega),$$

$$N_P(K_P,\omega) = 1 + K_P k_1 - 3T_1^2\omega^2 ,$$

$$N_Q(K_P,\omega) = \omega(3T_1 + K_P k_1 T_2 - T_1^3\omega^2),$$

$$\left.\begin{aligned} N_P(K_{Pk},\omega_k) &= 0 \\ N_Q(K_{Pk},\omega_k) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_{Pk} = \frac{8T_1}{k_1(T_1 - 3T_2)}$$

$$\omega_k = \frac{1}{T_1}\sqrt{\frac{3T_1 - T_2}{T_1 - 3T_2}} \Rightarrow$$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = 2\pi T_1 \sqrt{\frac{T_1 - 3T_2}{3T_1 - T_2}}.$$

**Poznámka:** Soustava z tohoto příkladu je pro $k_1 = 2$, $T_1 = 4$ s a $T_2 = 0$ stejná, jako v příkladě 4.1, a proto pro kritické parametry z příkladu 4.1 platí:

$$K_{Pk} = \frac{8}{k_1} = 4; \;\; T_k = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi T_1 \doteq 14{,}5\,\mathrm{s}.$$

Tytéž hodnoty byly získány experimentálně, viz příklad 4.1.

Pro aktuální soustavu se dostane

$$K_{Pk} = 32; \;\; T_k \doteq 7{,}58\,\mathrm{s}.$$

Pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu kritických parametrů v souladu s tab. 4.1 se obdrží hodnoty stavitelných parametrů

$$K_P^* = 0{,}45K_{Pk} \doteq 14{,}4;\ \ T_I^* = 0{,}83T_k \doteq 6{,}29\,\mathrm{s}.$$

Pro vypočtené hodnoty stavitelných parametrů $K_P^*$ a $T_I^*$ je regulační obvod nestabilní!!!

Že pro dané hodnoty stavitelných parametrů $K_P^*$ a $T_I^*$ je regulační obvod skutečně nestabilní, se dá ukázat snadno. Po jejich dosazení do L-přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(s) = \frac{K_P^* k_1 (T_I^* s + 1)(T_2 s + 1)}{T_I^* s (T_1 s + 1)^3} = \frac{14{,}4(6{,}29s + 1)(s + 1)}{6{,}29s(4s + 1)^3}$$

se z něho po úpravě obdrží charakteristický mnohočlen uzavřeného regulačního obvodu

$$N(s) = 402{,}56s^4 + 301{,}92s^3 + 166{,}056s^2 + 111{,}266s + 14{,}4\,.$$

Pomocí např. Hurwitzova kritéria stability se snadno zjistí, že skutečně regulační obvod s analogovým regulátorem PI seřízeným Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů je nestabilní.

Numericky byly kořeny charakteristického mnohočlenu vypočteny:

$$s_1 = -0{,}1583;\ s_{2,3} = 2{,}5475 \cdot 10^{-2} \pm \mathrm{j}0{,}5924;\ s_4 = -0{,}6426\,.$$

Je vidět, že seřízený regulační obvod má dva komplexně sdružené nestabilní póly $s_{2,3} = 2{,}5475.10^{-2} \pm \mathrm{j}0{,}5924$.

Regulační obvod s danou soustavou a analogovým regulátorem PI byl rovněž seřízen metodou dobrého zesílení a metodou překmitu.

**a) Metoda dobrého zesílení**

Po vyřazení integrační a derivační složky pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ bylo postupně zvyšováno zesílení regulátoru $K_P$ tak dlouho, až se dostal průběh regulované veličiny $y(t)$ s podkmitem. Z průběhu se zjistila doba $T_{ou}$ = 10 s a z analogového regulátoru se odečetlo zesílení $K_{PGG}$ = 4.

Na základě vztahů (4.34) a (4.35) byly následně určeny hodnoty stavitelných parametrů

$$K_P^* = 0{,}8K_{PGG} = 3{,}2;\ \ T_I^* = 1{,}5T_{ou} = 15\,\mathrm{s}.$$

**b) Metoda překmitu**

Podobně jako v předchozím případě po vyřazení integrační a derivační složky pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t) = w_0 = 1$ bylo postupně zvyšováno zesílení regulátoru $K_P$ tak dlouho, až byl získán průběh regulované veličiny $y(t)$ s relativním překmitem $\kappa$ v rozmezí od 0,1 do 0,6. Z průběhu regulované veličiny byly získány údaje: $K_{PO} = 5$; $t_m = 8{,}7$ s; $y_m = 1{,}18$; $y(\infty) = 0{,}83$. Na základě vztahů (4.38) – (4.41) bylo obdrženo ($F = 1$):

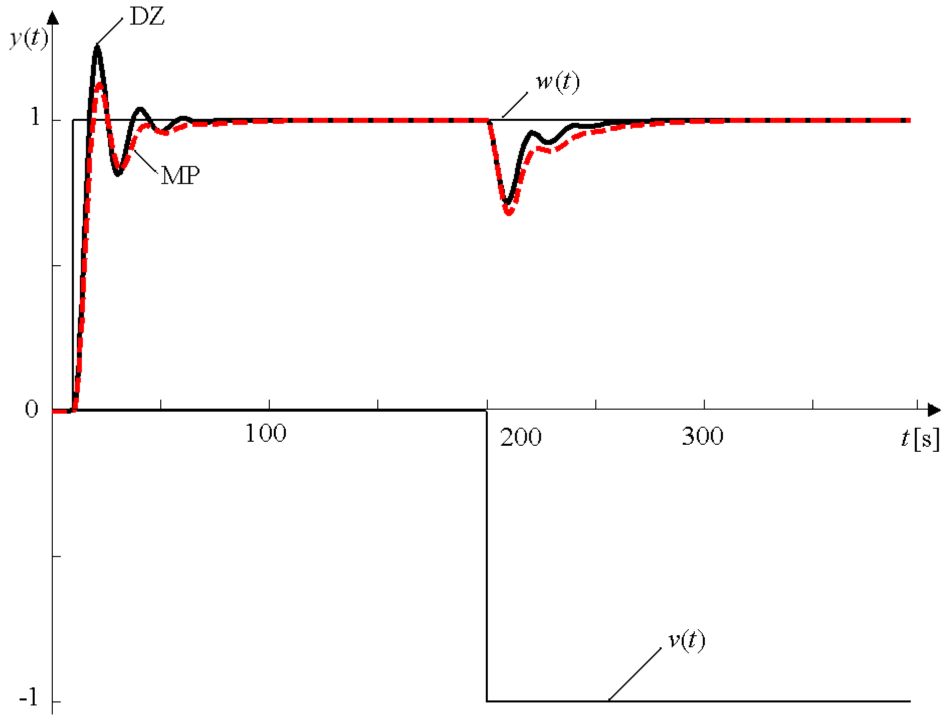
$$\kappa = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)} = 0{,}42; \quad b' = \frac{y(\infty)}{w_0} = 0{,}83;$$

$$A' = 1{,}152\kappa^2 - 1{,}607\kappa + 1 = 0{,}528;$$

$$K_P^* = K_{PO}A' = 2{,}64;$$

$$T_I^* = \min(0{,}86A't_m \frac{b'}{1-b'};\ 2{,}44t_m) = \min(19{,}3;\ 21{,}2) = 19{,}3 \text{ s.}$$

Získané průběhy jsou na obr. 4.24.




Obr. 4.24 Odezvy regulačního obvodu seřízeného metodou dobrého zesílení – DZ a metodou překmitu – MP – příklad 4.2

## 4.3 Metody seřizování vycházející z modelu soustavy

V podkapitole jsou uvedeny vybrané, převážně méně známé metody seřizování regulátorů 1DOF i 2DOF, které předpokládají znalost matematického modelu soustavy. Jde o metody experimentální, analyticko-experimentální a analytické.

### 4.3.1 Zieglerova-Nicholsova metoda přechodové charakteristiky

Zieglerova-Nicholsova metoda přechodové charakteristiky (metoda otevřeného regulačního obvodu) vychází z přechodové charakteristiky proporcionální regulované soustavy, ze které se v souladu s obr. 3.1 určí doba průtahu $T_u$, doba náběhu $T_n$ a koeficient přenosu $k_1$.

Hodnoty stavitelných parametrů pro zvolený typ analogového regulátoru jsou uvedeny v tab. 4.6 [Ziegler, Nichols 1942; Åström, Häglund 1995, 2006].

Podobně jako u Zieglerovy-Nicholsovy metody kritických parametrů i zde se projevil destabilizující vliv integrační složky u analogového regulátoru PI snížením zesílení $K_P^*$ oproti analogovému regulátoru P a stabilizující vliv derivační složky (při vhodné filtraci) u standardního analogového regulátoru PID zvýšením zesílení. Poměr $T_D^*/T_I^* = 1/4$ (porovnej s tab. 4.1).

Tab. 4.6 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro Zieglerovu-Nicholsovu metodu přechodové charakteristiky

| Regulátor | $K_P^*$ | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
|---|---|---|---|
| P | $\dfrac{T_n}{k_1 T_u}$ | – | – |
| PI | $0{,}9\dfrac{T_n}{k_1 T_u}$ | $3{,}33T_u$ | – |
| PID | $1{,}2\dfrac{T_n}{k_1 T_u}$ | $2T_u$ | $0{,}5T_u$ |

L-přenos standardního analogového regulátoru PID seřízeného Zieglerovou-Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky má tvar

$$\begin{aligned} G_R(s) &= K_P^*\left(1+\frac{1}{T_I^* s}+T_D^* s\right) = 1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u}\left(1+\frac{1}{2T_u s}+\frac{T_u}{2}s\right) = \\ &= 0{,}6\frac{T_n}{k_1 T_u^2}\frac{(T_u s+1)^2}{s}\,. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Ze vztahu (4.45) vyplývá, že při použití analogového regulátoru PID$_i$ (sériového s interakcí) $T_I'^* = T_D'^* = T_u$ a $K_P'^* = 0{,}6T_n/(k_1 T_u)$.

Ze srovnání vztahů (4.31) a (4.45) vyplývá, že

$$K_{Pk} = 2\frac{T_n}{k_1 T_u}, \qquad T_k = 4T_u\,. \tag{4.46}$$

Vztahy (4.46) lze pro $T_u < T_n$ použít pro přibližné určení kritických parametrů $K_{Pk}$ a $T_k$.

Značně přesnější určení kritických parametrů $K_{Pk}$ a $T_k$ je možné na základě tab. P3.1 [Vítečková, Víteček 2010a].

Z prvního vztahu (4.46) a tab. 4.6 vyplývá, že obě Zieglerovy-Nicholsovy metody v případě použití regulátoru P mají amplitudovou bezpečnost $m_A = 2$, tzn., že při dvojnásobném zvýšení zesílení regulátoru $K_P$ se regulační obvod dostane na kmitavou mez stability.

Metoda přechodové charakteristiky dává obecně agresivnější seřízení než metoda kritických parametrů [Åström, Häglund 1995, 2006].

**Postup:**

1. Z přechodové charakteristiky nekmitavé proporcionální regulované soustavy se určí doba průtahu $T_u$, doba náběhu $T_n$ a koeficient přenosu $k_1$ (viz podkap. 3.1, obr. 3.1).
2. Z tab. 4.6 se pro zvolený typ analogového regulátoru vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů.

**Příklad 4.3**

Z přechodové charakteristiky nekmitavé proporcionální regulované soustavy s přenosem (časová konstanta je v sekundách)

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

byly získány identifikací parametry: $T_u = 3{,}2$ s, $T_n = 14{,}8$ s a $k_1 = 2$.

Zieglerovou-Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky je třeba seřídit regulační obvod pro analogové regulátory P, PI a PID.

**Řešení:**

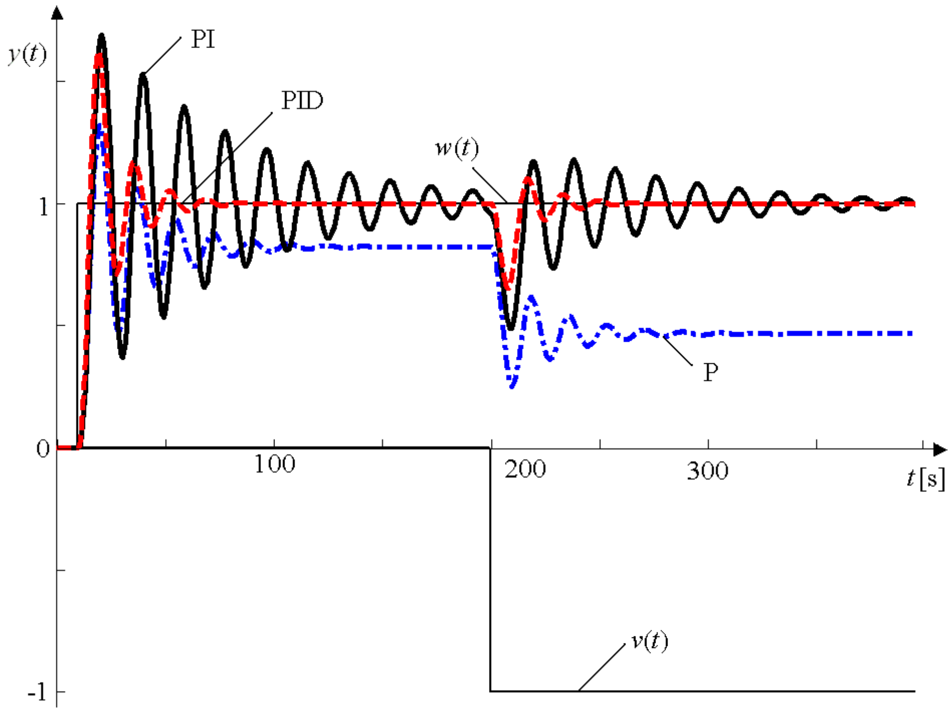
Na základě tab. 4.6 lze psát:

P: $$K_P^* = \frac{T_n}{k_1 T_u} \doteq 2{,}31;$$

PI: $$K_P^* = 0{,}9\frac{T_n}{k_1 T_u} \doteq 2{,}08; \quad T_I^* = 3{,}33 T_u \doteq 10{,}66\,\text{s};$$

PID: $$K_P^* = 1{,}2\frac{T_n}{k_1 T_u} \doteq 2{,}78; \quad T_I^* = 2T_u = 6{,}4\,\text{s}; \quad T_D^* = 0{,}5T_u = 1{,}6\,\text{s}.$$

Odezvy regulačního obvodu na skokové změny polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy jsou na obr. 4.25. Je zřejmé, že překmit i kmitavost jsou dosti velké a navíc v případě použití regulátoru P zůstala v regulačním obvodu poměrně vysoká trvalá regulační odchylka.




Obr. 4.25 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ získané seřízením Zieglerovou-Nicholsovou metodou přechodové charakteristiky – příklad 4.3

### 4.3.2 „Univerzální“ experimentální metoda

Z mnoha existujících experimentálních metod je níže uvedena velmi jednoduchá, a přesto ve většině praktických případů účinná metoda, zde nazývaná „univerzální“ experimentální metodou. Byla rozpracovaná v bývalém SSSR [Kopelovič 1964; Kopiełowicz 1964; Findeisen 1969; Prusenko 1963; Pułaczewski 1966]. Je vhodná pro soustavy s L-přenosy (tab. 4.7 a 4.8)

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s} \tag{4.47}$$

a

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s} e^{-T_d s} . \tag{4.48}$$

Je dost podobná Chienově-Hronesově-Reswickově metodě [Åström, Häglund 1995, 2006; Pułaczewski 1966].

Umožňuje seřídit konvenční analogové regulátory jak z hlediska žádané veličiny $w(t)$, tak i poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy, přičemž kritériem kvality regulace může být nejrychlejší odezva bez překmitu, nejrychlejší odezva s relativním překmitem $\kappa = 0{,}2$ (20 %) a minimální kvadratická regulační plocha. Za nekmitavý regulační pochod se považuje takový, u kterého je maximální relativní překmit od 0,02 (2 %) do 0,05 (5 %).

Tab. 4.7 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro „univerzální“ experimentální metodu

| $\frac{k_1}{T_1 s+1} e^{-T_d s}$ | | Regulační pochod | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Nejrychlejší odezva bez překmitu | | Nejrychlejší odezva s překmitem 20 % | | Minimální kvadratická regulační plocha ISE |
| Regulátor typ | | Seřízení z hlediska | | | | |
| | | žádané veličiny *w* | poruchové veličiny *v* | žádané veličiny *w* | poruchové veličiny *v* | poruchové veličiny *v* |
| P | $K_P^*$ | $0{,}3\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}3\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | – |
| PI | $K_P^*$ | $0{,}35\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $\frac{T_1}{k_1 T_d}$ |
| | $T_I^*$ | $1{,}17T_1$ | $0{,}8T_d + 0{,}5T_1$ | $T_1$ | $T_d + 0{,}3T_1$ | $T_d + 0{,}35T_1$ |
| PID | $K_P^*$ | $0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}95\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $0{,}95\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $1{,}2\frac{T_1}{k_1 T_d}$ | $1{,}4\frac{T_1}{k_1 T_d}$ |
| | $T_I^*$ | $T_1$ | $2{,}4T_d$ | $1{,}36T_1$ | $2T_d$ | $1{,}3T_d$ |
| | $T_D^*$ | $0{,}5T_d$ | $0{,}4T_d$ | $0{,}64T_d$ | $0{,}4T_d$ | $0{,}5T_d$ |

Tab. 4.8 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro „univerzální“ experimentální metodu

| $\frac{k_1}{s} e^{-T_d s}$ | | Regulační pochod | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Nejrychlejší odezva bez překmitu | | Nejrychlejší odezva s překmitem 20 % | | Minimální kvadratická regulační plocha ISE |
| Regulátor typ | | Seřízení z hlediska | | | | |
| | | žádané veličiny *w* | poruchové veličiny *v* | žádané veličiny *w* | poruchové veličiny *v* | poruchové veličiny *v* |
| P | $K_P^*$ | $0{,}37\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}37\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$ | – |
| PI | $K_P^*$ | $0{,}37\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}46\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}7\frac{1}{k_1 T_d}$ | $\frac{1}{k_1 T_d}$ |
| | $T_I^*$ | $\infty$ | $5{,}75T_d$ | $\infty$ | $3T_d$ | $4{,}3T_d$ |
| PID | $K_P^*$ | $0{,}65\frac{1}{k_1 T_d}$ | $0{,}65\frac{1}{k_1 T_d}$ | $1{,}1\frac{1}{k_1 T_d}$ | $1{,}1\frac{1}{k_1 T_d}$ | $1{,}36\frac{1}{k_1 T_d}$ |
| | $T_I^*$ | $\infty$ | $5T_d$ | $\infty$ | $2T_d$ | $1{,}6T_d$ |
| | $T_D^*$ | $0{,}4T_d$ | $0{,}23T_d$ | $0{,}53T_d$ | $0{,}37T_d$ | $0{,}5T_d$ |

**Postup:**

1. L-přenos regulované soustavy se upraví na tvar (4.47) nebo (4.48) postupy uvedenými v podkap. 3.1 a 3.2.
2. Podle požadavků na kvalitu regulace se zvolí analogový regulátor a druh regulačního pochodu (bez překmitu, s relativním překmitem $\kappa = 0{,}2$, s minimální hodnotou integrálního kritéria ISE) a pro daný účel [seřízení z hlediska žádané veličiny $w(t)$, nebo poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy] se na základě tab. 4.7 pro přenos (4.47) a tab. 4.8 pro přenos (4.48) vypočtou jeho stavitelné parametry.

**Příklad 4.4**

Pro regulovanou soustavu s L-přenosem (viz příklad 4.1 a 4.3)

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3}$$

je třeba „univerzální“ experimentální metodou seřídit analogový regulátor PI (časová konstanta je v sekundách).

**Řešení:**

Přenos regulované soustavy $G_S(s)$ nemá požadovaný tvar (4.47), a proto v souladu se schématem (3.10) a tab. 3.1 lze psát ($i = 3$, $k_1 = 2$, $T_3 = 4$ s, $T_{d3} = 0$ s)

$$\frac{T_1}{T_3} = 1{,}980 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 1{,}98 \cdot 4 = 7{,}92\,\text{s};$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d3}}{T_3} = 1{,}232 \quad \Rightarrow \quad T_{d1} = 1{,}232 \cdot 4 + 0 \doteq 4{,}93\,\text{s};$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(4s+1)^3} \approx \frac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_{d1}s} = \frac{2}{7{,}92s+1}\mathrm{e}^{-4{,}93s}.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska žádané veličiny $w(t)$ (tab. 4.7)

a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}35\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}28, \qquad T_I^* = 1{,}17T_1 \doteq 9{,}27\,\text{s};$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

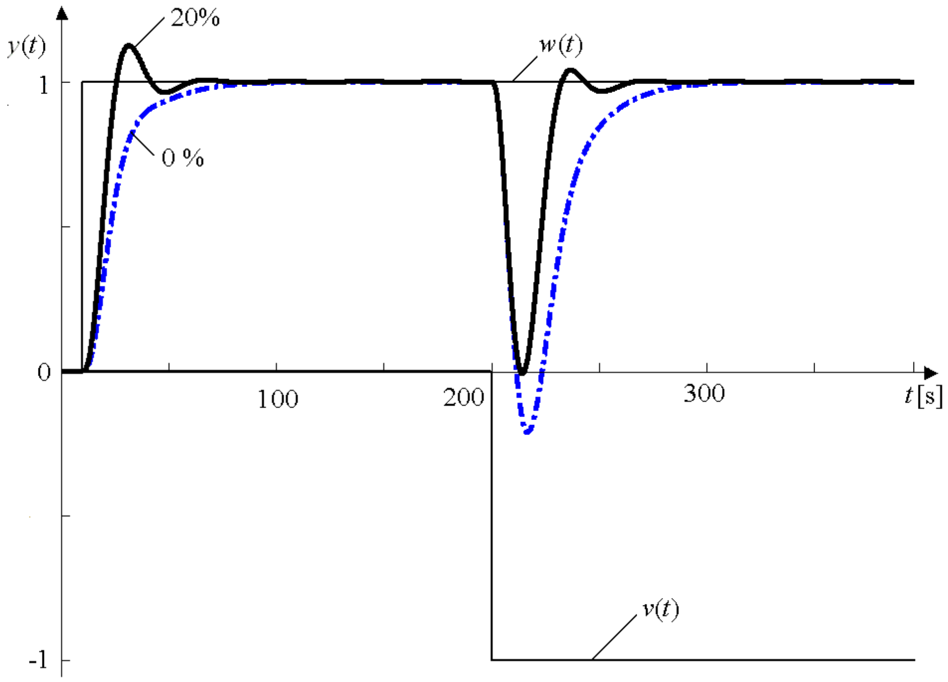
$$K_P^* = 0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}48, \qquad T_I^* = T_1 = 7{,}92\,\text{s}.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy (tab. 4.7)

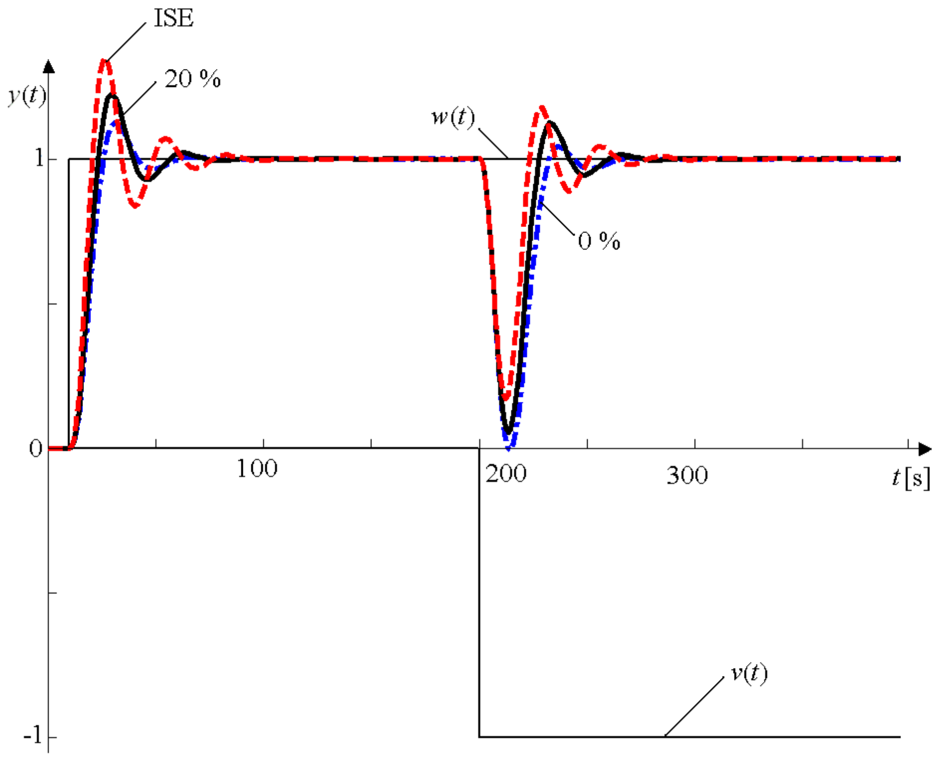
a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}6\frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}48\,, \qquad T_I^* = 0{,}8T_{d1} + 0{,}5T_1 \doteq 7{,}90\,\mathrm{s};$$

a)




b)




Obr. 4.26 Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným „univerzální“ experimentální metodou z hlediska: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy – příklad 4.4

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$K_P^* = 0{,}7 \frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}56, \qquad T_I^* = T_{d1} + 0{,}3T_1 \doteq 7{,}31\,\text{s};$$

c) min ISE

$$K_P^* = \frac{T_1}{k_1 T_{d1}} \doteq 0{,}80, \qquad T_I^* = T_{d1} + 0{,}35T_1 \doteq 7{,}70\,\text{s}.$$

Na obr. 4.26a jsou ukázány odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným z hlediska žádané veličiny $w(t)$ a na obr. 4.26b z hlediska poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy.

Z obou obrázků je zřejmé, že uvedená metoda seřizování dává přijatelné výsledky i při velmi hrubé aproximaci přenosu regulované soustavy.

**Příklad 4.5**

Je třeba seřídit analogový regulátor PI „univerzální" experimentální metodou pro integrační soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{0{,}05}{s(s+1)} \mathrm{e}^{-4s}.$$

Časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách.

**Řešení:**

L-přenos soustavy musí být upraven na tvar (4.48). V souladu s obr. 3.3 lze pro $T_1 = 1$ s a $T_{d1} = 4$ s psát:

$$T_d = T_{d1} + T_1 = 5\ \text{s};$$

$$G_S(s) = \frac{0{,}05}{s(s+1)} \mathrm{e}^{-4s} \approx \frac{0{,}05}{s} \mathrm{e}^{-5s}.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska žádané veličiny $w(t)$, viz tab. 4.8.

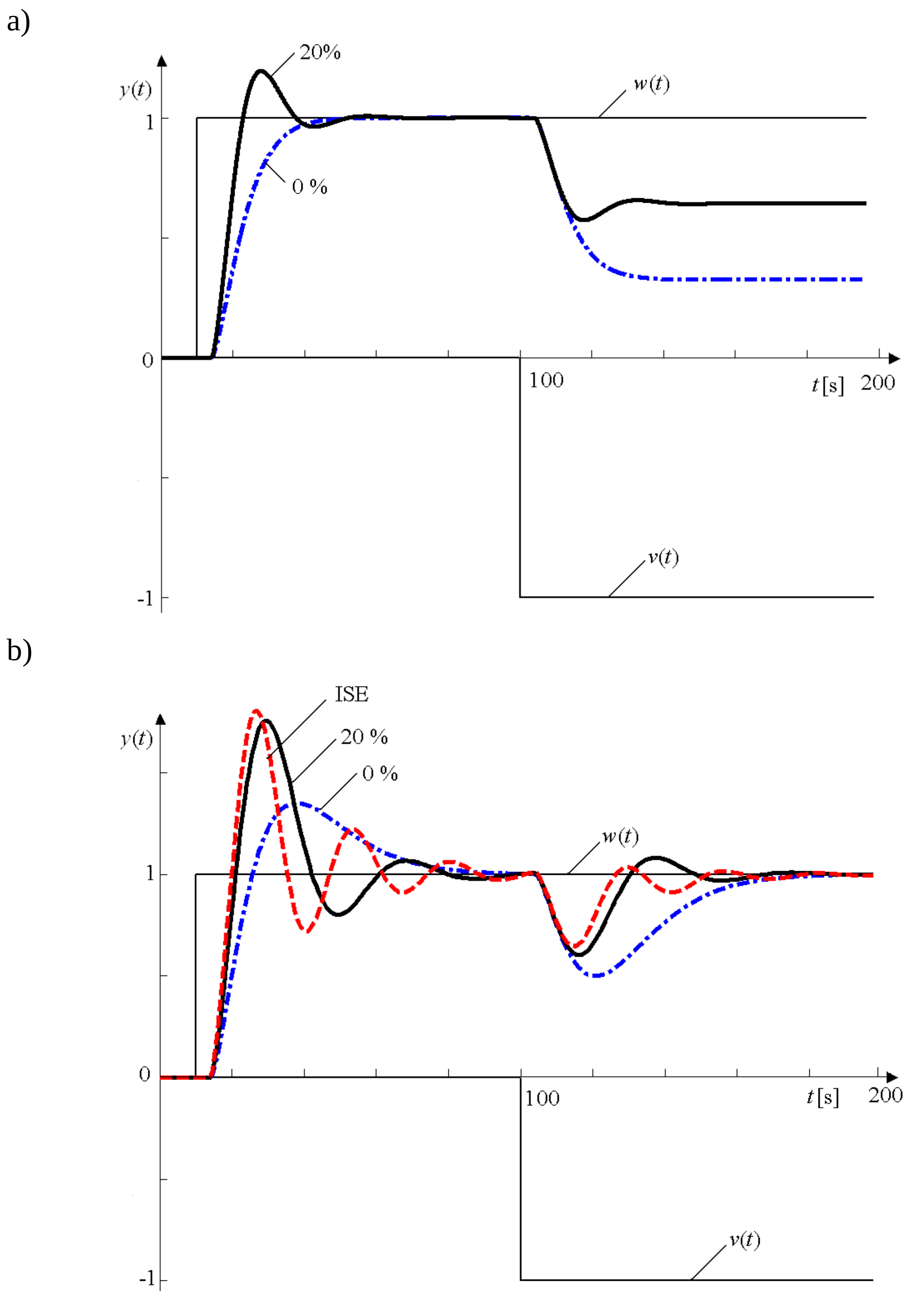
a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}37 \frac{1}{k_1 T_d} \doteq 1{,}48; \qquad T_I^* = \infty;$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$K_P^* = 0{,}7 \frac{1}{k_1 T_d} = 2{,}8; \qquad T_I^* = \infty.$$

Seřízení analogového regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy, viz tab. 4.8.




Obr. 4.27 Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným „univerzální“ experimentální metodou z hlediska: a) žádané veličiny $w(t)$, b) poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy – příklad 4.5

a) bez překmitu (0 %)

$$K_P^* = 0{,}46\frac{1}{k_1 T_d} \doteq 1{,}84; \qquad T_I^* = 5{,}75T_d = 28{,}75\,\mathrm{s};$$

b) s překmitem 0,2 (20 %)

$$K_P^* = 0{,}7\frac{1}{k_1 T_d} = 2{,}8; \qquad T_I^* = 3T_d = 15\,\mathrm{s};$$

c) min ISE

$$K_P^* = \frac{1}{k_1 T_d} = 4; \qquad T_I^* = 4{,}3T_d = 21{,}5\,\mathrm{s}.$$

Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI seřízeným „univerzální“ experimentální metodou jsou na obr. 4.27. Z obr. 4.27a je zřejmé, že v odezvě na poruchovou veličinu $v(t)$ vzniknou nepřípustně velké trvalé regulační odchylky. Je to způsobeno vyřazením integrační složky ($T_I^* = \infty$) u analogového regulátoru PI, který se stane vlastně regulátorem P. Při seřízení analogového regulátoru PI z hlediska poruchové veličiny $v(t)$, jsou odezvy na poruchu přijatelné. Naproti tomu odezvy na žádanou veličinu $w(t)$ mají nepřípustně velké překmity, které nelze žádným seřízením konvenčních analogových (i číslicových) regulátorů obsahujících integrační složku odstranit. Podrobněji viz příloha P4. Vhodným řešením je použití regulátorů 2DOF.

### 4.3.3 Metoda SIMC

Mezi jednoduché, ale účinné metody seřizování analogových regulátorů patří metoda SIMC [Skogestad 2001; 2003; 2004; Skogestad, Postlethwaite 2005]. Vychází z regulace s vnitřním modelem – IMC (**I**nternal **M**odel **C**ontrol), a proto její autor navrhuje zkratku SIMC interpretovat jako „SIMple Control“ nebo „Skogestad IMC“. I když metoda SIMC vychází z regulace s interním modelem, pro návrh analogového regulátoru používá vztah pro přímou syntézu [viz příloha P5, vztah (P5.3) a obr. P5.1]

$$G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)}\frac{G_{wy}(s)}{1 - G_{wy}(s)}, \tag{4.49}$$

kde

$$G_S(s) = G_P(s)\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.50}$$

je L-přenos soustavy a

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.51}$$

je požadovaný L-přenos řízení a $T_w$ je časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu.

Souvislost mezi metodami přímé syntézy a vnitřního modelu je podrobně vysvětlena v příloze P5.

Po dosazení (4.50) a (4.51) do (4.49) se dostane L-přenos navrhovaného analogového regulátoru

$$G_R(s)=\frac{1}{G_P(s)}\frac{1}{T_w s+1-\mathrm{e}^{-T_d s}}\,. \tag{4.52}$$

Použitím aproximace

$$\mathrm{e}^{-T_d s}\approx 1-T_d s \tag{4.53}$$

se obdrží

$$G_R(s)=\frac{1}{G_P(s)}\frac{1}{(T_w+T_d)s}\,. \tag{4.54}$$

Postup návrhu regulátoru bude ukázán pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s)=\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}\;,\quad T_1\geq T_2\,. \tag{4.55}$$

Je zřejmé, že

$$G_P(s)=\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\,,$$

a proto po dosazení do (4.54) se získá L-přenos

$$G_R(s)=\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{k_1(T_w+T_d)s}=K'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)\left(T'_D s+1\right), \tag{4.56}$$

ze kterého vyplývá, že jde o analogový regulátor PID se sériovou strukturou neboli interakcí, tj. $\mathrm{PID_i}$ [viz vztah (2.3)], kde

$$K'_P=\frac{T_1}{k_1(T_w+T_d)},\quad T'_I=T_1,\quad T'_D=T_2\,. \tag{4.57a}$$

Pro simulaci Skogestad používal sériovou strukturu regulátoru ve tvaru

$$U(s)=K'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)\left[W(s)-\frac{T'_D s}{0{,}1T'_D s+1}Y(s)\right]. \tag{4.57b}$$

Volbou časové konstanty $T_w$ lze získat různě rychlé odezvy, ale současně i odpovídající požadavky na akční veličinu.

Je zřejmé, že čím agresivnější bude seřízení, tím rychlejší bude odezva, ale tím současně budou větší nároky na akční veličinu.

Někdy se časová konstanta $T_w$ označuje písmenem $\lambda$ a pak se hovoří o $\lambda$-seřízení.

Seřízení podle vztahů (4.57) dává velmi kvalitní a rychlou odezvu na změnu žádané veličiny $w(t)$, ale v případě

$$T_1 >> T_d \tag{4.58}$$

velmi pomalou odezvu na změnu poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy. Z tohoto důvodu Skogestad algoritmus (5.57) modifikuje, a to volbou integrační časové konstanty $T_I$ podle vztahu

$$T_I' = \min\left[T_1,\ 4(T_w + T_d)\right]. \tag{4.59}$$

V [Haugen 2010b] se doporučuje ve vztahu (4.59) místo hodnoty 4 používat hodnotu 2. Dosáhne se tím zlepšení odezvy na poruchovou veličinu $v(t)$, ale zhorší se odezva na žádanou veličinu.

Tab. 4.9 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro metodu SIMC s ladicím parametrem $T_w$

| Regulovaná soustava | | Regulátor | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Typ | $K_P^*\,(K_P'^*)$ | $T_I^*\,(T_I'^*)$ | $T_D^*\,(T_D'^*)$ |
| 1 | $k_1\,\mathrm{e}^{-T_d s}$ | I | – | $k_1(T_w + T_d)$ | – |
| 2 | $\dfrac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PI | $\dfrac{T_1}{k_1(T_w + T_d)}$ | $\min\left[T_1,\ 4(T_w + T_d)\right]$ | – |
| 3 | $\dfrac{k_1\,\mathrm{e}^{-T_d s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$, $T_1 \geq T_2$ | PID$_\mathrm{i}$ | $\dfrac{T_1}{k_1(T_w + T_d)}$ | $\min\left[T_1,\ 4(T_w + T_d)\right]$ | $T_2$ |
| 4* | | PID | $\dfrac{T_1 + T_2}{k_1(T_w + T_d)}$ | $T_2 + T_1$ | $\dfrac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ |
| 5* | | | $\dfrac{T_1[T_2 + 4(T_w + T_d)]}{4k_1(T_w + T_d)^2}$ | $T_2 + 4(T_w + T_d)$ | $\dfrac{4T_2(T_w + T_d)}{T_2 + 4(T_w + T_d)}$ |
| 6 | $\dfrac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PI | $\dfrac{1}{k_1(T_w + T_d)}$ | $4(T_w + T_d)$ | – |
| 7 | $\dfrac{k_1}{s(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PID$_\mathrm{i}$ | $\dfrac{1}{k_1(T_w + T_d)}$ | $4(T_w + T_d)$ | $T_2$ |
| 8 | | PID | $\dfrac{T_2 + 4(T_w + T_d)}{4k_1(T_w + T_d)^2}$ | $T_2 + 4(T_w + T_d)$ | $\dfrac{4T_2(T_w + T_d)}{T_2 + 4(T_w + T_d)}$ |
| 9 | $\dfrac{k_1}{s^2}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PID$_\mathrm{i}$ | $\dfrac{1}{4k_1(T_w + T_d)^2}$ | $4(T_w + T_d)$ | $4(T_w + T_d)$ |
| 10 | | PID | $\dfrac{1}{2k_1(T_w + T_d)^2}$ | $8(T_w + T_d)$ | $2(T_w + T_d)$ |

*Řádek 4 platí pro $T_1 \leq 4(T_w + T_d)$, řádek 5 pro $T_1 > 4(T_w + T_d)$. Stavitelné parametry $K_P'^*$, $T_I'^*$ a $T_D'^*$ platí pro analogový regulátor s interakcí PID$_\mathrm{i}$ [viz (4.56) a (2.3)].

Po uvažování (4.59) se obdrží vztahy pro hodnoty stavitelných parametrů pro metodu SIMC, viz řádek 3 v tab. 4.9. Výsledné hodnoty stavitelných parametrů regulátorů jsou označeny hvězdičkou. Odpovídající vztahy pro hodnoty stavitelných parametrů standardního analogového regulátoru PID bez interakce s přenosem

$$G_R(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

se získají přepočtem, viz řádky 4 a 5 v tab. 4.9 [viz též (2.6)].

Je zřejmé, že obdobným způsobem se pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.60}$$

a požadovaný přenos řízení (4.51) obdrží řádek 2 v tab. 4.9.

V případě, že platí (4.58), lze přenos (4.60), resp. (4.55) pro pracovní kmitočty $\omega >> \dfrac{1}{T_1}$ nahradit přenosy s integračním charakterem, tj.

$$\frac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{s + \dfrac{1}{T_1}}\mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{4.61}$$

resp.

$$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s} = \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{\left(s + \dfrac{1}{T_1}\right)(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{s(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{4.62}$$

Protože se předpokládá splnění (4.58), tj. $T_1 >> T_d \Rightarrow T_1 > 4(T_w + T_d) \Rightarrow T_I^* = 4(T_w + T_d)$, a proto uvažováním vztahu (4.61), resp. (4.62) ve vztazích v řádku 6, resp. 7 se získají vztahy odpovídající řádku 2, resp. 3 v tab. 4.9. Je tedy zřejmé, že jejich seřízení je stejné [Skogestad 2001; Skogestad 2003; Skogestad 2004].

Řádek 8 v tab. 4.9 se obdrží z řádku 7 přepočtem pomocí vztahů (2.6) pro standardní analogový regulátor PID.

Pro integrační soustavu druhého řádu s dopravním zpožděním

$$\frac{k_1}{s^2}\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.63}$$

je postup návrhu analogového regulátoru PIDi následující. Použití analogového regulátoru PI pro integrační soustavu prvního řádu s dopravním zpožděním v řádku 6 v tab. 4.9 je ekvivalentní použití analogového regulátoru PD pro soustavu (4.63) při stavitelných parametrech

$$K_P^* = \frac{1}{4k_1(T_w + T_d)^2}, \quad T_D^* = 4(T_w + T_d)\,. \tag{4.64}$$

Tab. 4.10 Hodnoty stavitelných parametrů analogových regulátorů pro metodu SIMC

| Regulovaná soustava | | Regulátor | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Typ | $K_P^* (K_P'^*)$ | $T_I^* (T_I'^*)$ | $T_D^* (T_D'^*)$ |
| 1 | $k_1 \,\mathrm{e}^{-T_d s}$ | I | – | $2k_1T_d$ | – |
| 2 | $\dfrac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PI | $\dfrac{T_1}{2k_1T_d}$ | $\min[T_1, 8T_d]$ | – |
| 3 | $\dfrac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$, $T_1 \geq T_2$ | PIDi | $\dfrac{T_1}{2k_1T_d}$ | $\min[T_1, 8T_d]$ | $T_2$ |
| 4* | | PID | $\dfrac{T_1 + T_2}{2k_1T_d}$ | $T_1 + T_2$ | $\dfrac{T_1T_2}{T_1 + T_2}$ |
| 5* | | | $\dfrac{T_1(T_2 + 8T_d)}{16k_1T_d^2}$ | $T_2 + 8T_d$ | $\dfrac{8T_2T_d}{T_2 + 8T_d}$ |
| 6 | $\dfrac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PI | $\dfrac{1}{2k_1T_d}$ | $8T_d$ | – |
| 7 | $\dfrac{k_1}{s(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PIDi | $\dfrac{1}{2k_1T_d}$ | $8T_d$ | $T_2$ |
| 8 | | PID | $\dfrac{T_2 + 8T_d}{16k_1T_d^2}$ | $T_2 + 8T_d$ | $\dfrac{8T_2T_d}{T_2 + 8T_d}$ |
| 9 | $\dfrac{k_1}{s^2}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PIDi | $\dfrac{1}{16k_1T_d^2}$ | $8T_d$ | $8T_d$ |
| 10 | | PID | $\dfrac{1}{8k_1T_d^2}$ | $16T_d$ | $4T_d$ |

*Řádek 4 platí pro $T_1 \leq 8T_d$, řádek 5 pro $T_1 > 8T_d$. Stavitelné parametry $K_P'^*$, $T_I'^*$ a $T_D'^*$ platí pro analogový regulátor s interakcí PIDi [viz (4.56) a (2.3)].

Z důvodu vystupování trvalé regulační odchylky pro skokovou změnu polohy poruchy $v(t)$ působící na vstupu soustavy Skogestad navrhuje použití integrační složky se stejnou integrační časovou konstantou, tj. stavitelné parametry analogového regulátoru PID$_i$ (řádek 9 v tab. 4.9) jsou:

$$K_P'^{*} = \frac{1}{4k_1(T_w + T_d)^2}, \quad T_I'^{*} = T_D'^{*} = 4(T_w + T_d). \tag{4.65}$$

Řádek 10 v tab. 4.9 se získá přepočtem pomocí vztahů (2.6).

Další modifikace Skogestada spočívá v tom, že doporučuje volit

$$T_w = T_d. \tag{4.66}$$

Volby (4.59) a (4.66) zaručují poměrně rychlou odezvu na poruchovou veličinu $v(t)$ působící na vstupu regulované soustavy a současně zaručují dobrou robustnost seřízení [Skogestad 2001; Skogestad 2003; Skogestad 2004], viz tab. 4.10.

Případy v řádcích 1, 2, 3 (pro $T_1 \leq 8T_d$) a 4 v tab. 4.10 jsou shodné s metodou požadovaného modelu pro relativní překmit $\kappa \approx 0{,}05$ (5 %), viz podkap. 4.3.4.

Pro $T_1 \leq 4(T_w + T_d)$, resp. $T_1 \leq 8T_d$ metoda SIMC je metoda kompenzační, protože čitatel L-přenosu analogového regulátoru kompenzuje odpovídající výraz ve jmenovateli L-přenosu soustavy.

Základní ukazatelé kvality jsou pro metodu SIMC pro tab. 4.10, tj. pro $T_w = T_d$, uvedeny v tab. 4.11 [Skogestad 2003, 2004].

Tab. 4.11 Základní ukazatelé kvality pro regulační obvod seřízený metodou SIMC podle tab. 4.10

| Ukazatele kvality | Řádky v tab. 4.10 | |
|---|---|---|
| | 1, 2, 3 (pro $T_1 \leq 8T_d$) a 4 | 6, 7 |
| $M_S$ | 1,59 | 1,70 |
| $m_A$ | 3,14 | 2,96 |
| $m_L$ [dB] | 9,94 | 9,43 |
| $\gamma$ [deg] | 61,4 | 46,9 |
| $\gamma$ [rad] | 1,07 | 0,82 |
| $A_{wy}(\omega_R)$ | 1,00 | 1,30 |
| $\omega_{-\pi} T_d$ | 1,57 | 1,49 |
| $\omega_ř T_d$ | 0,50 | 0,51 |
| $\Delta T_d / T_d$ | 2,14 | 1,59 |

Pro řádky 2, 3 (pro $T_1 > 8T_d$) a 5 v tab. 4.10 hodnoty ukazatelů kvality leží mezi hodnotami v obou sloupcích, přičemž pravý sloupec je mezním případem.

V posledním řádku tab. 4.11 je uvedena relativní změna dopravního zpoždění, při které dojde k nestabilitě regulačního obvodu. Určí se ze vztahu

$$\frac{\Delta T_d}{T_d} = \frac{\gamma}{\omega_ř T_d}. \tag{4.67}$$

Hodnoty ukazatelů kvality v tab. 4.11 jsou v doporučených mezích [viz vztahy (4.9), (4.17), (4.18) a (4.24)] a ukazují na dobrou robustnost regulačních obvodů seřízených metodou SIMC podle tab. 4.10.

Poslední dva řádky v tab. 4.10 se týkají soustavy (4.63), pro kterou seřízení regulačního obvodu s konvenčním regulátorem představuje velmi obtížný problém, protože v tomto případě typ regulačního obvodu je $q = 3$.

**Postup:**

1. L-přenos soustavy se libovolnou metodou z podkap. 3.1 a 3.2 upraví na vhodný tvar z tab. 4.10, který současně určuje doporučený analogový regulátor.
2. Pro doporučený regulátor se podle tab. 4.10 určí hodnoty jeho stavitelných parametrů.

**Příklad 4.6**

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} e^{-3s}$$

je třeba seřídit analogové regulátory PI a PID metodou SIMC pro $T_w = T_d$ (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

**Řešení:**

V souladu s "pravidlem poloviny" lze psát ($T_{10} = 6$, $T_{20} = 4$, $T_{30} = 2$, $T_{d0} = 3$, $k_1 = 1$):

a) Náhradní přenos (3.2) [viz (3.27)]:

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2} = 8, \quad T_d = T_{d0} + \frac{T_{20}}{2} + T_{30} = 7;$$

$$G_S(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} e^{-3s} \approx \frac{1}{8s+1} e^{-7s}.$$

Protože $T_1 < 8T_d$, na základě řádku 2 v tab. 4.10 se dostane

$$K_P^* = 0{,}57; \quad T_I^* = 8.$$

b) Náhradní přenos (3.8) [viz (3.28)]:

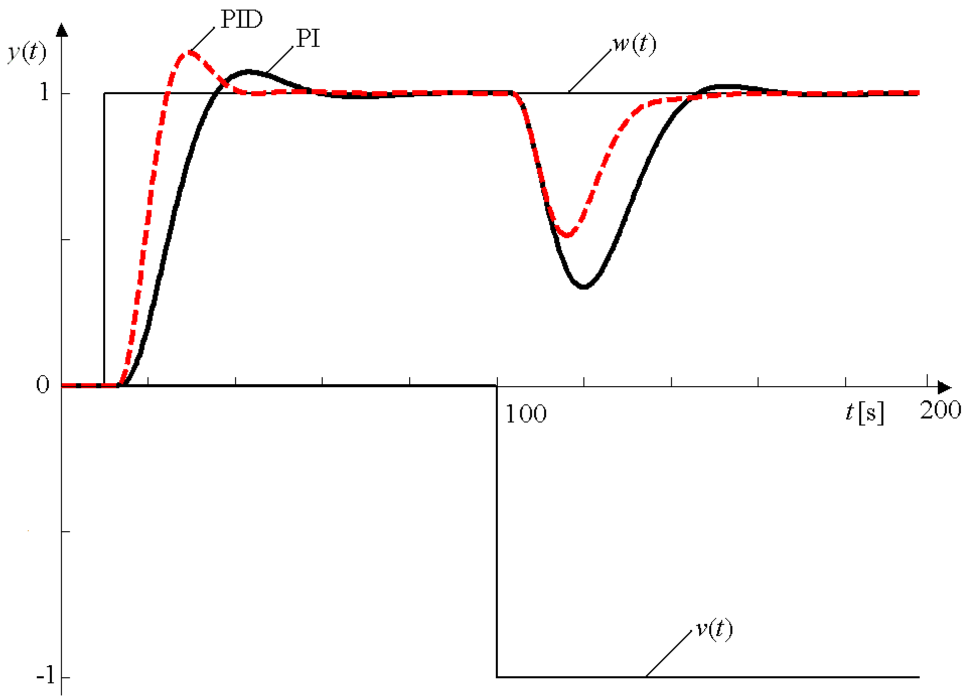
$$T_1 = T_{10} = 6, \quad T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 5, \quad T_d = T_{d0} + \frac{T_{30}}{2} = 4,$$

$$G_S(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} e^{-3s} \approx \frac{1}{(6s+1)(5s+1)} e^{-4s}.$$

Protože $T_1 < 8T_d$, na základě řádku 4 v tab. 4.10 se dostane

$$K_P^* = 1{,}38; \quad T_I^* = 11; \quad T_D^* = 2{,}73.$$

Odezvy na jednotkovou skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ jsou ukázány na obr. 4.28. Z jejich průběhů je zřejmé, že metoda SIMC dává i při velmi hrubé aproximaci přenosů regulovaných soustav výsledky, které mohou být s úspěchem využívány v technické praxi.




Obr.4.28 Odezvy regulačního obvodu seřízeného metodou SIMC na jednotkové skokové změny žádané $w(t)$ a poruchové $v(t)$ veličiny – příklad 4.6

**Příklad 4.7**

Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(10s+1)(6s+1)(s+1)}$$

je třeba seřídit analogové regulátory PI a PID metodou SIMC pro $T_w = T_d$ (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

**Řešení:**

Podobně jako v předešlém příkladě 4.6 v souladu s "pravidlem poloviny" lze psát ($T_{10} = 10$, $T_{20} = 6$, $T_{30} = 1$, $\tau_{10} = 2$, $k_1 = 1$):

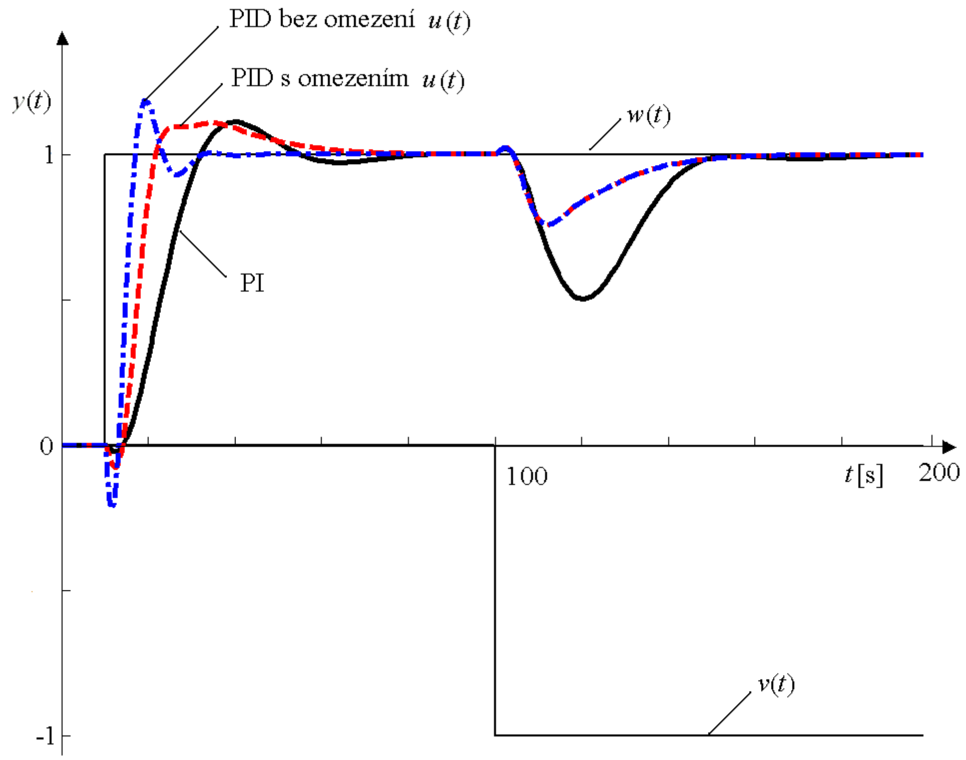
a) Náhradní přenos (3.2) [viz (3.27)]:

$$T_1 = T_{10} + \frac{T_{20}}{2} = 13, \quad T_d = \frac{T_{20}}{2} + T_{30} + \tau_{10} = 6,$$

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(10s+1)(6s+1)(s+1)} \approx \frac{1}{13s+1} e^{-6s}.$$

Protože $T_1 < 8T_d$, na základě řádku 2 v tab. 4.10 se dostane

$$K_P^* = 1{,}08; \quad T_I^* = 13.$$




Obr.4.29 Odezvy regulačního obvodu seřízeného metodou SIMC na jednotkové skokové změny žádané $w(t)$ a poruchové $v(t)$ veličiny – příklad 4.7

b) Náhradní přenos (3.8) [viz (3.28)]:

$$T_1 = T_{10} = 10; \; T_2 = T_{20} + \frac{T_{30}}{2} = 6{,}5; \; T_d = \frac{T_{30}}{2} + \tau_{10} = 2{,}5;$$

$$G_S(s) = \frac{1-2s}{(10s+1)(6s+1)(s+1)} \approx \frac{1}{(10s+1)(6{,}5s+1)} e^{-2{,}5s}.$$

Protože $T_1 < 8T_d$, na základě řádku 4 v tab. 4.10 se dostane

$$K_P^* = 3{,}3; \quad T_I^* = 16{,}5; \quad T_D^* = 3{,}94 .$$

Odezvy na jednotkovou skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ jsou ukázány na obr. 4.29. Z jejich průběhů je zřejmé, že metoda SIMC dává i v tomto případě při velmi hrubé aproximaci přenosů regulovaných soustav dobré výsledky. Nepříznivě se zde projevilo omezení akční veličiny $u(t)$ na hodnoty ± 4.

**Příklad 4.8**

Pro regulovanou soustavu z příkladu 4.6 je třeba seřídit číslicový regulátor PI pro vzorkovací periodu $T$ = 3,5 s na základě metody SIMC.

**Řešení:**

Metoda SIMC není určena pro přímé seřizování číslicových regulátorů, a proto budou použity přibližné postupy uvedené v podkap. 1.2.

Pro seřízení číslicového regulátoru PI se použije aproximace z příkladu 4.6, tj.

$$G_S(s) = \frac{1}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} \mathrm{e}^{-3s} \approx \frac{1}{8s+1} \mathrm{e}^{-7s} .$$

**Přibližný postup 1**

Pro $T$ = 3,5 na základě vztahu (1.18) lze psát

$$G_S'(s) = G_P(s) G_D(s) \mathrm{e}^{-(T/2)s} = \frac{1}{(T_1 s+1)} \mathrm{e}^{-(T_d + T/2)s} = \frac{1}{8s+1} \mathrm{e}^{-8{,}75s} .$$

Protože $T_1$ = 8 a $T_d$ = 8,75, na základě řádku 2 v tab. 4.10 se dostane

$$K_P^* \doteq 0{,}46; \quad T_I^* = 8 .$$

**Přibližný postup 2**

Pro $T = 3{,}5 \Rightarrow d = 2$ na základě vztahů (1.25) a (1.26) se obdrží (viz tab. P1.2)

$$G_P(z) = \frac{z-1}{z} \mathrm{Z}\left\{ \mathrm{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s(T_1 s+1)} \right\}\Bigg|_{t=kT} \right\} = \frac{a_1}{z + a_1 - 1}, \quad a_1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}} ,$$

$$G_S(z) = G_P(z) z^{-d} = \frac{a_1}{z + a_1 - 1} z^{-d} . \tag{4.68}$$

a) $z = \dfrac{1}{1 - Ts}$

$$G'_S(s)=G_P(z)\Big|_{z=\frac{1}{1-Ts}}\mathrm{e}^{-T_d s}=\frac{1-Ts}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)Ts+1}\mathrm{e}^{-T_d s}\approx\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)Ts+1}\mathrm{e}^{-(T_d+T)s}. \tag{4.69}$$

Pro $a_1=1-\mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}}\doteq 0{,}354$ se obdrží

$$G'_S(s)=\frac{1-3{,}5s}{6{,}38s+1}\mathrm{e}^{-7s}\approx\frac{1}{6{,}38s+1}\mathrm{e}^{-10{,}5s}.$$

Pro $T'_1=6{,}38$ a $T'_d=10{,}5$ se na základě řádku 2 v tab. 4.10 dostane

$$K_P^*=0{,}30;\quad T_I^*=6{,}38.$$

b) $z=\dfrac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$

$$G'_S(s)=G_P(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}}\mathrm{e}^{-T_d s}=\frac{1-\frac{T}{2}s}{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)Ts+1}\mathrm{e}^{-T_d s}\approx$$
$$\approx\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)Ts+1}\mathrm{e}^{-\left(T_d+\frac{T}{2}\right)s}. \tag{4.70}$$

Podobně jako v předchozím případě pro $a_1 = 0{,}354$ se dostane

$$G'_S(s)=\frac{1}{8{,}13s+1}\mathrm{e}^{-8{,}75s}.$$

Pro $T'_1=8{,}13$ a $T'_d=8{,}75$ se na základě řádku 2 v tab. 4.10 dostane

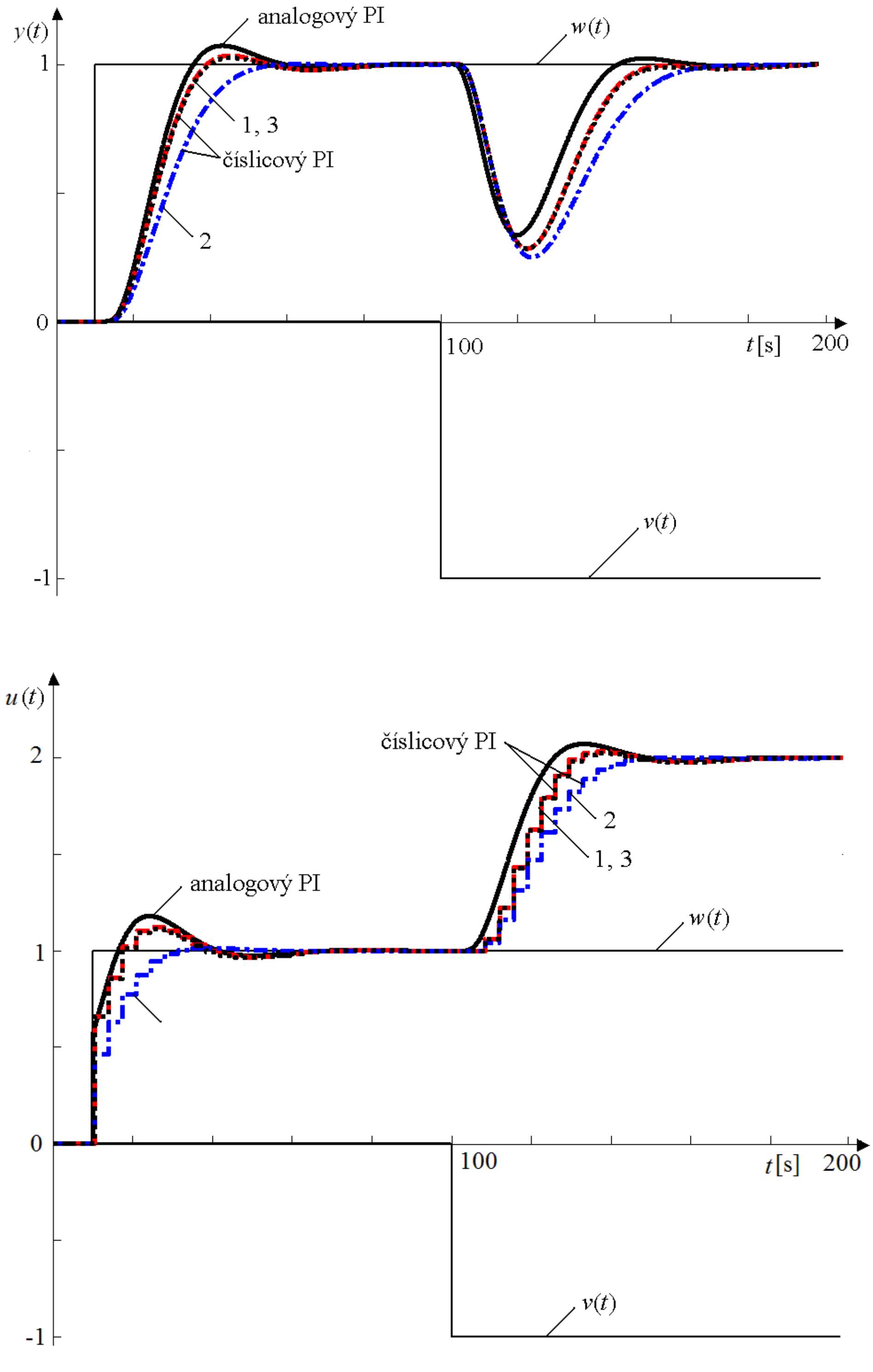
$$K_P^*\doteq 0{,}46;\quad T_I^*=8{,}13.$$

Na obr. 4.30 jsou ukázány průběhy regulované veličiny $y(t)$ a akční veličiny $u(t)$ získané seřízením metodou SIMC pro analogový regulátor PI ($K_P^*=0{,}57;\quad T_I^*=8$, viz příklad 4.6) a číslicový regulátor PI při použití různých přibližných postupů pro vzorkovací periodu $T = 3{,}5$:

1 – přibližný postup 1 ($K_P^*\doteq 0{,}46;\quad T_I^*=8$),

2 – přibližný postup 2a ($K_P^*=0{,}30;\quad T_I^*=6{,}38$),

3 – přibližný postup 2b ($K_P^*\doteq 0{,}46;\quad T_I^*=8{,}13$).




Obr. 4.30 Průběhy regulované veličiny $y(t)$ a akční veličiny $u(t)$ pro analogový a číslicový regulátor PI při použití různých přibližných postupů – příklad 4.8

Z průběhu na obr. 4.30 i z vypočtených hodnot stavitelných parametrů číslicového regulátoru PI vyplývá, že mezi přibližným postupem 1 (náhrada vzorkovače a tvarovače nultého řádu dopravním zpožděním o polovině vzorkovací periody) a přibližným postupem 2b (použití bilineární transformace) je zanedbatelný rozdíl, a proto pro praktické účely je vhodný velmi jednoduchý a účinný přibližný postup 1.

Speciálně byla zvolena velká hodnota vzorkovací periody $T$ = 3,5 ($d$ = 2), aby vynikly rozdíly mezi jednotlivými přístupy.

**Poznámka:**

Použití přibližného vztahu (4.70) je velmi blízké přibližnému postupu 1, protože pro

$$\mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{T}{2T_1}}}{\mathrm{e}^{\frac{T}{2T_1}}} \approx \frac{1-\dfrac{T}{2T_1}}{1+\dfrac{T}{2T_1}}$$

platí

$$a_1 = 1-\mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}} \approx \frac{2T}{2T_1+T}$$

a po dosazení do (4.70) se obdrží

$$G_S'(s) \approx \frac{1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-\left(T_d+\frac{T}{2}\right)s} .$$

Je tedy zřejmé, že pro praktické použití je přibližný postup 1 nejvhodnější.

### 4.3.4 Metoda požadovaného modelu

Metoda požadovaného modelu (MPM), dříve nazývaná také metoda inverze dynamiky, byla rozpracována na Fakultě strojní VŠB – Technické univerzitě Ostrava [Vítečková 1992, 1993, 1996, 1998]. Je to metoda velmi jednoduchá a účinná a jak bude ukázáno dále, umožňuje seřízení i konvenčních číslicových regulátorů.

Metoda požadovaného modelu vychází ze vztahu pro přímou syntézu [viz vztahy (P5.3 – (P5.5) a také (4.49) a (4.50)]

$$G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)}\frac{G_{wy}(s)}{1-G_{wy}(s)}, \tag{4.71}$$

kde

$$G_S(s) = G_P(s)\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.72}$$

je L-přenos soustavy,

$$G_{wy}(s) = \frac{k_o}{s+k_o\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.73}$$

je požadovaný L-přenos řízení a $k_o$ je zesílení otevřeného regulačního obvodu.

Požadovanému L-přenosu řízení (4.73) odpovídá velmi jednoduchý L-přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_o}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{4.74}$$

Po dosazení (4.72) a (4.73) do (4.71) se dostane L-přenos navrhovaného analogového regulátoru

$$G_R(s) = \frac{k_o}{sG_P(s)}. \tag{4.75}$$

Je zřejmé, že stejný vztah se dostane z L-přenosu otevřeného regulačního obvodu (4.74) pro (4.72).

Aby na základě vztahu (4.75) byl obdržen L-přenos konvenčního analogového regulátoru, musí L-přenos soustavy mít některý z tvarů uvedených v tab. 4.12 a pokud je třeba použít konkrétní konvenční analogový regulátor, pak je třeba L-přenos soustavy upravit na odpovídající tvar.

Velmi důležité je, že L-přenosy v tab. 4.12 nemají ve své části $G_P(s)$ žádné nestabilní nuly ani póly, a proto použití vztahu (4.71), resp. (4.75) je plně oprávněné.

Např. pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}, \; T_1 \geq T_2 \tag{4.76}$$

se pro [viz (4.72)]

$$G_P(s) = \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

po dosazení do (4.75) dostane L-přenos pro analogový regulátor PID$_i$ [viz (2.3)]

$$G_R(s) = \frac{k_o(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{k_1 s} = K'_P \frac{(T'_I s+1)(T'_D s+1)}{T'_I s},$$

kde

$$K'_P = \frac{k_o T_1}{k_1}, \quad T'^{*}_I = T_1, \quad T'^{*}_D = T_2, \tag{4.77}$$

resp. po použití přepočetních vztahů (2.6) se dostane L-přenos standardního analogového regulátoru PID [viz (2.2)] se stavitelnými parametry

$$K_P = \frac{k_o(T_1+T_2)}{k_1}, \quad T^*_I = T_1+T_2, \quad T^*_D = \frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}. \tag{4.78}$$

Podobně jednoduchým způsobem lze získat vztahy pro stavitelné parametry konvenčních analogových regulátorů pro všechny zbývající řádky v tab. 4.12.

Zbývá ještě určit vhodné zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$. Právě požadovaný L-přenos řízení (4.73) ve tvaru anizochronního matematického modelu [Zítek 1998; Zítek, Víteček 1999] má výhodu nejenom v relativní jednoduchosti, ale především v tom, že změnou zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ lze snadno dosáhnout různého průběhu odezvy na skokovou změnu žádané veličiny $w(t)$ od nekmitavého až po kmitavý s různým překmitem, tj. lze dosáhnout různé kvality regulačního pochodu, viz obr. 4.31.

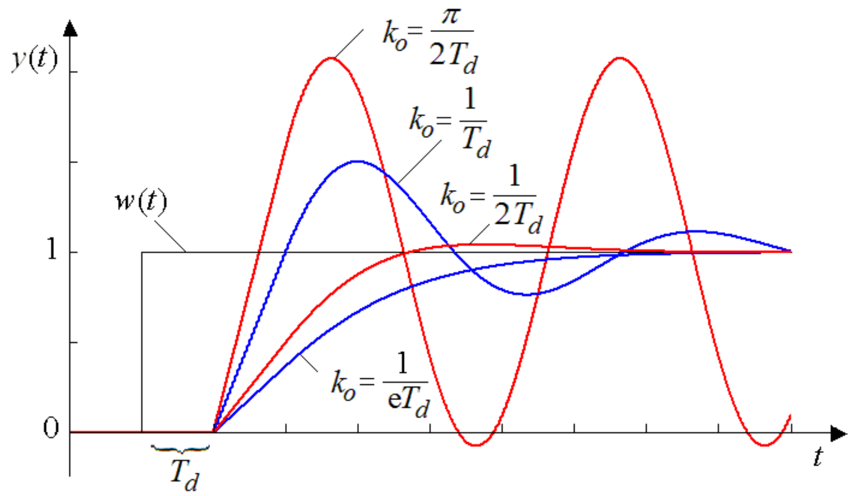
Zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ pro mezní nekmitavý průběh a pro kmitavý průběh na mezi stability lze snadno určit analyticky za předpokladu, že nedominantní póly a nuly regulačního obvodu mají na jeho vlastnosti zanedbatelný vliv [Vítečková 1992, 1993, 1996, 1998].

Pro mezní nekmitavý průběh z charakteristického kvazimnohočlenu regulačního obvodu [viz jmenovatel požadovaného přenosu řízení (4.73)]

$$N(s) = s\,\mathrm{e}^{T_d s} + k_o \tag{4.79}$$

lze určit dvojnásobný reálný dominantní pól $s_2$ a odpovídající zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ ze soustavy rovnic

$$\left.\begin{aligned} N(s) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}N(s)}{\mathrm{d}s} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} s\,\mathrm{e}^{T_d s} + k_o &= 0 \\ T_d s + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{T_d} \\ k_o &= \frac{1}{\mathrm{e}T_d} \end{aligned} . \tag{4.80}$$




Obr. 4.31 Vliv zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ na průběh přechodové charakteristiky regulačního obvodu

Zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ pro kmitavou mez stability (tj. kritické zesílení) lze získat pro $s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\omega_k$ z charakteristické rovnice

$$s\,\mathrm{e}^{T_d s} + k_o = 0 \tag{4.81}$$

jako hlavní řešení, tj.

$$\pm\,\mathrm{j}\omega_k\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_k T_d} + k_o = 0 \;\Rightarrow\; \omega_k = \frac{\pi}{2T_d},\; k_o = \frac{\pi}{2T_d}. \tag{4.82}$$

Při řešení komplexní rovnice (4.81) byl použit Eulerův vztah

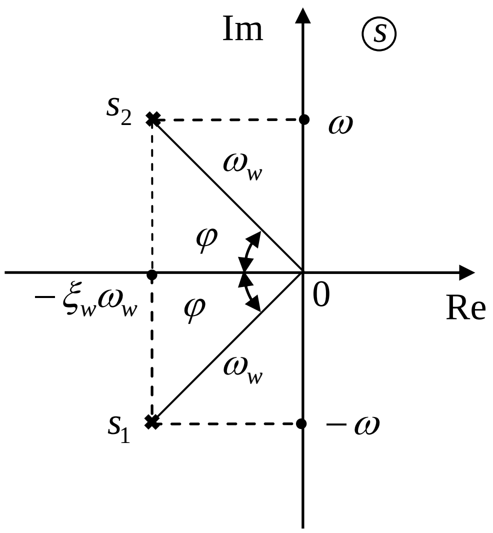
$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}x} = \cos x \pm \mathrm{j}\sin x. \tag{4.83}$$

Z obou vztahů (4.80) a (4.82) lze pro zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ učinit závěr, že může být vyjádřeno ve tvaru

$$k_o = \frac{1}{\beta T_d}, \tag{4.84}$$

kde $\beta$ je koeficient závislý na průběhu přechodové charakteristiky regulačního obvodu (obr. 4.31), tj. na relativním překmitu $\kappa$ [viz vztah (4.1)]

$$\begin{aligned} \kappa = 0 \;&\Rightarrow\; \beta = \mathrm{e}, \\ \kappa = 1 \;&\Rightarrow\; \beta = \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \tag{4.85}$$




Obr. 4.32 Rozložení dominantních pólů regulačního obvodu s analogovým regulátorem v komplexní rovině *s*

Aby bylo možné určit závislost koeficientu $\beta$ na relativním překmitu $\kappa$, je třeba porovnat dva dominantní póly regulačního obvodu s L-přenosem řízení (4.73) (viz obr. 4.32)

$$s_{1,2} = -\omega\,\mathrm{cotg}\varphi \pm \mathrm{j}\omega \tag{4.86}$$

s odpovídající dvojicí pólů regulačního obvodu s L-přenosem řízení (viz obr. 4.32)

$$G_{wy}(s) = \frac{\omega_w^2}{s^2 + 2\xi_w \omega_w s + \omega_w^2}\, \mathrm{e}^{-T_d s}\,, \tag{4.87}$$

kde $\xi_w$ a $\omega_w$ je relativní tlumení a úhlový kmitočet netlumených kmitů regulačního obvodu.

Po dosazení (4.86) do (4.81) a úpravě se dostane komplexní rovnice

$$-\omega \operatorname{cotg}\varphi \pm \mathrm{j}\omega + k_o\, \mathrm{e}^{-T_d(-\omega \operatorname{cotg}\varphi \pm \mathrm{j}\omega)} = 0\,. \tag{4.88}$$

Po uvažování Eulerova vztahu (4.83) lze komplexní rovnici (4.88) vyjádřit ekvivalentní soustavou dvou reálných rovnic

$$\begin{aligned} -\omega \operatorname{cotg}\varphi + k_o\, \mathrm{e}^{\omega T_d \operatorname{cotg}\varphi} \cos \omega T_d &= 0, \\ \omega - k_o\, \mathrm{e}^{\omega T_d \operatorname{cotg}\varphi} \sin \omega T_d &= 0, \end{aligned} \tag{4.89}$$

jejichž hlavní řešení je

Tab. 4.12 Stavitelné parametry analogových regulátorů pro metodu požadovaného modelu

| Regulovaná soustava | | Regulátor | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Typ | $K_P^*(K_P'^*)$ | | $T_I^*(T_I'^*)$ | $T_D^*(T_D'^*)$ |
| | | | $T_d = 0$ | $T_d > 0$ | | |
| 1 | $\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | P | $\frac{1}{k_1 T_w}$ | $\frac{1}{k_1 \beta T_d}$ | – | – |
| 2 | $\frac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PI | $\frac{T_1}{k_1 T_w}$ | $\frac{T_1}{k_1 \beta T_d}$ | $T_1$ | – |
| 3 | $\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PD | $\frac{1}{k_1 T_w}$ | $\frac{1}{k_1 \beta T_d}$ | – | $T_1$ |
| 4 | $\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $\mathrm{PID_i}$ | $\frac{T_1}{k_1 T_w}$ | $\frac{T_1}{k_1 \beta T_d}$ | $T_1$ | $T_2$ |
| 5 | $T_1 \geq T_2$ | PID | $\frac{T_1 + T_2}{k_1 T_w}$ | $\frac{T_1 + T_2}{k_1 \beta T_d}$ | $T_1 + T_2$ | $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ |
| 6 | $\frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ <br> $0{,}5 < \xi_0 \leq 1$ | PID | $\frac{2\xi_0 T_0}{k_1 T_w}$ | $\frac{2\xi_0 T_0}{k_1 \beta T_d}$ | $2\xi_0 T_0$ | $\frac{T_0}{2\xi_0}$ |

Stavitelné parametry $K_P'^*$, $T_I'^*$ a $T_D'^*$ platí pro analogový regulátor s interakcí $\mathrm{PID_i}$ [viz tab. 2.1 a (2.3)].

$$\omega = \frac{\varphi}{T_d},$$
$$k_o = \frac{\varphi}{T_d \sin\varphi} \mathrm{e}^{-\frac{\varphi}{\mathrm{tg}\varphi}}. \tag{4.90}$$

Koeficient $\beta$ tedy je [viz (4.84)]

$$\beta = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \mathrm{e}^{\frac{\varphi}{\mathrm{tg}\varphi}}. \tag{4.91}$$

Např. je zřejmé, že pro

$$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \mathrm{e} \;\Rightarrow k_o = \frac{1}{\mathrm{e}T_d}$$

a

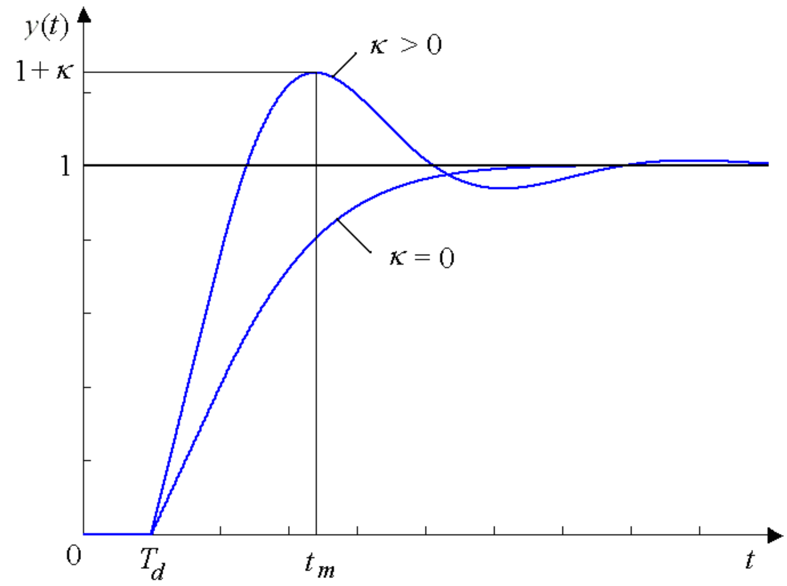
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{2}{\pi} \Rightarrow k_o = \frac{\pi}{2T_d},$$

byly obdrženy stejné vztahy jako (4.80) a (4.82).

Protože úhel $\varphi$ (obr. 4.32) je pro regulační obvod s L-přenosem řízení (4.87) dán relativním tlumením $\xi_w$, tj.

$$\varphi = \arccos\xi_w, \tag{4.92}$$

proto požadovaný průběh přechodové charakteristiky lze obdržet vhodnou volbou relativního tlumení $\xi_w$.




Obr. 4.33 Přechodové charakteristiky regulačního obvodu

Pro praxi je vhodnější používat místo relativního tlumení $\xi_w$ relativní překmit $\kappa$ (obr. 4.33), který lze určit z přechodové funkce regulačního obvodu (4.87)

$$y(t)=\left\{1-\frac{\omega_w}{\omega}\mathrm{e}^{-(t-T_d)\xi_w\omega_w}\sin\left[(t-T_d)\omega+\arcsin\frac{\omega}{\omega_w}\right]\right\}\eta(t-T_d)\,, \tag{4.93a}$$

$$\frac{\omega}{\omega_w}=\sqrt{1-\xi_w^2}\,, \tag{4.93b}$$

kde $\eta(t)$ je Heavisideův jednotkový skok.

Maximální překmit vystoupí v čase $t_m$, kdy derivace přechodové funkce (4.93a) podle času (tj. impulsní funkce)

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}=\left\{\frac{\omega_w^2}{\omega}\mathrm{e}^{-(t-T_d)\xi_w\omega_w}\sin[(t-T_d)\omega]\right\}\eta(t-T_d) \tag{4.94}$$

bude pro $t > T_d$ poprvé nulová, tj.

$$t_m=\frac{\pi}{\omega}+T_d\,. \tag{4.95}$$

Po dosazení (4.95) do (4.93) se dostane

$$y(t_m)=1+\kappa=1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi\xi_w}{\sqrt{1-\xi_w^2}}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \kappa=\mathrm{e}^{-\frac{\pi\xi_w}{\sqrt{1-\xi_w^2}}}\quad\Rightarrow \tag{4.96}$$

$$\Rightarrow\ \xi_w=\frac{|\ln\kappa|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\kappa}}\,. \tag{4.97}$$

Na základě vztahů (4.97), (4.92) a (4.91) lze pro zadaný (požadovaný) relativní překmit $\kappa$ vypočíst hodnoty koeficientu $\beta$, a tedy i odpovídající zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ (4.84).

Pro relativní překmit v rozmezí $0 \le \kappa \le 0{,}5$ (0 – 50 %) byly vypočteny odpovídající hodnoty $\xi_w$, $\varphi$ [rad] a $\beta$, viz tab. 4.13.

Tab. 4.13 Hodnoty koeficientů $\beta'$ a $\beta$ pro zadaný relativní překmit $\kappa$

| $\kappa$ | 0 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi_w$ | 1 | 0,690 | 0,591 | 0,517 | 0,456 | 0,404 | 0.358 | 0,317 | 0,280 | 0,246 | 0,215 |
| $\varphi$ | 0 | 0,809 | 0,938 | 1,028 | 1,097 | 1,155 | 1,205 | 1,248 | 1,287 | 1,322 | 1,354 |
| $\beta'$ | 2,718 | 1,935 | 1,710 | 1,549 | 1,423 | 1,319 | 1,230 | 1,153 | 1,086 | 1,026 | 0,972 |
| $\beta$ | 2,718 | 1,944 | 1,720 | 1,561 | 1,437 | 1,337 | 1,248 | 1,172 | 1,104 | 1,045 | 0,992 |

V tab. 4.13 jsou hodnoty $\beta$ vypočtené na základě vztahů (4.97), (4.92) a (4.91) označeny jako $\beta'$, protože jde o přibližné hodnoty získané porovnáním dvojice pólů regulačního obvodu (4.87) s dvojicí dominantních pólů regulačního obvodu (4.73) za předpokladu, že jeho nedominantní póly mají na výsledné vlastnosti zanedbatelný vliv [Vítečková 1996, 1998; Víteček 2009]. Hodnoty upřesněné číslicovou simulací jsou v tab. 4.13 označeny jako $\beta$. Rozdíl mezi hodnotami $\beta'$ získanými analytickou cestou a experimentálně upřesněnými hodnotami $\beta$ není větší než 2 % a pro relativní překmit v rozmezí $0 \le \kappa \le 0{,}2$ (0 – 20 %) je dokonce menší než 1 %.

V publikaci [Alfaro 2004] byl pro výpočet koeficientu $\beta$ navržen vztah

$$\beta(\kappa) = 2{,}718 - 0{,}4547\kappa^{0,3432}, \tag{4.98}$$

kde $\kappa$ je relativní překmit v procentech.

Pro regulační obvod s analogovým konvenčním regulátorem seřízeným MPM mohou být rovněž určeny základní ukazatelé kvality.

Maximum modulu $M_S$ citlivostní funkce

$$S(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + G_o(\mathrm{j}\omega)} \tag{4.99}$$

pro přenos otevřeného regulačního obvodu (4.74) a jeho zesílení (4.84) je dáno vztahem

$$M_S = |S(\mathrm{j}\omega_S)| = \max_{0 \le \omega < \infty} \frac{\beta\omega T_d}{\sqrt{\beta^2(\omega T_d)^2 - 2\beta\omega T_d \sin(\omega T_d) + 1}}. \tag{4.100}$$

Kmitočet $\omega_S$, při kterém modul citlivostní funkce nabývá globálního maxima $M_S$ se získá přirovnáním k nule první derivace modulu $|S(\mathrm{j}\omega)|$ podle kmitočtu $\omega$, tj. jako nejmenší kladné reálné řešení $\omega_S$ goniometrické rovnice

$$2\beta^2(\omega T_d)^2 - [1 + 4\beta\sin(\omega T_d)]\omega T_d + 1 = 0. \tag{4.101}$$

Řešení $\omega_S$ byla získána pro relativní překmity $\kappa$, tj. koeficienty $\beta$ v souladu s tab. 4.13, numericky a po dosazení do (4.100) byla rovněž obdržena odpovídající maxima modulu funkce citlivosti $M_S$, viz tab. 4.14.

Amplitudová $m_A$ a fázová $\gamma$ bezpečnost se určí na základě vztahů (4.74) a (4.84). Kmitočtový přenos otevřeného regulačního obvodu má tvar

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\beta\omega T_d} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_d} = \frac{1}{\beta\omega T_d} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega T_d + \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{4.102}$$

$$A_o(\omega) = \frac{1}{\beta\omega T_d}, \tag{4.103}$$

$$\varphi_o(\omega) = -\left(\omega T_d + \frac{\pi}{2}\right), \tag{4.104}$$

kde $A_o$ a $\varphi_o$ jsou modul a fáze kmitočtového přenosu otevřeného regulačního obvodu.

V souladu s obr. 4.5, vztahy (4.103) a (4.104) lze psát

$$A_o(\omega_ř) = 1 \Rightarrow \omega_ř = \frac{1}{\beta T_d},$$

$$\gamma = \pi - |\varphi_o(\omega_ř)| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\beta} \text{[rad]}, \tag{4.105a}$$

resp.

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\frac{180}{\pi} \text{[deg]}. \tag{4.105b}$$

Podobně lze psát

$$\varphi_o(\omega_{-\pi}) = -\pi \quad \Rightarrow \omega_{-\pi} = \frac{\pi}{2T_d},$$

$$m_A A_o(\omega_{-\pi}) = 1 \Rightarrow m_A = \frac{\pi}{2}\beta. \tag{4.106a}$$

Logaritmická amplitudová bezpečnost $m_L$ je dána vztahem

$$m_L = 20 \log m_A. \tag{4.106b}$$

Mezi amplitudovou $m_A$ a fázovou $\gamma$ bezpečností platí jednoznačný vztah

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{m_A}\right) \Leftrightarrow m_A = \frac{\pi}{\pi - 2\gamma}. \tag{4.107}$$

Na základě vztahů (4.105) – (4.106) pro požadovaný relativní překmit $\kappa$ a jemu odpovídající hodnotě koeficientu $\beta$ byly určeny odpovídající řádky v tab. 4.14.

V souladu se vztahy (4.73) a (4.84) lze pro modul kmitočtového přenosu uzavřeného regulačního obvodu psát

$$A_{wy}(\omega) = |G_{wy}(\mathrm{j}\omega)| = \left|\frac{1}{\mathrm{j}\beta\omega T_d + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_d}}\right| \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_d}\right| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2(\omega T_d)^2 - 2\beta\omega T_d \sin(\omega T_d) + 1}} \tag{4.108}$$

a pro jeho rezonanční převýšení platí

$$A_{wy}(\omega_R) = \max_{0 \le \omega < \infty} A_{wy}(\omega). \tag{4.109}$$

Maximální hodnota modulu $A_{wy}(\omega)$ se dostane při minimální hodnotě jmenovatele výrazu na pravé straně (4.108). Jeho derivací podle kmitočtu $\omega$ a po přirovnání k nule se dostane

$$[\beta - \cos(\omega T_d)]\omega T_d - \sin(\omega T_d) = 0 . \tag{4.110}$$

Numerickým řešením goniometrické rovnice (4.110) pro hodnoty koeficientu $\beta$ v souladu s tab. 4.13 byly získány rezonanční kmitočty $\omega_R$ jako nejmenší kladná reálná řešení, viz tab. 4.14. Po dosazení $\omega_R$ do vztahu (4.108) byla pak obdržena odpovídající hodnota rezonančního převýšení (4.109). Logaritmické amplitudové rezonanční převýšení $L_{wy}(\omega_R)$ v tab. 4.14 je dáno vztahem

$$L_{wy}(\omega_R) = 20 \log A_{wy}(\omega_R) \,[\mathrm{dB}]. \tag{4.111}$$

Relativní změna dopravního zpoždění, při které dojde k nestabilitě regulačního obvodu byla určena na základě vztahu (4.67)

$$\frac{\Delta T_d}{T_d} = \frac{\gamma}{\omega_ř T_d} .$$

Tab. 4.14 Základní ukazatelé kvality pro regulační obvod seřízený MPM

| $\kappa$ | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_S$ | 1,394 | 1,615 | 1,737 | 1,859 | 1,987 | 2,123 | 2,282 | 2,458 | 2,665 |
| $m_A$ | 4,27 | 3,05 | 2,70 | 2,45 | 2,26 | 2,10 | 1,96 | 1,84 | 1,73 |
| $m_L$ [dB] | 12,609 | 9,686 | 8,627 | 7,783 | 7,082 | 6,444 | 5,845 | 5,296 | 4,761 |
| $\gamma$ [deg] | 68,9 | 60,5 | 56,7 | 53,3 | 50,1 | 47,1 | 44,1 | 41,1 | 38,1 |
| $\gamma$[rad] | 1,20 | 1,06 | 0,99 | 0,93 | 0,88 | 0,82 | 0,77 | 0,72 | 0,67 |
| $A_{wy}(\omega_R)$ | 1 | 1,002 | 1,056 | 1,142 | 1,247 | 1,367 | 1,512 | 1,678 | 1,876 |
| $L_{wy}(\omega_R)$ [dB] | 0 | 0,017 | 0,473 | 1,153 | 1,917 | 2,715 | 3,591 | 4,496 | 5,465 |
| $\omega_{-\pi} T_d$ | $\frac{\pi}{2} \doteq 1{,}57$ | | | | | | | | |
| $\omega_ř T_d$ | 0,37 | 0,51 | 0,58 | 0,64 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,91 |
| $\Delta T_d/T_d$ | 3,27 | 2,05 | 1,70 | 1,45 | 1,26 | 1,10 | 0,96 | 0,84 | 0,73 |

Z tab. 4.14 vyplývá, že MPM pro $0 \le \kappa \le 0{,}2$ (0 – 20 %) vyhovuje všem doporučovaným hodnotám nejdůležitějších ukazatelů kvality, viz (4.9), (4.17), (4.18) a (4.24), a proto MPM pro $\kappa \le 0{,}2$ (20 %) zaručuje dobrou robustnost regulačního obvodu s konvenčním analogovým regulátorem.

Ze srovnání tab. 4.12 – 4.14 pro $\kappa$ = 0,05 (5 %) s tab. 4.10 a 4.11 je zřejmé, že MPM je pro seřízení proporcionálních soustav ekvivalentní metodě SIMC pro $T_1 \le 8T_d$ a $T_w = T_d$; přesně metoda MPM používá $\beta$ = 1,944 a metoda SIMC $\beta = 2$. Z tohoto důvodu jsou téměř shodné i hodnoty základních ukazatelů kvality, porovnej tab. 4.11 (levý sloupec) s tab. 4.14 pro $\kappa$ = 0,05.

Zásadní rozdíl mezi oběma metodami spočívá ve volbě požadovaného L-přenosu řízení. Metoda SIMC předpokládá požadovaný L-přenos řízení pro $T_w = T_d$ ve tvaru [viz (4.51)]

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_d s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.112}$$

a metoda MPM pro (4.84) ve tvaru [viz (4.73)]

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{\beta T_d s + \mathrm{e}^{-T_d s}}\mathrm{e}^{-T_d s}\,. \tag{4.113}$$

Je zřejmé, že metoda SIMC ve své základní podobě, tj. pro $T_1 \le 8T_d$ a $T_w = T_d$ nikdy nemůže zajistit vlastnosti regulačního obvodu vyjádřené L-přenosem řízení (4.112). Naproti tomu MPM zajistí vlastnosti regulačního obvodu dané L-přenosem řízení nejenom pro hodnotu $\beta$ = 1,944 ($\approx$ 2), ale i pro jiné hodnoty $\beta$ v tab. 4.13, a to s vysokou přesností.

Tab. 4.12 může být rozšířena i pro proporcionální soustavu bez setrvačnosti s dopravním zpožděním

$$G_S(s) = k_1 \mathrm{e}^{-T_d s} \tag{4.114}$$

s doporučeným konvenčním analogovým regulátorem I

$$G_R(s) = \frac{1}{T_I s} \tag{4.115}$$

pro

$$T_I^* = k_1 \beta T_d\,. \tag{4.116}$$

MPM lze použít i pro soustavy bez dopravního zpoždění, tj. $T_d$ = 0, ale v tom případě požadovaný L-přenos řízení se předpokládá v jednoduchém tvaru [porovnej s (4.73)]

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}\,, \tag{4.117}$$

kde $T_w$ je časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu. L-přenos doporučeného regulátoru se získá po dosazení (4.117) do (4.71)

$$G_R(s) = \frac{1}{G_S(s) T_w s}\,. \tag{4.118}$$

Např. pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \ T_1 \geq T_2 \tag{4.119}$$

se na základě vztahu (4.118) dostane L-přenos analogového regulátoru PID$_i$ [viz (2.3)]

$$G_R(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{k_1 T_w s} = K'_P \frac{(T'_I s + 1)(T'_D s + 1)}{T'_I s},$$

kde

$$K'^*_P = \frac{T_1}{k_1 T_w}, \quad T'^*_I = T_1, \quad T'^*_D = T_2, \tag{4.120}$$

resp. po použití přepočetních vztahů (2.6) se dostane L-přenos standardního analogového regulátoru PID [viz (2.2)] se stavitelnými parametry

$$K^*_P = \frac{T_1 + T_2}{k_1 T_w}, \quad T^*_I = T_1 + T_2, \quad T^*_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \tag{4.121}$$

Velikost časové konstanty $T_w$ je třeba volit s ohledem na omezení akční veličiny $u(t)$ [čím je menší $T_w$, tím větší jsou nároky na velikost akční veličiny $u(t)$] a na požadovanou dobu regulace $t_r$. Např. pro zadanou relativní toleranci regulace $\delta$ platí [viz (4.2) a obr. 4.1]

$$\begin{aligned} \delta &= 0{,}05 \ (5\ \%) \Rightarrow t_r \approx 3T_w, \\ \delta &= 0{,}02 \ (2\ \%) \Rightarrow t_r \approx 4T_w. \end{aligned} \tag{4.122}$$

MPM může být snadno rozšířena i na regulační obvody s konvenčními číslicovými regulátory. Vzhledem k tomu, že již byly pomocí L-transformace odvozeny vztahy pro stavitelné parametry konvenčních analogových regulátorů, pro odvození odpovídajících vztahů pro stavitelné parametry konvenčních číslicových regulátorů bude použita Z-transformace. Vychází se rovněž ze vztahu pro přímou syntézu [viz vztahy (P5.3) – (P5.5)]

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \frac{G_{wy}(z)}{1 - G_{wy}(z)}, \tag{4.123}$$

kde

$$G_S(z) = G_P(z) z^{-d}, \quad T_d = dT \tag{4.124}$$

je Z-přenos soustavy [viz vztahy (1.23) – (1.25)] a

$$G_{wy}(z) = \frac{k_o T}{z - 1 + k_o T z^{-d}} z^{-d} \tag{4.125}$$

je požadovaný Z-přenos řízení uzavřeného regulačního obvodu. Zatím se předpokládá, že relativní diskrétní zpoždění $d$ je celé číslo, ale později bude ukázáno, že tento předpoklad je nepodstatný.

Požadovanému Z-přenosu řízení (4.125) odpovídá jednoduchý Z-přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(z) = G_R(z)G_S(z) = \frac{k_o T}{z-1} z^{-d} . \tag{4.126}$$

Po dosazení (4.124) a (4.125) do (4.123) se dostane Z-přenos navrhovaného číslicového regulátoru

$$G_R(z) = \frac{k_o T}{(z-1)G_P(z)} . \tag{4.127}$$

Podobně jako u regulačního obvodu s analogovým regulátorem lze vhodnou volbou zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ dosáhnout různého regulačního pochodu od mezního nekmitavého až po kmitavý se zadaným překmitem.

Za předpokladu, že na regulační pochod mají vliv pouze dominantní póly, lze zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ a dva dominantní póly určit analyticky na základě charakteristického mnohočlenu [viz jmenovatel Z-přenosu řízení (4.125)]

$$N(z) = z^{d+1} - z^d + k_o T . \tag{4.128}$$

Pro mezní nekmitavý regulační pochod lze zesílení $k_o$ a dvojnásobný dominantní pól určit ze soustavy rovnic

$$\left.\begin{aligned} N(z) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}N(z)}{\mathrm{d}z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z^{d+1} - z^d + k_o T &= 0 \\ (d+1)z - d &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} z_2 &= \frac{d}{d+1} \\ k_o &= \frac{1}{T}\frac{1}{d+1}\left(\frac{d}{d+1}\right)^d \end{aligned} \tag{4.129}$$

Pro zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ zajišťující mezní nekmitavý regulační pochod je výhodná aproximace

$$k_o = \frac{1}{T}\frac{1}{d+1}\left(\frac{d}{d+1}\right)^d \approx \frac{1}{(4-\mathrm{e})T + \mathrm{e}T_d} , \tag{4.130}$$

která vychází ze shody přesného a přibližného řešení pro hodnoty $d$ = 1 a $\infty$, přičemž maximální relativní chyba pro $d \geq 1$ není větší než 0,5 % [Vítečková 1998].

Je zřejmé, že pro $T \to 0$ platí (4.80), tj.

$$\lim_{T \to 0} \frac{1}{(4-\mathrm{e})T + \mathrm{e}T_d} = \frac{1}{\mathrm{e}T_d} . \tag{4.131}$$

Určení kritického zesílení $k_o$ otevřeného regulačního obvodu s číslicovým regulátorem znamená řešit rovnici

$$N(z) = 0 \tag{4.132}$$

pro nejméně jednu dvojici komplexně sdružených pólů

$$z_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\varphi_k}, \tag{4.133}$$

které leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině $z$ (obr. 4.34).

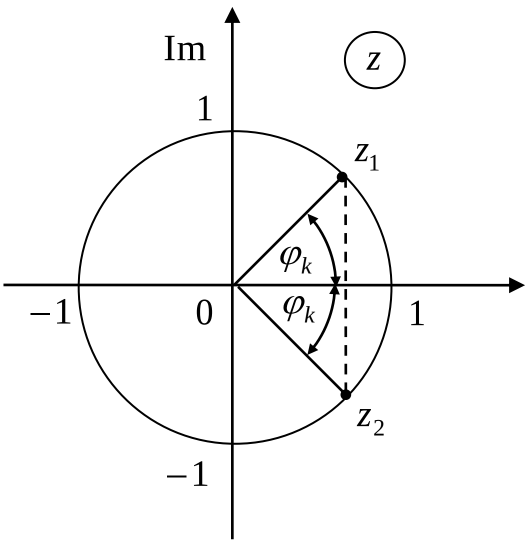
Po dosazení (4.133) do (4.132) [viz (4.128)] se dostane

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}(d+1)\varphi_k} - \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}d\varphi_k} + k_o T = 0. \tag{4.134}$$

Řešení komplexní rovnice (4.134) má tvar

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{\pi + \Phi}{2d+1}, \quad \Phi = 0,\, 4\pi,\, 8\pi, \ldots, \\ k_o &= \frac{2}{T}\sin\frac{\varphi_k}{2}. \end{aligned} \tag{4.135}$$

Pro dominantní dvojici pólů má význam pouze hlavní řešení pro $\Phi = 0$, a proto zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ zajišťující regulační pochod na kmitavé mezi stability je dáno vztahem




Obr. 4.34 Rozložení dominantních pólů regulačního obvodu s číslicovým regulátorem v komplexní rovině $z$

$$k_o = \frac{2}{T}\sin\frac{\pi}{2(2d+1)}. \tag{4.136}$$

Podobně jako v předchozím případě pro praktické účely je výhodná aproximace

$$k_o = \frac{2}{T}\sin\frac{\pi}{2(2d+1)} \approx \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)T + \frac{2}{\pi}T_d}, \tag{4.137}$$

která rovněž vychází ze shody přesného a přibližného řešení pro hodnoty $d = 1$ a $\infty$ s maximální relativní chybou okolo 1% pro $d \geq 1$.

Rovněž i zde pro $T \to 0$ platí (4.82), tj.

$$\lim_{T\to 0} \frac{1}{\left(1-\frac{2}{\pi}\right)T + \frac{2}{\pi}T_d} = \frac{\pi}{2T_d}\,. \tag{4.138}$$

Na základě přibližných vztahů (4.130) a (4.137) lze předpokládat, že závislost zesílení otevřeného regulačního obvodu s číslicovým regulátorem $k_o$ v závislosti na relativním překmitu $\kappa$ lze aproximovat vztahem

$$k_o = \frac{1}{\alpha(\kappa)T + \beta(\kappa)T_d}\,, \tag{4.139}$$

kde $\beta(\kappa)$ je koeficient závisející na relativním překmitu $\kappa$ pro analogový regulátor (tab. 4.13) a $\alpha(\kappa)$ je koeficient rovněž závisející na relativním překmitu $\kappa$, ale uvažující již číslicový regulátor.

Z přibližného vztahu (4.139) vyplývá, že předpoklad o celočíselnosti relativního dopravního zpoždění $d$ je nepodstatný.

Hodnoty koeficientu $\alpha$ v závislosti na relativním překmitu $\kappa$ v rozmezí $0 \leq \kappa \leq 0{,}5$ byly určeny číslicovou simulací, viz tab. 4.16 [Vítečková 1996].

Postup návrhu číslicového regulátoru bude ukázán na soustavě s L-přenosem (4.76)

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s},\ \ T_1 > T_2.$$

Po diskretizaci na základě vztahů (1.23) – (1.26), nebo přímo z tab. P1.2 se dostane ($T_d = dT$) Z-přenos soustavy invariantní vzhledem k přechodové funkci

$$G_S(z) = \frac{k_1(Az+B)}{(z-c_1)(z-c_2)} z^{-d}\,, \tag{4.140}$$

kde

$$c_1 = 1-a_1 = \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}},\quad c_2 = 1-a_2 = \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_2}}\,, \tag{4.141a}$$

$$A = \frac{T_1(1-a_1)-T_2(1-a_2)}{T_2-T_1} + 1 = \frac{T_1c_1 - T_2c_2}{T_2-T_1} + 1, \tag{4.141b}$$

$$B = \frac{T_1(1-a_2)-T_2(1-a_1)}{T_2-T_1} + (1-a_1)(1-a_2) = \frac{T_1c_2 - T_2c_1}{T_2-T_1} + c_1c_2\,. \tag{4.141c}$$

Při uvažování (4.124) a po dosazení (4.140) do (4.127) a úpravě se obdrží

$$G_R(z) = K_P(z)\left(1 + \frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right), \tag{4.142}$$

kde

$$K_P(z) = \frac{k_o T(c_1 + c_2 - 2c_1c_2)z}{k_1(Az+B)}, \tag{4.143}$$

$$\frac{T_I^*}{T} = \frac{c_1 + c_2 - 2c_1c_2}{1 - c_1 - c_2 + c_1c_2}, \tag{4.144}$$

$$\frac{T_D^*}{T} = \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2 - 2c_1c_2}. \tag{4.145}$$

Je zřejmé, že jde o standardní číslicový regulátor PID až na to, že zesílení $K_P(z)$ (4.143) závisí na komplexní proměnné $z$. Vystupuje zde ještě jeden, velmi závažný, problém. Ve jmenovateli výrazu na zesílení číslicového regulátoru (4.143) je dvojčlen

$$Az + B$$

s pólem

$$z_0 = -\frac{B}{A}, \tag{4.146}$$

pro který platí

$$T \to 0 \;\Rightarrow\; z_0 \to -1. \tag{4.147}$$

Je to tzv. „zvonící pól“, který způsobuje velmi nepříjemnou velkou kmitavost akční veličiny [Medveděv et al. 1987; Vítečková 1992, 1996]. Obě tyto nepříznivé skutečnosti lze odstranit použitím konstantního zesílení číslicového regulátoru

$$K_P = \lim_{z\to 1} K_P(z) = \frac{k_o T(c_1 + c_2 - 2c_1c_2)}{k_1(1 - c_1 - c_2 + c_1c_2)} = \frac{k_o T_I}{k_1}. \tag{4.148}$$

Snadno se dá dokázat, že vztahy (4.144) (4.145) a (4.148) platí i pro případ $T_1 = T_2$ [Vítečková 1996].

Podobným způsobem byly získány i zbývající řádky v tab. 4.15 pro soustavy s $T_d > 0$. V tab. 4.15 jsou rovněž uvedeny hodnoty zesílení číslicového regulátoru $K_P$ pro soustavy bez dopravného zpoždění, tj. pro $T_d = 0$.

V tomto případě požadovaný Z-přenos řízení se předpokládá ve tvaru

$$G_{wy}(z) = \frac{1 - c_w}{z - c_w}, \; c_w = \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_w}}. \tag{4.149}$$

Z-přenos soustavy (4.149) je diskrétním analogem L-přenosu soustavy (4.117).

V tab. 4.15 je:

$$c_i = \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_i}};\ i = 1, 2, w;\ c = \mathrm{e}^{-\frac{\xi_0 T}{T_0}},\ b = \cos\left(\frac{T}{T_0}\sqrt{1-\xi_0^2}\right),\ k_o = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d}. \qquad (4.150)$$

Vztahy pro číslicové regulátory v tab. 4.15 platí i pro odpovídající analogové regulátory pro $T \to 0$, ale jejich praktické použití je pracné a nepříjemné.

Tab. 4.15 Stavitelné parametry číslicových regulátorů pro metodu požadovaného modelu (MPM)

| Regulovaná soustava | | Číslicový regulátor | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Typ | $K_P^*$ | | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
| | | | $T_d = 0$ | $T_d > 0$ | | |
| 1 | $\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | P | $\frac{1-c_w}{k_1 T}$ | $\frac{k_o}{k_1}$ | – | – |
| 2 | $\frac{k_1}{T_1 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PI | $\frac{(1-c_w)T_\mathrm{I}^*}{k_1 T}$ | $\frac{k_o T_\mathrm{I}^*}{k_1}$ | $\frac{c_1}{1-c_1}T$ | – |
| 3 | $\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | PD | $\frac{1-c_w}{k_1 T}$ | $\frac{k_o}{k_1}$ | – | $\frac{c_1}{1-c_1}T$ |
| 4 | $\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ <br> $T_1 \geq T_2$ | PID | $\frac{(1-c_w)T_\mathrm{I}^*}{k_1 T}$ | $\frac{k_o T_\mathrm{I}^*}{k_1}$ | $\frac{(c_1 + c_2 - 2c_1 c_2)T}{1 - c_1 - c_2 + c_1 c_2}$ | $\frac{c_1 c_2 T}{c_1 + c_2 - 2c_1 c_2}$ |
| 5 | $\frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ <br> $0{,}5 < \xi_0 \leq 1$ | PID | $\frac{(1-c_w)T_\mathrm{I}^*}{k_1 T}$ | $\frac{k_o T_\mathrm{I}^*}{k_1}$ | $\frac{2c(b-c)}{1-2bc+c^2}T$ | $\frac{c}{2(b-c)}T$ |

Uvažováním aproximací

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \approx \frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}, \qquad (4.151)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \tag{4.152}$$

a zanedbáním malých výrazů, vztahy v tab. 4.15 byly zjednodušeny, a tak byla získána tab. 4.17 [Vítečková 1996].

Tab. 4.16 Hodnoty koeficientů $\alpha$ a $\beta$ pro požadovaný relativní překmit $\kappa$

| $\kappa$ | 0 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 1,282 | 0,984 | 0,884 | 0,832 | 0,763 | 0,697 | 0,669 | 0,640 | 0,618 | 0,599 | 0,577 |
| $\beta$ | 2,718 | 1,944 | 1,720 | 1,561 | 1,437 | 1,337 | 1,248 | 1,172 | 1,104 | 1,045 | 0,992 |

Velkou předností tab. 4.17 je jednoduchost použití, a to jak pro konvenční číslicové regulátory ($T > 0$), tak i pro konvenční analogové regulátory ($T = 0$).

Např. pro 2. řádek v tab. 4.15 lze pro číslicový PI regulátor pro aproximaci (4.151) psát (viz též 2. řádek v tab. 4.17):

Tab. 4.17 Stavitelné parametry konvenčních regulátorů pro metodu požadovaného modelu (MPM)

| Regulovaná soustava | | Regulátor < analogový $T = 0$, číslicový $T > 0$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Typ | $K_P^*$ | | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
| | | | $T_d = 0$ | $T_d > 0$ | | |
| 1 | $\frac{k_1}{s} e^{-T_d s}$ | P | $\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$ | $\frac{1}{k_1(\alpha T + \beta T_d)}$ | – | – |
| 2 | $\frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s}$ | PI | $\frac{2T_I^*}{k_1(2T_w + T)}$ | $\frac{T_I^*}{k_1(\alpha T + \beta T_d)}$ | $T_1 - \frac{T}{2}$ | – |
| 3 | $\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-T_d s}$ | PD | $\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$ | $\frac{1}{k_1(\alpha T + \beta T_d)}$ | – | $T_1 - \frac{T}{2}$ |
| 4 | $\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_d s}$<br>$T_1 \geq T_2$ | PID | $\frac{2T_I^*}{k_1(2T_w + T)}$ | $\frac{T_I^*}{k_1(\alpha T + \beta T_d)}$ | $T_1 + T_2 - T$ | $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$ |
| 5 | $\frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} e^{-T_d s}$<br>$0{,}5 < \xi_0 \leq 1$ | PID | $\frac{2T_I^*}{k_1(2T_w + T)}$ | $\frac{T_I^*}{k_1(\alpha T + \beta T_d)}$ | $2\xi_0 T_0 - T$ | $\frac{T_0}{2\xi_0} - \frac{T}{4}$ |

a) $T_d = 0$

$$c_w = \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_w}} \approx \frac{2T_w - T}{2T_w + T} \Rightarrow \frac{1-c_w}{k_1 T} \approx \frac{2}{k_1(2T_w + T)}.$$

b) $T_d > 0$

$$c_1 = \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}} \approx \frac{2T_1 - T}{2T_1 + T} \Rightarrow \frac{c_1}{1-c_1} T \approx T_1 - \frac{T}{2}.$$

U číslicových regulátorů je velmi důležitá volba vzorkovací periody $T$, která je podrobně popsána v příloze P6.

Pro regulační obvod s analogovým regulátorem seřízeným MPM ($T_d > 0$) na nekmitavý regulační pochod (tj. $\kappa = 0 \Rightarrow \beta = \mathrm{e}$) lze L-přenos řízení aproximovat pomocí dvojnásobného dominantního pólu [viz (4.73) a (4.80)] $s_2 = -1/T_d$, tj.

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{\mathrm{e}T_d s + \mathrm{e}^{-T_d s}} \mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{1}{(T_d s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{4.153}$$

a proto na základě vztahů (P6.6) a (P6.14) se pro $T_w = T_d$ dostane

$$T = (0{,}3 \div 1{,}6)T_d \quad \text{a} \quad T = (0{,}3 \div 0{,}75)T_d. \tag{4.154}$$

Protože jde o nekmitavý regulační pochod, lze při volbě vzorkovací periody $T$ vyjít z předpokladu, že relativní pokles integrálního (sumačního) kritéria $I_{IE}^D$ pro regulační obvod s číslicovým regulátorem ve srovnání s integrálním kritériem $I_{IE}$ pro regulační obvod s analogovým regulátorem by neměl překročit zadanou hodnotu $\delta_{IE}$ [Vítečková 1996], tj.

$$\frac{I_{IE}^D - I_{IE}}{I_{IE}} \le \delta_{IE}. \tag{4.155}$$

Integrální kritéria $I_{IE}$ a $I_{IE}^D$ lze snadno určit pomocí řádku 9 v tab. P7.1 [viz též (4.3) a (4.4)]. Na základě L-přenosu řízení (4.73) se dostane:

$$I_{IE} = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\left\{\left[1 - G_{wy}(s)\right]\frac{1}{s}\right\} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + k_o \mathrm{e}^{-T_d s}} = \frac{1}{k_o}, \tag{4.156}$$

$$\kappa = 0 \Rightarrow \beta = \mathrm{e} \Rightarrow k_o = \frac{1}{\mathrm{e}T_d} \Rightarrow I_{IE} = \mathrm{e}T_d. \tag{4.157}$$

Podobně na základě Z-přenosu řízení (4.125) se dostane:

$$I_{IE}^D = T\sum_{k=0}^\infty e(kT) = T \lim_{z\to 1}\left\{\left[1 - G_{wy}(z)\right]\frac{z}{z-1}\right\} = T \lim_{z\to 1} \frac{z}{z - 1 + k_o T z^{-d}} = \frac{1}{k_o}, \tag{4.158}$$

$$\kappa = 0 \Rightarrow \alpha = 4 - \mathrm{e}, \beta = \mathrm{e} \Rightarrow k_o = \frac{1}{(4-\mathrm{e})T + \mathrm{e}T_d} \Rightarrow I_{IE}^D = (4-\mathrm{e})T + \mathrm{e}T_d . \tag{4.159}$$

Po dosazení (4.157) a (4.159) do (4.155) a úpravě se obdrží

$$\frac{T}{T_d} < \frac{\mathrm{e}}{4-\mathrm{e}} \delta_{IE} . \tag{4.160}$$

Pro běžnou hodnotu $\delta_{IE}$ = 0,15 (15 %) se dostane jednoduchá podmínka pro vzorkovací periodu

$$T < 0{,}32 T_d . \tag{4.161}$$

Ze srovnání vztahů (4.154) a (4.161) vyplývá, že pro mezní nekmitavý regulační pochod ($\kappa$ = 0) pro MPM by vzorkovací perioda $T$ neměla být větší, než 0,3$T_d$.

Pro kmitavý regulační pochod je uvažováno relativní tlumení $\xi_w$ = 0,5, co přibližně odpovídá relativnímu překmitu $\kappa \approx 0{,}2$ (20 %), viz tab. 4.13. Ze vztahů (4.90), (4.92) a (4.93b) se pro $\omega_w = 1/T_w$ a $\xi_w$ = 0,5 dostane

$$\frac{\arccos \xi_w}{T_d} = \frac{1}{T_w}\sqrt{1-\xi_w^2} \Rightarrow T_w \doteq 0{,}83 T_d . \tag{4.162}$$

Na základě vztahu (P6.11) se pro (4.160) obdrží

$$T = (0{,}13 \div 0{,}66) T_d . \tag{4.163}$$

Z výše uvedených vztahů vyplývá, že pokud bude požadován relativní překmit $\kappa \le 0{,}2$ (20 %), pak pro MPM ($T_d$ > 0) pro volbu vzorkovací periody $T$ platí jednoduchá nerovnost

$$T < 0{,}3 T_d . \tag{4.164}$$

Pro $T_d = 0$ pro volbu vzorkovací periody $T$ v souladu s požadovaným L-přenosem řízení (4.117) pro $n$ = 1 se na základě vztahů (P6.6) a (P6.14) obdrží

$$T = (0{,}2 \div 1) T_w \quad \text{a} \quad T = (0{,}2 \div 0{,}5) T_w . \tag{4.165}$$

I v tomto případě lze pro volbu vzorkovací periody $T$ použít vztah (4.155), kde $I_{IE}$ je dáno vztahem (4.156) při uvažování požadovaného L-přenosu řízení (4.117) a $I_{IE}^D$ vztahem (4.158) při uvažování požadovaného Z-přenosu řízení (4.149), tj.

$$I_{IE} = \lim_{s \to 0} \frac{T_w}{T_w s + 1} = T_w , \tag{4.166}$$

$$I_{IE}^D = T \lim_{z \to 1} \frac{z}{z - c_w} = \frac{T}{1 - c_w} . \tag{4.167}$$

Po dosazení (4.166) a (4.167) do (4.155) a úpravě se obdrží

$$\frac{T}{T_w}\frac{1}{1-c_w} \leq 1+\delta_{IE}\,.$$

Po uvažování aproximace (4.151) se pro $c_w$ tato nerovnost zjednoduší

$$\frac{T}{T_w} < 2\delta_{IE}\,. \tag{4.168}$$

Pro běžnou hodnotu $\delta_{IE}$ = 0,15 (15 %) se dostane

$$T < 0{,}3T_w\,. \tag{4.169}$$

Ze srovnání vztahů (4.165) a (4.169) vyplývá, že pro MPM při $T_d$ = 0 lze pro volbu vzorkovací periody $T$ použít jednoduchou nerovnost (4.169).

Pokud jde o hodnocení MPM, tak její určitou vadou je, že je to metoda kompenzační, která je použitelná pro $T_1 \leq 8T_d$, protože jinak by odezva na poruchovou veličinu $v(t)$ působící na vstupu soustavy byla velmi pomalá. Další její nevýhodou je, že pro integrační soustavy při poruše $v(t)$ na jejích vstupech zanechává trvalou regulační odchylku.

Velkou předností MPM je její jednoduchost, přesnost a univerzálnost umožňující seřizovat jak analogové, tak i číslicové konvenční regulátory. Pro požadovaný relativní překmit v rozmezí $0 \leq \kappa \leq 0{,}2$ (20 %) je rovněž velmi robustní.

Pro číslicové regulátory s dopřednou obdélníkovou a lichoběžníkovou sumací jsou odpovídající vztahy pro MPM uvedeny v [Vítečková 1993, 1996].

**Postup:**

1. L-přenos soustavy se libovolnou metodou z podkap. 3.1 a 3.2 upraví na vhodný tvar z tab. 4.17, který současně určuje doporučený regulátor.
2. Pro požadovaný relativní překmit $\kappa$ se z tab. 4.16 určí hodnota koeficientu $\beta$ v případě analogového regulátoru a v případě číslicového regulátoru ještě hodnota koeficientu $\alpha$.
3. Pro doporučený analogový regulátor se na základě tab. 4.17 pro $T = 0$ určí hodnoty jeho stavitelných parametrů. Pro číslicový regulátor se na základě vztahu (4.164), příp. (4.169) určí hodnota vzorkovací periody $T$ a pak hodnoty jeho stavitelných parametrů.
4. Regulační pochod je možné doladit změnou zesílení regulátoru $K_P$.

**Příklad 4.9**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{2}{5s+1}\mathrm{e}^{-6s}$$

je třeba seřídit konvenční analogový a číslicový regulátor PI tak, aby relativní překmit $\kappa$ = 0; 0,1 a 0,2 (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v min).

**Řešení:**

Pro zadané hodnoty relativního překmitu $\kappa$ se na základě tab. 4.16 určí hodnoty koeficientů $\alpha$ a $\beta$:

$$\kappa = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = 1{,}282; \ \beta = 2{,}718,$$

$$\kappa = 0{,}1 \ \Rightarrow \ \alpha = 0{,}884; \ \beta = 1{,}720,$$

$$\kappa = 0{,}2 \ \Rightarrow \ \alpha = 0{,}763; \ \beta = 1{,}437.$$

Pro parametry soustavy $k_1$ = 2, $T_1$ = 5 a $T_d$ = 6 se z řádku 2 v tab. 4.17 vypočtou odpovídající hodnoty stavitelných parametrů analogového a číslicového regulátoru PI. Vzorkovací perioda $T$ se zvolí v souladu se vztahem (4.164), např. $T$ = 1.

Analogový regulátor PI ($T$ = 0)

$$\kappa = 0 \ \Rightarrow \ K_P^* \doteq 0{,}15; \ T_I^* = 5,$$

$$\kappa = 0{,}1 \ \Rightarrow \ K_P^* \doteq 0{,}24; \ T_I^* = 5,$$

$$\kappa = 0{,}2 \ \Rightarrow \ K_P^* \doteq 0{,}29; \ T_I^* = 5.$$

Číslicový regulátor PI ($T$ = 1)

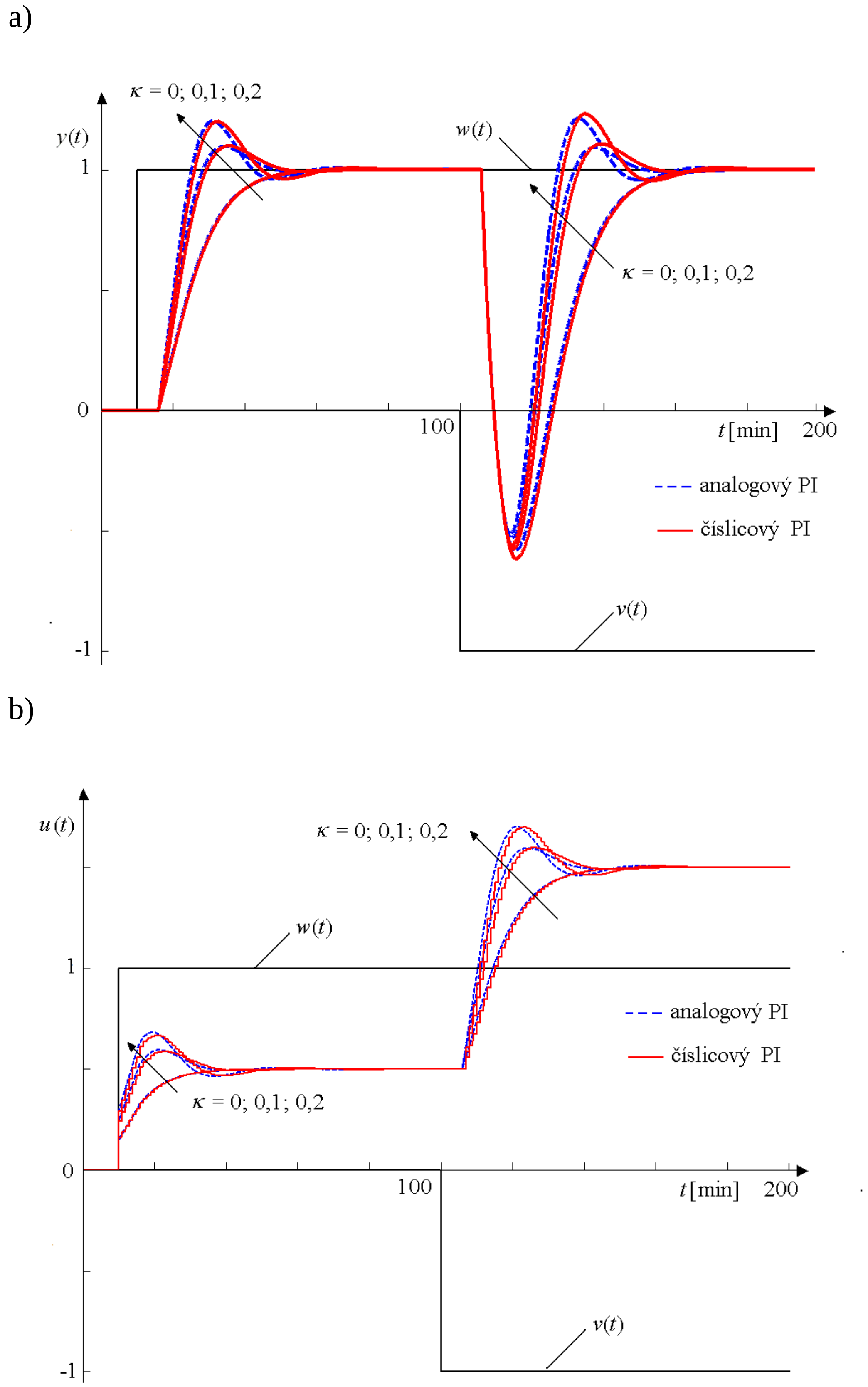
$$\kappa = 0 \ \Rightarrow \ K_P^* \doteq 0{,}13; \ T_I^* = 4{,}5,$$

$$\kappa = 0{,}1 \ \Rightarrow \ K_P^* \doteq 0{,}20; \ T_I^* = 4{,}5,$$

$$\kappa = 0{,}2 \ \Rightarrow \ K_P^* \doteq 0{,}24; \ T_I^* = 4{,}5.$$

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ jsou na obr. 4.35a a odpovídající průběhy akční veličiny $u(t)$ na obr. 4.35b.

Z obr. 4.35 vyplývá, že MPM dává poměrně kvalitní výsledky.




Obr. 4.35 Regulační obvod s regulátorem PI seřízeným MPM pro různé relativní překmity $\kappa$: a) průběhy regulované veličiny $y(t)$, b) průběhy akční veličiny $u(t)$ – příklad 4.9

**Příklad 4.10**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{2}{(5s+1)(3s+1)} \mathrm{e}^{-6s}$$

je třeba seřídit konvenční standardní analogový a číslicový regulátor PID tak, aby relativní překmit $\kappa$ = 0; 0,1 a 0,2 (časové konstanty a dopravní zpoždění jsou v min).

**Řešení:**

Pro zadané hodnoty relativního překmitu $\kappa$ se na základě tab. 4.16 dostanou stejné hodnoty koeficientů $\alpha$ a $\beta$, jako v předchozím příkladě, tj.:

$$\kappa = 0 \Rightarrow \alpha = 1{,}282;\ \beta = 2{,}718,$$

$$\kappa = 0{,}1 \Rightarrow \alpha = 0{,}884;\ \beta = 1{,}720,$$

$$\kappa = 0{,}2 \Rightarrow \alpha = 0{,}763;\ \beta = 1{,}437.$$

Pro parametry soustavy $k_1 = 2$, $T_1 = 5$, $T_2 = 3$ a $T_d = 6$ se z řádku 4 v tab. 4.17 vypočtou odpovídající hodnoty stavitelných parametrů standardního analogového a číslicového regulátoru PID. Vzorkovací perioda $T$ se zvolí v souladu se vztahem (4.164), podobně jako v předchozím příkladě je $T = 1$.

Analogový regulátor PID ($T = 0$)

$$\kappa = 0 \Rightarrow K_P^* \doteq 0{,}25;\ T_I^* = 8;\ T_D^* \doteq 1{,}88;$$

$$\kappa = 0{,}1 \Rightarrow K_P^* \doteq 0{,}39;\ T_I^* = 8;\ T_D^* \doteq 1{,}88,$$

$$\kappa = 0{,}2 \Rightarrow K_P^* \doteq 0{,}46;\ T_I^* = 8;\ T_D^* \doteq 1{,}88.$$

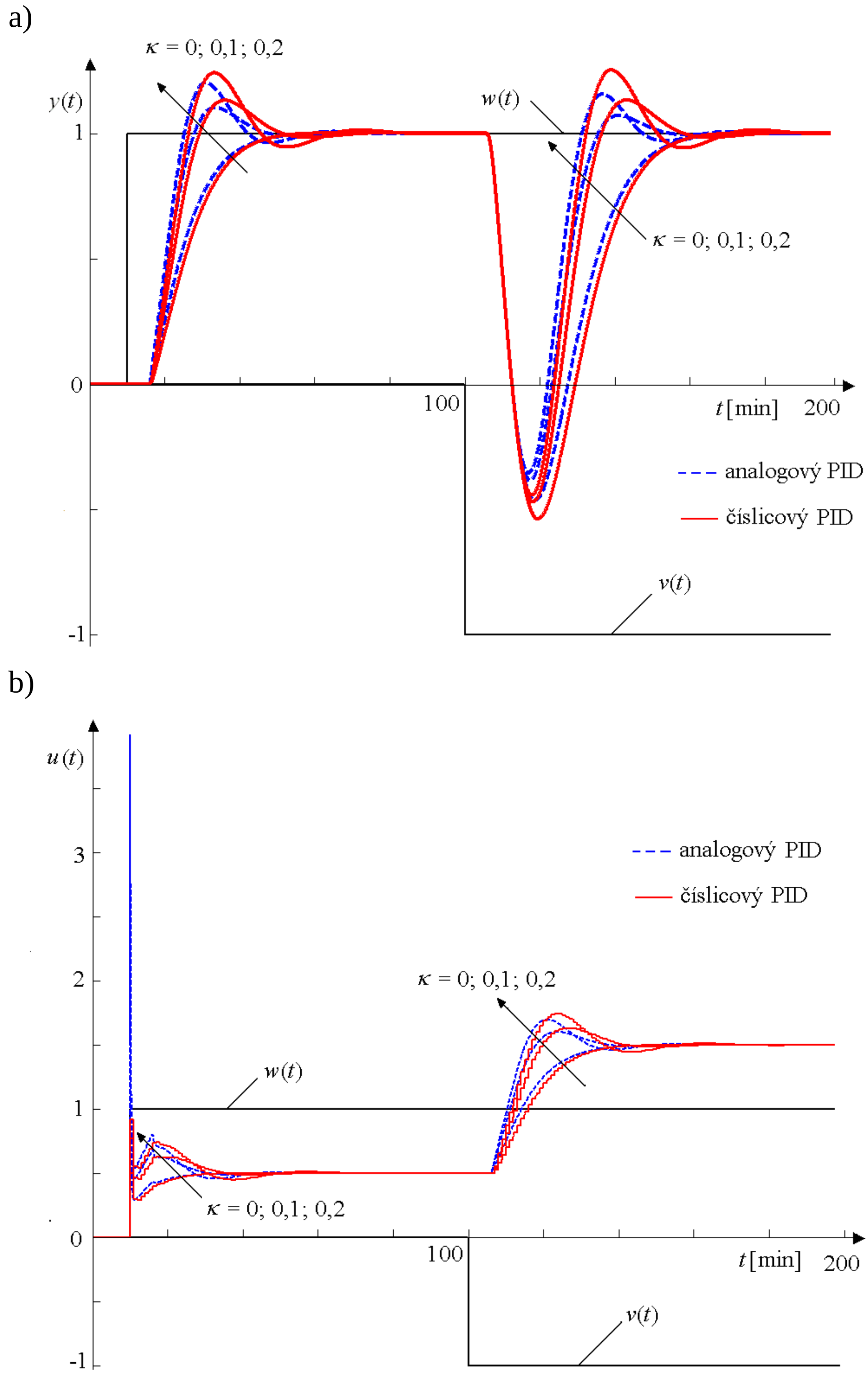
Číslicový regulátor PID ($T = 1$)

$$\kappa = 0 \Rightarrow K_P^* \doteq 0{,}20;\ T_I^* = 7;\ T_D^* \doteq 1{,}63,$$

$$\kappa = 0{,}1 \Rightarrow K_P^* \doteq 0{,}31;\ T_I^* = 7;\ T_D^* \doteq 1{,}63,$$

$$\kappa = 0{,}2 \Rightarrow K_P^* \doteq 0{,}37;\ T_I^* = 7;\ T_D^* \doteq 1{,}63.$$

Získané průběhy regulované veličiny $y(t)$ jsou na obr. 4.36a a odpovídající průběhy akční veličiny $u(t)$ na obr. 4.36b. I když pro číslicový regulátor PID byly použity zjednodušené vztahy pro určení jeho stavitelných parametrů, získané výsledky jsou poměrně dobré.




Obr. 4.36 Regulační obvod se standardním regulátorem PID seřízeným MPM pro různé relativní překmity $\kappa$: a) průběhy regulované veličiny $y(t)$, b) průběhy akční veličiny $u(t)$ – příklad 4.10

**Příklad 4.11**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{2}{(3s+1)^3}$$

je třeba seřídit konvenční analogové a číslicové regulátory PI a PID tak, aby relativní překmit $\kappa = 0{,}05$ (časová konstanta je v sekundách).

**Řešení:**

Pro zadaný relativní překmit $\kappa = 0{,}05$ se z tab. 4.16 určí koeficienty $\alpha = 0{,}984$ a $\beta = 1{,}944$.

Protože L-přenos soustavy nemá tvar vhodný pro MPM (viz tab. 4.17), proto je ho třeba vhodně upravit. Např. na základě schématu (3.10) a tab. 3.1 lze psát ($i = 3$, $T_3 = 3$, $T_{d3} = 0$):

a) $$\frac{T_1}{T_3} = 1{,}980 \Rightarrow T_1 = 5{,}94; \ \frac{T_{d1}}{T_3} = 1{,}232 \Rightarrow T_{d1} \doteq 3{,}7\,,$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(3s+1)^3} \approx \frac{2}{5{,}94s+1}\mathrm{e}^{-3{,}7s}\,.$$

b) $$\frac{T_2}{T_3} = 1{,}263 \Rightarrow T_2 \doteq 3{,}79; \ \frac{T_{d2}}{T_3} = 0{,}535 \Rightarrow T_{d2} \doteq 1{,}61\,,$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(3s+1)^3} \approx \frac{2}{(3{,}79s+1)^2}\mathrm{e}^{-1{,}61s}\,.$$

Pomocí vztahu (4.164) lze zvolit vzorkovací periodu $T$. Např. pro číslicový regulátor PI $T = 1$ a pro číslicový regulátor PID $T = 0{,}5$ [tato hodnota je o něco větší, než doporučuje vztah (4.164)].

Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů se určí na základě tab. 4.17.

Analogový regulátor PI ($T = 0$)

$$K_P^* \doteq 0{,}41; \ T_I^* = 5{,}94\,.$$

Číslicový regulátor PI ($T = 1$)

$$K_P^* \doteq 0{,}33; \ T_I^* = 5{,}44\,.$$

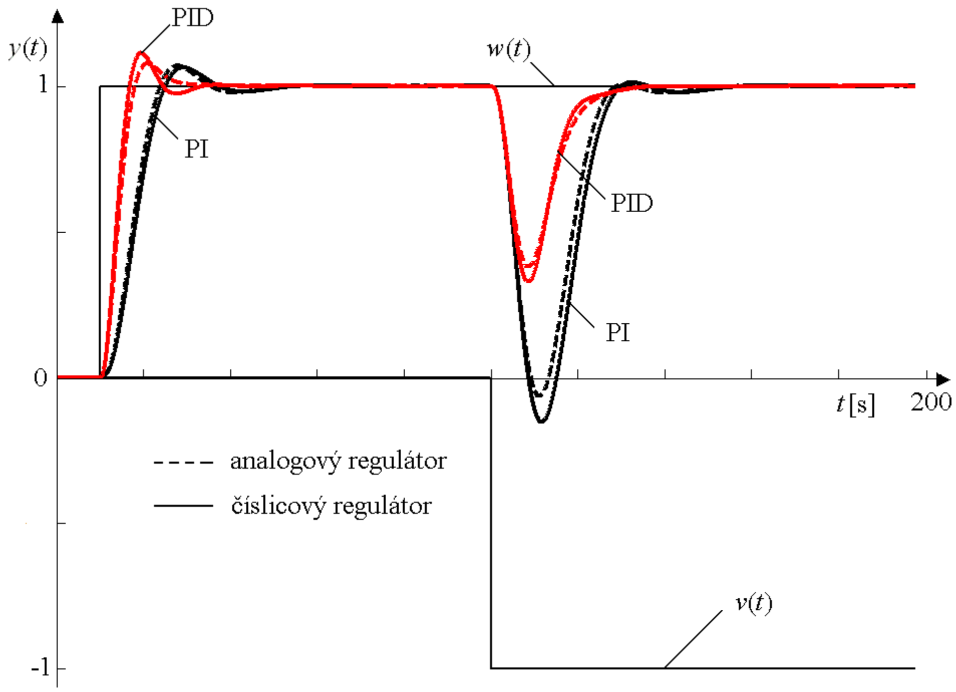
Analogový regulátor PID ($T = 0$)

$$K_P^* \doteq 1{,}05; \ T_I^* = 7{,}57; \ T_D^* \doteq 1{,}9\,.$$

Číslicový regulátor PID ($T = 0{,}5$)

$$K_P^* \doteq 0{,}98; \ T_I^* = 7{,}07; \ T_D^* \doteq 1{,}77\,.$$

Získané průběhy jsou na obr. 4.37 a je zřejmé, že i přes poměrně hrubou aproximaci L-přenosu soustavy je regulace poměrně kvalitní.




Obr. 4.37 Regulační obvod s konvenčními regulátory PI a PID seřízenými metodou MPM pro $\kappa \approx 0{,}05$ (5 %) – příklad 4.11

### 4.3.5 Metoda optimálního modulu a symetrického optima

Pro regulované soustavy nízkého řádu bez dopravního zpoždění je pro seřízení konvenčních analogových regulátorů často používána metoda optimálního modulu (MOM) a metoda symetrického optima (MSO) [Åström, Hägglund 1995; Kalaš, Jurišica, Žalman 1978; Černý et al. 1984; Szklarski, Jaracz, Víteček 1989; Veselý a kol. 1992].

#### a) Metoda optimálního modulu

Metoda optimálního modulu (MOM) patří mezi analytické metody. Vychází z požadavku na L-přenos řízení [viz (1.10) a obr. 4.38)]

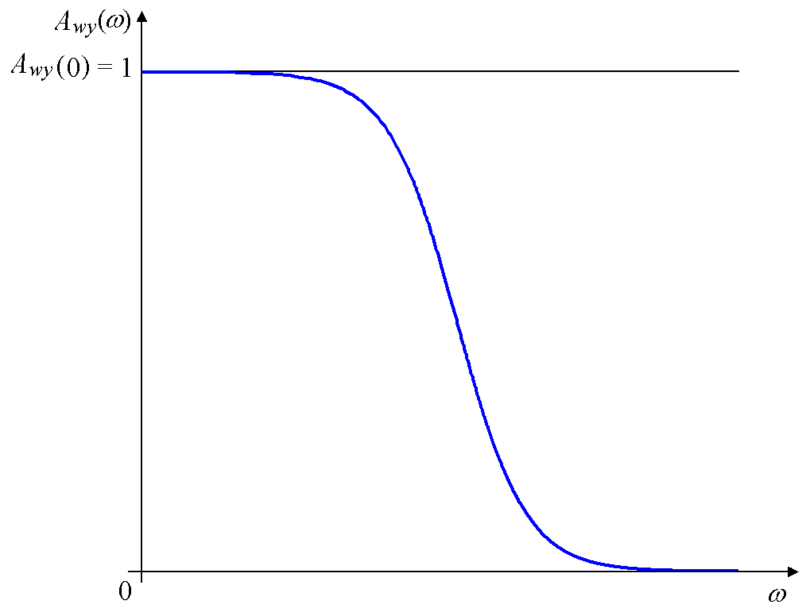
$$G_{wy}(s) \to 1 \Rightarrow G_{wy}(\mathrm{j}\omega) \to 1 \Rightarrow A_{wy}(\omega) \to 1 \Rightarrow A_{wy}^2(\omega) \to 1. \tag{4.170}$$

Poslední vztah je důležitý, protože s druhou mocninou se lépe pracuje a navíc platí

$$(\alpha + \mathrm{j}\omega)(\alpha - \mathrm{j}\omega) = \alpha^2 + \omega^2 = |\alpha + \mathrm{j}\omega|^2, \tag{4.171}$$

a proto

$$A_{wy}^2(\omega) = G_{wy}(\mathrm{j}\omega)G_{wy}(-\mathrm{j}\omega). \tag{4.172}$$




Obr. 4.38 Požadovaný průběh modulu kmitočtového přenosu řízení pro MOM

Dále se předpokládá, že D-přenos řízení má tvar [Vítečková aj. 2002; Vítečková 2003; Vítečková, Víteček 2003]

$$G_{wy}(\gamma) = \frac{\beta_m \gamma^m + \ldots + \beta_1 \gamma + \beta_0}{\alpha_n \gamma^n + \ldots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0}, \; n \geq m, \tag{4.173}$$

kde $\gamma$ je komplexní proměnná v D-transformaci (viz příloha P1).

Pro malou hodnotu vzorkovací periody $T$ lze použít aproximaci exponenciální funkce prvními dvěma členy jejího Taylorového rozvoje, tj.

$$\mathrm{e}^{Ts} = 1 + Ts,$$

pak platí

$$\gamma = \frac{\mathrm{e}^{Ts} - 1}{T} \approx s$$

a v souladu se vztahy (4.172) a (4.173) lze psát

$$A_{wy}^2(\omega) = \frac{B_m \omega^{2m} + \ldots + B_1 \omega^2 + B_0}{A_n \omega^{2n} + \ldots + A_1 \omega^2 + A_0}, \tag{4.174a}$$

kde

$$A_i = \alpha_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j \alpha_{i-j} \alpha_{i+j}, \quad i = 0,1,\ldots,n\,, \tag{4.174b}$$

$$B_i = \beta_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j \beta_{i-j} \beta_{i+j}, \quad i = 0,1,\ldots,m\,. \tag{4.174c}$$

V případě $m = n$ pro

$$A_i = B_i, \quad i = 0,1,\dots,n \tag{4.175}$$

se dosáhne nezávislosti na úhlovém kmitočtu $\omega$ a vztahy (4.170) platí pro ideální rovnosti.

Ve skutečnosti musí být splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti $n > m$ a také u regulátorů není většinou k dispozici dostatečný počet stavitelných parametrů, a proto u metody optimálního modulu se předpokládá splnění rovností

$$A_i B_0 = A_0 B_i, \qquad i = 1,2,\dots,p, \tag{4.176}$$

kde $p$ je počet stavitelných parametrů použitého regulátoru.

Vzhledem k tomu, že $m \le n$ a pro $p \le n$, je zřejmé, že ne vždy jsou uvažovány všechny koeficienty přenosu řízení $G_{wy}$. Z tohoto důvodu je třeba kontrolovat stabilitu, protože MOM nemusí být vždy použitelná.

Jsou uvažovány pouze takové případy L-přenosů soustav (viz tab. 4.18), které u regulačních obvodů s analogovými regulátory po kompenzaci největších časových konstant regulované soustavy časovými konstantami regulátoru vedou na standardní tvar L-přenosu řízení pro metodu optimálního modulu

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}, \tag{4.177a}$$

$$\xi_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}707, \quad T_w = T_i\sqrt{2}, \tag{4.177b}$$

kde $\xi_w$ je koeficient tlumení, $T_w$ – časová konstanta regulačního obvodu ($i$ = 1 pro 1. a 2. řádek, $i$ = 2 pro 3. a 4. řádek a $i$ = 3 pro 5. řádek v tab. 4.18). V tomto případě samozřejmě kontrolovat stabilitu není třeba. Je zajímavé, že koeficienty charakteristického mnohočlenu v (4.177a) odpovídají koeficientům standardních tvarů charakteristických mnohočlenů podle Whiteleyho, Naslina a kritéria ITAE s relativním překmitem přechodové charakteristiky okolo 4,3 %.

Hodnoty časových konstant regulátoru $T_I^*$ a $T_D^*$ se určí z podmínek pro kompenzaci a hodnota zesílení regulátoru $K_P^*$ se určí pro $i$ = 1 ze vztahu (4.176), který bude mít tvar [viz (4.174b) a (4.174c)]

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_2 = \beta_1^2 - 2\beta_0\beta_2, \tag{4.178}$$

protože otevřený regulační obvod obsahuje sumační (integrační) člen, a proto

$$\alpha_0 = \beta_0 \Leftrightarrow A_0 = B_0.$$

Pro určení D-přenosu řízení (4.173) byl použit D-přenos regulované soustavy $G_S(\gamma)$ stanovený na základě vztahu (P1.30)

$$G_S(\gamma) = \frac{\gamma}{T\gamma + 1} \mathrm{D}\left\{ \mathrm{L}^{-1}\left\{ \frac{G_S(s)}{s} \right\}\Bigg|_{t=kT} \right\}. \tag{4.179}$$

Např. pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}, \; T_1 > T_2 \tag{4.180}$$

se dostane na základě vztahu (4.179) [viz též tab. P1.2 pro $T_d = 0$]:

$$G_S(\gamma) = k_1 \frac{(T_2 a_2 - T_1 a_1)T\gamma + (T_2 - T_1)a_1 a_2}{(T_2 - T_1)(T\gamma + a_1)(T\gamma + a_2)}, \tag{4.181a}$$

$$a_1 = 1 - \mathrm{e}^{-T/T_1}, \quad a_2 = 1 - \mathrm{e}^{-T/T_2}. \tag{4.181b}$$

Pro soustavu s D-přenosem (4.181a) a konvenční číslicový regulátor PI s D-přenosem (viz tab. P1.1)

$$G_R(\gamma) = K_P \frac{(T_I + T)\gamma + 1}{T_I \gamma},$$

se dostane D-přenos otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma) G_S(\gamma) = \frac{K_P k_1 [(T_I + T)\gamma + 1][(T_2 a_2 - T_1 a_1)T\gamma + (T_2 - T_1)a_1 a_2]}{(T_2 - T_1)T_I \gamma (T\gamma + a_1)(T\gamma + a_2)}. \tag{4.182}$$

Integrační časová konstanta číslicového regulátoru $T_I$ se určí z podmínky pro kompenzaci, tj.

$$T_I + T = \frac{T}{a_1} \Rightarrow T_I^* = \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)T. \tag{4.183}$$

Použitím aproximace (4.151) dostane vztah pro integrační časovou konstantu číslicového regulátoru praktičtější tvar

$$T_I^* = \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)T \approx T_1 - 0{,}5T. \tag{4.184}$$

Pro $T_1/T \geq 2$ je chyba aproximace menší než 3 % a pro $T_1/T \geq 4$ dokonce menší než 1 %.

Po kompenzaci se D-přenos otevřeného regulačního obvodu zjednoduší

$$G_o(\gamma) = \frac{K_P k_1 [(T_2 a_2 - T_1 a_1)T\gamma + (T_2 - T_1)a_1 a_2]}{(1 - a_1)(T_2 - T_1)T\gamma(T\gamma + a_2)} =$$

$$= \frac{K_P k_1 (AT\gamma + B)}{CT\gamma(T\gamma + a_2)}, \tag{4.185a}$$

$$A = \frac{T_2 a_2 - T_1 a_1}{T_2 - T_1}, \; B = a_2 a_1, \; C = 1 - a_1. \tag{4.185b}$$

Pak D-přenos řízení má tvar

$$G_{wy}(\gamma)=\frac{\beta_1\gamma+\beta_0}{\alpha_2\gamma^2+\alpha_1\gamma+\alpha_0}\,, \tag{4.186a}$$

kde

$$\begin{aligned}&\alpha_0=K_Pk_1B,\ \alpha_1=(a_2C+K_Pk_1A)T,\ \alpha_2=CT^2,\\ &\beta_0=K_Pk_1B,\ \beta_1=K_Pk_1AT.\end{aligned} \tag{4.186b}$$

Z rovnosti (4.178) se dostane

$$\alpha_1^2-2\alpha_0\alpha_2=\beta_1^2$$

a po dosazení (4.186b) a (4.185b) lze určit vztah pro zesílení regulátoru

$$K_P^*=\frac{a_2^2C}{2k_1(B-a_2A)}=\frac{(1-a_1)a_2(T_2-T_1)}{2k_1T_2(a_1-a_2)}\,. \tag{4.187}$$

Tab. 4.18 Stavitelné parametry konvenčních regulátorů pro metodu optimálního modulu (MOM)

| Regulovaná soustava | | Regulátor < analogový $T=0$, číslicový $T>0$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Typ | $K_P^*$ | $T_I^*$ | $T_D^*$ |
| 1 | $\dfrac{k_1}{T_1s+1}$ | I | – | $2k_1(T_1-0{,}5T)$ | – |
| 2 | $\dfrac{k_1}{s(T_1s+1)}$ | P | $\dfrac{1}{2k_1T_1}$ | – | – |
| 3 | $\dfrac{k_1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $T_1\ge T_2$ | PI | $\dfrac{T_1-0{,}5T}{2k_1T_2}$ | $T_1-0{,}5T$ | – |
| 4 | $\dfrac{k_1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $T_1\ge T_2$ | PD | $\dfrac{1}{2k_1(T_2+0{,}5T)}$ | – | $T_1-0{,}5T$ |
| 5 | $\dfrac{k_1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$ $T_1\ge T_2\ge T_3$ | PID | $\dfrac{T_1+T_2-T}{2k_1(T_3+0{,}5T)}$ | $T_1+T_2-T$ | $\dfrac{T_1T_2}{T_1+T_2}-\dfrac{T}{4}$ |

Po uvažování aproximace (4.151) pro $a_1$ a $a_2$ se dostane velmi jednoduchý vztah

$$K_P^* = \frac{(1-a_1)a_2(T_2-T_1)}{2k_1T_2(a_1-a_2)} \approx \frac{T_1-0{,}5T}{2k_1T_2}. \tag{4.188}$$

Je zřejmé, že vztahy (4.188) i (4.184) pro $T \to 0$ platí i pro konvenční analogový regulátor PI.

Podobným postupem byly získány i zbývající vztahy v tab. 4.18.

U číslicových regulátorů je možno použít pro volbu vzorkovací periody $T$ vztah (P6.10)

$$T = (0{,}2 \div 1)T_w, \tag{4.189}$$

kde $T_w$ je dáno (4.177b).

Určitou nevýhodou popisované MOM je to, že je to metoda kompenzační a dále, že pro integrační soustavy při poruchové veličině $v(t)$ působící na jejich vstupu zanechává trvalou regulační odchylku.

**Postup:**

1. L-přenos soustavy se upraví na vhodný tvar podle tab. 4.18 (nejjednodušší postup je s využitím náhradní součtové časové konstanty, viz podkap. 3.2), který současně určuje doporučený konvenční regulátor.
2. Pro doporučený regulátor se podle tab. 4.18 vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů. U číslicového regulátoru je třeba při volbě vzorkovací periody $T$ dodržet doporučení (4.189).

### b) Metoda symetrického optima

Metoda symetrického optima (MSO) je vhodná pro seřizování regulačních obvodů s řádem astatismu $q \geq 2$, a především v případě působení poruch před soustavou. Zde se předpokládá $q = 2$ (regulační obvod 2. typu) a L-přenos řízení regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI ve standardním tvaru (viz obr. 1.1b)

$$G_{w'y}(s) = \frac{4T_is+1}{8T_i^3s^3+8T_i^2s^2+4T_is+1} = \frac{4T_is+1}{(2T_is+1)(4T_i^2s^2+2T_is+1)}, \tag{4.190}$$

kde $i$ = 1, 2 v souladu s odpovídajícím řádkem v tab. 4.19.

Standardní tvar L-přenosu řízení pro MSO vznikne pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_1s+1)} \tag{4.191}$$

a konvenční analogový regulátor PI s L-přenosem

$$G_R(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

po seřízení podle tab. 4.19 pro $T = 0$.

Na L-přenos řízení ve tvaru (4.190) vede i soustava v řádku 2 v tab. 4.19, protože pro $T_1 >> T_2$ lze psát [viz též (4.62)]

$$\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{\left(s+\dfrac{1}{T_1}\right)(T_2 s+1)} \approx \frac{\dfrac{k_1}{T_1}}{s(T_2 s+1)}. \tag{4.192}$$

Aproximaci (4.192) lze použít pro $T_1 > 4T_2$.

Tab. 4.19 Stavitelné parametry konvenčního regulátoru PI pro metodu symetrického optima (MSO)

| Regulovaná soustava | | Regulátor PI < analogový $T = 0$, číslicový $T > 0$ | |
|---|---|---|---|
| | | $K_P^*$ | $T_I^*$ |
| 1 | $\dfrac{k_1}{s(T_1 s+1)}$ | $\dfrac{4}{k_1(8T_1+3T)}$ | $4T_1 - 0{,}5T$ |
| 2 | $\dfrac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ <br> $T_1 >> T_2$ | $\dfrac{4T_1}{k_1(8T_2+3T)}$ | $4T_2 - 0{,}5T$ |

Pro výpočet hodnot stavitelných parametrů regulátoru PI na základě D-transformace je třeba řešit soustavu dvou rovnic [viz (4.174)]

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_P^* \\ T_I^* \end{aligned} \tag{4.193}$$

Jsou to nelineární rovnice, ze kterých po pracných zjednodušeních byly určeny přibližné vztahy pro hodnoty stavitelných parametrů, které platí pro konvenční regulátor PI, jak analogový ($T = 0$), tak i číslicový ($T > 0$), viz tab. 4.19. Podrobný postup získání stavitelných parametrů je uveden v [Mizera 2006].

Protože pro integrační soustavu byl použit regulátor s integrační (sumační) složkou, proto v odezvě na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ vystoupí překmit větší než 40 % (u regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI okolo 43 %), který nemůže být odstraněn pomocí konvenčního regulátoru PI (podrobněji viz příloha P4). Tento překmit může být podstatně snížen použitím regulátoru PI 2DOF (u regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI 2DOF na hodnotu okolo 8 %) pro váhu žádané veličiny u proporcionální složky $b = 0$. Jejím mírným zvýšením na hodnotu okolo $b = 0{,}15$ lze dosáhnout rychlejší odezvy bez výrazného zvýšení překmitu.

Z L-přenosu (4.190) pro $b = 0{,}5$ [viz (2.27)] je zřejmé, že dojde i ke kompenzaci dvojčlenu $2T_i s + 1$, a proto $\xi_i = 0{,}5$ a překmit bude okolo 20 % (viz příklad 4.13).

U číslicového regulátoru PI lze pro volbu vzorkovací periody $T$ přibližně vyjít ze vztahu (P6.11)

$$\begin{aligned} T &= (0{,}16 \div 0{,}8)T_w, \\ T_w &= \sqrt{2}T_i, \end{aligned} \tag{4.194}$$

kde $i = 1, 2$ v souladu s odpovídajícím řádkem v tab. 4.19.

MSO, podobně jako MOM, se převážně používá u elektrických pohonů, kde místo vstupního filtru nebo regulátoru PI 2DOF se používá omezení rychlosti nárůstu žádané veličiny [Kalaš, Jurišica, Žalman 1978; Szklarski, Jaracz, Víteček 1989].

**Postup:**

1. L-přenos soustavy musí mít tvar uvedený v tab. 4.19, jinak je ho třeba upravit, např. pomocí součtové časové konstanty, viz podkap. 3.2.
2. Na základě tab. 4.19 se vypočtou hodnoty stavitelných parametrů regulátoru. U číslicového regulátoru je třeba při volbě vzorkovací periody $T$ dodržet doporučení (4.194) a v případě použití regulátoru PI 2DOF se nejčastěji volí $b = 0$.

**Příklad 4.12**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{2}{(10s+1)(6s+1)(2s+1)^2}$$

je třeba zvolit vhodné analogové a číslicové regulátory a seřídit je metodou optimálního modulu (všechny časové konstanty jsou v sekundách).

**Řešení:**

Aby bylo možné použít MOM je nutné L-přenos soustavy upravit na tvary v řádku 3 a 5 v tab. 4.18. Pro $k_1 = 2$, $T_{10} = 10$, $T_{20} = 6$, $T_{30} = T_{40} = 2$ se na základě rovnosti doplňkových ploch nad náhradní a původní přechodovou charakteristikou soustavy (viz podkap. 3.2) dostane:

$$T_1 = T_{10} + T_{30} = 12,\; T_2 = T_{20} + T_{40} = 8 \;\Rightarrow$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(10s+1)(6s+1)(2s+1)^2} \approx \frac{2}{(12s+1)(8s+1)}, \tag{4.195}$$

$$T_1 = T_{10} = 10,\ T_2 = T_{20} = 6,\ T_3 = T_{30} + T_{40} = 4 \Rightarrow$$

$$G_S(s) = \frac{2}{(10s+1)(6s+1)(2s+1)^2} \approx \frac{2}{(10s+1)(6s+1)(4s+1)}. \tag{4.196}$$

U číslicového regulátoru pro volbu vzorkovací periody $T$ je uvažován vztah (4.189). Na základě tab. 4.18, řádku 3 a 5 se obdrží hodnoty stavitelných parametrů doporučených regulátorů.

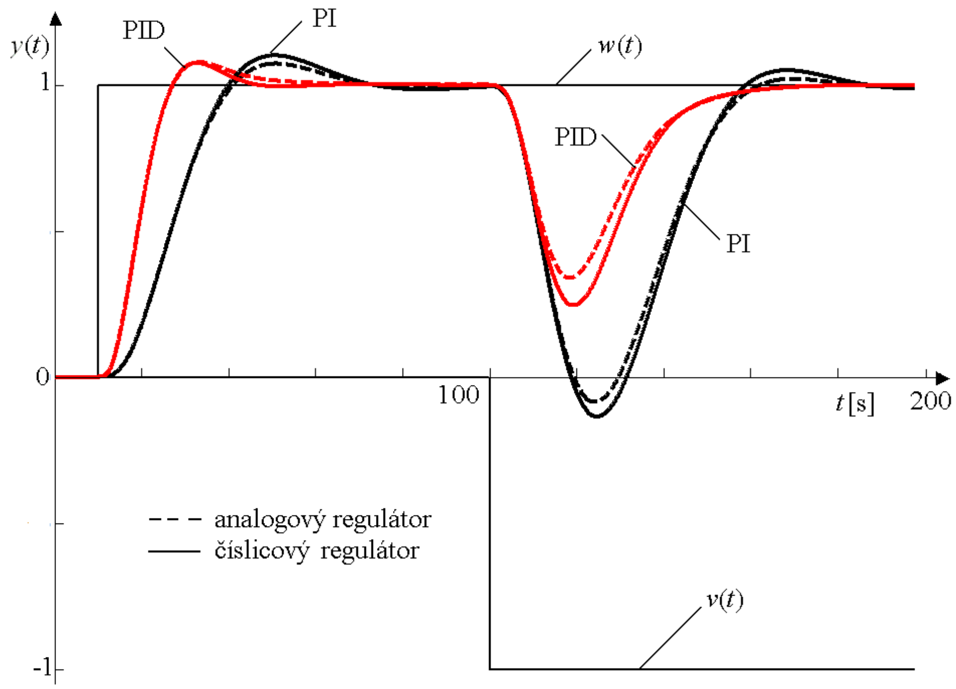
Soustava s náhradním přenosem (4.195)

Analogový regulátor PI ($T$ = 0)

$$K_P^* \doteq 0{,}38;\ T_I^* = 12.$$

Číslicový regulátor PI ($T$ = 2)

$$K_P^* \doteq 0{,}34;\ T_I^* = 11.$$




Obr. 4.39 Regulační obvod s konvenčními regulátory PI a PID seřízenými MOM – příklad 4.12

Soustava s náhradním přenosem (4.196)

Analogový regulátor PID ($T$ = 0)

$$K_P^* = 1;\ T_I^* = 16;\ T_D^* = 3{,}75.$$

Číslicový regulátor PID ($T$ = 1)

$$K_P^* \doteq 0{,}83;\; T_I^* = 15;\; T_D^* = 3{,}5.$$

Získané průběhy jsou na obr. 4.39, ze kterých je zřejmé, že i přes velmi jednoduchou úpravu L-přenosu soustavy na tvary vhodné pro MOM jsou výsledky velmi dobré. V obecném případě MOM je na úpravu L-přenosů dost citlivá, a proto při konkrétním použití MOM je třeba věnovat pozornost i vlastní úpravě L-přenosu soustavy na vhodný tvar.

**Příklad 4.13**

Metodou symetrického optima je třeba seřídit analogový i číslicový regulátor PI pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{1}{s(10s+1)(2s+1)}.$$

Časové konstanty jsou v sekundách.

**Řešení:**

L-přenos soustavy nemá vhodný tvar pro MSO (viz tab. 4.19), a proto je ho nutno upravit. Pro $k_1$ = 1, $T_{10}$ = 10 a $T_{20}$ = 2 se na základě rovnosti doplňkových ploch nad náhradní a původní přechodovou charakteristikou soustavy (viz podkap. 3.2) dostane:

$$T_1 = T_{10} + T_{20} = 12 \;\Rightarrow$$

$$G_S(s) = \frac{1}{s(10s+1)(2s+1)} \approx \frac{1}{s(12s+1)}.$$

Z tab. 4.19 se pak obdrží hodnoty stavitelných parametrů.

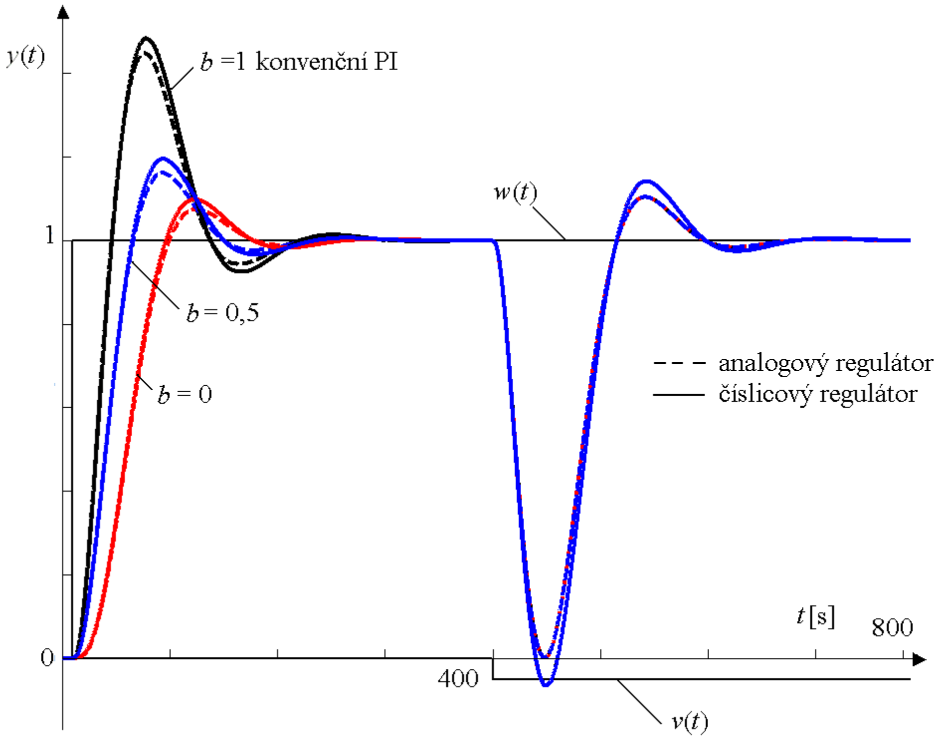
Analogový regulátor PI ($T$ = 0)

$$K_P^* \doteq 0{,}042;\; T_I^* = 48.$$

Číslicový regulátor PI [$T$ = 2, vyhovuje vztahu (4.194)]

$$K_P^* \doteq 0{,}039;\; T_I^* = 47.$$

Na obr. 4.40 jsou ukázány průběhy regulované veličiny $y(t)$ pro různé hodnoty váhy žádané veličiny u proporcionální složky $b$. Pro $b$ = 1 regulátory jsou konvenční (1DOF). Je zřejmé, že použitím regulátorů PI 2DOF došlo k podstatnému snížení překmitu v odezvě na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$. Vzhledem k integračnímu charakteru soustavy, jejímu koeficientu přenosu a regulátoru s integrační (sumační) složkou byla velikost skokové změny polohy poruchové veličiny $v(t)$ snížena na hodnotu 0,05.




Obr. 4.40 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem PI 2DOF seřízeným MSO pro různé hodnoty váhy *b* – příklad 4.13

### 4.3.6 Metoda násobného dominantního pólu

Metoda násobného dominantního pólu (MNDP) je analytická metoda, která je vhodná jak pro pedagogické účely, tak i pro technickou praxi. Analytickou cestou umožňuje určit hodnoty stavitelných parametrů konvenčních regulátorů i regulátorů se dvěma stupni volnosti za předpokladu, že regulační pochod má být nekmitavý (aperiodický).

U proporcionálních soustav s dopravním zpožděním MNDP dává poměrně kvalitní regulační pochod z hlediska žádané $w(t)$ i poruchové $v(t)$ veličiny. Problémy vystupují při malých hodnotách dopravního zpoždění, kdy odezva na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ obsahuje překmit, který může v některých případech být nežádoucí.

U integračních soustav pro konvenční regulátory s integrační složkou MNDP dává kvalitní odezvu na skokovou změnu polohy poruchy působící na jejím vstupu $v(t)$, ale současně velký překmit při skokové změně žádané veličiny $w(t)$, případně poruchové veličiny působící na výstupu soustavy $v_1(t)$ (viz příloha P4).

MNDP vychází z předpokladu, že násobný dominantní pól je stabilní a reálný a že nedominantní póly a nuly mají na regulační pochod zanedbatelný vliv. Výsledný regulační proces se předpokládá nekmitavý (aperiodický) [Górecki 1971; Górecki et al. 1989; Zagarij, Šubladze 1988; Vítečková 1992, Vítečková 1996].

Násobný dominantní pól $x^*_{p+1}$ a stavitelné parametry zvoleného regulátoru se získají řešením soustavy rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^i N(x)}{\mathrm{d}^i x} = 0 \text{, pro } i = 0, 1, ..., p, \tag{4.197}$$

kde $N$ je charakteristický mnohočlen nebo kvazimnohočlen, $x$ – komplexní proměnná ($s$ v L-transfor-maci, $z$ v Z-transformaci, $\gamma$ v D-transformaci), $p$ – počet stavitelných parametrů zvoleného regulátoru.

Při výpočtu násobného dominantního pólu je třeba uvažovat to řešení, které dává násobný pól blíže mezi stability.

Pro $p$ = 1 byl tento postup použit v MPM pro určení zesílení otevřeného regulačního obvodu $k_o$ zajišťujícího mezní nekmitavý regulační pochod, a to jak v oblasti komplexní proměnné $s$, tak i komplexní proměnné $z$ [viz (4.80) a (4.129)].

Dále budou uvedeny pouze vybrané výsledky. Další výsledky získané MNDP jsou uvedeny např. v [Vítečková, Víteček 2002a, 2008, 2009b, 2010b, 2011a, 2011b].

### Proporcionální soustavy

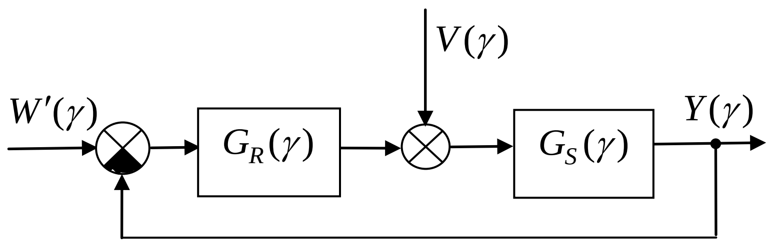
Je uvažována proporcionální soustava s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{4.198}$$

jejíž D-přenos (invariantní vzhledem k přechodové funkci) lze určit na základě vztahů (P1.30) – (P1.32), příp. přímo z tab. P1.2

$$G_S(\gamma) = \frac{a_1 k_1}{T\gamma + a_1}(T\gamma + 1)^{-d},\ d = \frac{T_d}{T},\ a_1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}}, \tag{4.199}$$

kde se předpokládá, že relativní zpoždění $d$ je celé číslo (tento předpoklad není podstatný).




Obr. 4.41 Schéma regulačního obvodu s konvenčním regulátorem (1DOF)

V souladu s obr. 4.41 lze snadno získat charakteristický mnohočlen regulačního obvodu $N(\gamma)$ z D-přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma)G_S(\gamma) = \frac{M_o(\gamma)}{N_o(\gamma)}, \tag{4.200}$$

protože platí

$$N(\gamma) = N_o(\gamma) + M_o(\gamma). \tag{4.201}$$

Pro zvolený konvenční regulátor podle tab. P1.1 se pak řeší soustava $p + 1$ rovnic (4.197) a získá se tak násobný dominantní pól $\gamma^*_{p+1}$ a $p$ stavitelných parametrů zvoleného regulátoru. Např. pro soustavu (4.199) a konvenční regulátor I s D-přenosem (viz tab. P1.1)

$$G_R(\gamma) = \frac{T\gamma + 1}{T_I\gamma} \tag{4.202}$$

se obdrží charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(\gamma) = T_I\gamma(T\gamma + a_1)(T\gamma + 1)^{d-1} + a_1k_1. \tag{4.203}$$

Protože $p = 1$, je třeba řešit soustavu dvou rovnic

$$\left.\begin{aligned} N(\gamma) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}N(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &T_I\gamma(T\gamma + a_1)(T\gamma + 1)^{d-1} + a_1k_1 = 0, &(4.204\text{a}) \\ &(d+1)T^2\gamma^2 + (a_1d + 2)T\gamma + a_1 = 0. &(4.204\text{b}) \end{aligned}$$

Dvojnásobný dominantní pól $\gamma^*_2$ se dostane řešením kvadratické rovnice (4.204b), kde před odmocninou musí být uvažováno znaménko „+“, aby to byl pól dominantní, tj.

$$\gamma^*_2(T) = -\frac{a_1d + 2}{2(d+1)T} + \sqrt{\frac{a_1^2d^2 - 4a_1 + 4}{4(d+1)^2T^2}} < 0. \tag{4.205a}$$

Z rovnice (4.204a) se pak určí integrační časová konstanta

$$T^*_I(T) = -\frac{a_1k_1}{\gamma^*_2(T\gamma^*_2 + a_1)(T\gamma^*_2 + 1)^{d-1}}. \tag{4.205b}$$

Vztahy (4.205a) a (4.205b) platí přímo pro konvenční číslicový regulátor I. Limitním přechodem pro $T \to 0$ se získají odpovídající vztahy pro konvenční analogový regulátor I, tj.

$$s^*_2 = \lim_{T\to 0}\gamma^*_2(T) = -\frac{1}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{1}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}} < 0, \tag{4.206a}$$

$$T^*_I = \lim_{T\to 0}T^*_I(T) = -\frac{k_1}{s^*_2(T_1s^*_2 + 1)\,\mathrm{e}^{T_d s^*_2}}. \tag{4.206b}$$

Podobným způsobem byly získány vztahy pro násobný dominantní pól a stavitelné parametry konvenčních číslicových regulátorů PI a PID:

**Číslicový regulátor PI**

$$\gamma_3^*(T) = -\frac{a_1 d + 4}{2(d+2)T} + \sqrt{\frac{(a_1^2 d^2 + a_1^2 d - 8a_1 + 8)d}{4(d+1)(d+2)^2 T^2}} < 0\,, \tag{4.207a}$$

$$K_P^*(T) = -\frac{1}{a_1 k_1}[T^2(d+1)\gamma_3^{*2} + T(a_1 d + 2)\gamma_3^* + a_1](\gamma_3^* T + 1)^d\,, \tag{4.207b}$$

$$T_I^*(T) = -\frac{[T^2(d+1)\gamma_3^{*2} + T(a_1 d + 2)\gamma_3^* + a_1](\gamma_3^* T + 1)}{\gamma_3^{*2} T[T(d+1)\gamma_3^* + a_1 d + 1]}\,. \tag{4.207c}$$

**Číslicový regulátor PID**

$$\gamma_4^*(T) = -\frac{a_1 d + 6}{2(d+3)T} + \sqrt{\frac{(a_1^2 d^3 + 2a_1^2 d^2 + 12(1-a_1)d}{4(d+2)(d+3)^2 T^2}} < 0\,, \tag{4.208a}$$

$$\begin{aligned} K_P^*(T) = \frac{1}{a_1 k_1}\Big\{&T^4\gamma_4^{*4}(d+1)(d+2) + T^3\gamma_4^{*3}[(a_1+1)d^2 + (a_1+6)d + 5] + \\ &+ T^2\gamma_4^{*2}[a_1 d^2 + (2a_1+3)d + 3] + a_1 T\gamma_4^*(d-1) - a_1\Big\}(\gamma_4^* T + 1)^{d-1}, \end{aligned} \tag{4.208b}$$

$$\begin{aligned} T_I^*(T) = -2\Big\{&T^4\gamma_4^{*4}(d+1)(d+2) + T^3\gamma_4^{*3}[(a_1+1)d^2 + (a_1+6)d + 5] + \\ &+ T^2\gamma_4^{*2}[a_1 d^2 + (2a_1+3)d + 3] + a_1 T\gamma_4^*(d-1) - a_1\Big\}\Big/ \\ &\Big\{T^2\gamma_4^{*3}(d+1)[T(d+2)\gamma_4^* + a_1 d + 2]\Big\}, \end{aligned} \tag{4.208c}$$

$$\begin{aligned} T_D^*(T) = -\frac{T}{2}\Big\{&T^4\gamma_4^{*4}(d+1)(d+2) + T^3\gamma_4^{*3}[(a_1+2)d^2 + (a_1+10)d + 8] + T^2\gamma_4^{*2}[(2a_1+1)d^2 + \\ &+ (4a_1+11)d + 12] + T\gamma_4^*[a_1 d^2 + (5a_1+4)d + 8] + 2(a_1 d + 1)\Big\}\Big/\Big\{T^4\gamma_4^{*4}(d+1)(d+2) + \\ &+ T^3\gamma_4^{*3}[(a_1+1)d^2 + (a_1+6)d + 5] + T^2\gamma_4^{*2}[a_1 d^2 + (2a_1+3)d + 3] + a_1 T\gamma_4^*(d-1) - a_1\Big\}. \end{aligned} \tag{4.208d}$$

Odpovídající vztahy pro konvenční analogové regulátory PI a PID byly získány limitním přechodem $T \to 0$ a jsou uvedeny v tab. 4.20.

U číslicových regulátorů je třeba volit vzorkovací periodu $T$ na základě doporučení uvedených v příloze P6 pro L-přenos regulačního obvodu (P6.3), tzn., že je potřeba použít vztahy (P6.6) nebo (P6.14) pro

$$T_w = \frac{1}{|s_n^*|}\,. \tag{4.209}$$

U číslicového regulátoru I $n = 2$, u číslicového regulátoru PI $n = 3$ a u číslicového regulátoru PID $n = 4$ [viz L-přenosy řízení (4.210) a (4.211)].

Tab. 4.20 Stavitelné parametry analogových regulátorů PI a PID pro metodu násobného dominantního pólu (MNDP)

| Analogový regulátor | | Regulovaná soustava $\dfrac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ |
|---|---|---|
| PI | $s_3^*$ | $-\dfrac{2}{T_d}-\dfrac{1}{2T_1}+\sqrt{\dfrac{2}{T_d^2}+\dfrac{1}{4T_1^2}}$ |
| | $K_P^*$ | $-\dfrac{1}{k_1}\left[T_d T_1 s_3^{*2}+(2T_1+T_d)s_3^*+1\right]\mathrm{e}^{T_d s_3^*}$ |
| | $T_I^*$ | $-\dfrac{T_d T_1 s_3^{*2}+(2T_1+T_d)s_3^*+1}{(T_d T_1 s_3^*+T_1+T_d)s_3^{*2}}$ |
| 2DOF | $b^*$ | $\min\left\{\dfrac{1}{T_I^*\lvert s_3^*\rvert},1\right\}$ |
| PID | $s_4^*$ | $-\dfrac{3}{T_d}-\dfrac{1}{2T_1}+\sqrt{\dfrac{3}{T_d^2}+\dfrac{1}{4T_1^2}}$ |
| | $K_P^*$ | $\dfrac{1}{k_1}\left[T_d^2 T_1 s_4^{*3}+(3T_d T_1+T_d^2)s_4^{*2}+T_d s_4^*-1\right]\mathrm{e}^{T_d s_4^*}$ |
| | $T_I^*$ | $-2\dfrac{T_d^2 T_1 s_4^{*3}+(3T_d T_1+T_d^2)s_4^{*2}+T_d s_4^*-1}{(T_d^2 T_1 s_4^*+2T_d T_1+T_d^2)s_4^{*3}}$ |
| | $T_D^*$ | $-\dfrac{1}{2}\dfrac{T_d^2 T_1 s_4^{*2}+(4T_d T_1+T_d^2)s_4^*+2T_d+2T_1}{T_d^2 T_1 s_4^{*3}+(3T_d T_1+T_d^2)s_4^{*2}+T_d s_4^*-1}$ |
| 2DOF | $b^*$ | $\min\left\{\dfrac{2}{T_I^*\lvert s_4^*\rvert},1\right\}$ |
| | $c^*$ | $\min\left\{\dfrac{1}{T_I^* T_D^* s_4^{*2}},1\right\}$ |

**Postup:**

1. L-přenos soustavy musí mít tvar (4.198), jinak je ho třeba na něj upravit libovolnou metodou (např. viz podkap. 3.1 a 3.2).
2. Na základě vztahů (4.205) – (4.208), příp. tab. 4.20 se pro zvolený regulátor vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů. U číslicového

regulátoru je třeba zvolit vzorkovací periodu $T$ v souladu s doporučeními uvedenými v příloze P6 [viz vztah (4.209) a příslušný text].

**Příklad 4.14**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{1{,}5}{(2s+1)^4}\,\mathrm{e}^{-10s}$$

je třeba navrhnout a seřídit analogové i číslicové regulátory PI a PID na nekmitavý regulační pochod MNDP (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

**Řešení:**

L-přenos soustavy nemá tvar (4.198) vhodný pro MNDP, a proto je ho třeba upravit. Např. lze použít schéma (3.10) a tab. 3.1 pro $k_1 = 1{,}5$; $i = 4$; $T_4 = 2$ a $T_{d4} = 10$. Na základě tab. 3.1 se dostane:

$$\frac{T_1}{T_4} = 2{,}320 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 4{,}64;$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d4}}{T_4} = 1{,}969 \quad \Rightarrow \quad T_{d1} = 13{,}94;$$

$$G_S(s) = \frac{1{,}5}{(2s+1)^4}\,\mathrm{e}^{-10s} \approx \frac{1{,}5}{4{,}64s+1}\,\mathrm{e}^{-13{,}94s}.$$

V souladu se vztahy (4.207), (4.208) a tab. 4.20 se pro jednotlivé regulátory dostane (pro číslicové regulátory byla zvolena vzorkovací perioda $T = 2$):

Číslicový regulátor PI ($T = 2$)

$$K_P^* \doteq 0{,}091;\; T_I^* \doteq 4{,}82.$$

Analogový regulátor PI ($T = 0$)

$$K_P^* \doteq 0{,}11;\; T_I^* \doteq 5{,}58.$$

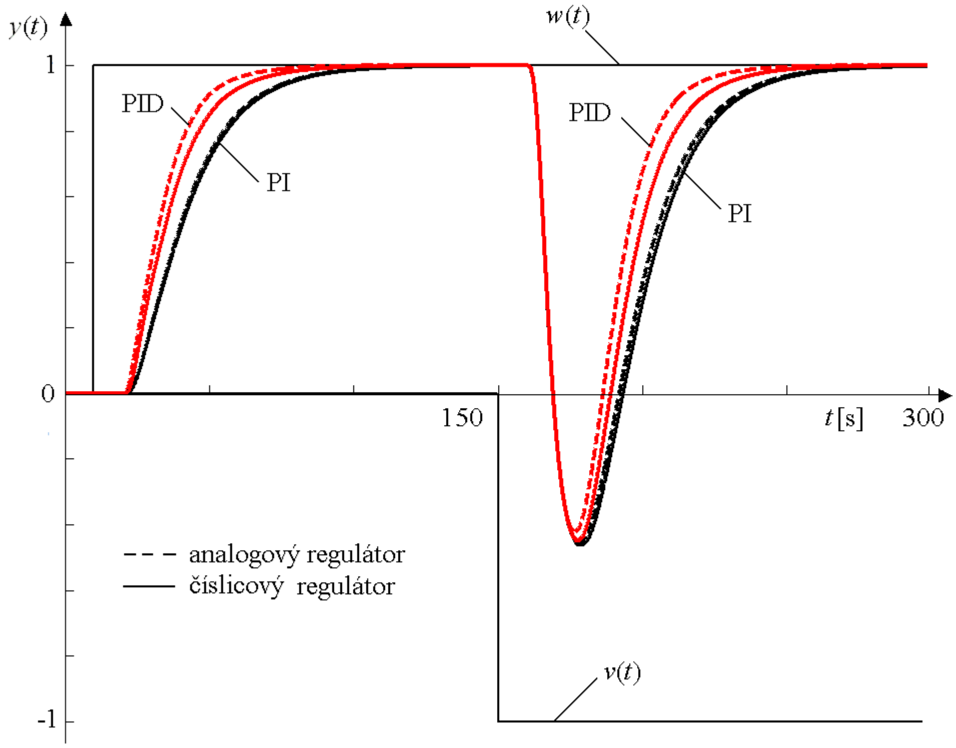
Číslicový regulátor PID ($T = 2$)

$$K_P^* \doteq 0{,}16;\; T_I^* \doteq 6{,}94;\; T_D^* \doteq 1{,}76.$$

Analogový regulátor PID ($T = 0$)

$$K_P^* \doteq 0{,}22;\; T_I^* \doteq 8{,}22;\; T_D^* \doteq 2{,}03.$$

Výsledné průběhy odezev regulačního obvodu seřízeného MNDP jsou na obr. 4.42. Je zřejmé, že regulační proces je vyhovující i pro poměrně hrubou aproximaci L-přenosu soustavy.




Obr. 4.42 Odezvy regulačního obvodu s konvenčními regulátory PI a PID seřízeným MNDP – příklad 4.14

MNDP přibližně zajišťuje mezní nekmitavý regulační pochod. V případě, že dopravní zpoždění $T_d$ [viz (4.198)] je značně menší než časová konstanta $T_1$, může vzniknout v odezvě na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ nežádoucí překmit.

U regulačních obvodů s konvenčními analogovými regulátory PI a PID L-přenosy řízení v souladu s L-přenosem soustavy (4.198) a odpovídajícími L-přenosy konvenčních regulátorů PI a PID mají následující přesné a přibližné tvary

$$G_{w'y}(s) = \frac{T_I^* s + 1}{\dfrac{T_I^* T_1}{k_1 K_P^*} s^2 + \dfrac{T_I^*}{k_1 K_P^*} s + (T_I^* s + 1)\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\,\mathrm{e}^{-T_d s} \approx \frac{T_I^* s + 1}{\left(\dfrac{1}{|s_3^*|} s + 1\right)^3}\,\mathrm{e}^{-T_d s} \qquad (4.210)$$

a

$$\begin{aligned} G_{w'y}(s) &= \frac{T_D^* T_I^* s^2 + T_I^* s + 1}{\dfrac{T_I^* T_1}{k_1 K_P^*} s^2 + \dfrac{T_I^*}{k_1 K_P^*} s + (T_D^* T_I^* s^2 + T_I^* s + 1)\,\mathrm{e}^{-T_d s}}\,\mathrm{e}^{-T_d s} \approx \\ &\approx \frac{T_D^* T_I^* s^2 + T_I^* s + 1}{\left(\dfrac{1}{|s_4^*|} s + 1\right)^4}\,\mathrm{e}^{-T_d s}, \end{aligned} \qquad (4.211)$$

ze kterých vyplývá, že případný překmit způsobují stabilní nuly jejich čitatelů.

Přibližná přechodová funkce $y(t)$ regulačního obvodu s konvenčním analogovým regulátorem PI seřízeným MNDP pro skokovou změnu polohy žádané veličiny $w'(t)$ je v souladu s L-přenosem řízení (4.210) dána vztahem [Vítečková, Víteček 2008, 2010b]

$$y(t) = h(t) + T_I^* \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{4.212a}$$

$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}\{H(s)\}, \quad H(s) = \frac{1}{s\left(\frac{1}{|s_3^*|}s + 1\right)^3} \mathrm{e}^{-T_d s}. \tag{4.212b}$$

Protože $h(t)$ (4.212b) je monotónně rostoucí funkce, překmit může způsobit druhý sčítanec na pravé straně ve vztahu (4.212a), tj. stabilní nula $s = -1/T_I^*$ v čitateli L-přenosu řízení (4.210), pokud $T_I^*$ bude dostatečně velké. Čas $t^*$, kdy vystoupí překmit, lze určit z podmínky

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; t^* = \frac{2T_I^*}{T_I^*|s_3^*| - 1} + T_d \;\Rightarrow$$

$$t^* - T_d > 0 \;\Rightarrow\; T_I^*|s_3^*| > 1. \tag{4.213a}$$

Pro konvenční analogový regulátor PI podmínka (4.213a) může být dále zjednodušena na tvar

$$T_d < T_1. \tag{4.213b}$$

Podobným způsobem lze určit podmínku pro vystoupení překmitu u regulačního obvodu s konvenčním analogovým regulátorem PID (4.211)

$$T_I^*|s_4^*|\left(1 - T_D^*|s_4^*|\right) > 1. \tag{4.214}$$

Obě podmínky (4.213a) a (4.214) je třeba brát s určitou rezervou, protože byly získány z přibližných L-přenosů řízení (4.210) a (4.211).

Při použití analogových regulátorů 2DOF výsledný L-přenos řízení má tvar (viz podkap. 2.2)

$$G_{wy}(s) = G_F(s) G_{w'y}(s), \tag{4.215}$$

kde L-přenos vstupního filtru $G_F(s)$ je pro analogový regulátor PI 2DOF (2.24) [viz (2.27)]

$$G_F(s) = \frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1} \tag{4.216}$$

a pro analogový regulátor PID 2DOF (2.13) [viz (2.18)]

$$G_F(s) = \frac{cT_I T_D s^2 + bT_I s + 1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}. \tag{4.217}$$

Ze vztahu (4.215) a obou L-přenosů vstupních filtrů (4.216), (4.217) a L-přenosů řízení (4.210) a (4.211) vyplývá, že jmenovatelé vstupních filtrů kompenzují příslušné čitatele obou L-přenosů řízení. Dojde tak k odstranění překmitů, ale současně i ke zpomalení odezev (odpovídá to $b = 0$ – analogový regulátor I-P, obr. 2.8 a $b = c = 0$ – analogový regulátor I-PD, obr. 2.7). Zvolí-li se však váhy $b$ a $c$ vhodným způsobem, mohou čitatelé vstupních filtrů (4.216) a (4.217) kompenzovat jeden [u L-přenosu řízení (4.210)] nebo dva [u L-přenosu řízení (4.211)] dvojčleny v jejich jmenovatelích, což přechodné procesy urychlí.

Proto lze psát:

analogový regulátor PI 2DOF [vztahy (4.216) a (4.210)]

$$b^* T_I^* s + 1 = \frac{1}{|s_3^*|} s + 1 \Rightarrow b^* = \frac{1}{T_I^* |s_3^*|}, \tag{4.218}$$

analogový regulátor PID 2DOF [vztahy (4.217) a (4.211)]

$$c^* T_I^* T_D^* s^2 + b^* T_I^* s + 1 = \left( \frac{1}{|s_4^*|} s + 1 \right)^2 \Rightarrow$$

$$b^* = \frac{2}{T_I^* |s_4^*|}, \quad c^* = \frac{1}{T_I^* T_D^* s_4^{*2}}. \tag{4.219}$$

Vypočtené váhy jsou uvedeny v tab. 4.20.

**Postup:**

1. L-přenos soustavy musí mít tvar (4.198), jinak je ho třeba na něj upravit libovolnou metodou (např. viz podkap. 3.1 a 3.2).
2. Pokud vznikne nežádoucí překmit při seřízení zvoleného konvenčního analogového regulátoru MNDP na základě tab. 4.20, pak je třeba použít odpovídající analogový regulátor 2DOF a vypočíst váhy žádané veličiny $b^*$ (PI 2DOF), příp. $b^*$ a $c^*$ (PID 2DOF).
3. Pokud je třeba použít číslicový regulátor 2DOF, pak je možné použít přibližný postup 1 z podkap. 1.2, příp. použít konvenční číslicový regulátor seřízený MNDP s kompenzací (viz dále).

**Příklad 4.15**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{1}{8s + 1} e^{-s}$$

je třeba seřídit analogové regulátory PI a PID 2DOF tak, aby odezvy na skokové změny žádané a poruchové veličiny byly nekmitavé bez překmitu (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

**Řešení:**

Pro parametry soustavy $k_1 = 1$, $T_1 = 8$ a $T_d = 1$ se na základě tab. 4.20 dostane:

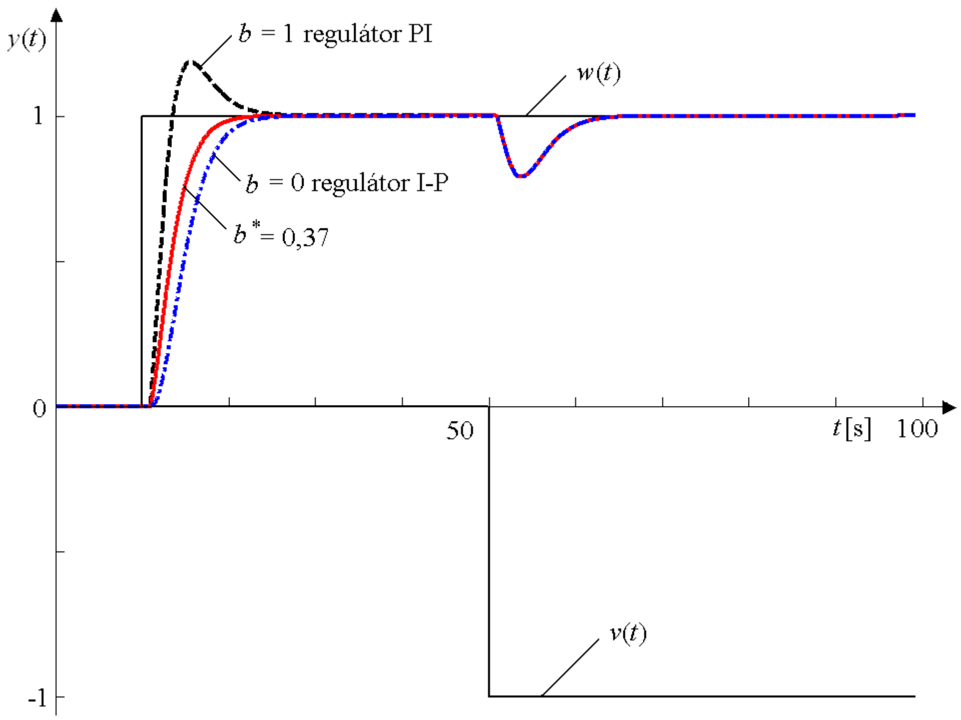
Analogový regulátor PI 2DOF ($T = 0$)

$$s_3^* \doteq -0{,}647;\; K_P^* \doteq 3{,}48;\; T_I^* \doteq 4{,}15;\; b^* = 0{,}37\,.$$

Analogový regulátor PID 2DOF ($T = 0$)

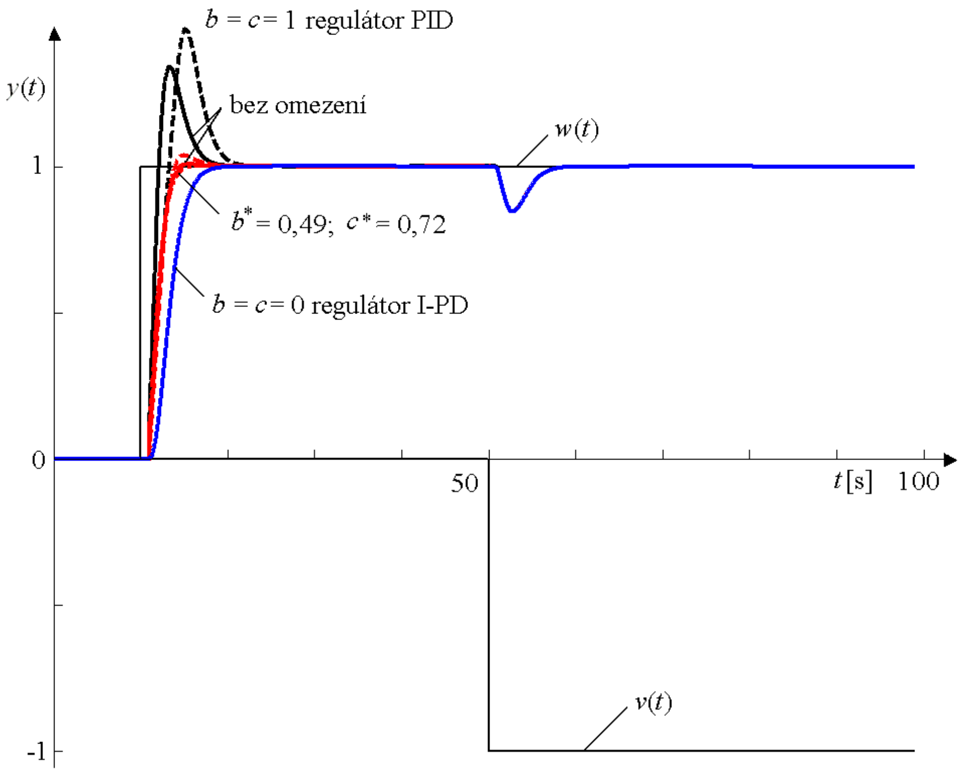
$$s_4^* \doteq -1{,}329;\; K_P^* \doteq 6{,}10;\; T_I^* \doteq 3{,}08;\; T_D^* \doteq 0{,}25;\; b^* \doteq 0{,}49;\; c^* \doteq 0{,}72\,.$$

Odezvy $y(t)$ regulačního obvodu na skokové změny polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ pro analogový regulátor PI 2DOF seřízený MNDP jsou na obr. 4.43. Z průběhů regulované veličiny $y(t)$ je zřejmé, že pro vypočtenou váhu žádané veličiny u proporcionální složky $b^*$ = 0,37 je odezva rychlejší než pro běžně používanou váhu $b$ = 0 odpovídající analogovému regulátoru I-P (obr. 2.8).




Obr. 4.43 Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PI 2DOF seřízeným MNDP pro různé hodnoty váhy $b$ – příklad 4.15

Pro analogový regulátor PID 2DOF jsou odpovídající odezvy $y(t)$ na obr. 4.44. Zde se na činnosti regulačního obvodu negativně projevilo omezení akční veličiny $u(t)$, které zpomaluje odezvy a způsobuje překmit. Je zřejmé, že bude-li omezení akční veličiny $u(t)$ příliš velké, pak skutečné průběhy regulované veličiny $y(t)$ se mohou velmi podstatně lišit od předpokládaných průběhů. Rovněž i v tomto případě odezvy pro vypočtené váhy $b^*$ a $c^*$ jsou rychlejší, než pro běžně používané váhy $b = c = 0$ odpovídající regulátoru I-PD (obr. 2.7).




Obr. 4.44 Odezvy regulačního obvodu s analogovým regulátorem PID 2DOF seřízeným MNDP pro různé hodnoty omezení akční veličiny $u(t)$ a různé hodnoty vah $b$ a $c$ – příklad 4.15

Protože vztahy pro výpočet stavitelných parametrů konvenčních číslicových regulátorů PI a PID (4.207) a (4.208) jsou složité, nepřehledné a velmi „nepříjemné“, proto, pokud je žádoucí nekmitavý regulační pochod bez překmitu, lze použít MNDP s kompenzací, která dává podstatně jednodušší výpočetní vztahy [Vítečková, Víteček 2011].

Např. pro konvenční číslicový regulátor PI s D-přenosem (viz tab. P1.1)

$$G_R(\gamma) = K_P \frac{(T_I + T)\gamma + 1}{T_I \gamma}$$

a soustavu s D-přenosem (4.199) se dostane D-přenos otevřeného regulačního obvodu (obr. 4.41)

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma) G_S(\gamma) = \frac{k_1 K_P [(T_I + T)\gamma + 1]}{T_I \gamma \left( \dfrac{T}{a_1}\gamma + 1 \right)} (T\gamma + 1)^{-d}, \tag{4.220}$$

ze kterého vyplývá, že podmínka kompenzace má tvar [viz též (4.183) a (4.184)]

$$T_I + T = \frac{T}{a_1} \;\Rightarrow\; T_I^*(T) = \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)T\,. \tag{4.221}$$

Z D-přenosu otevřeného regulačního obvodu (4.220) se získá po kompenzaci (4.221) charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(\gamma) = \gamma(T\gamma + 1)^d + k_1 \frac{K_P}{T_I^*}\,. \tag{4.222}$$

Zesílení regulátoru $K_P^*$ se určí MNDP ze soustavy dvou rovnic

$$\left.\begin{aligned} N(\gamma) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}N(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma} &= 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} \gamma(T\gamma + 1)^d + k_1 \frac{K_P}{T_I^*} &= 0 \\ (d+1)T\gamma + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\gamma_2^*(T) = -\frac{1}{(d+1)T} = -\frac{1}{T_d + T}\,, \tag{4.223}$$

$$K_P^*(T) = T_I^*(T)\frac{1}{k_1(d+1)T}\left(\frac{d}{d+1}\right)^d = \frac{1-a_1}{a_1 k_1 (d+1)}\left(\frac{d}{d+1}\right)^d\,. \tag{4.224}$$

Vztahy (4.221), (4.223) a (4.224) platí přímo pro konvenční číslicový regulátor PI. Pro $T \to 0$ se obdrží odpovídající vztahy pro konvenční analogový regulátor PI

$$s_2^* = \lim_{T\to 0} \gamma_2^*(T) = -\frac{1}{T_d}\,, \tag{4.225}$$

$$T_I^* = \lim_{T\to 0} T_I^*(T) = \lim_{T\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{T_1}}}\,T = T_1\,, \tag{4.226}$$

$$K_P^* = \lim_{T\to 0} K_P^*(T) = \lim_{T\to 0} T_I^*(T) \cdot \lim_{T\to 0} \frac{1}{k_1(T_d + T)} \cdot \lim_{d\to\infty}\left(\frac{d}{d+1}\right)^d = \frac{T_1}{k_1 \mathrm{e} T_d}\,. \tag{4.227}$$

Při výpočtu byl použit vztah

$$\lim_{d\to\infty}\left(1 + \frac{1}{d}\right)^d = \mathrm{e}\,. \tag{4.228}$$

Vztahy pro konvenční číslicový regulátor PI (4.221) a (4.224) lze podstatně zjednodušit. Použitím aproximace (4.151) na vztah (4.221) se dostane

$$T_I^* \approx T_1 - \frac{T}{2} \tag{4.229}$$

s chybou menší než 3 % pro $T_1/T \geq 2$ a s chybou menší než 1 % pro $T_1/T \geq 4$.

Podobně po použití aproximace [viz též (4.130)]

$$\frac{1}{T}\frac{1}{d+1}\left(\frac{d}{d+1}\right)^{d} \approx \frac{1}{(4-\mathrm{e})T+\mathrm{e}T_d} \tag{4.230}$$

spolu s (4.229) na vztah (4.224) se obdrží

$$K_P^* \approx \frac{T_1-\dfrac{T}{2}}{k_1[(4-\mathrm{e})T+\mathrm{e}T_d]}\,. \tag{4.231}$$

Přibližná rovnost (4.230) platí s chybou menší než 0,5 % pro $d = T_d/T \geq 1$.

Je zřejmé, že obdržené vztahy (4.229) a (4.231) jsou stejné jako pro MPM pro $\kappa = 0$ (viz tab. 4.16 a 4.17) a pro $T \to 0$ platí i pro konvenční analogové regulátory PI. Zjednodušené vztahy jsou uvedeny v tab. 4.21.

Podobným způsobem při použití kompenzace lze získat přesné i přibližné vztahy pro konvenční analogové i číslicové regulátory PID. Přesné vztahy mají tvar:

$$\gamma_3^*(T) = -\frac{2}{(d+2)T} = -\frac{2}{T_d+2T}\,, \tag{4.232}$$

$$K_P^*(T) = \frac{4(1-a_1)(d+1)+a_1d^2}{a_1k_1(d+1)}\,\frac{d+1}{(d+2)^2}\left(\frac{d}{d+2}\right)^{d}, \tag{4.233}$$

$$T_I^*(T) = \frac{4(1-a_1)(d+1)+a_1d^2}{4a_1(d+1)}T\,, \tag{4.234}$$

$$T_D^*(T) = \frac{(1-a_1)d^2}{4(1-a_1)(d+1)+a_1d^2}T\,. \tag{4.235}$$

Snadno lze ukázat, že pro konvenční analogové regulátory PID platí:

$$s_3^* = \lim_{T\to 0}\gamma_3^*(T) = -\frac{2}{T_d}\,, \tag{4.236}$$

$$K_P^* = \lim_{T\to 0}K_P^*(T) = \frac{4T_1+T_d}{k_1\,\mathrm{e}^2\,T_d}\,, \tag{4.237}$$

$$T_I^* = \lim_{T\to 0}T_I^*(T) = T_1+\frac{T_d}{4}\,, \tag{4.238}$$

$$T_D^* = \lim_{T\to 0}T_D^*(T) = \frac{T_1T_d}{4T_1+T_d}\,. \tag{4.239}$$

Pro zjednodušení vztahů (4.233) – (4.235) byla použita aproximace (4.151) a aproximace

$$\frac{d+1}{(d+2)^2}\left(\frac{d}{d+2}\right)^d \approx \frac{1}{14+(d-1)\,\mathrm{e}^2} \tag{4.240}$$

a získané zjednodušené vztahy jsou v tab. 4.21.

Chyba přibližné rovnosti (4.240) je menší než 1 % pro $d = T_d/T \geq 2$.

Získané přibližné vztahy platí jak pro konvenční analogové ($T = 0$), tak i pro konvenční číslicové ($T > 0$) regulátory a jsou uvedeny v tab. 4.21. Tyto vztahy rovněž ukazují, že předpoklad o $d$, že je celým číslem, je nepodstatný.

MNDP s kompenzací je vhodná pro soustavy (4.198), u kterých je splněna podmínka $T_1 \leq 8T_d$.

Tab. 4.21 Stavitelné parametry konvenčních regulátorů PI a PID pro MNDP s kompenzací

| Typ regulátoru | | Regulátor < analogový $T = 0$, číslicový $T > 0$ |
|---|---|---|
| PI | $T_I^*$ | $T_1 - \dfrac{T}{2}$ |
| | $K_P^*$ | $\dfrac{T_I^*}{k_1[(4-\mathrm{e})T + \mathrm{e}T_d]}$ |
| PID | $T_I^*$ | $\dfrac{2(T_d+T)(2T_1-T)+T_d^2}{4(T_d+T)}$ |
| | $K_P^*$ | $\dfrac{4T_I^*}{k_1[(14-\mathrm{e}^2)T+\mathrm{e}^2 T_d]}$ |
| | $T_D^*$ | $\dfrac{(2T_1-T)T_d^2}{8(T_d+T)T_I^*}$ |

**Postup:**

1. L-přenos soustavy musí mít tvar (4.198), jinak je ho třeba na něj upravit libovolnou metodou (např. viz podkap. 3.1 a 3.2).
2. Na základě tab. 4.21 se vypočtou hodnoty stavitelných parametrů zvoleného regulátoru. U číslicového regulátoru by měla vzorkovací perioda $T$ vyhovovat nerovnostem $T_1/T > 2$ a $T_d/T > 2$ a současně

i vztahům P6.6 a P6.14 pro $n = 2$ a $T_w = 1/|s_2^*| = T_d$ pro číslicový regulátor PI a pro $n = 3$ a $T_w = 1/|s_3^*| = T_d/2$ pro číslicový regulátor PID.

**Příklad 4.16**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{1}{6s+1}\mathrm{e}^{-6s}$$

je třeba seřídit analogové i číslicové regulátory PI a PID MNDP s kompenzací (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

**Řešení:**

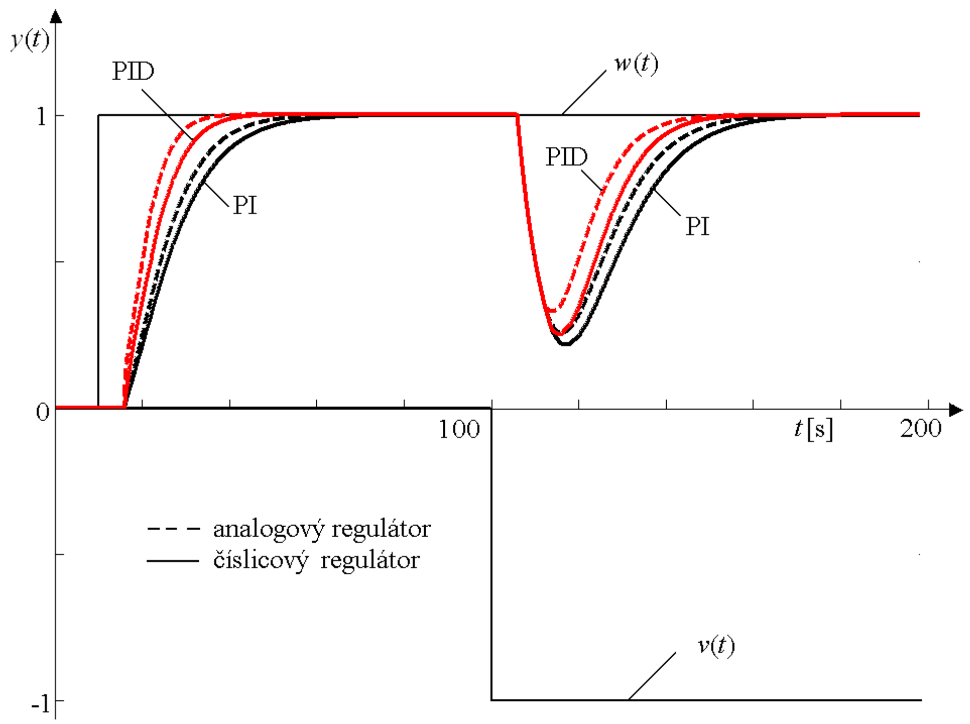
Na základě tab. 4.21 pro $k_1 = 1$, $T_1 = 6$ a $T_d = 6$ se dostane:

Analogový regulátor PI ($T = 0$)

$$K_P^* \doteq 0{,}37;\ T_I^* = 6.$$

Číslicový regulátor PI ($T = 2$)

$$K_P^* \doteq 0{,}26;\ T_I^* = 5.$$




Obr. 4.45 Odezvy regulačního obvodu s konvenčními regulátory PI a PID seřízenými MNDP s kompenzací – příklad 4.16

Analogový regulátor PID ($T$ = 0)

$$K_P^* \doteq 0{,}68;\ T_I^* = 7{,}5;\ T_D^* = 1{,}2.$$

Číslicový regulátor PID ($T$ = 2)

$$K_P^* \doteq 0{,}43;\ T_I^* \doteq 6{,}13;\ T_D^* \doteq 0{,}92.$$

Odezvy regulačního obvodu s regulátory PI a PID jsou ukázány na obr. 4.45.

**Příklad 4.17**

Pro soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{1{,}5}{(2s+1)^4}\mathrm{e}^{-10s} \approx \frac{1{,}5}{4{,}64s+1}\mathrm{e}^{-13{,}94s}$$

z příkladu 4.14 je třeba seřídit konvenční analogové i číslicové regulátory PI a PID MNDP s kompenzací (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

**Řešení:**

Na základě tab. 4.21 se pro $k_1$ = 1,5; $T_1$ = 4,64 a $T_d$ = 13,94 dostane:

Analogový regulátor PI ($T$ = 0)

$$K_P^* \doteq 0{,}082;\ T_I^* \doteq 4{,}64.$$

Číslicový regulátor PI ($T$ = 2)

$$K_P^* \doteq 0{,}060;\ T_I^* \doteq 3{,}64.$$

Analogový regulátor PID ($T$ = 0)

$$K_P^* \doteq 0{,}21;\ T_I^* \doteq 8{,}13;\ T_D^* = 1{,}99.$$

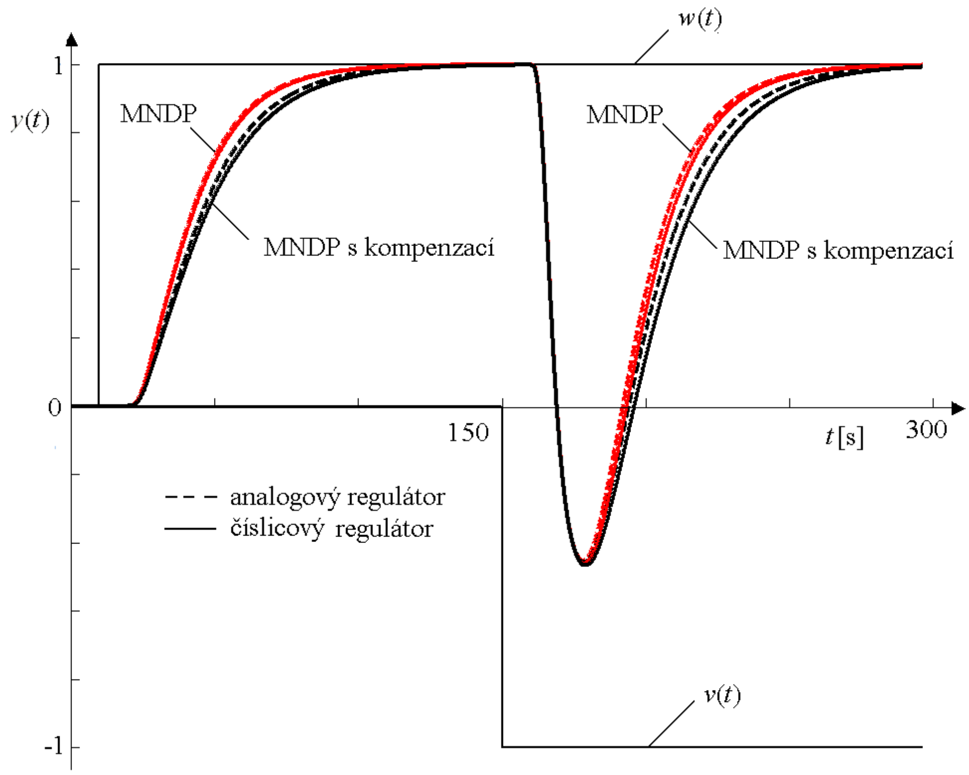
Číslicový regulátor PID ($T$ = 2)

$$K_P^* \doteq 0{,}15;\ T_I^* \doteq 6{,}69;\ T_D^* \doteq 1{,}72.$$

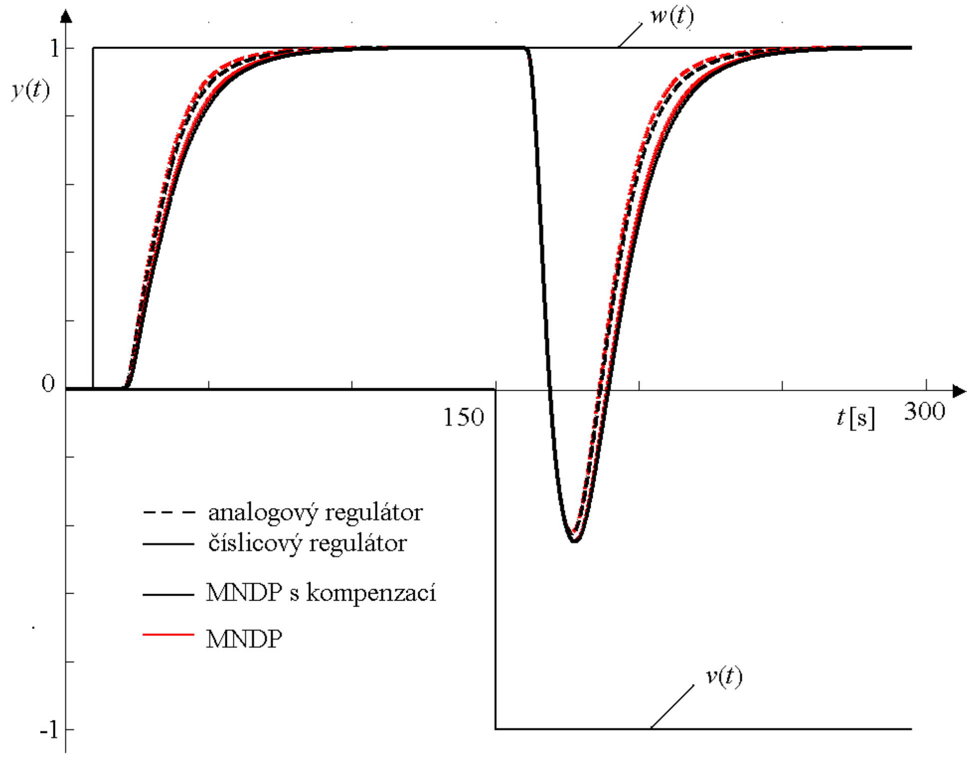
U obou číslicových regulátorů byla zvolena stejná vzorkovací perioda $T$ = 2 z důvodu srovnání s příkladem 4.14.

Získané průběhy jsou na obr. 4.46 a 4.47. Pro srovnání jsou rovněž uvedeny průběhy z příkladu 4.14 obdržené na základě přesných vztahů, tj. MNDP (bez kompenzace).

Z obou obr. 4.46 a 4.47 je zřejmé, že MNDP s kompenzací dává poměrně kvalitní nekmitavé průběhy bez překmitů i pro velmi hrubou aproximaci L-přenosu soustavy.




Obr. 4.46 Odezvy regulačního obvodu s konvenčními regulátory PI seřízenými MNDP a MNDP s kompenzací – příklad 4.17




Obr. 4.47 Odezvy regulačního obvodu s konvenčními regulátory PID seřízenými MNDP a MNDP s kompenzací – příklad 4.17

**Integrační soustavy**

Je uvažována integrační soustava s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{4.241}$$

jejíž D-přenos (invariantní vzhledem k přechodové funkci) lze určit na základě vztahů (P1.30) – (P1.32), příp. přímo z tab. P1.2

$$G_S(\gamma) = \frac{k_1}{\gamma}(T\gamma+1)^{-d},\; d = \frac{T_d}{T}, \tag{4.242}$$

kde se předpokládá, že relativní diskrétní zpoždění $d$ je celé číslo (dále bude ukázáno, že tento předpoklad není podstatný).

Regulace integračních soustav při použití regulátorů s integrační (sumační) složkou patří k náročnějším problémům teorie regulace, viz příloha P4.

Postup použití MNDP pro integrační soustavu (4.242) je ukázán na konvenčním číslicovém regulátoru PI s D-přenosem (viz tab. P1.1)

$$G_R(\gamma) = K_P\frac{(T_I+T)\gamma+1}{T_I\gamma}. \tag{4.243}$$

Z D-přenosu otevřeného regulačního obvodu

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma)G_S(\gamma) = \frac{k_1 K_P[(T_I+T)\gamma+1]}{T_I\gamma^2}(T\gamma+1)^{-d}.$$

se získá charakteristický mnohočlen regulačního obvodu

$$N(\gamma) = \gamma^2(T\gamma+1)^d + k_1\frac{K_P}{T_I}[(T_I+T)\gamma+1]. \tag{4.244}$$

Trojnásobný dominantní pól $\gamma_3^*$ a stavitelné parametry regulátoru $K_P^*$ a $T_I^*$ se obdrží řešením soustavy tří rovnic

$$\left.\begin{aligned} N(\gamma)&=0\\ \frac{\mathrm{d}N(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma}&=0\\ \frac{\mathrm{d}^2N(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma^2}&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \gamma^2(T\gamma+1)^d + k_1\frac{K_P}{T_I}[(T_I+T)\gamma+1]=0\\ 2\gamma(T\gamma+1)^d + dT\gamma^2(T\gamma+1)^{d-1} + k_1\frac{K_P}{T_I}(T_I+T)=0\\ T^2(d+1)(d+2)\gamma^2 + 4T(d+1)\gamma+2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\gamma_3^*(T) = -\frac{1}{(d+2)T}\left(2-\sqrt{\frac{2d}{d+1}}\right) < 0, \tag{4.245a}$$

$$K_P^*(T) = -\frac{1}{k_1}[(d+1)T\gamma_3^* + 2]\gamma_3^*(T\gamma_3^* + 1)^d\,, \tag{4.245b}$$

$$T_I^*(T) = -\frac{(d+2)T\gamma_3^* + 2}{(d+1)T\gamma_3^{*2} + \gamma_3^*} - T = -\frac{(d+1)T^2\gamma_3^{*2} + (d+3)T\gamma_3^* + 2}{[(d+1)T\gamma_3^* + 1]\gamma_3^*}\,. \tag{4.245c}$$

Vztahy (4.245) platí přímo pro konvenční číslicový regulátor PI. Limitním přechodem pro $T \to 0$ se získají odpovídající vztahy pro konvenční analogový regulátor PI, tj.

$$s_3^* = \lim_{T\to 0}\gamma_3^*(T) = -\frac{2-\sqrt{2}}{T_d}\,, \tag{4.246a}$$

$$K_P^* = \lim_{T\to 0}K_P^*(T) = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{k_1T_d}e^{\sqrt{2}-2} \doteq 0{,}461\frac{1}{k_1T_d}\,, \tag{4.246b}$$

$$T_I^* = \lim_{T\to 0}T_I^*(T) = (3+2\sqrt{2})T_d \doteq 5{,}828T_d\,. \tag{4.246c}$$

Podobným způsobem byly získány vztahy pro čtyřnásobný dominantní pól $\gamma_4^*$ a stavitelné parametry konvenčního číslicového regulátoru PID:

$$\gamma_4^*(T) = -\frac{1}{(d+3)T}\left(3-\sqrt{\frac{3d}{d+2}}\right) < 0\,, \tag{4.247a}$$

$$K_P^*(T) = \frac{1}{k_1}[(d+2)T\gamma_4^* + 3](d+1)T\gamma_4^{*2}(T\gamma_4^* + 1)^d\,, \tag{4.247b}$$

$$T_I^*(T) = -2\frac{(d+2)T^2\gamma_4^{*2} + (d+5)T\gamma_4^* + 3}{[(d+2)T\gamma_4^* + 2]\gamma_4^*}\,, \tag{4.247c}$$

$$T_D^*(T) = -\frac{(d^2+3d+2)T^3\gamma_4^{*3} + (d^2+7d+6)T^2\gamma_4^{*2} + 2(2d+3)T\gamma_4^* + 2}{2(d+1)[(d+2)T\gamma_4^* + 3]T\gamma_4^{*2}}\,. \tag{4.247d}$$

Vztahy (4.247) platí přímo pro konvenční číslicový regulátor PID. Limitním přechodem pro $T \to 0$ se získají odpovídající vztahy pro konvenční analogový regulátor PID, tj.

$$s_4^* = \lim_{T\to 0}\gamma_4^*(T) = -\frac{3-\sqrt{3}}{T_d}\,, \tag{4.248a}$$

$$K_P^* = \lim_{T\to 0}K_P^*(T) = \frac{6(2\sqrt{3}-3)}{k_1T_d}e^{\sqrt{3}-3} \doteq 0{,}784\frac{1}{k_1T_d}\,, \tag{4.248b}$$

$$T_I^* = \lim_{T\to 0}T_I^*(T) = (2+\sqrt{3})T_d \doteq 3{,}732T_d\,, \tag{4.248c}$$

$$T_D^* = \lim_{T\to 0} T_D^*(T) = \frac{(3+\sqrt{3})}{18} T_d \doteq 0{,}263 T_d\,. \tag{4.248d}$$

Regulační obvody s konvenčními analogovými regulátory PI a PID seřízenými MNDP mají L-přenosy řízení stejné jako (4.210) a (4.211), a proto pro vznik překmitu způsobeného skokovou změnou polohy žádané veličiny $w(t)$ musí platit stejné podmínky (4.213a) a (4.214).

Po dosazení (4.247a) a (4.247c) do (4.213a) a (4.248a), (4.248c) a (4.248d) do (4.214) se obdrží

$$T_I^* \left| s_3^* \right| = 2 + \sqrt{2} > 1, \tag{4.249}$$

$$T_I^* \left| s_4^* \right| (1 - T_D^* \left| s_4^* \right|) = (6 + 2\sqrt{3})/3 > 1, \tag{4.250}$$

tj. v regulačních obvodech se soustavou (4.241) a konvenčními analogovými regulátory PI a PID seřízenými MNDP v odezvách na skokovou změnu polohy žádané veličiny $w(t)$ vždy vznikne překmit. Tento závěr platí pro seřízení jakoukoliv metodou a samozřejmě platí i pro regulační obvody s konvenčními číslicovými regulátory PI a PID (viz příloha P4).

Jak již bylo dříve řečeno, elegantním řešením pro odstranění, příp. snížení nežádoucího překmitu je použití regulátorů 2DOF (viz podkap. 2.4).

Číslicový regulátor PI 2DOF v oblasti komplexní proměnné $\gamma$ může být popsán vztahem

$$U(\gamma) = K_P \left\{ bW(\gamma) - Y(\gamma) + \frac{T\gamma + 1}{T_I \gamma} [W(\gamma) - Y(\gamma)] \right\}, \tag{4.251}$$

který může být upraven na tvar

$$U(\gamma) = G_F(\gamma) G_R(\gamma) W(\gamma) - G_R(\gamma) Y(\gamma), \tag{4.252}$$

$$G_F(\gamma) = \frac{(bT_I + T)\gamma + 1}{(T_I + T)\gamma + 1}, \tag{4.253}$$

kde $G_F(\gamma)$ je D-přenos vstupního filtru (obr. 1.1b) a $G_R(\gamma)$ je D-přenos konvenčního číslicového regulátoru PI (4.243).

Přibližný D-přenos řízení regulačního obvodu s konvenčním číslicovým regulátorem PI seřízeným MNDP má tvar (obr. 1.1a)

$$G_{w'y}(\gamma) = \frac{Y(\gamma)}{W'(\gamma)} \approx \frac{(T_I^* + T)\gamma + 1}{\left( \frac{1}{\left| \gamma_3^* \right|} \gamma + 1 \right)^3} (T\gamma + 1)^{-d}. \tag{4.254}$$

Použije-li se číslicový regulátor PI 2DOF, pak výsledný D-přenos řízení je (obr. 1.1b)

$$G_{wy}(\gamma)=\frac{Y(\gamma)}{W(\gamma)}=G_F(\gamma)G_{w'y}(\gamma)\approx$$
$$\approx\frac{(bT_I^*+T)\gamma+1}{(T_I^*+T)\gamma+1}\cdot\frac{(T_I^*+T)\gamma+1}{\left(\frac{1}{|\gamma_3^*|}\gamma+1\right)^3}(T\gamma+1)^{-d}\quad,\tag{4.255}$$

ze kterého je zřejmé, že pro

$$(bT_I^*+T)\gamma+1=\frac{1}{|\gamma_3^*|}\gamma+1\;\Rightarrow\;b^*(T)=\frac{1}{T_I^*}\left(\frac{1}{|\gamma_3^*|}-T\right)\tag{4.256}$$

dojde k jeho podstatnému zjednodušení

$$G_{wy}(\gamma)\approx\frac{1}{\left(\frac{1}{|\gamma_3^*|}\gamma+1\right)^2}(T\gamma+1)^{-d}\;.\tag{4.257}$$

Použitím číslicového regulátoru PI 2DOF s váhou (4.256) došlo nejenom k odstranění čitatele D-přenosu řízení (4.254), který způsoboval překmit, ale i ke zjednodušení dynamiky, a tedy ke zrychlení odezvy.

Váha žádané veličiny $b^*$ (4.256) platí přímo pro číslicový regulátor PI 2DOF. Pro analogový regulátor PI 2DOF se limitním přechodem $T\to 0$ dostane

$$b^*=\lim_{T\to 0}b^*(T)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\doteq 0{,}293\,.\tag{4.258}$$

Číslicový regulátor PID 2DOF v oblasti komplexní proměnné $\gamma$ může být popsán vztahem (P1.29)

$$U(\gamma)=K_P\left\{bW(\gamma)-Y(\gamma)+\frac{T\gamma+1}{T_I\gamma}[W(\gamma)-Y(\gamma)]+\frac{T_D\gamma}{T\gamma+1}[cW(\gamma)-Y(\gamma)]\right\},\tag{4.259}$$

který může být upraven na vztah (4.252), kde

$$G_R(\gamma)=K_P\left(1+\frac{T\gamma+1}{T_I\gamma}+\frac{T_D\gamma}{T\gamma+1}\right),\tag{4.260}$$

$$G_F(\gamma)=\frac{[T_I(cT_D+bT)+T^2]\gamma^2+(bT_I+2T)\gamma+1}{[T_I(T_D+T)+T^2]\gamma^2+(T_I+2T)\gamma+1}\,.\tag{4.261}$$

$G_R(\gamma)$ je D-přenos konvenčního číslicového regulátoru PID a $G_F(\gamma)$ je D-přenos vstupního filtru.

Přibližný D-přenos řízení regulačního obvodu s konvenčním číslicovým regulátorem PID seřízeným MNDP má tvar (obr. 1.1a)

$$G_{w'y}(\gamma)=\frac{Y(\gamma)}{W'(\gamma)}\approx\frac{[T_I^*(T_D^*+T)+T^2]\gamma^2+(T_I^*+2T)\gamma+1}{\left(\frac{1}{\left|\gamma_4^*\right|}\gamma+1\right)^4}(T\gamma+1)^{-d}\,. \quad (4.262)$$

D-přenos řízení regulačního obvodu s číslicovým regulátorem PID 2DOF v souladu s (4.261) a (4.262) je dán vztahem (obr. 1.1b)

$$G_{wy}(\gamma)=\frac{Y(\gamma)}{W(\gamma)}=G_F(\gamma)G_{w'y}(\gamma)\approx$$

$$\approx\frac{[T_I^*(cT_D^*+bT)+T^2]\gamma^2+(bT_I^*+2T)\gamma+1}{[T_I^*(T_D^*+T)+T^2]\gamma^2+(T_I^*+2T)\gamma+1}\cdot \quad (4.263)$$

$$\cdot\frac{[T_I^*(T_D^*+T)+T^2]\gamma^2+(T_I^*+2T)\gamma+1}{\left(\frac{1}{\left|\gamma_4^*\right|}\gamma+1\right)^4}(T\gamma+1)^{-d}\,.$$

Aby čitatel D-přenosu vstupního filtru $G_F(\gamma)$ kompenzoval dva dvojčleny jmenovatele D-přenosu řízení, musí platit

$$[T_I^*(cT_D^*+bT)+T^2]\gamma^2+(bT_I^*+2T)\gamma+1=\left(\frac{1}{\left|\gamma_4^*\right|}\gamma+1\right)^2 \Rightarrow$$

$$b^*(T)=\frac{2}{T_I^*}\left(\frac{1}{\left|\gamma_4^*\right|}-T\right), \quad (4.264a)$$

$$c^*(T)=\frac{1}{T_I^*T_D^*}\left(\frac{1}{\gamma_4^{*2}}-\frac{2T}{\left|\gamma_4^*\right|}+2T^2\right). \quad (4.264b)$$

Váhy žádané veličiny $b^*$ a $c^*$ (4.264) platí přímo pro číslicový regulátor PID 2DOF. Pro analogový regulátor PID 2DOF se limitním přechodem $T\to 0$ dostane

$$b^*=\lim_{T\to 0}b^*(T)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\doteq 0{,}423\,, \quad (4.265a)$$

$$c^*=\lim_{T\to 0}c^*(T)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\doteq 0{,}634\,. \quad (4.265b)$$

Odvozené vztahy pro výpočet stavitelných parametrů číslicových regulátorů PI a PID 2DOF jsou uvedeny v tab. 4.22. I když tyto vztahy pro $T\to 0$ platí pro odpovídající analogové regulátory 2DOF, jejich přímé používání pro ně je nepraktické, a proto vztahy pro stavitelné parametry analogových regulátorů PI a PID 2DOF jsou uvedeny v samostatné tab. 4.23.

Vztahy pro výpočet stavitelných parametrů číslicového regulátoru PI 2DOF v tab. 4.22 mohou být zastoupeny zjednodušenými vztahy na základě přibližného postupu 1 – tab. 4.24 (viz podkap. 1.2 a poznámku v příkladě 4.8) [Vítečková, Víteček 2011a, 2011b].

Tab. 4.22 Stavitelné parametry číslicových regulátorů PI a PID 2DOF pro metodu násobného dominantního pólu (MNDP)

| Typ regulátoru | | Regulovaná soustava $\dfrac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ |
|---|---|---|
| PI | $\gamma_3^*$ | $-\dfrac{1}{(d+2)T}\left(2-\sqrt{\dfrac{2d}{d+1}}\right)$ |
| | $K_P^*$ | $-\dfrac{1}{k_1}[(d+1)T\gamma_3^*+2]\gamma_3^*(T\gamma_3^*+1)^d$ |
| | $T_I^*$ | $-\dfrac{(d+1)T^2\gamma_3^{*2}+(d+3)T\gamma_3^*+2}{[(d+1)T\gamma_3^*+1]\gamma_3^*}$ |
| 2DOF | $b^*$ | $\dfrac{1}{T_I^*}\left(\dfrac{1}{\lvert\gamma_3^*\rvert}-T\right)$ |
| PID | $\gamma_4^*$ | $-\dfrac{1}{(d+3)T}\left(3-\sqrt{\dfrac{3d}{d+2}}\right)$ |
| | $K_P^*$ | $\dfrac{1}{k_1}[(d+2)T\gamma_4^*+3](d+1)T\gamma_4^{*2}(T\gamma_4^*+1)^d$ |
| | $T_I^*$ | $-2\dfrac{(d+2)T^2\gamma_4^{*2}+(d+5)T\gamma_4^*+3}{[(d+2)T\gamma_4^*+2]\gamma_4^*}$ |
| | $T_D^*$ | $-\dfrac{(d^2+3d+2)T^3\gamma_4^{*3}+(d^2+7d+6)T^2\gamma_4^{*2}+2(2d+3)T\gamma_4^*+2}{2(d+1)[(d+2)T\gamma_4^*+3]T\gamma_4^{*2}}$ |
| 2DOF | $b^*$ | $\dfrac{2}{T_I^*}\left(\dfrac{1}{\lvert\gamma_4^*\rvert}-T\right)$ |
| | $c^*$ | $\dfrac{1}{T_I^*T_D^*}\left(\dfrac{1}{\gamma_4^{*2}}-\dfrac{2T}{\lvert\gamma_4^*\rvert}+2T^2\right)$ |

Zjednodušené vztahy pro výpočet stavitelných parametrů v tab. 4.24 jsou poměrně přesné. Např. pro $T \leq T_d/2$ ($d \geq 2$) integrační časová konstanta $T_I$ je aproximována s relativní chybou menší než 0,05 (5 %) a zesílení číslicového regulátoru $K_P$ s chybou menší než 0,03 (3 %). Váha žádané veličiny může být aproximována konstantní hodnotou $b^* = 0{,}293$ pro $T \leq T_d/4$ ($d \geq 4$) s chybou menší než 0,05 (5 %) a vztahem uvedeným v tab. 4.24 pro $T_d \leq T/2$ ($d \geq 2$) s chybou menší než 0,01 (1 %) [Vítečková, Víteček 2011a, 2011b].

Tab. 4.23 Stavitelné parametry analogových regulátorů PI a PID 2DOF pro metodu násobného dominantního pólu (MNDP)

| Analogový regulátor | | Regulovaná soustava $\frac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ |
|---|---|---|
| PI | $s_3^*$ | $-\frac{2-\sqrt{2}}{T_d} \doteq -0{,}586\frac{1}{T_d}$ |
| | $K_P^*$ | $\frac{2(\sqrt{2}-1)}{k_1 T_d}\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \doteq 0{,}461\frac{1}{k_1 T_d}$ |
| | $T_I^*$ | $(3+2\sqrt{2})T_d \doteq 5{,}828 T_d$ |
| 2DOF | $b^*$ | $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}293$ |
| PID | $s_4^*$ | $-\frac{3-\sqrt{3}}{T_d} \doteq -1{,}268\frac{1}{T_d}$ |
| | $K_P^*$ | $\frac{6(2\sqrt{3}-3)}{k_1 T_d}\mathrm{e}^{\sqrt{3}-3} \doteq 0{,}784\frac{1}{k_1 T_d}$ |
| | $T_I^*$ | $(2+\sqrt{3})T_d \doteq 3{,}732 T_d$ |
| | $T_D^*$ | $\frac{3+\sqrt{3}}{18}T_d \doteq 0{,}263 T_d$ |
| 2DOF | $b^*$ | $\frac{3-\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}423$ |
| | $c^*$ | $\frac{3-\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}634$ |

Je zřejmé, že vztahy uvedené v tab. 4.24 jsou univerzální, tj. pro $T = 0$ platí přesně pro analogový regulátor PI 2DOF a pro $T > 0$ platí přibližně pro číslicový regulátor PI 2DOF.

Tab. 4.24 Stavitelné parametry číslicového regulátoru PI 2DOF pro metodu násobného dominantního pólu (MNDP)

| Regulátor < analogový $T = 0$ / číslicový $T > 0$ | Regulovaná soustava $\dfrac{k_1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ |
|---|---|
| $K_P^*$ | $\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{k_1\left(T_d+\dfrac{T}{2}\right)}\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \doteq 0{,}461\dfrac{1}{k_1\left(T_d+\dfrac{T}{2}\right)}$ |
| $T_I^*$ | $(3+2\sqrt{2})\left(T_d+\dfrac{T}{2}\right) \doteq 5{,}828\left(T_d+\dfrac{T}{2}\right)$ |
| $b^*$ | $\dfrac{(2-\sqrt{2})T_d}{2\left(T_d+\dfrac{T}{5}\right)} \doteq 0{,}293\dfrac{T_d}{T_d+\dfrac{T}{5}}$ |

U číslicových regulátorů je třeba vzorkovací periodu $T$ volit na základě doporučení uvedených v příloze P6, tj. vztahy (P6.6) nebo (P6.14) pro $T_w = 1/|s_n^*|$, kde $n = 3$ pro číslicový regulátor PI a $n = 4$ pro číslicový regulátor PID. Při použití přibližných vztahů v tab. 4.24 je třeba vzorkovací periodu $T$ volit také s ohledem na požadovanou přesnost.

**Postup:**

1. L-přenos soustavy musí mít tvar (4.241), jinak je ho třeba upravit (viz podkap. 3.2).
2. Na základě tab. 4.22 pro zvolený číslicový regulátor, příp. tab. 4.23 pro zvolený analogový regulátor se vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů. U číslicového regulátoru PI je možné použít přibližných vztahů v tab. 4.24. Vzorkovací perioda $T$ se volí podle doporučení uvedených v příloze P6 (viz předchozí text).

**Příklad 4.18**

Pro integrační soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{0{,}05}{s}\mathrm{e}^{-5s}$$

je třeba seřídit MNDP analogové a číslicové regulátory PI a PID 2DOF tak, aby odezvy na skokové změny polohy žádané veličiny $w(t)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na vstupu soustavy byly nekmitavé bez překmitu (dopravní zpoždění je v sekundách).

**Řešení:**

Pro parametry soustavy $k_1 = 0{,}05\ \mathrm{s}^{-1}$ a $T_d = 5\ \mathrm{s}$ se na základě tab. 4.22 a 4.23 pro regulátor PID obdrží:

Analogový regulátor PID 2DOF ($T = 0$)

$$s_4^* \doteq -0{,}254;\ K_P^* \doteq 3{,}14;\ T_I^* = 18{,}66;\ T_D^* = 1{,}31;\ b^* \doteq 0{,}42;\ c^* = 0{,}63.$$

Číslicový regulátor PID 2DOF ($T = 1$)

$$\gamma_4^* \doteq -0{,}192;\ K_P^* \doteq 2{,}52;\ T_I^* \doteq 21{,}25;\ T_D^* = 1{,}17;\ b^* \doteq 0{,}40;\ c^* = 0{,}75.$$

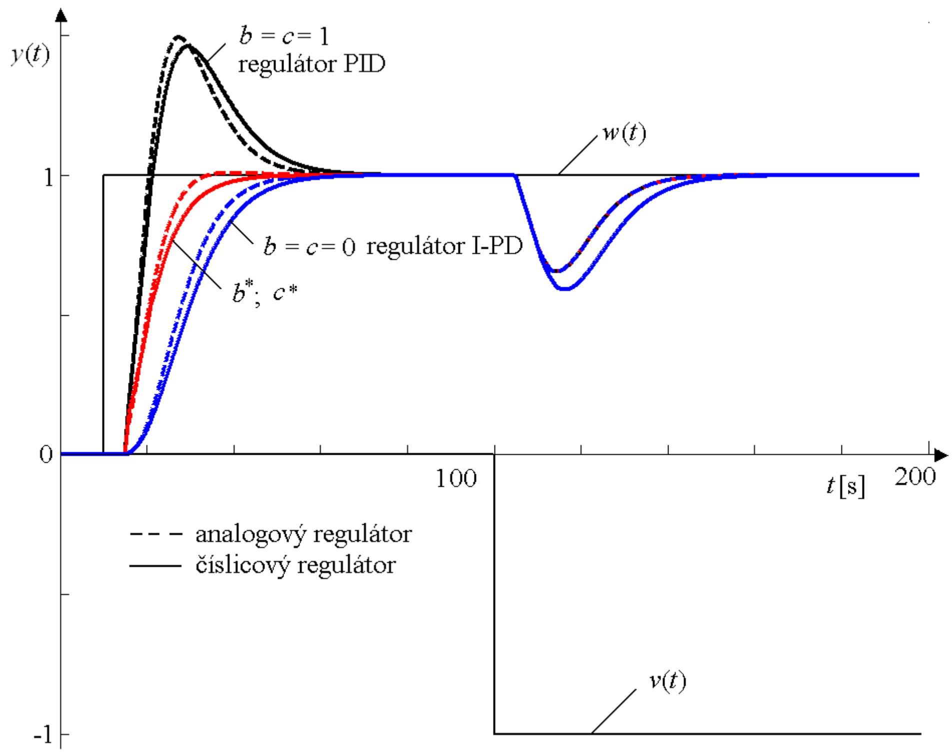
Pro regulátor PI 2DOF se použije tab. 4.24 a dostane se:

Analogový regulátor PI 2DOF ($T = 0$)

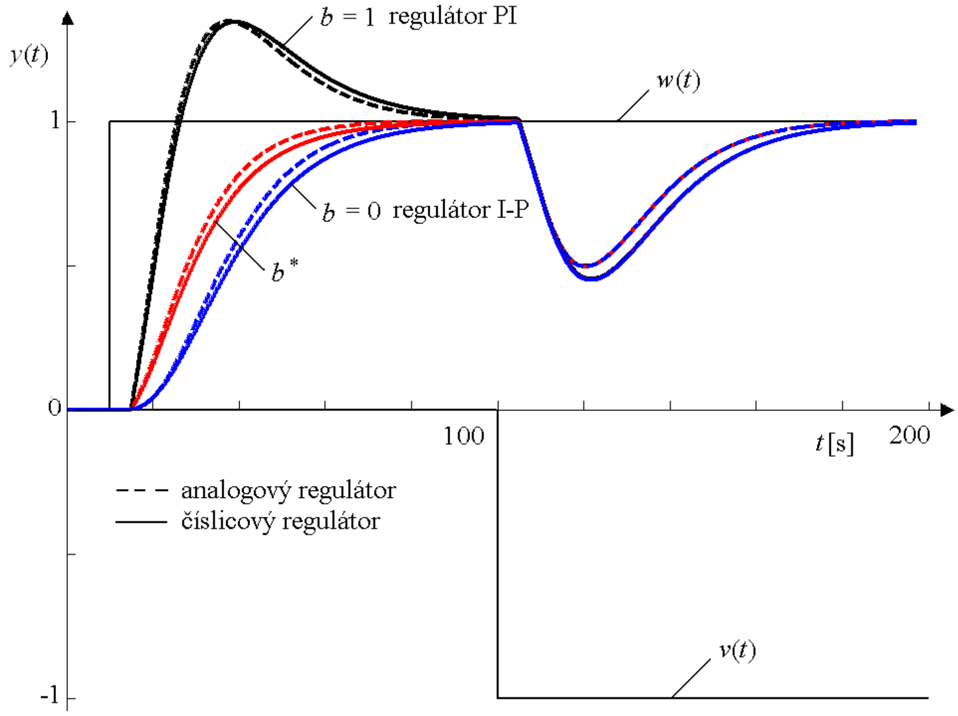
$$K_P^* \doteq 1{,}84;\ T_I^* \doteq 29{,}14;\ \ b^* \doteq 0{,}29.$$

Číslicový regulátor PI 2DOF ($T = 1$)

$$K_P^* \doteq 1{,}68;\ T_I^* \doteq 32{,}05;\ \ b^* \doteq 0{,}27.$$




Obr. 4.48 Odezvy regulačního obvodu s regulátory PID 2DOF seřízenými MNDP pro různé hodnoty vah žádané veličiny $b$ a $c$ – příklad 4.18




Obr. 4.49 Odezvy regulačního obvodu s regulátory PI 2DOF seřízenými MNDP pro různé hodnoty váhy žádané veličiny *b* – příklad 4.18

Získané průběhy odezev jsou na obr. 4.48 a 4.49.

Z obou obrázků vyplývá, že použití vypočtených vah žádané veličiny $b^*$ (pro PI 2DOF) a $b^*$ a $c^*$ (pro PID 2DOF) urychluje odezvy oproti běžně používaným nulovým hodnotám.

# Příloha P1

## Definiční vztahy a základní vlastnosti D-transformace

Zde jsou popsány pouze nejdůležitější vlastnosti D-transformace. Její podrobný popis lze nalézt v angličtině v publikacích [Midleton, Goodwin 1990; Feuer, Goodwin 1996; Goodwin, Graebe, Salgado 2003] a v češtině [Mindeková 1996; Vítečková, Víteček et al. 2002; Halásek 2002].

D-transformace představuje matematický nástroj alternativní k Z-transformaci. Je vhodný k popisu, analýze a syntéze lineárních diskrétních dynamických systémů. Oproti Z-transformaci má výhodu v tom, že modely vyjádřené v D-transformaci lze snadno převést na odpovídající modely v Z-transformaci a pro $T \to 0$ dokonce i v L-transformaci.

Přímá a zpětná D-transformace jsou definovány vztahy

$$X(\gamma) = \mathrm{D}\{x(kT)\} = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(T\gamma + 1)^{-k}, \tag{P1.1}$$

$$x(kT) = \mathrm{D}^{-1}\{X(\gamma)\} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \oint_C X(\gamma)(T\gamma + 1)^{k-1}\,\mathrm{d}\gamma, \tag{P1.2}$$

kde $x(kT)$ je diskrétní originál (musí vyhovovat stejným podmínkám jako u Z-transformace), $X(\gamma)$ – D-obraz, $C$ – integrační cesta obklopující všechny singularity $X(\gamma)$, $\gamma$ – komplexní proměnná v D-transformaci.

Podobně jako u L- a Z- transformace i u D-transformace se s výhodou používají slovníky, kde je možné najít odpovídající korespondence.

Základní úlohu odehrává v D-transformaci relativní dopředná diference, tzv. delta diference

$$\delta x(kT) = \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T}, \tag{P1.3}$$

$$\lim_{T \to 0} \delta x(kT) = \left.\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=kT}, \tag{P1.4}$$

jejíž D-obraz při nulové počáteční podmínce je

$$\mathrm{D}\{\delta x(kT)\} = \gamma X(\gamma). \tag{P1.5}$$

Podobně její Z-obraz při nulové počáteční podmínce je

$$\mathrm{Z}\{\delta x(kT)\} = \frac{z-1}{T} X(z). \tag{P1.6}$$

Na základě srovnání vztahů (P1.5) a (P1.6) lze formálně psát

$$\gamma = \frac{z-1}{T}. \tag{P1.7}$$

Protože

$$z = e^{Ts},$$

použitím l´Hospitalova pravidla se dostane

$$\lim_{T \to 0} \gamma = \lim_{T \to 0} \frac{e^{Ts} - 1}{T} = s. \tag{P1.8}$$

Dynamické modely vyjádřené pomocí delta diferencí se nazývají delta modely a D-transformace – delta transformací.

Ze srovnání definičního vztahu pro přímou D-transformaci (P1.1) s definičním vztahem pro přímou Z-transformaci

$$X(z) = \mathrm{Z}\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \tag{P1.9}$$

vyplývá

$$X(z) = \frac{1}{T} X(\gamma)\Big|_{\gamma = \frac{z-1}{T}}, \tag{P1.10}$$

příp.

$$X(\gamma) = T X(z)\Big|_{z = T\gamma + 1}. \tag{P1.11}$$

Protože platí (P1.8), je zřejmé, že pro D- a L-obrazy platí

$$X(s) = \lim_{T \to 0} X(\gamma). \tag{P1.12}$$

Přenos je definován jako podíl obrazů výstupní a vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách, a proto na základě (P1.10) – (P1.11) lze přímo psát

$$G(z) = G(\gamma)\Big|_{\gamma = \frac{z-1}{T}}, \tag{P1.13}$$

$$G(\gamma) = G(z)\Big|_{z = T\gamma + 1}, \tag{P1.14}$$

$$G(s) = \lim_{T \to 0} G(\gamma). \tag{P1.15}$$

Pro diskrétní Diracův impuls $\delta_\delta(kT)$ a diskrétní Heavisideův skok $\eta(kT)$ platí

$$\delta_\delta(kT) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0 \end{cases}, \qquad \mathrm{D}\{\delta_\delta(kT)\} = 1 \tag{P1.16}$$

a

$$\eta(kT)=\begin{cases}1 & \text{pro} \quad k=0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{pro} \quad k<0\end{cases}, \quad \mathrm{D}\{\eta(kT)\}=\frac{T\gamma+1}{\gamma}. \tag{P1.17}$$

Ze vztahu (P1.16) vyplývá zásadní rozdíl v definici Diracova impulsu $\delta_\delta(kT)$ pro delta modely v D-transformaci a Diracova impulsu

$$\delta(kT)=\begin{cases}1 & \text{pro} \quad k=0 \\ 0 & \text{pro} \quad k\neq 0\end{cases} \tag{P1.18}$$

pro diskrétní modely v Z-transformaci.

## Základní vlastnosti D-transformace

Linearita

$$\mathrm{D}\{a_1x_1(kT)\pm a_2x_2(kT)\}=a_1X_1(\gamma)\pm a_2X_2(\gamma) \tag{P1.19}$$

Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)

$$\mathrm{D}\{x[(k-d)T]\}=(T\gamma+1)^{-d}X(\gamma),\ \ d\geq 0 \tag{P1.20}$$

Dopředná obdélníková sumace (odpovídá dopředné diferenci)

$$\mathrm{D}\left\{T\sum_{i=0}^{k-1}x(iT)\right\}=\frac{1}{\gamma}X(\gamma) \tag{P1.21}$$

Zpětná obdélníková sumace (odpovídá zpětné diferenci)

$$\mathrm{D}\left\{T\sum_{i=0}^{k}x(iT)\right\}=\frac{T\gamma+1}{\gamma}X(\gamma) \tag{P1.22}$$

Delta diference v časové oblasti

$$\mathrm{D}\{\delta^n x(kT)\}=\gamma^n X(\gamma)-(T\gamma+1)\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{n-i-1}\delta^i x(0) \tag{P1.23}$$

$$\delta^0 x(kT)=\delta x(kT)$$

Hodnota sumy v časové oblasti (pokud existuje)

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)=\frac{1}{T}\lim_{\gamma\to 0}X(\gamma) \tag{P1.24}$$

Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje)

$$x(0)=\frac{1}{T}\lim_{\gamma\to\infty}X(\gamma) \tag{P1.25}$$

Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)

$$x(\infty)=\lim_{\gamma\to 0}[\gamma X(\gamma)] \tag{P1.26}$$

Pro běžnou práci s D-transformací jsou uvedené základní vztahy a vlastnosti postačující. Další potřebné korespondence lze získat formálně na základě známých Z-obrazů a Z-přenosů použitím (P1.11) a (P1.14).

Přenosy ideálních konvenčních regulátorů jsou přehledně uvedeny v tab. P1.1.

Tab. P1.1 Přenosy konvenčních regulátorů

| Typ | L-přenos | Z-přenos | D-přenos |
|---|---|---|---|
| P | $K_P$ | $K_P$ | $K_P$ |
| I(S) | $\frac{1}{T_I s}$ | $\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}$ | $\frac{T\gamma+1}{T_I\gamma}$ |
| PI (PS) | $K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)$ | $K_P\left(1+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}\right)$ | $K_P\left(1+\frac{T\gamma+1}{T_I\gamma}\right)$ |
| PD | $K_P(1+T_D s)$ | $K_P\left(1+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$ | $K_P\left(1+\frac{T_D\gamma}{T\gamma+1}\right)$ |
| PID (PSD) | $K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$ | $K_P\left(1+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$ | $K_P\left(1+\frac{T\gamma+1}{T_I\gamma}+\frac{T_D\gamma}{T\gamma+1}\right)$ |
| PID$_i$ (PSD$_i$) | $K_P\left(1+\frac{1}{T_I' s}\right)(1+T_D' s)$ | $K_P'\left(1+\frac{T}{T_I'}\frac{z}{z-1}\right)\left(1+\frac{T_D'}{T}\frac{z-1}{z}\right)$ | $K_P'\left(1+\frac{T\gamma+1}{T_I'\gamma}\right)\left(1+\frac{T_D'\gamma}{T\gamma+1}\right)$ |

Vztahy popisující ideální regulátory PID 2DOF v oblasti komplexní proměnné $s$, $z$ a $\gamma$ mají tvar:

$$U(s)=K_P\left\{bW(s)-Y(s)+\frac{1}{T_I s}[W(s)-Y(s)]+T_D s[cW(s)-Y(s)]\right\}, \qquad \text{(P1.27)}$$

$$U(z)=K_P\left\{bW(z)-Y(z)+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}[W(z)-Y(z)]+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}[cW(z)-Y(z)]\right\}, \qquad \text{(P1.28)}$$

$$U(\gamma)=K_P\left\{bW(\gamma)-Y(\gamma)+\frac{T\gamma+1}{T_I\gamma}[W(\gamma)-Y(\gamma)]+\frac{T_D\gamma}{T\gamma+1}[cW(\gamma)-Y(\gamma)]\right\}. \qquad \text{(P1.29)}$$

V tab. P1.2 jsou uvedeny diskretizované Z- a D-přenosy soustav invariantní vzhledem k přechodové funkci, tj. za předpokladu použití Č/A převodníku s vlastnostmi vzorkovače a tvarovače nultého řádu určené na základě vztahu

$$G_S(\gamma) = \frac{\gamma}{T\gamma + 1} \mathrm{D}\left\{ \mathrm{L}^{-1}\left\{ \frac{G_S(s)}{s} \right\}\bigg|_{t=kT} \right\}. \tag{P1.30}$$

Podobně jako u Z-transformace za předpokladu, že dopravní zpoždění $T_d$ je celým násobkem $d$ vzorkovací periody $T$, tj. $T_d = dT$, vztah (P1.30) se prakticky používá na část přenosu soustavy neobsahující dopravní zpoždění [viz (1.2)]

$$G_P(\gamma) = \frac{\gamma}{T\gamma + 1} \mathrm{D}\left\{ \mathrm{L}^{-1}\left\{ \frac{G_P(s)}{s} \right\}\bigg|_{t=kT} \right\} \tag{P1.31}$$

a pak výsledný D-přenos soustavy s dopravním zpožděním invariantní vzhledem k přechodové funkci je dán vztahem (viz tab. P1.2)

$$G_S(\gamma) = G_P(\gamma)(T\gamma + 1)^{-d}. \tag{P1.32}$$

Tab. P1.2 Tabulka přenosů regulovaných soustav invariantních vzhledem k přechodové funkci

| Regulovaná soustava | | |
|---|---|---|
| L-přenos | Z-přenos | D-přenos |
| $\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $z^{-d}$ | $(T\gamma+1)^{-d}$ |
| $\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $\frac{T}{z-1}z^{-d}$ | $\frac{1}{\gamma}(T\gamma+1)^{-d}$ |
| $\frac{1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $\frac{a_1}{z+a_1-1}z^{-d}$ | $\frac{a_1}{T\gamma+a_1}(T\gamma+1)^{-d}$ |
| $\frac{1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $\frac{(T-T_1a_1)z+(T_1+T)a_1-T}{(z-1)(z+a_1-1)}z^{-d}$ | $\frac{(T-T_1a_1)\gamma+a_1}{(T\gamma+a_1)\gamma}(T\gamma+1)^{-d}$ |
| $\frac{1}{(T_1 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $\frac{[(T_1+T)a_1-T]z-(T_1+T-T_1a_1)a_1+T}{T_1(z+a_1-1)^2}z^{-d}$ | $\frac{[(T_1+T)a_1-T]T\gamma+T_1a_1^2}{T_1(T\gamma+a_1)^2}(T\gamma+1)^{-d}$ |
| $\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}, T_1\neq T_2$ | $\frac{(T_2a_2-T_1a_1)z-T_2a_2+T_1a_1+(T_2-T_1)a_1a_2}{(T_2-T_1)(z+a_1-1)(z+a_2-1)}z^{-d}$ | $\frac{(T_2a_2-T_1a_1)T\gamma+(T_2-T_1)a_1a_2}{(T_2-T_1)(T\gamma+a_1)(T\gamma+a_2)}(T\gamma+1)^{-d}$ |

$$d=\frac{T_d}{T},\quad a_1=1-\mathrm{e}^{-T/T_1},\quad a_2=1-\mathrm{e}^{-T/T_2}$$

# Příloha P2

## Převodní tabulky pro analogové regulátory PID

Tabulky P2.1 – P2.6 umožňují rychlý vzájemný přepočet hodnot stavitelných parametrů analogových regulátorů PID ve tvarech [Vítečková, Víteček 2009a]:

$$G_R(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)\frac{1}{T_f s + 1}, \tag{P2.1}$$

$$G_R(s) = K'_P\left(1 + \frac{1}{T'_I s}\right)(1 + T'_D s)\frac{1}{T_f s + 1}, \tag{P2.2}$$

$$G_R(s) = K''_P\left(1 + \frac{1}{T''_I s} + \frac{T''_D s}{T_f s + 1}\right), \tag{P2.3}$$

$$G_R(s) = K'''_P\left(1 + \frac{1}{T'''_I s}\right)\left(1 + \frac{T'''_D s}{T_f s + 1}\right), \tag{P2.4}$$

$$G_R(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)\frac{1}{T_f s + 1}, \tag{P2.5}$$

$$G_R(s) = K'_P + \frac{K'_I}{s} + \frac{K'_D s}{T_f s + 1}. \tag{P2.6}$$

Pro $T_I, T'_I, T''_I, T'''_I \to \infty$, příp. $K_I, K'_I \to 0$ tabulky platí i pro odpovídající analogové regulátory PD.

Z tabulek je zřejmé, že některé závislosti jsou triviální, ale některé jsou poměrně složité.

Některé symboly a označení platí jenom pro tuto přílohu.

Tab. P2.1

| Výchozí přenos | $K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | | |
|---|---|---|---|
| Transformovaný přenos | Stavitelné parametry | | Poznámka |
| $K'_P\left(1+\frac{1}{T'_I s}\right)(1+T'_D s)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K'_P$ | $K_P\beta$ | $\beta=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{T_D}{T_I}}$ $0\le\frac{T_D}{T_I}\le\frac{1}{4}$ |
| | $T'_I$ | $T_I\beta$ | |
| | $T'_D$ | $T_D\frac{1}{\beta}$ | |
| $K''_P\left(1+\frac{1}{T''_I s}+\frac{T''_D s}{T_f s+1}\right)$ | $K''_P$ | $K_P\gamma_1$ | $\gamma_1=1-\frac{T_f}{T_I}$ |
| | $T''_I$ | $T_I\gamma_1$ | |
| | $T''_D$ | $T_D\frac{1}{\gamma_1}-T_f$ | |
| $K'''_P\left(1+\frac{1}{T'''_I s}\right)\left(1+\frac{T'''_D s}{T_f s+1}\right)$ | $K'''_P$ | $K_P\beta$ | $\beta=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{T_D}{T_I}}$ $0\le\frac{T_D}{T_I}\le\frac{1}{4}$ |
| | $T'''_I$ | $T_I\beta$ | |
| | $T'''_D$ | $T_D\frac{1}{\beta}-T_f$ | |
| $\left(K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K_P$ | $K_P$ | |
| | $K_I$ | $\frac{K_P}{T_I}$ | |
| | $K_D$ | $K_P T_D$ | |
| $K'_P+\frac{K'_I}{s}+\frac{K'_D s}{T_f s+1}$ | $K'_P$ | $K_P\gamma_1$ | $\gamma_1=1-\frac{T_f}{T_I}$ |
| | $K'_I$ | $\frac{K_P}{T_I}$ | |
| | $K'_D$ | $K_P(T_D-T_f\gamma_1)$ | |

Tab. P2.2

| Výchozí přenos | $K_P'\left(1+\frac{1}{T_I' s}\right)\left(1+T_D' s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | | |
|---|---|---|---|
| Transformovaný přenos | Stavitelné parametry | | Poznámka |
| $K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K_P$ | $K_P' i$ | $i=1+\frac{T_D'}{T_I'}$ |
| | $T_I$ | $T_I' i$ | |
| | $T_D$ | $T_D'\frac{1}{i}$ | |
| $K_P''\left(1+\frac{1}{T_I'' s}+\frac{T_D'' s}{T_f s+1}\right)$ | $K_P''$ | $K_P' i_1$ | $i_1=1+\frac{T_D'-T_f}{T_I'}$ |
| | $T_I''$ | $T_I' i_1$ | |
| | $T_D''$ | $T_D'\frac{1}{i_1}-T_f$ | |
| $K_P'''\left(1+\frac{1}{T_I''' s}\right)\left(1+\frac{T_D''' s}{T_f s+1}\right)$ | $K_P'''$ | $K_P'$ | |
| | $T_I'''$ | $T_I'$ | |
| | $T_D'''$ | $T_D'-T_f$ | |
| $\left(K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K_P$ | $K_P' i$ | $i=1+\frac{T_D'}{T_I'}$ |
| | $K_I$ | $\frac{K_P'}{T_I'}$ | |
| | $K_D$ | $K_P' T_D'$ | |
| $K_P'+\frac{K_I'}{s}+\frac{K_D' s}{T_f s+1}$ | $K_P'$ | $K_P' i_1$ | $i_1=1+\frac{T_D'-T_f}{T_I'}$ |
| | $K_I'$ | $\frac{K_P'}{T_I'}$ | |
| | $K_D'$ | $K_P'(T_D'-T_f i_1)$ | |

Tab. P2.3

| Výchozí přenos | $K_P''\left(1+\frac{1}{T_I'' s}+\frac{T_D'' s}{T_f s+1}\right)$ | | |
|---|---|---|---|
| **Transformovaný přenos** | **Stavitelné parametry** | | **Poznámka** |
| $K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K_P$ | $K_P''\gamma_2$ | $\gamma_2=1+\frac{T_f}{T_I''}$ |
| | $T_I$ | $T_I''\gamma_2$ | |
| | $T_D$ | $(T_D''+T_f)\frac{1}{\gamma_2}$ | |
| $K_P'\left(1+\frac{1}{T_I' s}\right)(1+T_D' s)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K_P'$ | $K_P''\beta_2$ | $\gamma_2=1+\frac{T_f}{T_I''}$ |
| | $T_I'$ | $T_I''\beta_2$ | $\beta_2=\gamma_2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{T_D''+T_f}{T_I''}\frac{1}{\gamma_2^2}}\right)$ |
| | $T_D'$ | $(T_D''+T_f)\frac{1}{\beta_2}$ | $0\le\frac{T_I''(T_D''+T_f)}{(T_I''+T_f)^2}\le\frac{1}{4}$ |
| $K_P'''\left(1+\frac{1}{T_I''' s}\right)\left(1+\frac{T_D''' s}{T_f s+1}\right)$ | $K_P'''$ | $K_P''\beta_2$ | $\gamma_2=1+\frac{T_f}{T_I''}$ |
| | $T_I'''$ | $T_I''\beta_2$ | $\beta_2=\gamma_2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{T_D''+T_f}{T_I''}\frac{1}{\gamma_2^2}}\right)$ |
| | $T_D'''$ | $(T_D''+T_f)\frac{1}{\beta_2}-T_f$ | $0\le\frac{T_I''(T_D''+T_f)}{(T_I''+T_f)^2}\le\frac{1}{4}$ |
| $\left(K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$ | $K_P$ | $K_P''\gamma_2$ | $\gamma_2=1+\frac{T_f}{T_I''}$ |
| | $K_I$ | $\frac{K_P''}{T_I''}$ | |
| | $K_D$ | $K_P''(T_D''+T_f)$ | |
| $K_P'+\frac{K_I'}{s}+\frac{K_D' s}{T_f s+1}$ | $K_P'$ | $K_P''$ | |
| | $K_I'$ | $\frac{K_P''}{T_I''}$ | |
| | $K_D'$ | $K_P''T_D''$ | |

Tab. P2.4

<table>
<tr><td>Výchozí přenos</td><td colspan="3">$K_P'''\left(1+\frac{1}{T_I'''s}\right)\left(1+\frac{T_D'''s}{T_f s+1}\right)$</td></tr>
<tr><td>Transformovaný přenos</td><td colspan="2">Stavitelné parametry</td><td>Poznámka</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$</td><td>$K_P$</td><td>$K_P''' i_3$</td><td rowspan="3">$i_3=1+\frac{T_D'''+T_f}{T_I'''}$</td></tr>
<tr><td>$T_I$</td><td>$T_I''' i_3$</td></tr>
<tr><td>$T_D$</td><td>$(T_D'''+T_f)\frac{1}{i_3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$K_P'\left(1+\frac{1}{T_I's}\right)(1+T_D's)\frac{1}{T_f s+1}$</td><td>$K_P'$</td><td>$K_P'''$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$T_I'$</td><td>$T_I'''$</td></tr>
<tr><td>$T_D'$</td><td>$T_D'''+T_f$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$K_P''\left(1+\frac{1}{T_I''s}+\frac{T_D''s}{T_f s+1}\right)$</td><td>$K_P''$</td><td>$K_P''' i_2$</td><td rowspan="3">$i_2=1+\frac{T_D'''}{T_I'''}$</td></tr>
<tr><td>$T_I''$</td><td>$T_I''' i_2$</td></tr>
<tr><td>$T_D''$</td><td>$(T_D'''+T_f)\frac{1}{i_2}-T_f$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\left(K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s\right)\frac{1}{T_f s+1}$</td><td>$K_P$</td><td>$K_P''' i_3$</td><td rowspan="3">$i_3=1+\frac{T_D'''+T_f}{T_I'''}$</td></tr>
<tr><td>$K_I$</td><td>$\frac{K_P'''}{T_I'''}$</td></tr>
<tr><td>$K_D$</td><td>$K_P'''(T_D'''+T_f)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$K_P'+\frac{K_I'}{s}+\frac{K_D's}{T_f s+1}$</td><td>$K_P'$</td><td>$K_P''' i_2$</td><td rowspan="3">$i_2=1+\frac{T_D'''}{T_I'''}$</td></tr>
<tr><td>$K_I'$</td><td>$\frac{K_P'''}{T_I'''}$</td></tr>
<tr><td>$K_D'$</td><td>$K_P''' T_D'''\left(1-\frac{T_f}{T_I'''}\right)$</td></tr>
</table>

Tab. P2.5

| Výchozí přenos | $\left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)\frac{1}{T_f s + 1}$ | | |
|---|---|---|---|
| **Transformovaný přenos** | **Stavitelné parametry** | | **Poznámka** |
| $K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)\frac{1}{T_f s + 1}$ | $K_P$ | $K_P$ | |
| | $T_I$ | $\frac{K_P}{K_I}$ | |
| | $T_D$ | $\frac{K_D}{K_P}$ | |
| $K'_P\left(1 + \frac{1}{T'_I s}\right)\left(1 + T'_D s\right)\frac{1}{T_f s + 1}$ | $K'_P$ | $K_P\beta_1$ | $\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{K_D K_I}{K_P^2}}$ |
| | $T'_I$ | $\frac{K_P}{K_I}\beta_1$ | $0 \le \frac{K_D K_I}{K_P^2} \le \frac{1}{4}$ |
| | $T'_D$ | $\frac{K_D}{K_P}\frac{1}{\beta_1}$ | |
| $K''_P\left(1 + \frac{1}{T''_I s} + \frac{T''_D s}{T_f s + 1}\right)$ | $K''_P$ | $K_P\gamma_3$ | $\gamma_3 = 1 - \frac{K_I}{K_P}T_f$ |
| | $T''_I$ | $\frac{K_P}{K_I}\gamma_3$ | $0 \le \frac{K_I}{K_P}T_f < 1$ |
| | $T''_D$ | $\frac{K_D}{K_P}\frac{1}{\gamma_3} - T_f$ | |
| $K'''_P\left(1 + \frac{1}{T'''_I s}\right)\left(1 + \frac{T'''_D s}{T_f s + 1}\right)$ | $K'''_P$ | $K_P\beta_1$ | $\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{K_D K_I}{K_P^2}}$ |
| | $T'''_I$ | $\frac{K_P}{K_I}\beta_1$ | $0 \le \frac{K_D K_I}{K_P^2} \le \frac{1}{4}$ |
| | $T'''_D$ | $\frac{K_D}{K_P}\frac{1}{\beta_1} - T_f$ | |
| $K'_P + \frac{K'_I}{s} + \frac{K'_D s}{T_f s + 1}$ | $K'_P$ | $K_P\gamma_3$ | $\gamma_3 = 1 - \frac{K_I}{K_P}T_f$ |
| | $K'_I$ | $K_I$ | $0 \le \frac{K_I}{K_P}T_f < 1$ |
| | $K'_D$ | $K_D - K_P T_f \gamma_3$ | |

Tab. P2.6

| Výchozí přenos | $K'_P + \dfrac{K'_I}{s} + \dfrac{K'_D s}{T_f s + 1}$ | | |
|---|---|---|---|
| **Transformovaný přenos** | **Stavitelné parametry** | | **Poznámka** |
| $K_P\left(1 + \dfrac{1}{T_I s} + T_D s\right)\dfrac{1}{T_f s + 1}$ | $K_P$ | $K'_P \gamma_4$ | $\gamma_4 = 1 + \dfrac{K'_I}{K'_P} T_f$ |
| | $T_I$ | $\dfrac{K'_P}{K'_I}\gamma_4$ | |
| | $T_D$ | $\left(\dfrac{K'_D}{K'_P} + T_f\right)\dfrac{1}{\gamma_4}$ | |
| $K'_P\left(1 + \dfrac{1}{T'_I s}\right)(1 + T'_D s)\dfrac{1}{T_f s + 1}$ | $K'_P$ | $K'_P \beta_3$ | $\gamma_4 = 1 + \dfrac{K'_I}{K'_P} T_f$ |
| | $T'_I$ | $\dfrac{K'_P}{K'_I}\beta_3$ | |
| | $T'_D$ | $\left(\dfrac{K'_D}{K'_P} + T_f\right)\dfrac{1}{\beta_3}$ | |
| $K''_P\left(1 + \dfrac{1}{T''_I s} + \dfrac{T''_D s}{T_f s + 1}\right)$ | $K''_P$ | $K'_P$ | |
| | $T''_I$ | $\dfrac{K'_P}{K'_I}$ | |
| | $T''_D$ | $\dfrac{K'_D}{K'_P}$ | |
| $K'''_P\left(1 + \dfrac{1}{T'''_I s}\right)\left(1 + \dfrac{T'''_D s}{T_f s + 1}\right)$ | $K'''_P$ | $K'_P \beta_3$ | $\gamma_4 = 1 + \dfrac{K'_I}{K'_P} T_f$ |
| | $T'''_I$ | $\dfrac{K'_P}{K'_I}\beta_3$ | |
| | $T'''_D$ | $\left(\dfrac{K'_D}{K'_P} + T_f\right)\dfrac{1}{\beta_3} - T_f$ | |
| $\left(K_P + \dfrac{K_I}{s} + K_D s\right)\dfrac{1}{T_f s + 1}$ | $K_P$ | $K'_P + K'_I T_f$ | |
| | $K_I$ | $K'_I$ | |
| | $K_D$ | $K'_D + K'_P T_f$ | |

$$\beta_3 = \gamma_4\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{K'_D K'_I}{K'^2_P}\left(1 + \frac{K'_P}{K'_D} T_f\right)\frac{1}{\gamma_4^2}}\right)$$

$$0 \le \frac{K'_I(K'_D + K'_P T_f)}{(K'_P + K'_I T_f)^2} \le \frac{1}{4}$$

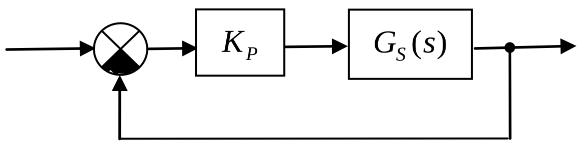
# Příloha P3

## Určení kritických parametrů

Analytické určení kritických parametrů $K_{Pk}$ a $T_k$ pro regulační obvody s analogovým regulátorem a regulovanou soustavou s dopravním zpožděním není většinou možné.

V tab. P3.1 jsou uvedeny vztahy pro jejich přibližné určení. Odhady kritických parametrů uvedené např. v [Oppelt 1967] jsou velmi hrubé a pro praktické využití nevhodné, proto je níže ukázáno, jak tyto parametry určit přesněji [Vítečková, Víteček 2010a].

Je uvažován regulační obvod na obr. P3.1 s analogovým proporcionálním regulátorem o zesílení $K_P$ a soustavou o L-přenosu $G_S(s)$.




Obr. P3.1 Schéma regulačního obvodu

Pro mez stability regulačního obvodu na obr. P3.1 platí [Vítečková, Víteček 2008]

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}[K_{Pk}G_S(\mathrm{j}\omega_k)] = 1, \\ &\arg[K_{Pk}G_S(\mathrm{j}\omega_k)] = -\pi, \end{aligned} \tag{P3.1}$$

kde $K_{Pk}$ je kritické zesílení analogového proporcionálního regulátoru, $\omega_k$ – kritický úhlový kmitočet, mod – modul, arg – fáze.

Na základě vztahů (P3.1) se určí kritické zesílení $K_{Pk}$ a kritická perioda $T_k$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}. \tag{P3.2}$$

Pro cyklometrickou funkci arctg($x$) je použita jednoduchá aproximace [Ho, Hang, Cao 1995]

$$\operatorname{arctg}(x) \approx \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}x & \text{pro } |x| \le 1 \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4x} & \text{pro } x > 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4x} & \text{pro } x < -1 \end{cases} \tag{P3.3}$$

s chybou menší než ± 0,075.

Postup odvození přesných i přibližných vztahů je ilustrován dvěma jednoduchými příklady.

**Příklad P3.1**

Je třeba určit kritické parametry pro integrační soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{P3.4}$$

kde $k_1$ je koeficient přenosu, $T_d$ – dopravní zpoždění.

**Řešení:**

Z podmínek P3.1 pro soustavu (P3.4) se obdrží

$$\left.\begin{aligned} \frac{K_{Pk} k_1}{\omega_k} &= 1 \\ -\frac{\pi}{2} - T_d \omega_k &= -\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_{Pk} k_1 &= \omega_k \\ T_d \omega_k &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

a po uvažování (P3.2)

$$K_{Pk} = \frac{\pi}{2 k_1 T_d}, \qquad T_k = 4 T_d\,. \tag{P3.5}$$

Vztahy (P3.5) umožňují na základě známých hodnot $k_1$ a $T_d$ určit kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$. Je zřejmé, že ze známých hodnot $K_{Pk}$ a $T_k$ lze zpětně určit $k_1$ a $T_d$, tj.

$$k_1 = \frac{2\pi}{K_{Pk} T_k}, \qquad T_d = \frac{T_k}{4}\,. \tag{P3.6}$$

To znamená, že vztahy (P3.6) mohou být použity k experimentální identifikaci v uzavřeném regulačním obvodu pro experimentálně zjištěné kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$. Zastoupí-li se analogový proporcionální regulátor symetrickým relé, pak kritické parametry ve vztazích (P3.6) mohou být přibližně určeny metodou relé. Např. pro symetrické relé bez hystereze platí [Vítečková, Víteček 2005]

$$K_{Pk} \approx \frac{4 u_0}{\pi a_y}, \tag{P3.7}$$

kde $u_0$ je amplituda relé (maximální výstupní hodnota relé), $a_y$ – amplituda regulované veličiny kmitající s periodou $T_k$.

**Příklad P3.2**

Je třeba určit kritické parametry pro proporcionální soustavu s L-přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} \mathrm{e}^{-T_d s}, \tag{P3.8}$$

kde $T_2$ je časová konstanta.

**Řešení:**

V souladu s podmínkami (P3.1) pro proporcionální soustavu (P3.8) se dostane

$$\left.\begin{aligned} \frac{K_{Pk} k_1}{(T_2 \omega_k)^2 + 1} &= 1 \\ -2\operatorname{arctg}(T_2 \omega_k) - T_d \omega_k &= -\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_{Pk} k_1 &= (T_2 \omega_k)^2 + 1 \\ T_d \omega_k &= \pi - 2\operatorname{arctg}(T_2 \omega_k) \end{aligned}. \tag{P3.9}$$

Na základě vztahů (P3.9) lze psát

$$\frac{T_d}{T_2} = \frac{\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{K_{Pk} k_1 - 1}}{\sqrt{K_{Pk} k_1 - 1}} \tag{P3.10}$$

a ze srovnání vztahů (P3.3) a (P3.9) pro

$$x = T_2 \omega_k \;\Rightarrow\; x = \sqrt{K_{Pk} k_1 - 1}$$

vyplývá

$$\begin{aligned} x > 1 \;&\Rightarrow\; K_{Pk} k_1 > 2 \;\Rightarrow\; \frac{T_d}{T_2} < \frac{\pi}{2}, \\ x = 1 \;&\Rightarrow\; K_{Pk} k_1 = 2 \;\Rightarrow\; \frac{T_d}{T_2} = \frac{\pi}{2}, \\ x < 1 \;&\Rightarrow\; K_{Pk} k_1 < 2 \;\Rightarrow\; \frac{T_d}{T_2} > \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{P3.11}$$

Na základě vztahů (P3.9) a (P3.11) se dostane

a) $0 < \dfrac{T_d}{T_2} < \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} K_{Pk} &= \frac{1}{k_1}\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_2}{T_d} + 1\right) > \frac{2}{k_1}, \\ T_k &= 2\sqrt{2\pi T_d T_2}. \end{aligned} \tag{P3.12}$$

b) $\dfrac{T_d}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} K_{Pk} &= \frac{2}{k_1}, \\ T_k &= 2\pi T_2 = 4T_d. \end{aligned} \tag{P3.13}$$

c) $\dfrac{T_d}{T_2} > \dfrac{\pi}{2}$

$$K_{Pk} = \frac{1}{k_1}\left[\left(\frac{2\pi T_2}{2T_d + \pi T_2}\right)^2 + 1\right] < \frac{2}{k_1},$$
$$T_k = 2T_d + \pi T_2. \tag{P3.14}$$

Vztahy (P3.13) jsou přesné a na stejný přesný výsledek vedou pro $\dfrac{T_d}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$ i přibližné vztahy (P3.12) a (P3.14).

Za předpokladu známého $k_1$ vztahy (P3.9) mohou být po úpravě použity k experimentální identifikaci (viz tab. 4.3)

$$T_2 = \frac{T_k}{2\pi}\sqrt{K_{Pk}k_1 - 1},$$
$$T_d = \frac{T_k}{2\pi}\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{K_{Pk}k_1 - 1}\right). \tag{P3.15}$$

Samozřejmě i v tomto případě kritické parametry $K_{Pk}$ a $T_k$ mohou být určeny experimentálně metodou relé.

Podobným způsobem byly získány i zbývající vztahy v tab. P3.1.

Pro regulované soustavy se setrvačností prvního a druhého řádu je třeba určit nejdříve poměr $T_d/T_1$ nebo $T_d/T_2$ a podle něho pak zvolit vhodné vztahy pro výpočet kritických parametrů. Pro tyto soustavy jsou odpovídající vztahy pouze přibližné (až na konkrétní poměry $T_d/T_1$ a $T_d/T_2$).

Tab. P3.1 Určení kritických parametrů $K_{Pk}$ a $T_k$ na základě parametrů soustavy

<table>
<tr><th>Přenos soustavy</th><th colspan="2">Kritické parametry</th><th>Poznámka</th></tr>
<tr><td>$k_1\,\mathrm{e}^{-T_d s}$</td><td colspan="2">$K_{Pk}k_1 = 1, \quad T_k = 2T_d$</td><td>přesné</td></tr>
<tr><td>$\frac{k_1}{s}\,\mathrm{e}^{-T_d s}$</td><td colspan="2">$K_{Pk}k_1 = \frac{\pi}{2T_d}, \qquad T_k = 4T_d$</td><td>přesné</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$</td><td>$0 < \frac{T_d}{T_1} < \frac{3}{4}\pi$</td><td>$K_{Pk}k_1 = \sqrt{\left[\frac{\pi T_1}{4T_d}\left(1+\sqrt{1+\frac{4T_d}{\pi T_1}}\right)\right]^2+1} > \sqrt{2}$<br>$T_k = \frac{8T_d}{1+\sqrt{1+\frac{4T_d}{\pi T_1}}}$</td><td>přibližné,<br>pro $\frac{T_d}{T_1} = \frac{3}{4}\pi$ přesné</td></tr>
<tr><td>$\frac{T_d}{T_1} = \frac{3}{4}\pi$</td><td>$K_{Pk}k_1 = \sqrt{2}$<br>$T_k = \frac{8T_d}{3} = 2\pi T_1$</td><td>přesné</td></tr>
</table>

Tab. P3.1 – pokračování

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{k_1}{T_1 s+1}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $\dfrac{T_d}{T_1} > \dfrac{3}{4}\pi$ | $K_{Pk}k_1 = \sqrt{\left(\dfrac{4\pi T_1}{\pi T_1 + 4T_d}\right)^2 + 1} < \sqrt{2}$ <br> $T_k = 2T_d + \dfrac{\pi T_1}{2}$ | přibližné, <br> pro $\dfrac{T_d}{T_1} = \dfrac{3}{4}\pi$ přesné |
| $\dfrac{k_1}{s(T_1 s+1)}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $0 < \dfrac{T_d}{T_1} < \dfrac{\pi}{4}$ | $K_{Pk}k_1 = \dfrac{1}{4T_d}\sqrt{\dfrac{\pi(4T_d + \pi T_1)}{T_1}} > \dfrac{\sqrt{2}}{T_1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}T_d}$ <br> $T_k = 4\sqrt{\pi T_d T_1}$ | přibližné, <br> pro $\dfrac{T_d}{T_1} = \dfrac{\pi}{4}$ přesné |
| | $\dfrac{T_d}{T_1} = \dfrac{\pi}{4}$ | $K_{Pk}k_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{T_1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}T_d}$ <br> $T_k = 8T_d = 2\pi T_1$ | přesné |
| | $\dfrac{T_d}{T_1} > \dfrac{\pi}{4}$ | $K_{Pk}k_1 = \dfrac{2\pi}{4T_d + \pi T_1}\sqrt{\left(\dfrac{2\pi T_1}{4T_d + \pi T_1}\right)^2 + 1} < \dfrac{\sqrt{2}}{T_1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}T_d}$ <br> $T_k = 4T_d + \pi T_1$ | přibližné, <br> pro $\dfrac{T_d}{T_1} = \dfrac{\pi}{4}$ přesné |

Tab. P3.1 – pokračování

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{k_1}{(T_2 s+1)^2}\mathrm{e}^{-T_d s}$ | $0 < \dfrac{T_d}{T_2} < \dfrac{\pi}{2}$ | $K_{Pk}k_1 = \dfrac{\pi T_2}{2T_d} + 1 > 2$<br>$T_k = 2\sqrt{2\pi T_d T_2}$ | přibližné,<br>pro $\dfrac{T_d}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$ přesné |
| | $\dfrac{T_d}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$ | $K_{Pk}k_1 = 2$<br>$T_k = 4T_d = 2\pi T_2$ | přesné |
| | $\dfrac{T_d}{T_2} > \dfrac{\pi}{2}$ | $K_{Pk}k_1 = \left(\dfrac{2\pi T_2}{2T_d + \pi T_2}\right)^2 + 1 < 2$<br>$T_k = 2T_d + \pi T_2$ | přibližné,<br>pro $\dfrac{T_d}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$ přesné |

# Příloha P4

## Integrační regulované soustavy

V regulačních obvodech s integrační soustavou a regulátorem s integrační (sumační) složkou vystupují problémy se stabilizací a velkými překmity. Vhodnou volbou stavitelných parametrů konvenčních regulátorů (1DOF) lze zajistit stabilní regulační pochod, ale nelze již zajistit, aby byl regulační proces při skokové změně polohy žádané veličiny $w(t)$ bez překmitu. Vyplývá to z následujících úvah.

Předpokládá se, že integrační soustava má L-přenos

$$G_S(s) = \frac{1}{s^r} G_{S1}(s), \quad \lim_{s \to 0} G_{S1}(s) \neq 0, \tag{P4.1}$$

kde $r$ je počet integračních členů soustavy ($q = r + 1$ – typ regulačního obvodu) a že byl použit standardní analogový regulátor PID (2.2). Pak odchylkový přenos řízení má tvar

$$G_{we}(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{T_I s^{r+1}}{T_I s^{r+1} + K_P(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)G_{S1}(s)}. \tag{P4.2}$$

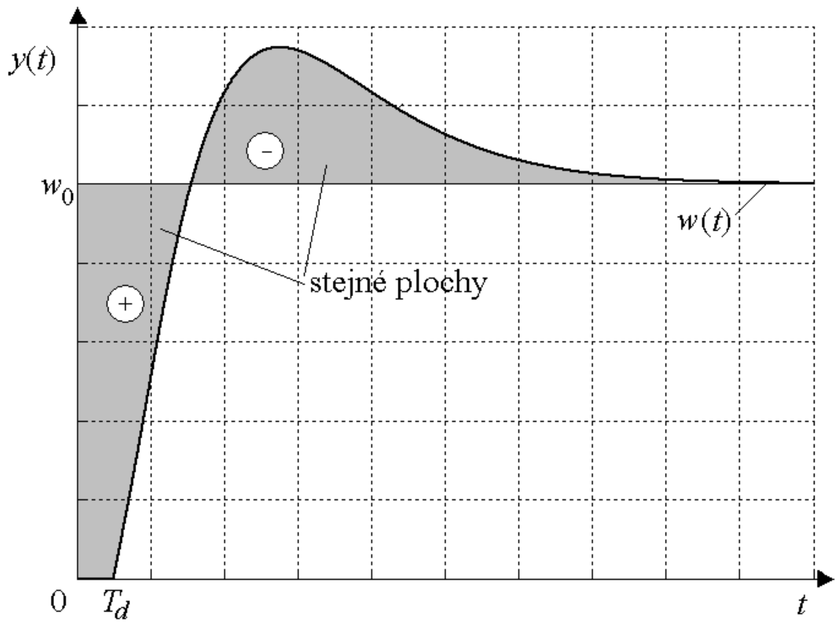
Pro lineární regulační plochu (4.4)

$$I_{IE} = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s \to 0} E(s) = \lim_{s \to 0} [G_{we}(s)W(s)]$$

způsobenou skokovou změnou polohy žádané veličiny $W(s) = w_0/s$ a pro $r \geq 1$ platí

$$I_{IE} = \lim_{s \to 0} \frac{w_0 T_I s^r}{T_I s^{r+1} + K_P(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)G_{S1}(s)} = 0. \tag{P4.3}$$

Ze vztahu (P4.3) vyplývá, že plochy nad a pod polopřímkou $w(t) = w_0$ musí být stejné, tj. v průběhu regulované veličiny $y(t)$ musí vznikat vždy překmit. Geometrická interpretace vztahu (P4.3) je ukázána na obr. P4.1.




Obe. P4.1 Odezva regulačního obvodu typu $q = 2$ na skokovou změnu polohy žádané veličiny

Je zřejmé, že stejné závěry platí i pro regulační obvody s číslicovým regulátorem.

Velký překmit regulované veličiny $y(t)$ lze snížit, příp. zcela odstranit použitím omezení nárůstu rychlosti žádané veličiny $w(t)$ nebo odpovídající vstupní filtrací. Vhodným řešením je použití regulátoru 2DOF.

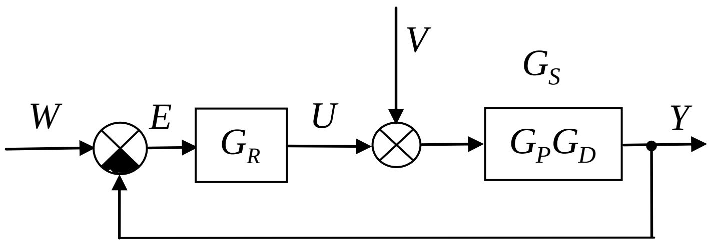
# Příloha P5

## Vztah mezi metodou přímé syntézy a metodou vnitřního modelu

Přenos řízení $G_{wy}$ a poruchy $G_{vy}$ pro regulační obvod s konvenčním regulátorem (1DOF) na obr. P5.1 jsou dány vztahy (viz podkap. 1.1)

$$G_{wy} = \frac{Y}{W} = \frac{G_R G_P G_D}{1 + G_R G_P G_D}, \tag{P5.1}$$

$$G_{vy} = \frac{Y}{V} = \frac{G_P G_D}{1 + G_R G_P G_D} = (1 - G_{wy}) G_P G_D. \tag{P5.2}$$




Obr. P5.1 Regulační obvod s konvenčním regulátorem

Ze vztahu (P5.1) může být určen přenos regulátoru

$$G_R = \frac{1}{G_P G_D} \frac{G_{wy}}{1 - G_{wy}}, \tag{P5.3}$$

tzn., že pro zadaný nebo požadovaný přenos řízení $G_{wy}$ lze na základě vztahu (P5.3) navrhnout odpovídající regulátor s přenosem $G_R$, který realizuje požadovaný přenos řízení $G_{wy}$. Je zřejmé, že požadovaný přenos řízení by měl být co nejjednodušší a fyzikálně realizovatelný. Nejčastěji se volí ve tvaru

$$G_{wy} = G_w G_D, \tag{P5.4}$$

kde $G_w$ je přenos proporcionálního členu se setrvačností prvního nebo druhého řádu s jednotkovým koeficientem přenosu a $G_D$ je přenos neinvertibilní části s jednotkovým modulem. Zde se předpokládá, že $G_D$ reprezentuje dopravní zpoždění.

Po dosazení (P5.4) do (P5.3) se obdrží

$$G_R = \frac{1}{G_P} \frac{G_w}{1 - G_w G_D}. \tag{P5.5}$$

Ze vztahů (P5.3) nebo (P5.5) přímo vyplývá, že část $G_P$ přenosu soustavy $G_S$ musí být invertibilní.

Vztah (P5.5) nebo (P5.3) se nazývá rovnicí syntézy a slouží k návrhu regulátorů přímou syntézou.

Podobně po dosazení (P5.4) do (P5.2) se získá přenos poruchy

$$G_{vy} = (1 - G_w G_D) G_P G_D . \tag{P5.6}$$

Při použití vztahu pro přímou syntézu (P5.5) nebo (P5.3) nesmí v žádném případě dojít ke krácení nestabilních dvojčlenů nebo trojčlenů (způsobilo by to nestabilitu uzavřeného regulačního obvodu) a výsledný přenos regulátoru musí být fyzikálně realizovatelný a většinou se také požaduje, aby byl konvenční, viz tab. P1.1.

Ze srovnání vztahů (P5.1) a (P5.3) vyplývá, že

$$G_o = G_R G_P G_D = \frac{G_{wy}}{1 - G_{wy}} , \tag{P5.7}$$

a proto při návrhu regulátoru metodou přímé syntézy lze rovněž vycházet ze zadaného nebo požadovaného přenosu otevřeného regulačního obvodu (P5.7), tj.

$$G_R = \frac{1}{G_P G_D} G_o . \tag{P5.8}$$

Pro návrh regulátorů se stále častěji používá metoda vnitřního modelu. Vychází se z blokového schématu na obr. P5.2, kde $G_R^{IMC}$ je přenos regulátoru s vnitřním modelem (IMC – **I**nternal **M**odel **C**ontrol), $G_F^{IMC}$ – přenos filtru regulátoru s vnitřním modelem, $G_{PM}$ – přenos modelu stabilní invertibilní části přenosu soustavy $G_S$, $G_{DM}$ – přenos modelu stabilní neinvertibilní části přenosu soustavy $G_S$ (zde se předpokládá, že přenos $G_D$ vyjadřuje dopravní zpoždění).

Regulační obvod s vnitřním modelem na obr. P5.2a patří mezi rozvětvené regulační obvody.

Přenos regulátoru s vnitřním modelem $G_R^{IMC}$ se volí ve tvaru

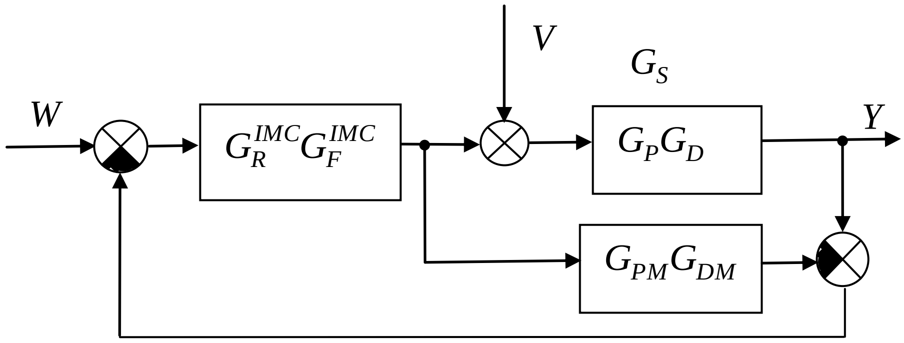
$$G_R^{IMC} = \frac{1}{G_{PM}} \tag{P5.9}$$

a přenos filtru $G_F^{IMC}$ je třeba zvolit tak, aby součin

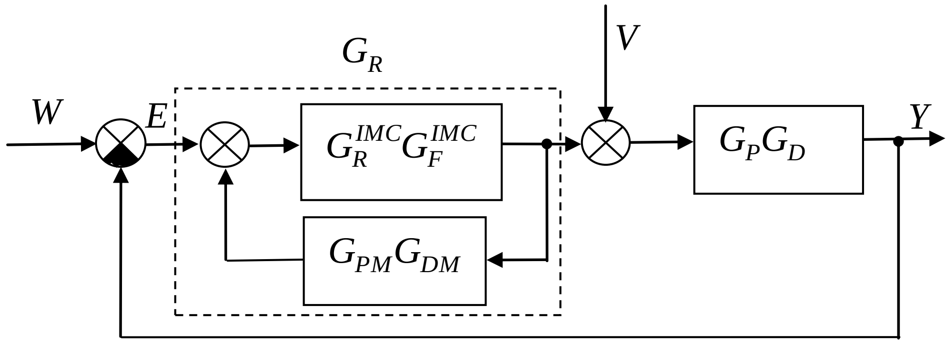
$$G_R^{IMC} G_F^{IMC} \tag{P5.10}$$

byl alespoň slabě fyzikálně realizovatelný, tj. aby stupeň čitatele součinu (P5.10) nepřevyšoval stupeň jeho jmenovatele.

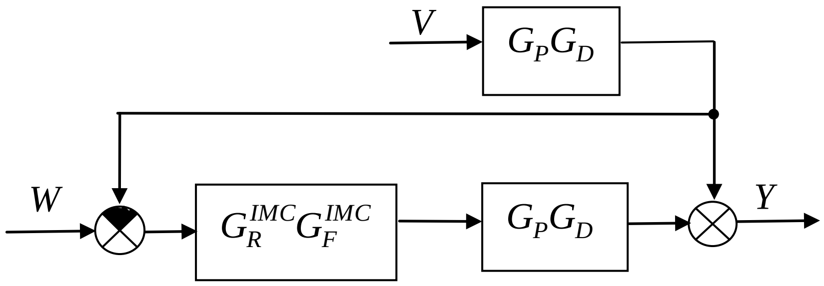
a)




b)




c)




$$G_R^{IMC} = \frac{1}{G_P}$$

Obr. P5.2 Regulační obvod s vnitřním modelem

Schéma rozvětveného regulačního obvodu s vnitřním modelem na obr. P5.2a může být transformováno na schéma „obyčejného“ regulačního obvodu (obr. P5.2b) s přenosem regulátoru

$$G_R = \frac{G_R^{IMC} G_F^{IMC}}{1 - G_R^{IMC} G_F^{IMC} G_{PM} G_{DM}}. \tag{P5.11}$$

Bude-li splněna podmínka plné shody vnitřního modelu se soustavou, tj.

$$G_{PM} = G_P, \quad G_{DM} = G_D, \tag{P5.12}$$

pak vztah (P5.11) bude mít tvar

$$G_R = \frac{1}{G_P}\frac{G_F^{IMC}}{1 - G_F^{IMC} G_D} \tag{P5.13}$$

a schéma na obr. P5.2a může být zastoupeno jednoduchým schématem na obr. P5.2c, kde nevystupuje zpětná vazba!

Ze schématu na obr. P5.2c se dostane

$$G_{wy} = G_F^{IMC} G_D\,, \tag{P5.14}$$

$$G_{vy} = (1 - G_F^{IMC} G_D) G_P G_D\,. \tag{P5.15}$$

Ze srovnání vztahů (P5.5) s (P5.13), (P5.4) s (P5.14) a (P5.6) s (P5.15) je zřejmé, že pro

$$G_w = G_F^{IMC} \tag{P5.16}$$

metoda přímé syntézy i metoda vnitřního modelu vedou na stejný regulátor a stejný přenos řízení i poruchy. To znamená, že při návrhu konvenčních regulátorů jsou obě metody ekvivalentní a v podstatě při splnění podmínky (P5.16) a samozřejmě i podmínek (P5.12) nerozlišitelné. Z tohoto důvodu i pro metodu vnitřního modelu platí při návrhu konvenčního regulátoru stejná omezení jako pro metodu přímé syntézy.

Použití obou metod syntézy je zde omezeno pouze na konvenční regulátory. Ve skutečnosti obě metody jsou značně obecnější [Chen, Seborg 2002; Jung, Song, Hyun 1999b; Rivera, Morari, Skogestad 1986; Rivera 1995; Wang, Hang, Yang 2001]. Jak metoda přímé syntézy, tak i metoda vnitřního modelu mohou být použity i pro nestabilní soustavy [Jung, Song, Hynn 1999a; Tan, Marquez, Chen 2003]. Metoda vnitřního modelu umožňuje snadněji zajistit robustnost regulačního obvodu [Rivera, Morari, Skogestat 1986; Rivera 1995].

# Příloha P6

## Volba vzorkovací periody

Ačkoliv vzorkovací perioda $T$ má zásadní vliv na stabilitu regulačního obvodu, a tedy i na kvalitu regulace, její volbě není většinou věnována velká pozornost. Je to proto, že problém je složitý, protože celková chyba při vzorkování (časové diskretizaci) je dána jednak vlastním vzorkováním, ale také kvantizací (diskretizací v úrovni). Přitom kvantizační chyba závisí na vlastnostech konkrétního A/Č převodníku [Sawicki, Piątek 2004]. Dále se předpokládá, že kvantizační chyba je zanedbatelně malá, a proto nebude uvažována.

Další problém spočívá v nejednotnosti názorů na její volbu, zda má být určena na základě vlastnosti soustavy, uzavřeného regulačního obvodu, přípustného snížení hodnoty zvoleného kritéria kvality regulace atd. [Åström, Wittenmark 1997; Isermann 1989; Pivoňka 2003b; Brzózka 2002; Šulc, Vítečková 2004; Ogunnaike, Ray 1994; Moudgalya 2007; Landau, Zito 2006; Medvedev et al. 1987; Zagarij, Šubladze 1988].

Vzorkování probíhá v uzavřeném regulačním obvodu, a proto je zřejmé, že volba vzorkovací periody $T$ by měla být provedena na základě jeho vlastností. Vystupuje zde však problém, že vlastnosti regulačního obvodu před jeho seřízením nejsou známé. Proto se doporučuje, pokud je to možné, zvolenou vzorkovací periodu $T$ vždy simulačně ověřit.

Vzorkovací perioda $T$ musí často vyhovovat více kritériím, a proto při její volbě je třeba přijmout určitý kompromis.

Nejdůležitější, ale současně velmi jednoduchá metoda volby vzorkovací periody $T$ vychází z mezního úhlového kmitočtu $\omega_m$ uzavřeného regulačního obvodu (viz podkap. 4.1 a obr. 4.3). Pro vzorkovací kmitočet

$$\omega_v = \frac{2\pi}{T} \tag{P6.1}$$

je nejčastěji doporučováno rozmezí

$$\omega_v = (6 \div 30)\omega_m\,. \tag{P6.2}$$

L-přenos řízení uzavřeného regulačního obvodu má často tvar

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{(T_w s + 1)^n} \mathrm{e}^{-T_d s}\,. \tag{P6.3}$$

Pro modul kmitočtového přenosu řízení (P6.3) platí

$$A_{wy}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[(\omega T_w)^2 + 1]^n}}, \tag{P6.4}$$

a proto mezní úhlový kmitočet $\omega_m$ lze určit z rovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{[(\omega_m T_w)^2 + 1]^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_m = \frac{1}{T_w}\sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}. \tag{P6.5}$$

Na základě vztahů (P6.5), P(6.2) a (P6.1) se obdrží (hodnoty jsou zaokrouhleny)

$$\begin{aligned}
n &= 1 \qquad & T &= (0{,}2 \div 1{,}0)T_w, \\
n &= 2 \qquad & T &= (0{,}3 \div 1{,}6)T_w, \\
n &= 3 \qquad & T &= (0{,}4 \div 2{,}0)T_w, \\
n &= 4 \qquad & T &= (0{,}5 \div 2{,}4)T_w.
\end{aligned} \tag{P6.6}$$

Podobně pro L-přenos řízení ve tvaru (4.87)

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w^2 s^2 + 2\xi_w T_w s + 1}\mathrm{e}^{-T_d s}, \quad T_w = \frac{1}{\omega_w}. \tag{P6.7}$$

je modul dán vztahem

$$A_{wy}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega T_w)^2]^2 + 4\xi_w^2(\omega T_w)^2}}. \tag{P6.8}$$

Z rovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_m T_w)^2]^2 + 4\xi_w^2(\omega_m T_w)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a vztahů (P6.2) a (P6.1) se dostane

$$\xi_w = 1, \qquad \omega_m = \frac{1}{T_w}\sqrt{\sqrt{2} - 1}, \qquad T = (0{,}3 \div 1{,}6)T_w, \tag{P6.9}$$

$$\xi_w = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \omega_m = \frac{1}{T_w}, \qquad T = (0{,}2 \div 1{,}0)T_w, \tag{P6.10}$$

$$\xi_w = \frac{1}{2}, \qquad \omega_m = \frac{1}{T_w}\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}, \qquad T = (0{,}16 \div 0{,}8)T_w. \tag{P6.11}$$

Je zřejmé, že obdržené hodnoty (P6.9) musí odpovídat vztahům (P6.6) pro $n = 2$.

Častým kritériem pro volbu vzorkovací periody $T$ je, že by měla vyhovovat vztahu

$$T = (0{,}07 \div 0{,}17)t_{0,95}, \tag{P6.12}$$

kde $t_{0,95}$ je doba, kdy nekmitavá přechodová funkce $y(t)$ regulačního obvodu dosáhne $0{,}95y(\infty)$, tj. 95 % své ustálené hodnoty, přičemž se neuvažuje případné dopravní zpoždění.

Doba $t_{0,95}$ pro L-přenos řízení (P6.3) bez dopravního zpoždění může být s dostatečnou přesností určena na základě jednoduchého vzorce [Dodds 2008]

$$t_{0,95} = 1{,}5(1+n)T_w. \tag{P6.13}$$

Po dosazení (P6.13) do (P6.12) se po zaokrouhlení dostane

$$\begin{aligned} n &= 1 \qquad & T &= (0{,}2 \div 0{,}5)T_w, \\ n &= 2 \qquad & T &= (0{,}3 \div 0{,}75)T_w, \\ n &= 3 \qquad & T &= (0{,}4 \div 1)T_w, \\ n &= 4 \qquad & T &= (0{,}5 \div 1{,}25)T_w. \end{aligned} \tag{P6.14}$$

I když výsledky (P6.14) dávají pro maximální hodnoty vzorkovací periody $T$ dvakrát menší hodnoty než předchozí kritérium vycházející z mezního úhlového kmitočtu $\omega_m$, je zřejmé, že jde o dobrou shodu obou kritérií.

U kmitavé přechodové charakteristiky regulačního obvodu počet vzorků během doby kmitu by měl být v rozmezí od 15 do 45 [Moudgalya 2007].

Protože pro $\xi_w \geq 1/\sqrt{2}$ je kmitavost zanedbatelná, je uvažován pouze případ $\xi_w = 0{,}5$, pro který doba kmitu je [viz (4.93b)]

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi_w^2}}T_w = \frac{2\pi}{\sqrt{0{,}75}}T_w. \tag{P6.15}$$

Po uvažování (P6.15) a (P6.11) se dostane počet vzorků během doby kmitu v rozmezí od 9 do 45, což je velmi dobrá shoda.

Některé metody seřizování číslicových regulátorů vyžadují, aby dopravní zpoždění $T_d$ bylo celočíselným násobkem vzorkovací periody $T$, tj.

$$T = \frac{T_d}{T} \quad (d - \text{celé číslo}). \tag{P6.16}$$

U dominantního dopravního zpoždění se vyžaduje [Vítečková 1996, 1998]

$$d \geq 3. \tag{P6.17}$$

Uvedená kritéria pro volbu vzorkovací periody $T$ jsou obecně platná pro všechny metody seřizování číslicových regulátorů. Je zřejmé, že vzorkovací perioda $T$ může být menší, než je doporučeno, ale bezdůvodně by neměla být větší.

Někteří autoři uvádějí orientační hodnoty vzorkovací periody pro různé soustavy a procesy [Brzózka 2002; Grega 2004; Landau, Zito 2006; Vítečková, Víteček 2008]. Níže jsou uvedeny orientační hodnoty vzorkovací periody podle [Landau, Zito 2006].

| Typ proměnné nebo soustava | Vzorkovací perioda [s] |
|---|---|
| průtok | 1 ÷ 3 |
| hladina | 5 ÷ 10 |
| tlak | 1 ÷ 5 |
| teplota | 10 ÷ 180 |
| servomechanizmy | 0,001 ÷ 0,05 |
| katalytické reaktory | 10 ÷ 45 |
| cementářské pece | 20 ÷ 45 |
| sušičky | 20 ÷ 45 |

# Příloha P7

## L- a Z-transformace

V této příloze jsou uvedeny dvě tabulky. Tabulka P7.1 obsahuje definiční vztahy L- a Z- transformace a jejich základní vlastnosti. Tabulka P7.2 obsahuje základní slovník obou transformací.

Tab. P7.1

| | L-transformace | Z-transformace |
|---|---|---|
| 1 | Definiční vzorce | |
| | $X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ | $X(z) = \mathrm{Z}\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\mathrm{z}^{-k}$ |
| 2 | $x(t) = \mathrm{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_r X(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$ | $x(kT) = \mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_r X(z)\mathrm{z}^{k-1}\,\mathrm{d}z$ |
| | $r$ – poloměr kružnice, uvnitř které leží všechny singulární body obrazu | |
| 3 | Linearita | |
| | $\mathrm{L}\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} = a_1X_1(s) \pm a_2X_2(s)$ | $\mathrm{Z}\{a_1x_1(kT) \pm a_2x_2(kT)\} = a_1X_1(z) \pm a_2X_2(z)$ |
| 4 | Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění) | |
| | $\mathrm{L}\{x(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as}X(s), \quad a \geq 0$<br>Speciálně pro $a = mT, \quad m \geq 0$<br>$\mathrm{L}\{x(t-mT)\} = \mathrm{e}^{-mTs}X(s)$ | $\mathrm{Z}\{x[(k-m)T]\} = \mathrm{z}^{-m}X(z), \quad m \geq 0$ |

Tab. P7.1 – pokračování

| | L-transformace | Z-transformace |
|---|---|---|
| 5 | Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih) | |
| | $L\{x(t+a)\} = \mathrm{e}^{as}\left[X(s) - \int_0^a x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right],\ a \geq 0$ <br> Speciálně pro $a = mT, \quad m \geq 0$ <br> $L\{x(t+mT)\} = \mathrm{e}^{mTs}\left[X(s) - \int_0^{mT} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]$ | $Z\{x[(k+m)T]\} = z^m\left[X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(iT)z^{-i}\right]$ <br> $m \geq 0$ |
| 6 | Derivace – diference v časové oblasti | |
| | Derivace 1. řádu <br> $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sX(s) - x(0)$ | Dopředná diference 1. řádu <br> $\mathrm{Z}\{\Delta x(kT)\} = (z-1)X(z) - zx(0)$ <br> Zpětná diference 1. řádu <br> $\mathrm{Z}\{\nabla x(kT)\} = \frac{z-1}{z}X(z)$ |
| 7 | Derivace $n$-tého řádu <br> $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{\mathrm{d}^{i-1}x(0)}{\mathrm{d}t^{i-1}}$ | Dopředná diference $n$-tého řádu <br> $\mathrm{Z}\{\Delta^n x(kT)\} = (z-1)^n X(z) - z\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}\Delta^i x(0)$ <br> Zpětná diference $n$-tého řádu <br> $\mathrm{Z}\{\nabla^n x(kT)\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z)$ |

Tab. P7.1 – pokračování

| | L-transformace | Z-transformace |
|---|---|---|
| 8 | Integrál – suma v časové oblasti | |
| | $\mathrm{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$ | Suma (dopředná obdélníková metoda) – odpovídá dopředné diferenci<br>$\mathrm{Z}\left\{\sum_{i=0}^{k-1} x(iT)\right\} = \frac{1}{z-1}X(z)$<br>Suma (zpětná obdélníková metoda) – odpovídá zpětné diferenci<br>$\mathrm{Z}\left\{\sum_{i=0}^{k} x(iT)\right\} = \frac{z}{z-1}X(z)$ |
| 9 | Hodnota integrálu – sumy v časové oblasti (pokud existuje) | |
| | $\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} X(s)$ | $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1} X(z)$ |
| 10 | $\int_0^\infty t x(t)\,\mathrm{d}t = -\lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$ | $\sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT) = -T\lim_{z\to 1} z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$ |

Tab. P7.1 – pokračování

| | L-transformace | Z-transformace |
|---|---|---|
| 11 | Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje) | |
| | $x(0)=\lim\limits_{t\to 0_+} x(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$ | $x(0)=\lim\limits_{k\to 0} x(kT)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-1}{z}X(z)=\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ |
| 12 | Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje) | |
| | $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=\lim\limits_{s\to 0} sX(s)$ | $x(\infty)=\lim\limits_{k\to\infty} x(kT)=\lim\limits_{z\to 1}\frac{z-1}{z}X(z)=$ <br> $=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$ |

Tab. P7.2

| | L-transformace | | Z-transformace | |
|---|---|---|---|---|
| | Originál $x(t)$ | Obraz $X(s)$ | Originál $x(kT)$ | Obraz $X(z)$ |
| 1 | $\dot{\delta}(t)$ | $s$ | | |
| 2 | $\delta(t)$ | $1$ | $\delta(kT)$ | $1$ |
| 3 | $\delta(t-mT)$ | $\mathrm{e}^{-mTs}$ | $\delta[(k-m)T]$ | $\frac{1}{z^m}$ |
| 4 | $\eta(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\eta(kT)$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 5 | $\eta(t-mT)$ | $\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-mTs}$ | $\eta[(k-m)T]$ | $\frac{1}{(z-1)z^{m-1}}$ |
| 6 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $kT$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| 7 | $\frac{1}{2}t^2$ | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{1}{2}(kT)^2$ | $\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 8 | $\frac{1}{6}t^3$ | $\frac{1}{s^4}$ | $\frac{1}{6}(kT)^3$ | $\frac{T^3}{6}\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$ |
| 9 | | | $(\mp a)^{k-1}, \quad a \neq 0,\ k \geq 1$<br>$0$ pro $k < 1$ | $\frac{1}{z \pm a}$ |

Tab. P7.2 – pokračování

| | L-transformace | | Z-transformace | |
|---|---|---|---|---|
| | Originál $x(t)$ | Obraz $X(s)$ | Originál $x(kT)$ | Obraz $X(z)$ |
| 10 | | | $(k-1)(\mp a)^{k-2};\ k \geq 2,$ <br> $0 \text{ pro } k < 2, \quad a \neq 0$ | $\dfrac{1}{(z \pm a)^2}$ |
| 11 | | | $\dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)(\mp a)^{k-3};\ k \geq 3,$ <br> $0 \text{ pro } k < 3, \quad a \neq 0$ | $\dfrac{1}{(z \pm a)^3}$ |
| 12 | | | $\dbinom{k-1}{n-1}(\mp a)^{k-n};\ k \geq n,$ <br> $0 \text{ pro } k < n, \quad a \neq 0$ | $\dfrac{1}{(z \pm a)^n}$ |
| 13 | $b^{\mp at}, \quad b > 0$ | $\dfrac{1}{s \pm a \ln b}$ | $b^{\mp akT}, \quad b > 0$ | $\dfrac{z}{z - b^{\mp aT}}$ |
| 14 | | | $(\mp a)^k, \quad a \neq 0$ | $\dfrac{z}{z \pm a}$ |
| 15 | | | $k(\mp a)^{k-1}, \quad a \neq 0,\ k \geq 1$ <br> $0 \text{ pro } k < 1$ | $\dfrac{z}{(z \pm a)^2}$ |

Tab. P7.2 – pokračování

| | L-transformace | | Z-transformace | |
|---|---|---|---|---|
| | Originál $x(t)$ | Obraz $X(s)$ | Originál $x(kT)$ | Obraz $X(z)$ |
| 16 | | | $\frac{1}{2}k(k-1)(\mp a)^{k-2};\ \ k \geq 2,$<br>$0\ \ \text{pro}\ \ k<2,\ \ a \neq 0$ | $\frac{z}{(z \pm a)^3}$ |
| 17 | | | $\binom{k}{n-1}(\mp a)^{k-n+1};\ \ k \geq n-1$<br>$0\ \ \text{pro}\ \ k<n-1,\ \ a \neq 0$ | $\frac{z}{(z \pm a)^n}$ |
| 18 | $\mathrm{e}^{\mp at}$ | $\frac{1}{s \pm a}$ | $\mathrm{e}^{\mp akT}$ | $\frac{z}{z-c},\ \ c=\mathrm{e}^{\mp aT}$ |
| 19 | $t\,\mathrm{e}^{\mp at}$ | $\frac{1}{(s \pm a)^2}$ | $kT\,\mathrm{e}^{-akT}$ | $\frac{cTz}{(z-c)^2},\ \ c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 20 | $\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{\mp at}$ | $\frac{1}{(s \pm a)^3}$ | $\frac{1}{2}(kT)^2\,\mathrm{e}^{-akT}$ | $\frac{T^2}{2}\frac{cz(z+c)}{(z-c)^3},\ \ c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 21 | $\frac{1}{6}t^3\,\mathrm{e}^{\mp at}$ | $\frac{1}{(s \pm a)^4}$ | $\frac{1}{6}(kT)^3\,\mathrm{e}^{-akT}$ | $\frac{T^3}{6}\frac{cz(z^2+4cz+c^2)}{(z-c)^4}$<br>$c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 22 | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\,\mathrm{e}^{\mp at}$ | $\frac{1}{(s \pm a)^n}$ | | |

Tab. P7.2 – pokračování

| | L-transformace | | Z-transformace | |
|---|---|---|---|---|
| | Originál $x(t)$ | Obraz $X(s)$ | Originál $x(kT)$ | Obraz $X(z)$ |
| 23 | $1-\mathrm{e}^{-at}$ | $\dfrac{a}{s(s+a)}$ | $1-\mathrm{e}^{-akT}$ | $\dfrac{(1-c)z}{(z-1)(z-c)}, \quad c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 24 | $\dfrac{1}{a}\left[at-\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)\right]$ | $\dfrac{a}{s^2(s+a)}$ | $\dfrac{1}{a}\left[akT-\left(1-\mathrm{e}^{-akT}\right)\right]$ | $\dfrac{Tz}{(z-1)^2}-\dfrac{(1-c)z}{a(z-1)(z-c)}$ <br> $c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 25 | $(1-at)\mathrm{e}^{-at}$ | $\dfrac{s}{(s+a)^2}$ | $(1-akT)\mathrm{e}^{-akT}$ | $\dfrac{z^2-c(1+aT)z}{(z-c)^2}$ <br> $c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 26 | $1-(1+at)\mathrm{e}^{-at}$ | $\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$ | $1-(1+akT)\mathrm{e}^{-akT}$ | $\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-c}-\dfrac{caTz}{(z-c)^2}$ <br> $c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 27 | $\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}$ | $\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ | $\mathrm{e}^{-akT}-\mathrm{e}^{-bkT}$ | $\dfrac{(c-d)z}{(z-c)(z-d)}$ <br> $c=\mathrm{e}^{-aT}, \quad d=\mathrm{e}^{-bT}$ |

Tab. P7.2 – pokračování

| | L-transformace | | Z-transformace | |
|---|---|---|---|---|
| | Originál $x(t)$ | Obraz $X(s)$ | Originál $x(kT)$ | Obraz $X(z)$ |
| 28 | $-a\mathrm{e}^{-at}+b\mathrm{e}^{-bt}$ | $\dfrac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$ | $-a\mathrm{e}^{-akT}+b\mathrm{e}^{-bkT}$ | $\dfrac{(b-a)z^2-(bc-ad)z}{(z-c)(z-d)}$ $c=\mathrm{e}^{-aT},\quad d=\mathrm{e}^{-bT}$ |
| 29 | $1+\dfrac{b\mathrm{e}^{-at}-a\mathrm{e}^{-bt}}{a-b}$ | $\dfrac{ab}{s(s+a)(s+b)}$ | $1+\dfrac{b\mathrm{e}^{-akT}-a\mathrm{e}^{-bkT}}{a-b}$ | $\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{bz}{(a-b)(z-c)}-$ $-\dfrac{az}{(a-b)(z-d)}$ $c=\mathrm{e}^{-aT},\quad d=\mathrm{e}^{-bT}$ |
| 30 | $\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin\omega kT$ | $\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$ |
| 31 | $\cos\omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos\omega kT$ | $\dfrac{z^2-z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$ |
| 32 | $\sinh\omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$ | $\sinh\omega kT$ | $\dfrac{z\sinh\omega T}{z^2-2z\cosh\omega T+1}$ |
| 33 | $\cosh\omega t$ | $\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$ | $\cosh\omega kT$ | $\dfrac{z^2-z\cosh\omega T}{z^2-2z\cosh\omega T+1}$ |

Tab. P7.2 – pokračování

| | L-transformace | | Z-transformace | |
|---|---|---|---|---|
| | Originál $x(t)$ | Obraz $X(s)$ | Originál $x(kT)$ | Obraz $X(z)$ |
| 34 | $\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\mathrm{e}^{-akT}\sin\omega kT$ | $\dfrac{cz\sin\omega T}{z^2-2cz\cos\omega T+c^2}$<br>$c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 35 | $\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$ | $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\mathrm{e}^{-akT}\cos\omega kT$ | $\dfrac{z^2-cz\cos\omega T}{z^2-2cz\cos\omega T+c^2}$<br>$c=\mathrm{e}^{-aT}$ |
| 36 | $1-\mathrm{e}^{-at}\Big(\cos\omega t+$<br>$+\dfrac{a}{\omega}\sin\omega t\Big)$ | $\dfrac{a^2+\omega^2}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$ | $1-\mathrm{e}^{-akT}\Big(\cos\omega kT+$<br>$+\dfrac{a}{\omega}\sin\omega kT\Big)$ | $\dfrac{z(Az+B)}{(z-1)(z^2-2cz\cos\omega T+c^2)}$<br>$A=1-c\cos\omega T-\dfrac{a}{\omega}c\sin\omega T$<br>$B=c^2+\dfrac{a}{\omega}c\sin\omega T-c\cos\omega T$<br>$c=\mathrm{e}^{-aT}$ |

# Literatura

ALEXÍK, M. (1997) Adaptive Self-tuning PID Algorithm Based on Continuous Synthesis. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop New Trends in Design of Control Systems*, 7-10 September 1997, Smolenice, Slovakia, pp. 474-479

ALEXÍK, M. (2000) Analytická syntéza PIDD$^2$ algoritmu pre systém III. rádu. *AT&P JOURNAL* 9/2000, str. 62-65

ALFARO, V. M. (2004) *Evolución y tendencies en el desarrollo de los métodos de sintonizació de controladores PID.* Departamento de Automática, Esculea de Ingeniera Electrica Universidad de Costarica, 2004, 77 p.

ARBOGAST, J., COOPER, D. J., RICE, R. C. (1995*) Model-Based Tuning Methods for PID Controllers.* http://www.bin95.com/PIDControllerDesign.htm, 1995

ÅSTRÖM, K. J., HÄGGLUND, T. (1995) *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning.* Second Edition. ISA – Instrument Society of America, Research Triangle Park, 1995, 343 p.

ÅSTRÖM, K. J., HÄGGLUND, T. (2006) *Advanced PID Control*. ISA – Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, 2006, 460 p.

ÅSTRÖM, K., WITTENMARK, B. (1997) *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. Third Edition. Prentice – Hall, Englewood Cliffs, 1997, 557 p.

BAKOŠOVÁ, M., FIKAR, M. (2008) *Riadenie procesov.* Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008, 188 str.

BALÁTĚ, J. (2003) *Automatické řízení.* BEN – technická literatura, Praha, 2003, 654 str.

BALDA, M. (1966) *Teorie a stavba regulátorů*. FS ČVUT, Praha, 1966, 150 str.

BOBÁL, V., BÖHM, J., PROKOP, R., FESSL, J. (1999) *Praktické aspekty samočinně se nastavujících regulátorů: algoritmy a implementace.* VUT v Brně, 1999, 242 str.

BRZÓZKA, J. (2004) *Regulatory i układy automatyki*. Wydawnictwo MIKOM, Warszawa, 2004, 342 str.

Brzózka, J. (2002) *Regulatory cyfrowe w automatyce*. Wydawnictwo MIKOM, Warszawa, 2002, 358 str.

*Control Engineering. Reference Guide to PID Tuning*. Part 1, Part 2, Part 3, A Cahners Publication (A collection of reprinted articles of PID tuning techniques), 24 p.

ČERNÝ, M., KREYSA, K., ŠUBRT, J. (1984) *Číslicová regulace elektrických pohonů*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1984, 208 str.

DATTA, A., HO, M. T., BHATTACHARYYA, S. P. (2000) *Structure and Synthesis of PID Controllers*. Springer – Verlag, London, 2000, 234 p.

DESHPANDE, P. B., ASH, R. H. (1981) *Elements of Computers Process Control with Advanced Control Applications*. ISA-Instrument Society of America, Research Triangle Park, 1981, 382 p.

DODDS, S. J. (2008) Setting time formulae for the design of control systems with linear closed loop dynamics. In *Proceedings of the 3rd Annual Conference "Advanced in Computing and Technology" AC&T*, 2008, pp. 31-39

DUŠEK, F., HONC, D. (2005) *Matlab a Simulink. Úvod do používání*. Tiskařské středisko Univerzity Pardubice, 2005, 172 str.

ECKMAN, D. P. (1961) *Regulacja automatyczna procesów przemysłowych*. Wydawnictwa – Naukowo Techniczne, Warszawa, 1961 (překlad z angličtiny), 400 str.

FEUER, A., GOODWIN, G. C. (1996) *Sampling in Digital Signal Processing and Control*. Birkhäuser, Boston, 1996, 541 p.

FILASOVÁ, A., KROKAVEC, D. (2011) Delay-Dependent Control of Time-Delay Systems. In *Proceedings of 12th International Carpathian Control Conference* ICCC´2011. Velké Karlovice, Czech Republic, VSB-Technical University of Ostrava, May 25-28, 2011, pp. 111-114.

FINDEISEN, W. (1969) *Technika regulacji automatycznej*. Wydanie II zmienione. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1969, 441 str.

FORSYTHE, W., GOODALL, R. M. (1991) *Digital Control*. McGraw-Hill, New York, 1991, 256 p.

FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., EMAMI-NAEIMI, A. (2002) *Feedback Control of Dynamic Systems*. Fourth Edition. Prentice-Hall, 2002, 910 p.

GOODWIN, G. C., GRAEBE, S. F., SALGADO, M. E. (2003) *Control System Design*. Pearson Education, Singapore, 2003, 908 p.

GÓRECKI, H. (1971) *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1971, 372 str.

GÓRECKI, H., FUKSA, S., GRABOWSKI, P., KORYTOWSKI, A. (1989) *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. PWN-Polish Scientific Publishers – John Wiley&Sons, Warszawa – Chichester, 1989, 369 p.

GREGA, W. (2004) *Metody i algorytmy sterowania cyfrowego w układach scentralizovanych i rozproszonych*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo – Dydaktyczne AGH w Krakowie, Kraków, 2004, 275 str.

HALÁSEK, T. (2002) *Syntéza lineárních systémů řízení na základě delta modelů*. Disertační práce (školitelka: M. Vítečková), FS VŠB-TUO, Ostrava, 2002, 138 + 37 str.

HARSÁNYI, L. et al. (1998) *Teória automatického riadenia*. Vydavateľstvo, STU, Bratislava, 1998, 216 str.

HAUGEN, F. (2010a) *The Good Gain method for PI (D) controller tuning*. Tech Teach, http://techteach.no (19. July 2010a), 7 p.

HAUGEN, F. (2010b) Comparing PI Tuning Methods in a Real Benchmark Temperature Control System. *Modeling, Identification and Control*, Vol. 31, No. 3, 2010b, pp. 79-91

HIPPE, P. (2006) *Windup in Control. Its Effects and Their Prevention*. Springer – Verlag London, 2006, 314 p.

HO, W. K., HANG, C. C., CAO, L. S. (1995) Tuning of PID Controllers Based on Gain and Phase Margin Specifications. *Automatica*, 1995, Vol. 31, No. 6, pp. 497-502

HOFREITER, M. (2009) *Identifikace systémů I*. Česká technika – nakladatelství, Praha, 2009, 202 str.

HOUPIS, C. H., LAMONT, G. B. (1992) *Digital Control Systems. Theory, Hardware, Software*. Second Edition. McGraw-Hill, Singapore, 1992, 752 p.

HUBA, M., HUBINSKÝ, P. ŽÁKOVÁ, K. (2002) *Teória systémov*. Vydavateľstvo STU Bratislava, 2002, 432 str.

HUBA, M. (2003a) *Syntéza systémov s obmedzeniami 1. Základné regulátory*. Vydavateľstvo STU Bratislava, 2003, 355 str.

HUBA, M. (2003b) *Syntéza systémov s obmedzeniami 2. Základné štruktúry*. Vydavateľstvo STU Bratislava, 2003, 358 str.

HUBA, M., ŽÁKOVÁ, K. (2003) Contribution to the Theoretical Analysis of the Ziegler-Nichols Method. *Journal of ELECTRICAL ENGINEERING*, vol. 54, No. 7-8, 2003, FEI STU Bratislava, str. 188-194.

CHEN, C. T. (1993) *Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Method*. Oxford University Press, New York, 1993, 600 p.

CHEN, D., SEBORG, D. E. (2002) PI/PID Controller Design Based on Direct Synthesis and Disturbance Rejection. *Industrial & Engineering Chemical Research*, Vol. 41, No. 19, 2002, pp. 4807-4822

JĘDRZYKIEWICZ, Z. (2007) *Teoria sterowania układów jednowymiarowych*. Uczelniane wydawnictwa naukovo - dydaktyczne AGH, Kraków, 2007, 239 str.

JOHNSON, M. A., MORADI, M. H. (Editors) (2005) *PID Control*. New Identification and Design Methods. Springer – Verlag, London, 2005, 543 p.

JUNG, CH. S., SONG, H. K., HYNN, J. CH. (1999a) A Desired Synthesis Tuning Method of Unstable First-Order-Plus-Time-Delay Processes. *Journal of Process Control*, 9, 1999, pp. 265-269

JUNG, CH. S., SONG, H. K., HYNN, J. CH. (1999b) A New Direct-Synthesis Tuning Method for PI-Controllers. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Volume 77, February, 1999, pp. 180-185

KACHAŇÁK, A. (1989) *Regulácia a ASR.* Edičné stredisko SVŠT, Bratislava, 1989, 253 str.

KALAŠ, V., JURIŠICA, L., ŽALMAN, M. (1978) *Technická kybernetika elektrických pohonov*. Alfa, Bratislava, 1978, 390 p.

KHALIL, H. K. (1996) *Nonlinear Systems*. Second Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996, 734 p.

KOO, D. G., LEE, J. et al. (2001) *A Tuning of the Nonlinear PI Controller and Its Experimental Application*. Korean J. Chem. Eng., 18 (4), 2001, p. 451-455

KOPELOVIČ, A. P. (1963) *Avtomatičeskoje regulirovanije v černoj metallurgii*. Gosudarstvennoje naučno-techničeskoje izdatelstvo literatury po černoj i cvetnoj metallurgii. Moskva, 1963, 408 str.

KOPIEŁOVICZ, A. P. (1964) *Dobór regulatorów automatycznych. Metody obliczeń.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1964, 232 str. (překlad z ruštiny)

KORBEL, J., PROKOP, R. (2006) Autotuning pro systémy s dopravním zpožděním. In *7th International Scientific – Technical Conference – PROCESS CONTROL 2006*. Pardubice : University of Pardubice, Kouty nad Desnou, Czech Republic, 13. – 16. 6. 2006, pp. R108-1 – R108-7.

KOWAL, J. (2006) *Podstawy automatyki* (Tom I). Uczelniane wydawnictwa naukovo-dydaktyczne AGH, Kraków, 2006, 301 str.

KOWAL, J. (2007) *Podstawy automatyki* (Tom II). Uczelniane wydawnictwa naukovo-dydaktyczne AGH, Kraków, 2007, 212 str.

KOZÁK, Š. (1997) Graficko-analytické metódy určovania koeficientov spojitých a diskrétnych regulátorov. *AT&P JOURNAL* 7/1997, ročník 4, str. 36-38.

KOZÁK, Š. (2002) *Advanced Control Methods*. STU v Bratislavě, 2002, 301 str.

KOZÁKOVÁ, A. (2008a) Robust decentralized PID controller design using genetic algorithm. In *2nd International Conference Advanced Control Circuits and Systems (ACCS´08)*, Cairo, Egypt: March 30 – April 2, 2008. CD ROM

KOZÁKOVÁ, A. (2008b) Tuning decentralized PID controllers for performance and robust stability. /*ICIC Express Letters: Int. Journal of Research and Surveys/*, vol. 2, No.2 (June 2008), p. 117-122.

KOZIOŁ, R., SAWICKI, J., SZKLARSKI, L. (1992) *Digital Control of Electrical Drives*. PWN – Polish Scientific Publishers – Elsevier Science Publishers, Warszawa – Amsterdam, 1992, 206 p.

KROKAVEC, D., FILASOVÁ, A. (2007) *Diagnostika dynamických systémov*. Elfa, Košice, 2007.

KROKAVEC, D., FILASOVÁ, A. (2008) *Diskrétne systémy*. 2. prepracované vydanie. Elfa, Košice, 2008, 334 str.

KUČERA, V. (1991) *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*. Academia, Prague, 1991, 472 p.

KULAKOWSKI, B. T., GARDNER, J. F., SHEARER, J. L. (2007) *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. Third Edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 486 p.

KUO, B. C. (1975) *Automatic Control System*. Third Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975, 659 p.

KUO, B. C. (1992) *Digital Control Systems*. Second Edition. Sounders College Publishing, New York, 1992, 751 p.

LANDAU, I. D., ZITO, G. (2006) *Digital Control Systems. Design, Identification and Implementation*. Springer – Verlag, London, 2006, 484 p.

LEE, Y., PARK, S. LEE, M., BROSILOW, C. (1998) PID Controller Tuning for Desired Closed-Loop Responses for SI/SO Systems. *AIChE Journal*, January 1998, Vol. 44, No. 1, p. 106-115

LEE, Y., PARK, S. LEE, M. (1998) *PID Controller Tuning to Obtain Desired Closed Loop Responses for Cascade Control Systems*. Ind. Eng. Chem. Res. 1998, 37, p. 1859-1865

LEE, Y., PARK, S. LEE, M. (2006) *Consider the generalized IMC-PID method for PID controller tuning of time-delay processes*. Hydrocarbon Processing, January 2006, p. 87-91

MATUŠŮ, R., PROKOP, R. (2010) Robust Tuning of PI Controllers for Interval Systems. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Mechanical Series*, No. 2, 2010, vol. LVI, article No. 1790, pp. 123-130

MCMILLAN, G. K. (2000) *Good Tuning. A Pocket Guide*. ISA – International Society for Measurement and Control (Instrument Society of America), Research Triangle Park, 2000, 112 p.

MEDVEDEV, R. B., BONDAR, JU. D., ROMANENKO, V. D. (1987) *ASU TP v metalurgii*. Metallurgia, Moskva, 1987, 256 str.

MIDDLETON, R. H., GOODWIN, G. C. (1990) *Digital Control and Estimation*: A Unified Approach. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1990, 538 p.

MINDEKOVÁ, D. (1996) *Použití delta modelů při syntéze lineárních regulačních obvodů*. Diplomová práce (vedoucí: M. Vítečková), FS VŠB-TUO, Ostrava, 1996, 133 str.

MIZERA, R. (2006) *Syntéza lineárních systémů řízení na základě delta modelů.* Disertační práce (školitelka: M. Vítečková), FS VŠB-TU Ostrava, 2006, 127 str.

MOUDGALYA, K. M. (2007) *Digital Control*. John Wiley & Sons, Chichester, 2007, 543 p.

NEVŘIVA, P. (2000) *Analýza signálů a soustav*. BEN – technická literatura, Praha, 2000, 659 str.

NISE, N. S. (1995) *Control Systems Engineering*. Second Edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Redwood City, 1995, 851 p.

NOSKIEVIČ, P. (1999) *Modelování a identifikace systémů*. Montanex, Ostrava, 1999, 276 str.

O´DWYER, A. (2003) *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, London, 2003, 375 p.

O´DWYER, A. (2006) *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Second Edition. Imperial College Press, London, 2006, 545 p.

O´DWYER, A. (2009) *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Third Edition. Imperial College Press, London, 2009, 608 p.

OGUNNAIKE, B. A., RAY, W. H. (1994) *Process Dynamics, Modeling, and Control*. Oxford University Press, Oxford, 1994, 1260 p.

OPPELT, W. (1967) *Příručka regulační techniky*. SNTL – Nakladatelství technické literatury Praha, 1967), 655 str. (překlad z němčiny)

PIVOŇKA, P. (2003a) *Číslicová řídicí technika*. FEKT VUT v Brně, Brno, 2003, 151 str.

PIVOŇKA, P. (2003b) *Vyšší formy řízení*. FSI VUT v Brně, Brno, 2003, 74 str.

PIVOŇKA, P., SCHMIDT, M. (2007) Comparative Analysis of Discrete Derivative Implementations in PID Controllers. In: *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on SYSTEMS*, Agios Nikolaos, Crete Island, Greece, July 23-25, 2007, pp. 33-37

*Poradnik Inżyniera Automatyka*. Pod redakcią W. FINDEISENA. (1969) Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1969, 887 str.

*Preprints of Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of PID Control (PID´00)*. Terrassa, Spain, April 5-7, 2000, 696 p.

PROKOP, R., MATUŠŮ, R. PROKOPOVÁ, Z. (2006) *Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy.* FAI UTB ve Zlíně, 2006, 120 str.

PRUSENKO, V. S. (1963) *Odnokonturnyje pnevmatičeskie sistemy avtomatičeskogo regulirovanija teplovych procesov*. Gosenergoizdat, Moskva, 1963, 178 str.

PUŁACZEWSKI, J. (1966) *Dobór nastaw regulatorów przemysłowych*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1966, 212 str.

RAMASAMY, M., SUNDARAMOORTHY, S. (2008) PID controller tuning for desired closed-loop response for SISO systems using impulse response. *Computers and Chemical Engineering*, 32, 2008, pp. 1773-1788

RIVERA, D. E., MORARI, M., SKOGESTAD, S. (1986) Internal Model Control. *4. PID Controller Design*. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 25, 1986, pp. 252-265

RIVERA, D. E. (1995) *Internal Model Control: An Approach for Undergraduates*. Arizona State University, Tempe, Arizona 85287-6006, 1995, 19 p.

ROSINOVÁ, D., DÚBRAVSKÁ, M. (2008) *Optimalizácia*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008, 195 str.

ROSINOVÁ, D. (2008) Robust Decentralized PID Controller : A Case Study. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava*, Nr. 2/2008, volume LIV, Mechanical Series, article Nr. 1631, p. 115-120

ROSINOVÁ, D., MARKECH M. (2008) Robust Control of Quadruple Tank Process. *ICIC Express Letters ICIC International* ©2008 ISSN 1881-803X, Volume 2, Number 3, June 2008 pp. 231-238

ROTAČ, V., Ja. (1964) *Výpočet a seřizování průmyslových regulačních obvodů*. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1964, 299 str. (překlad z ruštiny)

ROTAČ, V. Ja. (1985) *Teorija avtomatičeskogo upravlenija teploenergetičeskimi procesami*. Energoatomizdat, Moskva, 1985, 295 str.

SANTINA, M. S., STUBBERUND, A. R., HOSTETTLER, G. H. (1994) *Digital Control System Design*. Second Edition. Sounders College Publishing, New York, 1994, 796 p.

SASTRY, S. (1999) *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, New York, 1999, 667 p.

SAWICKI, J., PIĄTEK, K. (2004) *Wstęp do teorii sterowania cyfrowego*. AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-dydaktyczne, Kraków, 2004, 201 str.

SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLICHAMP, P. A. (2004) *Process Dynamics and Control*. Second Edition. John Wiley&Sons, 2004, 713 p.

SHAMSUZZOHA, M., LEE, M. (2007a) *IMC-PID Controller Design for Improved Disturbance Rejection of Time-Delayed Processes*. Ind. Eng. Chem. Res. 2007, 46, p. 2077-2091

SHAMSUZZOHA, M., LEE, M. (2007b) An Enhanced Performance PID Filter Controller for First Order Time Delay Processes. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 40, No 6, 2007, p. 1-10

SHAMSUZZOHA, M., LEE, M. (2008a) Analytical design of enhanced PID filter controller for integrating and first order unstable processes with time delay. *Chemical Engineering Science* 63, 2008, p. 2717-2731

SHAMSUZZOHA, M., LEE, M. (2008b) Design of Advanced PID Controller for Enhanced Disturbance Rejection of Second-Order Processes with Time Delay. *AlChE Journal*, June, 2008, Vol. 54, No. 6, p. 1526-1536

SHAMSUZZOHA, M., LEE, S., LEE, M. (2009) Analytical design of controller cascaded with a lead-lag filter for time-delay processes. Korean J. Chem. Eng., 26 (3), 2009, p. 622-630

SHAMSUZZOHA, M., SKOGESTAD, S., HALVORSEN, I., J. (2010a) On-Line PI Controller Tuning Using Closed-Loop Setpoint Response. Paper *Presented at IFAC conference on Dynamic and Control of Chemical Processes (DYCOPS)*, Leuven, Belgium, 5-8 July 2010a, 6 p.

SHAMSUZZOHA, M., SKOGESTAD, S., HALVORSEN, I., J. (2010b) A simple approach for on-line PI controller tuning using closed-loop setpoint responses. *Paper presented at the 20th European Symposium on Computer Aided Process Engineering-ESCAPE20*, 2010b, 6 p.

SILVA, G. J., DATTA, A. BHATTACHARYYA, S. P. (2005*) PID Controllers for Time-Delay Systems*. Birkäuser, Boston, 2005, 330 p.

SKOCZOWSKI, S., OSYPIUK, R., PIETRUSEWICZ, K. (2006) *Odporna regulacja o dwóch stopniach swobody*. Wydawnictwo Naukowe PWNSA, Warszawa, 2006, 360 str.

SKOGESTAD, S. (2001) Probably the best simple PID tuning rules in the world. Paper no. 276h presented at *AICHE Annual meeting*, Reno, NU, USA, November 19, 2001, pp. 1-28

SKOGESTAD, S. (2003) Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, 13 (2003), p. 291-309

SKOGESTAD, S. (2004) Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Modeling, Identification and Control*, 2004, Vol. 25, No. 2, p. 85-120

SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. (2005) *Multivariable Feedback Control. Analysis and Design*. Second Edition. John Wiley & Sons, River Street, 2005, 574 p.

STEFAŃSKI, T. (2002) *Teoria sterowania. Tom I. Układy liniove*. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2002, 393 str.

STREJC, V. (1966) *Teorie lineární regulace*. FE ČVUT, Praha, 1966, 169 str.

SUNG, S. W., LEE, J., LEE, I. (2009) *Process Identification and PID Control*. John Wiley & Sons, Singapore, 2009, 411 p.

SZKLARSKI, L., JARACZ, K., VÍTEČEK, A. (1989) *Optymalizacja układów napędowych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1989, 291 str.

ŠVARC, I., ŠEDA, M., VÍTEČKOVÁ, M. (2007) *Automatické řízení*. VUT v Brně, Brno, 2007, 324 str.

ŠULC, B., VÍTEČKOVÁ, M. (2004) *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004, 333 str.

ŠVEC, J. KOTEK, Z. a kol. (1969) *Teorie automatického řízení*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1969, 461 str.

ŠVEC, J. a kol. (1975) *Příručka automatizační a výpočetní techniky*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1975, 908 str.

TAUFER, I., DRÁBEK, O. (1995) The heat plant control. *Journal Electrical Engineering*, vol. 46, N 2, 1995, p. 55-59

TAKAVOLI, S., FLEMING, P. Optimal Tuning of PI Controllers for First Order Plus Dead Time/Long Dead Time Models Using Dimensional Analysis. In *Proceedings of the European Control Conference, Cambridge*, UK, 5 p.

TAKAVOLI, S., GRIFFIN, I., FLEMING, P. J. (2006) Tuning of decentralized PI (PID) controllers for TITO processes. Control Engineering Practice, 14 (2006), p. 1069-1080

TAKAVOLI, S., TAKAVOLI, M. (2003) Optimal Tuning of PID Controllers for First Order Plus Time Delay Models Using Dimensional Analysis. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Control and Automation (ICCA´03)*, 10-12 June, 2003, Montreal, Canada, p. 942-946

TAN, W., MARQUEZ, H. J., CHEN, T. (2003) IMC Design for unstable processes with time delay. Journal of Process Control, 13, 2003, pp. 203-213

TŮMA, J. (1997) *Složité systémy řízení*. 1. Díl: Regulace soustav s náhodnými poruchami. FS VŠB-TU Ostrava, 1997, 151 str.

TŮMA, J. (1997) *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*. Nakladatelství Sdělovací technika, Praha, 1997, 174 str.

UMEZ – ERONINI, E. (1999) *System Dynamic and Control*. ITP An International Thomson Publishing Company, Pacific Grove, 1999, 993 p.

VAŠEK, V., JANÁČOVÁ, D. (2001) Vulcameter Control and Evaluation System. In *Proceedings of International Carpathian Control Conference ´2001*.

Krynica, Poland: Faculty of Mechanical Engineering and Robotics University of Mining and Metallurgy Cracow, 22-25 May, 2001, pp. 27-32.

VAŠEK, V., KOLOMAZNÍK, K., JANÁČOVÁ, D. (2005) Optimization and Automatic Control of Chromium Recycling. Technology. In "*Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on Simulation, modeling and optimization*". Corfu, Greece, August 17-19, 2005, pp 391-394

VESELÝ, V. A KOL (1992) *Navrhovanie a projektovanie ASR TP*. Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1992, 336 str.

VESELÝ, V., HARSÁNYI, L. (2008) *Robustné riadenie dynamických systémov*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008, 126 str.

VILAMOVA, R., ALFARO, V. M., ARRIETA, O., PEDRET, C. (2010) Analysis of the claimed robustness for PI/PID Robust Tuning Rules. *In Proceedings of the 18th Mediterranean Conference on Control & Automation.* Congress Palace Hotel, Marrakech, Morocco, June 23-25, 2010, p. 658-662

VISIOLI, A. (2006) *Practical PID Control*. Springer – Verlag, London, 2006, 310 p.

VISIOLI, A. ZHONG, Q. (2011) *Control of Integral Processes with Dead Time*. Springer – Verlag, London, 2011, 251 p.

VÍTEČEK, A. (2009) *Dobór nastaw regulatorów analogowych*. Wydawnictvo Politechniki Świętokrzyskiej Kielce, 2009, 56 str.

VÍTEČKOVÁ, M. (1992) *Využití metod inverze dynamiky při syntéze systémů řízení.* Kandidátská disertační práce, FS VŠB-TUO, Ostrava, 1992, 127 str.

VÍTEČKOVÁ, M. (1993) *Syntéza lineárních regulačních obvodů. Metoda inverze dynamiky*. Pomocný učební text, FS VŠB-TU Ostrava, 1993, 58 str.

VÍTEČKOVÁ, M. (1996) *Syntéza číslicových a analogových regulačních obvodů metodou inverze dynamiky*. Habilitační práce, FS VŠB-TUO, Ostrava, 1996, 90 str.

VÍTEČKOVÁ, M. (1998) *Seřízení regulátorů metodou inverze dynamiky*. FS VŠB-TUO, Ostrava, 1998, 56 str.

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2002a) New dominant poles controller tuning method for proportional non-oscillatory plants with time delay. In *Proceedings of Workshop on Intelligent Mining Systems*. Kyushu University, Fukuoka, April 2002, pp. 103-108

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. et al. (2002b) *Metody syntézy systémů řízení založené na delta modelec*h. Technická zpráva grantového projektu 102/00/0186. Fakulta strojní VŠB-TUO, Ostrava, 2002, 64 str.

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2003) Modulus optimum for Digital Controllers. *Acta Montanistica Slovaca*. Ročník 8, 4/2003, pp. 214-216

VÍTEČKOVÁ, M. (2003) Rozšíření metody optimálního modulu. In *Sborník referátů XXVII ASŘ´2003; Seminar, Instruments and Control*. Ostrava, May 6, 2003, pp. 373-379

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2005) Experimental Plant Identification by Relay Method. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Mechanical Series,* No. 2, 2005, Vol. LI, article No. 1486, pp. 155-166

VÍTEČKOVÁ, M. (2006) Jednoduché seřízení regulátorů metodou SIMC. *AT&P journal PLUS*, 2, 2006, str. 50-54

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2008) *Základy automatické regulace*. 2. Přepracované vydání. FS VŠB-TUO, Ostrava, 2008, 244 str.

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2009a) Conversion Tables for PID Controllers. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Mechanical Series,* No. 2, 2009, vol. LV, article No. 1706, pp. 155-162

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2009b) New 2DOF PI and PID Controllers Tuning Method for Integrating Plants. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Mechanical Series,* No. 2, 2009, vol. LV, article No. 1707, pp. 163-168

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2010a) Kritické parametry v regulaci. *Sborník příspěvků konference Principia Cybernetica 2010.* Liberec, TU v Liberci, 8.-9. 9. 2010, str. 75-80

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2010b) 2DOF PI and PID Controllers Tuning. In *Proceedings of the 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS),* Prague, June 7-9, 2010, 6 p. on CD.

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2011a) Seřízení číslicového i analogového regulátoru PI 2DOF pro integrační soustavy s dopravním zpožděním. In: Sborník příspěvků workshopu „*Automatizácia a riadenie v teórii a praxi ARTEP 2011*“. 16.2.-18.2.2011, Stará Lesná, Slovensko. str. 02/1-02/11.

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2011b) Unified Approach to Digital and Analog 2DOF PI Controller Tuning for Integrating Plants. In *Proceedings of 12th International Carpathian Control Conference* ICCC´2011. Velké Karlovice, Czech Republic, VSB- Technical University of Ostrava, May 25-28, 2011, pp. 437-440

WADE, H. L. (1994) *Regulatory and Advanced Regulatory Control*: *System Development*. ISA-Instrument Society of America, Research Triangle Park, 1994, 260 p.

WADE, H. L. (2004) *Basic and Advanced Regulatory Control: System Design and Application.* Second Edition. ISA-Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, 2004, 387 p.

WANG, Q., HANG, C. C., YANG, X. P. (2001) Single-Loop controller design via IMC principles. *Automatica*, 37, 2001, pp. 2041-2048

WILLIAMSON, D. (1991) *Digital Control and Implementation*. Finite Wordlength Considerations. Prentice Hall, New York, 1991, 625 p.

ZAGARIJ, G. I., ŠUBLADZE, A. M. (1988) *Sintez sistem upravlenija na osnove kriterija maksimalnoj stepeni ustojčivosti.* Emergoatomizdat, Moskva, 1988, 101 str.

ZEMAN, K., SPÍRAL, L. (1987) *Automatická regulace v elektrických pohonech*. Část 1. FE VŠSE v Plzni, Plzeň, 1987, 220 str.

ZIEGLER, J. G., NICHOLS, N. B. (1942) Optimum Setting for Automatic Controllers. *Transactions of the ASME*, 64, 1942, pp. 759-768

ZÍTEK, P. (1998) *Time Delay Control System Design Using Functional State Models*. CTU Publishing House, Prague, 1998, 93p.

ZÍTEK, P., VÍTEČEK, A. (1999) *Návrh řízení systémů se zpožděními a nelinearitami*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999, 165 str.

ZÍTEK, P., HOFREITER, M., HLAVA, J. (2006) *Automatické řízení* (dotisk 3. vydání). Vydavatelství ČVUT, Praha, 2006, 148 str.

ZÍTEK, P. (2010) *Automatické řízení* (dotisk 1. vydání). Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, 2010, 149 str.

ŽÁKOVÁ, K. (2003) *Design of Controllers for Time-delayed Systems*. Ph.D. Thesis, Faculty of Electrical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, 2003, 177 p.

ŽÁKOVÁ, K. (2007) Constrained Pole Assignment Controller for Delayed Double Integrator System. *6th WSEAS International Conference on System Science and Simulation in Engineering*. Venice, Italy, November 21-23 2007, pp. 12-17.

prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc., prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.

**VYBRANÉ METODY SEŘIZOVÁNÍ REGULÁTORŮ**

Vydání: první
Náklad: 150 ks
Počet stran: 230
Obálku navrhla: Kateřina Vítečková
Vydal: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2011
Tisk: REPRONIS s.r.o., Ostrava

**ISBN 978-80-248-2503-8**