

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Fakulta strojní



NELINEÁRNÍ SYSTÉMY FUZZY ŘÍZENÍ

Miluše Vítečková

Antonín Víteček

Ostrava 2020

Recenzent: Prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.

Copyright ©: Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.

Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.

NELINEÁRNÍ ŘÍZENÍ. FUZZY ŘÍZENÍ

ISBN 978-80-248-4414-5

On-line

Předmluva

Učební texty „Nelineární systémy. Fuzzy řízení“ jsou věnovány základním informacím o fuzzy množinách a jejich využití pro modelování a řízení. Hlavní důraz je kladen na jednoduchost a názornost. Vzhledem k dostupnosti zahraniční literatury jsou v textu uváděny i anglické ekvivalenty důležitých odborných výrazů. Texty obsahují plně řešené příklady, které tvoří nedílnou součást probírané teorie. Předpokládá se znalost teorie automatického řízení v rozsahu skript: VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Základy automatické regulace*. 2. rozšířené vydání (2. dotisk). Ostrava, 2019, příp. jiných podobných učebních textů.

Protože učební texty pojednávají o základech fuzzy množin a jejich využití v automatickém řízení, nejsou v nich uváděny důkazy ani odkazy na použitou literaturu. Pro prohloubení a rozšíření problematiky fuzzy řízení jsou doporučeny níže uvedené publikace:

BABUŠKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. Springer Science + Business Media, New York, 1998

JURA, P. *Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování*. Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2003

LEE, K. H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2005

NOVÁK, V. *Základy fuzzy modelování*. BEN – technická literatura, Praha, 2000

NOVÁK, V., PERFILIEVA, I., DVOŘÁK, A. *Insight into Fuzzy Modeling*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2016

PIVOŇKA, P. *Číslicová a řídicí technika*. VUT v Brně, 2003

PIVOŇKA, P. *Vyšší formy řízení*. VUT v Brně, 2003

VYSOKÝ, P. *Fuzzy řízení*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997

ZHANG, H., LIU, D. *Fuzzy Modeling and Fuzzy Control*. Birkhäuser, Boston, 2006

Učební texty jsou určeny pro studenty oborů z oblastí automatického řízení a technické kybernetiky.

Autoři děkují prof. Dr. Ing. Miroslavu Pokornému za podnětnou diskusi a připomínky. Velmi děkují prof. RNDr. Ing. Miloši Šedovi, Ph.D. za příznivou recenzi, ale především za pečlivé přečtení, připomínky, doplňky a opravy, které přispěly ke zlepšení obsahu učebních textů.

Obsah

Předmluva.....	3
Obsah	4
Seznam základního značení a symbolů	5
1 Fuzzy množiny	8
Příklad 1.1	9
Příklad 1.2	10
2 Základní operace s fuzzy množinami.....	13
Příklad 2.1	16
Příklad 2.2	21
3 Jazykové proměnné	24
Příklad 3.1	24
Příklad 3.2	25
Příklad 3.3	26
Příklad 3.4	30
Příklad 3.5	35
4 Fuzzy řízení	37
Příklad 4.1	47
Příklad 4.2	52
Příklad 4.3	55
Závěr	58
Literatura	59

Seznam základního značení a symbolů

A, B	množiny (ostré i fuzzy)
$\bar{A}$	doplňěk množiny
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	vektory reprezentující fuzzy množiny A, B s diskrétními univerzy
a_i, b_i	stupně příslušnosti, složky vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
e	regulační odchylka
f	obecná funkce
$f_i(x)$	obecné funkce nezávislé proměnné x
f_P	obecně nelineární funkce regulátoru typu P
f_I	obecně nelineární funkce regulátoru typu I
f_{PD}	obecně nelineární funkce regulátoru typu PD
f_{PI}	obecně nelineární funkce regulátoru typu PI
$ G_o(j\omega) $	modul otevřeného regulačního obvodu
$G_R(s)$	přenos regulátoru
$G_S(s)$	přenos regulované soustavy
kT	diskrétní čas
K_p, K_i, K_{pi}, K_{pd}	stavitelné parametry (váhy) fuzzy regulátoru
K_p	zesílení lineárního regulátoru
R	relace
$\mathbf{R}$	relace ve tvaru matice
t	spojitý čas
T	vzorkovací perioda, symbol transpozice (horní index)
T_D	derivační časová konstanta lineárního regulátoru
T_I	integrační časová konstanta lineárního regulátoru
u	akční veličina
v	poruchová veličina
w	žádaná veličina
x	vstupní veličina, obecná veličina, prvek z univerza X
X	univerzum, univerzální množina

y	výstupní veličina, regulovaná veličina, prvek z univerza Y
Y	univerzum, univerzální množina
$\delta(x)$	diskrétní Diracův impuls
$\mu_A(x)$	charakteristická funkce pro ostrou množinu A , funkce příslušnosti pro fuzzy množinu A
$\mu_R(x, y)$	funkce příslušnosti fuzzy relace R
$\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$	Mamdaniho implikace
$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$	Larsenova implikace
ω_f	kmitočet řezu
Δ	operátor zpětné difference, přírůstek
$\cap$	operátor průniku (AND)
$\cup$	operátor sjednocení (OR)
$\int$	operátor spojitého sjednocení jednobodových množin
$\sum$	operátor diskrétního sjednocení jednobodových množin
$\subset$	symbol vlastní podmnožiny
$\subseteq$	symbol podmnožiny
$\circ$	operátor kompozice, který může mít různou interpretaci (při každém použití je jeho interpretace vysvětlena!)
$\Rightarrow$	implikace
$\wedge$	operátor minimum (a zároveň)
$\vee$	operátor maximum (nebo)
$\times$	operátor kartézského součinu
dim	dimenze
max	maximum
min	minimum
prod	operátor algebraického násobení (product), algebraický součin
max-min (min-max)	Mamdaniho kompozice, kompozice max-min (min-max)

max-prod (prod-max) Larsenova kompozice, kompozice max-prod (prod-max)

is je

IF jestliže

NON negace, doplněk

THEN pak

IF x is A THEN y is B implikace, x – předpoklad, antecedent, vstup; y – důsledek, konsekvent, výstup

$x \in [a, b]$ x je z uzavřeného intervalu, čísla a, b do intervalu patří

$x \in (a, b)$ x je z otevřeného intervalu, čísla a, b do intervalu nepatří

$A = \{a, b\}$ diskrétní množina A má prvky a, b

$A = [a, b]$ spojitá množina A obsahuje všechny hodnoty z uzavřeného intervalu $[a, b]$

1 Fuzzy množiny

Ostrou (klasickou) **množinou** [crisp (classical) set] se rozumí soubor libovolných **prvků** (elements). Taková množina ostře rozlišuje prvky, které do ní patří a které do ní nepatří.

V běžném životě se často setkáváme s případem, kdy některé prvky do dané množiny patří jen částečně. Právě takové případy se dají vyjádřit pomocí **fuzzy** (neostrých) **množin** (fuzzy sets). Tyto množiny neostře rozlišují prvky, které do dané množiny patří a které nikoliv, viz příklad 1.1.

V nedávné minulosti se pro fuzzy množiny používaly rovněž pojmy jako např. mlhavé nebo rozmazané množiny.

Ostrou množinu můžeme jednoznačně vyjádřit např. vyjmenováním jejích prvků; podmínkou, které její prvky musí vyhovovat nebo pomocí její **charakteristické funkce** (characteristic function). Poslední způsob je velmi obecný a může být rozšířen i pro fuzzy množinu.

Ostrou i fuzzy množinu, např. A , můžeme vyjádřit ve tvaru uspořádaných dvojic $[x, \mu_A(x)]$, tj.

$$A = \{[x, \mu_A(x)] \mid x \in X\}, \quad (1.1)$$

kde X je **univerzální množina** neboli **univerzum** (universe), $\mu_A(x)$ je **pro ostrou množinu její charakteristickou funkcí** vyhovující podmínce

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases} \quad (1.2)$$

a **pro fuzzy množinu její funkcí příslušnosti** (membership function) vyhovující podmínce

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &\in (0,1] && \text{pro } x \in A, \\ \mu_A(x) &= 0 && \text{pro } x \notin A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

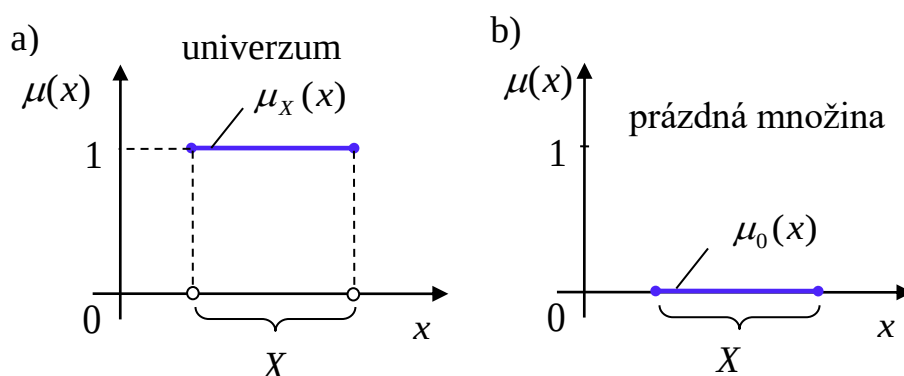
Univerzum X obsahuje všechny prvky x a je stejné pro ostré i fuzzy množiny, protože platí (obr. 1.1)

$$\mu_X(x) = 1 \quad \text{pro všechna } x \in X. \quad (1.4)$$

Důležitá je také **prázdná množina** 0 (empty set), která neobsahuje žádný prvek a pro kterou platí (obr. 1.1)

$$\mu_0(x) = 0 \quad \text{pro } x \in X. \quad (1.5)$$

I v tomto případě ostrá a fuzzy prázdná množina se shodují.



Obr. 1.1 Univerzum a prázdná množina

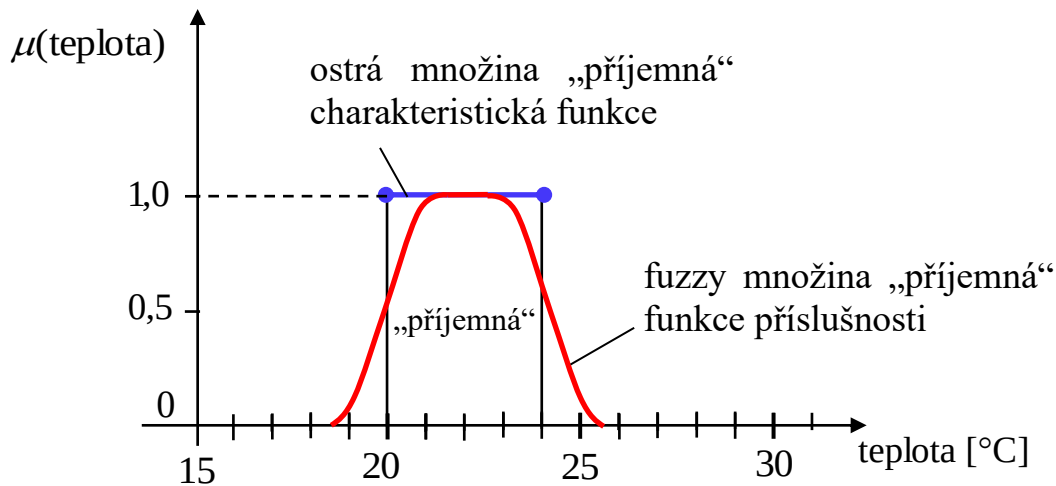
Je zřejmé, že ostrou množinu jednoznačně popisuje její charakteristická funkce a fuzzy množinu její funkce příslušnosti. Z toho důvodu často ztotožňujeme ostrou množinu s její charakteristickou funkcí a fuzzy množinu s její funkcí příslušnosti.

Charakteristická funkce v souladu s (1.2) může nabývat pouze dvou hodnot 0 nebo 1, naproti tomu funkce příslušnosti může nabývat libovolnou hodnotu z intervalu $[0, 1]$, viz (1.3). Hodnota funkce příslušnosti pro konkrétní prvek se nazývá **stupeň příslušnosti** (degree of membership, membership degree). Obě funkce jsou nezáporné. Je zřejmé, že funkce příslušnosti je obecnější než charakteristická funkce. Tzn., že fuzzy množina je obecnější než ostrá množina, tj. *fuzzy množina může být ostrá, ale naopak to neplatí.*

Příklad 1.1

Na obr. 1.2 je vyjádřena „příjemná“ teplota v místnosti pomocí ostré a fuzzy množiny, tj. pomocí charakteristické funkce a funkce příslušnosti.

Z obr. 1.2 je zřejmé, že fuzzy množina „příjemná“ vyjadřuje teplotu v místnosti tak, jak ji vnímají různí lidé. Někteří, především starší lidé, dávají přednost vyšším teplotám a mladší naopak upřednostňují nižší teploty. Právě vlastnost fuzzy množin, že kvantifikují kvalitativní vyjádření lidí, způsobila jejich rychlé rozšíření a popularitu, a především jejich aplikaci v nejrůznějších oblastech.



Obr. 1.2 Vyjádření „příjemné“ teploty v místnosti pomocí ostré a fuzzy množiny – příklad 1.1

V závislosti na tom, zda univerzum X [viz (1.1)] je spojité, nebo diskrétní, fuzzy množiny můžeme vyjádřit pomocí vztahů

$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x) /_X = \bigcup_{x \in X} \mu_A(x) /_X, \quad (1.6)$$

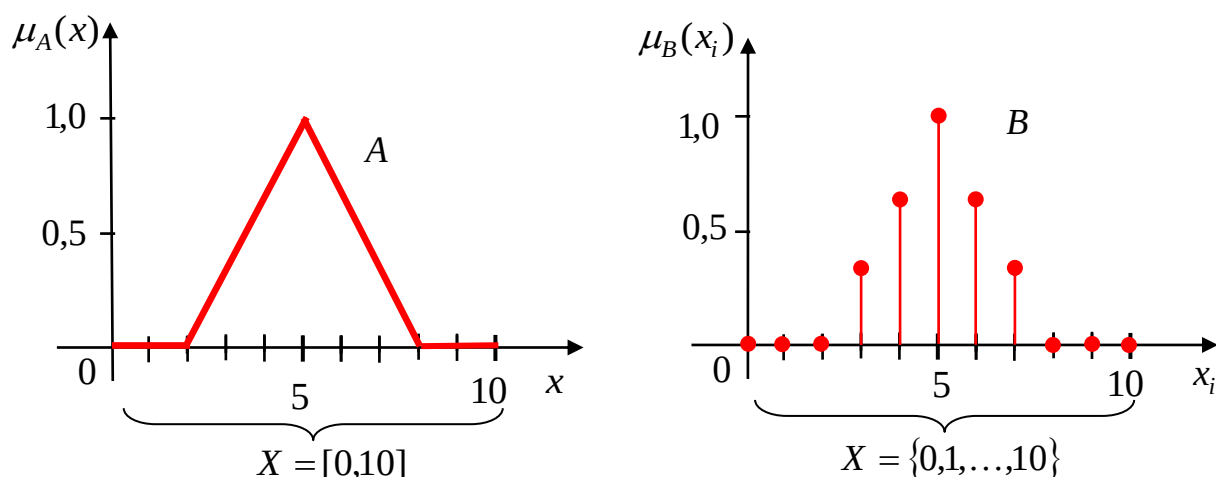
nebo

$$\begin{aligned} B &= \sum_{x_i \in X} \mu_B(x_i) /_{x_i} = \bigcup_{x_i \in X} \mu_B(x_i) /_{x_i} = \\ &= \left\{ \mu_B(x_1) /_{x_1}, \mu_B(x_2) /_{x_2}, \dots, \mu_B(x_n) /_{x_n} \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde $\bigcup$ je operátor (symbol) sjednocení jednobodových množin, $\int$ – operátor spojitého sjednocení (nemá význam integrálu), $\sum$ – operátor diskrétního sjednocení (nemá význam sumy) jednobodových množin. Označení sjednocení pomocí operátoru $\bigcup$ je novější. Dále se budou používat operátory $\int$ a $\sum$.

Příklad 1.2

Na obr. 1.3 jsou fuzzy množiny $A \subset X = [0, 10]$ a $B \subset X = \{0, 1, \dots, 10\}$. $\subset$ je symbol vlastní podmnožiny, $\subseteq$ – symbol podmnožiny.



Obr. 1.3 Fuzzy množiny pro spojité a diskrétní univerzum – příklad 1.2

Fuzzy množina A může být popsána ve tvaru [viz (1.6)]

$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x) /_x, \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x-2}{3} & \text{pro } 2 \leq x < 5 \\ \frac{8-x}{3} & \text{pro } 5 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{pro } 8 < x \leq 10 \end{cases} \quad (1.8)$$

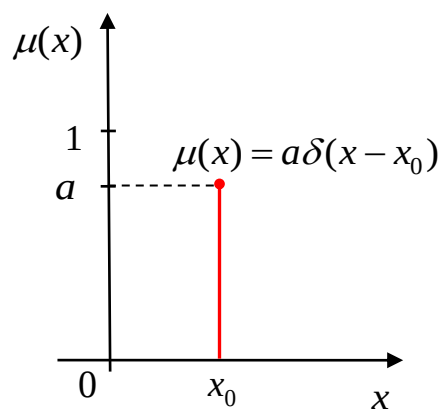
a fuzzy množina B v souladu s (1.7) ve tvaru

$$B = \{1/3/_3, 2/3/_4, 1/5, 2/3/_6, 1/3/_7\}. \quad (1.9)$$

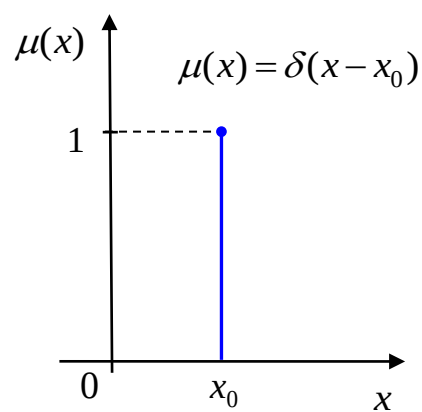
Prvky s nulovým stupněm příslušnosti jsou vynechány.

Někdy je třeba pracovat s jednobodovou fuzzy množinou se stupněm příslušnosti $a \in (0, 1]$. Takovou fuzzy množinu lze popsat pomocí **singletonu** (singleton) vyjádřeným diskrétním Diracovým impulsem $\delta(x)$, viz obr. 1.4a. Pro $a = 1$ singleton popisuje ostrou hodnotu x_0 , viz obr. 1.4.b.

a)



b)



Obr. 1.4 Použití singletonu pro: a) fuzzy hodnotu x_0 se stupněm příslušnosti a ,
b) ostrou hodnotu x_0

2 Základní operace s fuzzy množinami

Velmi důležité jsou operace s fuzzy množinami, které využívá **fuzzy logika** (fuzzy logic). Fuzzy logika zobecňuje klasickou logiku a je základem pro **fuzzy modelování** (fuzzy modeling).

Mezi základní operace s množinami na jednom univerzu patří: **sjednocení** (union), **průnik** (intersection) a **doplňěk** (complement). Pro sjednocení se používá operátor $\cup$ (OR) a pro průnik operátor $\cap$ (AND). Doplněk se značí čarou nad symbolem množiny (NON). Dále se používají zkratky max – maximum a min – minimum a jim odpovídající operátory $\vee$ – maximum a $\wedge$ – minimum (obr. 2.1). Tyto operace můžeme popsat vztahy (viz obr. 2.1).

Sjednocení

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x). \quad (2.1)$$

Průnik

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x). \quad (2.2)$$

Doplňěk

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (2.3)$$

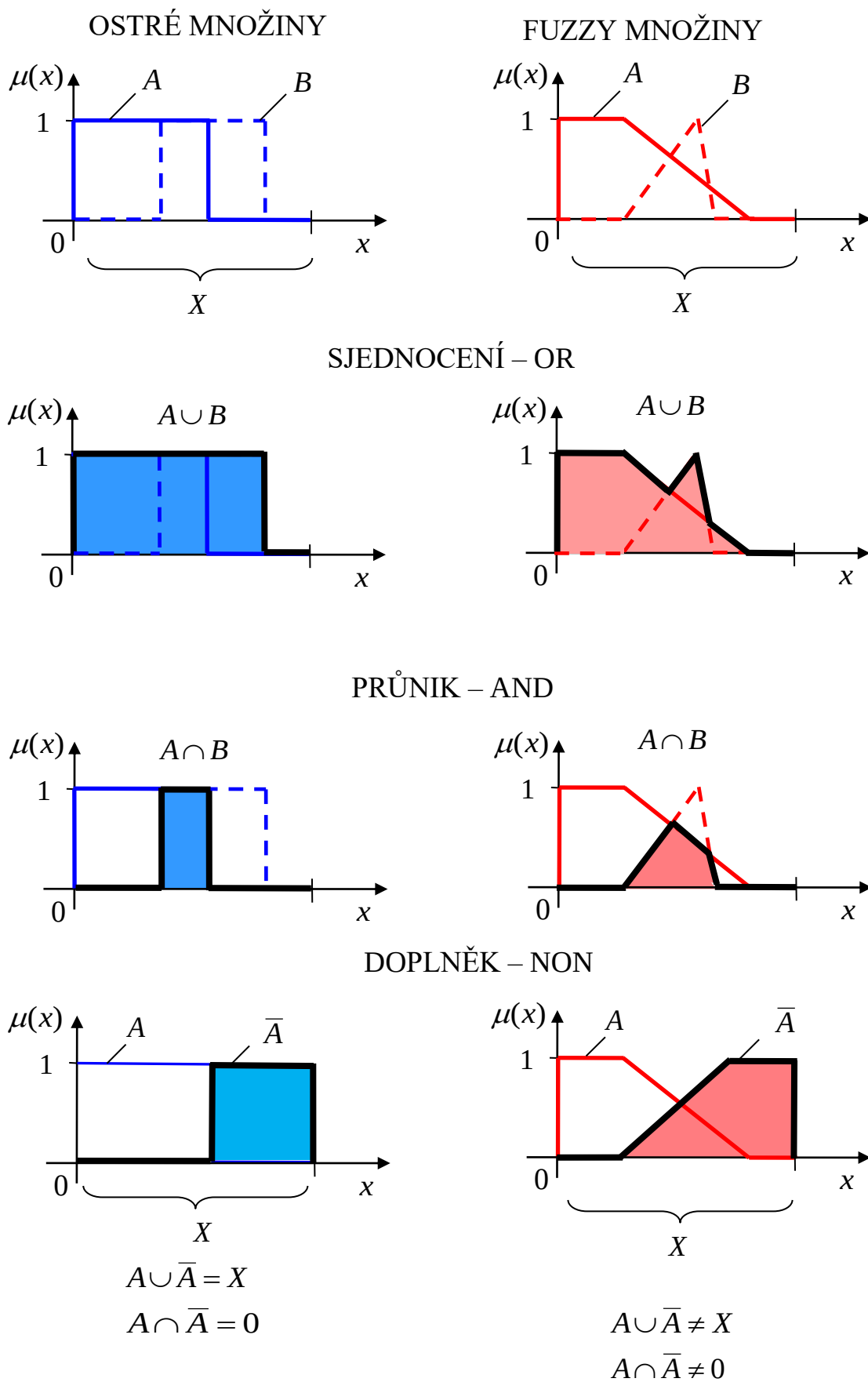
Pro ostré množiny A a jejich doplňky platí

$$A \cup \bar{A} = X, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset. \quad (2.4a)$$

Pro fuzzy množiny A a jejich doplňky platí

$$A \cup \bar{A} \neq X, \quad A \cap \bar{A} \neq \emptyset. \quad (2.4b)$$

Vztahy (2.4b) neplatí, když fuzzy množina A je ostrá.



Obr. 2.1 Základní operace s ostrými a fuzzy množinami

Pro fuzzy množiny existují i další operace. Mezi častěji používané patří **algebraický součin** (algebraic product, dot product)

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) = \text{prod}[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.5)$$

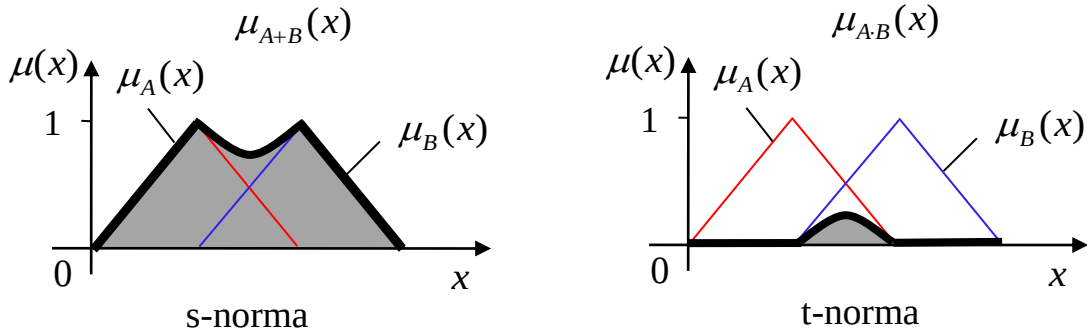
a **algebraická suma** (algebraic sum)

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad (2.6)$$

kde prod je operace algebraického násobení (product).

Zobecnění operací průniku a sjednocení, včetně (2.5) a (2.6), vyjadřuje **t-norma** (t-norm) a **s-norma** (s-norm).

Hodnoty funkcí příslušnosti t-norem jsou menší než hodnoty $\mu_{A \cap B}(x)$ a hodnoty funkcí příslušnosti s-norem jsou větší než hodnoty $\mu_{A \cup B}(x)$, viz obr. 2.2.



Obr. 2.2. Algebraická suma a algebraický součin fuzzy množin A a B

Velmi důležitá je **fuzzy relace** (fuzzy relation) definována na **kartézském součinu** (cartesian product) fuzzy množin $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$, tj. na dvou univerzech

$$R = \{[(x, y), \mu_R(x, y)] \mid (x, y) \in A \times B \subseteq X \times Y\}, \quad (2.7a)$$

$$\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y), \quad (2.7b)$$

kde $\times$ je operátor kartézského součinu.

Fuzzy relaci pro spojitá univerza X a Y zapisujeme ve tvaru

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y) / (x, y). \quad (2.8)$$

Fuzzy relace R pro fuzzy množiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ s diskrétními univerzami

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \quad (2.9)$$

může být vyjádřeno ve tvaru

$$R = \sum_{X \times Y} \mu_R(x_i, y_j) / (x_i, y_j), \quad (2.10a)$$

kde

$$\mu_R(x_i, y_j) = \min[\mu_A(x_i), \mu_B(y_j)]. \quad (2.10b)$$

Fuzzy relaci R je vhodné zapsat ve tvaru matice nebo tabulky

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_2, y_1) & \dots & \mu_R(x_n, y_1) \\ \mu_R(x_1, y_2) & \mu_R(x_2, y_2) & \dots & \mu_R(x_n, y_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(x_1, y_m) & \mu_R(x_2, y_m) & \dots & \mu_R(x_n, y_m) \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.11)$$

V tomto případě fuzzy relaci R píšeme tučně, tj. $\mathbf{R}$.

Rovněž fuzzy množiny A a B mohou být vyjádřeny pomocí odpovídajících vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$:

$$A = \left\{ a_1 / x_1, a_2 / x_2, \dots, a_n / x_n \right\}, \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \quad (2.12)$$

$$B = \left\{ b_1 / y_1, b_2 / y_2, \dots, b_m / y_m \right\}, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T, \quad (2.13)$$

kde a_i, b_j jsou odpovídající stupně příslušnosti, T – symbol transpozice.

Fuzzy relace mohou být definovány i jinými způsoby a pro více než dvě fuzzy množiny. V podstatě může být použita libovolná t-norma. Je také zřejmé, že kartézský součin je rovněž fuzzy relace. Fuzzy relace pro dvě fuzzy množiny se nazývá **binární** (binary).

Příklad 2.1

Pro fuzzy množiny (viz obr. 2.3 nahoře)

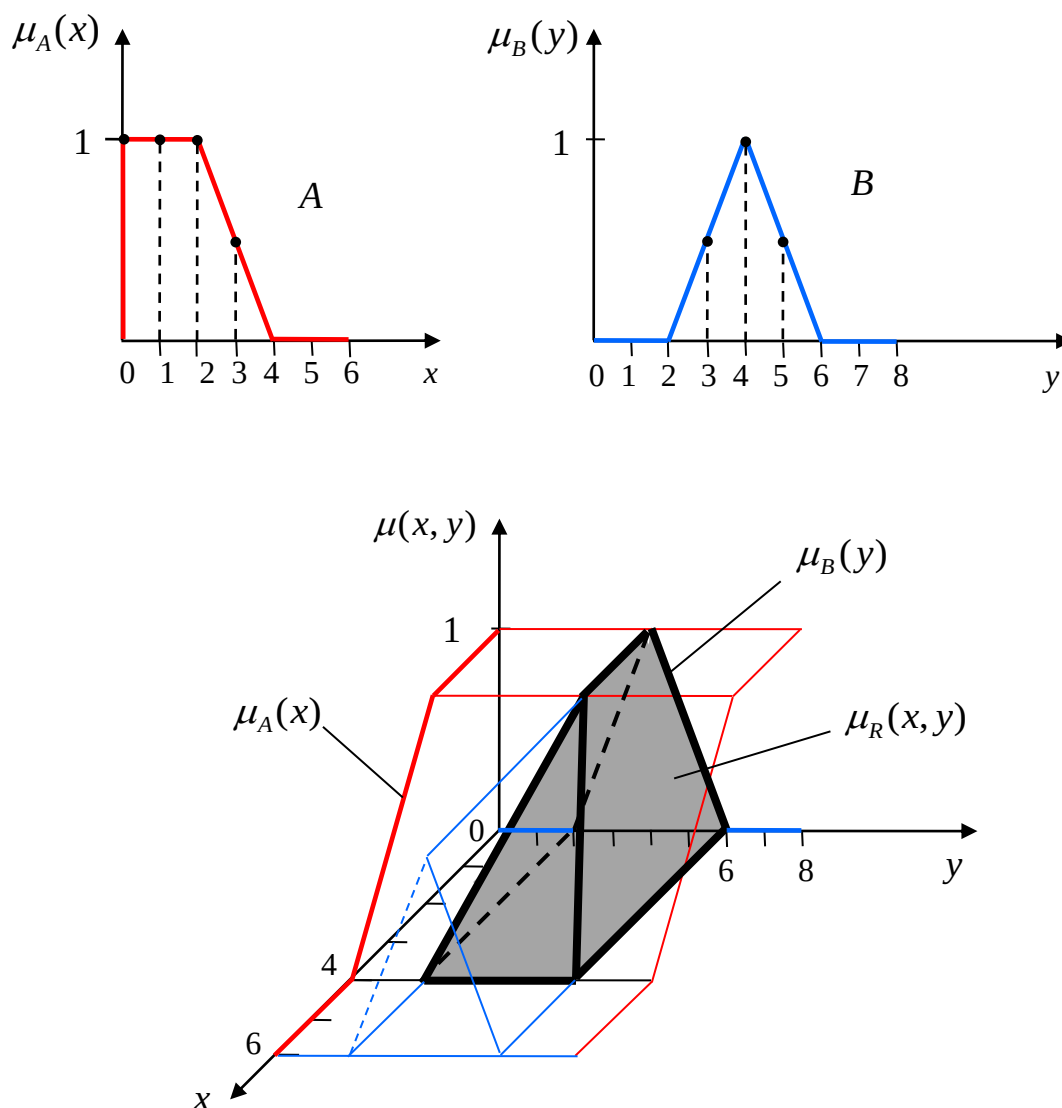
$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x) / x, \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ \frac{4-x}{2} & \text{pro } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{pro } 4 < x \leq 6 \end{cases}, \quad X = [0, 6] \quad (2.14)$$

a

$$B = \int_{y \in Y} \mu_B(y) / y, \quad \mu_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq y < 2 \\ \frac{y-2}{2} & \text{pro } 2 \leq y < 4 \\ \frac{6-y}{2} & \text{pro } 4 \leq y \leq 6 \\ 0 & \text{pro } 6 < y \leq 8 \end{cases}, \quad Y = [0, 8] \quad (2.15)$$

je třeba vytvořit fuzzy relaci pomocí operátoru min.

Totéž je třeba udělat pro jejich diskrétní verze (obr. 2.3 nahoře).



Obr. 2.3 Geometrická interpretace fuzzy relace R fuzzy množin A a B – příklad 2.1

Řešení:

Fuzzy relace R pro spojitá univerza X a Y je na obr. 2.3 dole. Její grafická konstrukce je velmi jednoduchá, ale její analytické vyjádření

$$R = \int_{X \times Y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] / (x, y)$$

je při rozepsání složitější a hlavně velmi nepřehledné.

Naproti tomu fuzzy relace R pro fuzzy množiny A a B s diskrétními univerzy X a Y může být snadno analyticky vyjádřena.

Fuzzy množiny A a B s diskrétními univerzy odpovídající fuzzy množinám (2.14) a (2.15) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0,5}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \frac{0}{6} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0,5}{3} \right\} \subset X = \{0, 1, \dots, 6\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

a

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \frac{0}{0}, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0,5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0,5}{5}, \frac{0}{6}, \frac{0}{7}, \frac{0}{8} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{0,5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0,5}{5} \right\} \subset Y = \{0, 1, \dots, 8\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Je zřejmé, že prvky s nulovým stupněm příslušnosti (pokud nedojde k nedorozumění) mohou být vynechány.

Fuzzy relaci

$$R = \sum_{X \times Y} \mu_R(x_i, y_j) / (x_i, y_j)$$

určíme snadno

$$\mu_R(x_i, y_j) = \min[\mu_A(x_i), \mu_B(y_j)], \quad i = 0, 1, \dots, 6; \quad j = 0, 1, \dots, 8 \quad (2.18)$$

tj.

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \frac{0,5}{(0,3)}, \frac{0,5}{(1,3)}, \frac{0,5}{(2,3)}, \frac{0,5}{(3,3)}, \right. \\ &\quad \frac{1}{(0,4)}, \frac{1}{(1,4)}, \frac{1}{(2,4)}, \frac{0,5}{(3,4)}, \\ &\quad \left. \frac{0,5}{(0,5)}, \frac{0,5}{(1,5)}, \frac{0,5}{(2,5)}, \frac{0,5}{(3,5)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

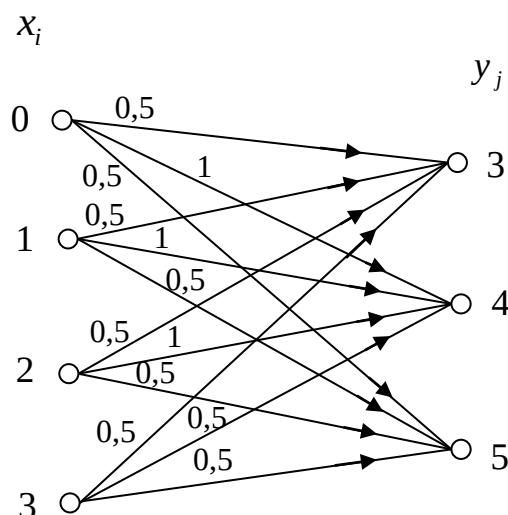
Fuzzy relace (2.19) je zapsána speciálně v takovém tvaru, aby bylo vidět, že může být vyjádřena včetně prvků univerzí následující tabulkou (maticí).

Tab. 2.1 Tabulka hodnot stupňů příslušnosti $\mu_R(x_i, y_j)$ relace (2.19)
z příkladu 2.1

$y_j \backslash x_i$	0	1	2	3
3	0,5	0,5	0,5	0,5
4	1	1	1	0,5
5	0,5	0,5	0,5	0,5

Jsou uvedeny pouze nenulové hodnoty stupňů příslušnosti $\mu_R(x_i, y_j)$.
V případě potřeby je možné tabulku rozšířit o nulové řádky a sloupce.

Interpretace fuzzy relace (2.19) je na obr. 2.4.



Obr. 2.4 Interpretace fuzzy relace (2.19) – příklad 2.1

Mezi nejdůležitější fuzzy relace patří **fuzzy implikace** (fuzzy implication), která vychází z binární booleovské implikace (binary Boolean implication)

$$\underbrace{\text{IF } x \text{ is } A}_{\text{předpoklad (antecedent, premise)}} \quad \underbrace{\text{THEN } y \text{ is } B}_{\text{důsledek (konsekvent, conclusion)}}, \quad (2.20)$$

kde x je vstupní proměnná, y – výstupní proměnná, IF = jestliže, THEN = pak.

Implikace (2.20) může být zapsána také pomocí operátoru implikace $\Rightarrow$ ve tvaru

$$x \text{ is } A \Rightarrow y \text{ is } B. \quad (2.21)$$

Anglické názvy IF, THEN, is atd. používáme z důvodu jednoznačnosti, protože v češtině implikaci (2.21) můžeme vyjádřit např.:

- Když platí x je A , platí také y je B .
- Z platnosti x je A , plyne také platnost y je B atd.

Fuzzy implikace předpokládá, že A a B jsou fuzzy množiny, přičemž tato fuzzy implikace může být vyjádřena různými způsoby.

Mezi nejvýznamnější patří **Mamdaniho implikace** (Mamdani implication)

$$\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad (2.22)$$

a **Larsenova implikace** (Larsen implication)

$$\mu_R(x, y) = \text{prod}[\mu_A(x), \mu_B(y)] = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y). \quad (2.23)$$

Vzniká problém, jak vyhodnotit fuzzy implikaci, když $x \text{ is } A'$, tj. když fuzzy množina A' je jiná než fuzzy množina A . V tomto případě se používá **kompozice** (composition) neboli **kompoziční pravidlo** (compositional rule)

$$B' = R \circ A' \quad (2.24)$$

kde $\circ$ je operátor kompozice, B' – výsledná fuzzy množina.

Pokud univerza X a Y fuzzy množin A a B jsou diskrétní a konečná, pak vztah (2.24) může být zapsán ve tvaru

$$\underset{(m \times 1)}{\mathbf{b}'} = \underset{(m \times n)}{\mathbf{R}} \circ \underset{(n \times 1)}{\mathbf{a}'} \quad (2.25)$$

kde $\mathbf{R}$ je fuzzy relace vyjádřena maticí typu $(m \times n)$, tj. $\dim \mathbf{R} = (m \times n)$, $\mathbf{a}'$ – vektor fuzzy množiny dimenze n

$$A' = \left\{ \frac{a'_1}{x_1}, \frac{a'_2}{x_2}, \dots, \frac{a'_n}{x_n} \right\}, \quad (2.26a)$$

tj.

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{a}'} = [a'_1, a'_2, \dots, a'_n]^T, \quad \dim \mathbf{a}' = n, \quad (2.26b)$$

$\mathbf{b}'$ – vektor fuzzy množiny dimenze m

$$B' = \left\{ \frac{b'_1}{y_1}, \frac{b'_2}{y_2}, \dots, \frac{b'_m}{y_m} \right\}, \quad (2.27a)$$

tj.

$$\underset{(m \times 1)}{\mathbf{b}'} = [b'_1, b'_2, \dots, b'_m]^T, \quad \dim \mathbf{b}' = m, \quad (2.27b)$$

kde $\dim$ znamená dimenzi (rozměr) nebo typ.

Kompozice může být různě definována pomocí s- a t-norem. Nejčastěji se předpokládá použití kombinace operátorů max a min nebo operátoru prod, viz příklad 2.2.

Fuzzy implikace s danou kompozicí tvoří **kompoziční pravidlo usuzování**, tzv. **inferenci** neboli **inferenční mechanismus** (inference, inference mechanism), tj. inferenční mechanismus pro fuzzy množinu A' určí výslednou fuzzy množinu B' .

Např. Mamdaniho implikace s kompozicí max-min (tato kompozice se často nazývá Mamdaniho kompozicí a také se někdy zapisuje jako min-max) tvoří inferenční mechanismus **max-min** neboli **Mamdaniho inferenci**.

Podobně Larsenova implikace s kompozicí max-prod (tato kompozice se často také nazývá Larsenovou kompozicí a také se někdy zapisuje jako prod-max) tvoří inferenční mechanismus **max-prod** neboli **Larsenovu inferenci**.

Příklad 2.2

Jsou dány dvě fuzzy množiny

$$A = \left\{ \frac{0}{0}, \frac{0,2}{1}, \frac{0,4}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0,5}{4} \right\} \subset X = \{0,1,2,3,4\} \quad (2.28)$$

a

$$B = \left\{ \frac{1}{-1}, \frac{0,5}{0}, \frac{0,2}{1}, \frac{0,1}{2} \right\} \subset Y = \{-1,0,1,2\}. \quad (2.29)$$

Je třeba určit Mamdaniho a Larsenovu implikaci a pak pomocí kompozicí max-min a max-prod vypočítat výslednou fuzzy množinu B' za předpokladu, že

$$A' = \left\{ \frac{0,2}{0}, \frac{0,5}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0,5}{3}, \frac{0,2}{4} \right\} \quad (2.30)$$

Řešení:

Fuzzy množiny A , B a A' vyjádříme pomocí odpovídajících vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{a}'$, tj.

$$\underset{(5 \times 1)}{\mathbf{a}} = [0 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 1 \quad 0,5]^T, \quad (2.31)$$

$$\underset{(4 \times 1)}{\mathbf{b}} = [1 \quad 0,5 \quad 0,2 \quad 0,1]^T, \quad (2.32)$$

$$\underset{(5 \times 1)}{\mathbf{a}'} = [0,2 \quad 0,5 \quad 1 \quad 0,5 \quad 0,2]^T. \quad (2.33)$$

Mamdaniho implikace – kompozice max-min

V souladu s (2.22) pro Mamdaniho implikaci platí

$$\mu_R(x_i, y_j) = \min[\mu_A(x_i), \mu_B(y_j)], \quad i = 1,2,3,4,5; \quad j = 1,2,3,4. \quad (2.34a)$$

Po jednoduchých výpočtech dostaneme

$$\mathbf{R}_{(4 \times 5)} = \begin{matrix} y_j \setminus x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.34b)$$

Fuzzy relace (2.34) představuje Mamdaniho implikaci.

Mamdaniho implikaci, tj. fuzzy relaci $\mathbf{R}$ můžeme formálně určit na základě vztahu

$$\mathbf{R}_{(4 \times 5)} = \mathbf{b}_{(4 \times 1)} \circ \mathbf{a}_{(1 \times 5)}^T, \quad (2.34c)$$

kde $\circ$ je operátor dyadického násobení, kde místo násobení se použije operace min, viz (2.34b).

Výslednou fuzzy množinu B' určíme inferencí max-min (Mamdaniho inferencí) na základě vztahu (2.25)

$$\mathbf{b}'_{(4 \times 1)} = \mathbf{R}_{(4 \times 5)} \circ \mathbf{a}'_{(5 \times 1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

kde $\circ$ je operátor kompozice, který formálně vyjadřuje násobení matice $\mathbf{R}$ vektorem $\mathbf{a}'$, přičemž násobení je zastoupeno operací min a součet operací max.

Při ručním výpočtu je vhodné použít následující postup. Pod j -tý řádek ($j = 1, 2, \dots, m$) relace $\mathbf{R}$ napíšeme vektor $\mathbf{a}'^T$ a sestavíme nový vektor s n prvky $[\min(r_{j1}, a'_1), \min(r_{j2}, a'_2), \dots, \min(r_{jn}, a'_n)]$, ze kterých vybereme maximální prvek a dostaneme složku b'_j vektoru $\mathbf{b}'$. Postup je ukázán na 3. řádku relace $\mathbf{R}$, tj. $j = 3$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ řádek} &= [0 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2] \\ \mathbf{a}' &= [0,2 \quad 0,5 \quad 1 \quad 0,5 \quad 0,2] \\ &\downarrow \min \\ \text{nový vektor} &= [0 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2] \rightarrow \\ &\rightarrow \max[0 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2] = b'_3 = 0,2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Stejným způsobem se dostanou i zbývající řádky, tj.

$$\underset{(4 \times 1)}{\mathbf{b}'} = [0,5 \quad 0,5 \quad 0,2 \quad 0,1]^T \rightarrow B' = \left\{ \frac{0,5}{-1}, \frac{0,5}{0}, \frac{0,2}{1}, \frac{0,1}{2} \right\}. \quad (2.37)$$

Larsenova implikace – kompozice max-prod

Larsenovu implikaci, tj. fuzzy relaci $\mathbf{R}$ určíme na základě vztahu (2.23)

$$\mu_R(x_i, y_j) = \mu_A(x_i) \cdot \mu_B(y_j); \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.38)$$

Dostaneme

$$\underset{(4 \times 5)}{\mathbf{R}} = \begin{matrix} y_j \setminus x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0,04 & 0,08 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0,02 & 0,04 & 0,1 & 0,05 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.39)$$

Rovněž i v tomto případě Larsenovu implikaci můžeme určit na základě běžného (algebraického) násobení vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, tj.

$$\underset{(4 \times 5)}{\mathbf{R}} = \underset{(4 \times 1)}{\mathbf{b}} \cdot \underset{(1 \times 5)}{\mathbf{a}^T}. \quad (2.40)$$

Výslednou fuzzy množinu B' určíme inferencí max-prod (Larsenovou inferencí) na základě vztahu (2.25), kde $\circ$ je operátor kompozice, který formálně vyjadřuje násobení matice $\mathbf{R}$ vektorem $\mathbf{a}'$, přičemž násobení zůstává a součet je zastoupen operací max, tj.

$$\underset{(4 \times 1)}{\mathbf{b}'} = \underset{(4 \times 5)}{\mathbf{R}} \circ \underset{(5 \times 1)}{\mathbf{a}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,04 & 0,08 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,02 & 0,04 & 0,1 & 0,05 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,1 \\ 0,05 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

Výsledná fuzzy množina B' tedy je

$$B' = \left\{ \frac{0,5}{-1}, \frac{0,25}{0}, \frac{0,1}{1}, \frac{0,05}{2} \right\}. \quad (2.42)$$

Vidíme, že výsledné fuzzy množiny B' (2.37) a (2.42) jsou rozdílné.

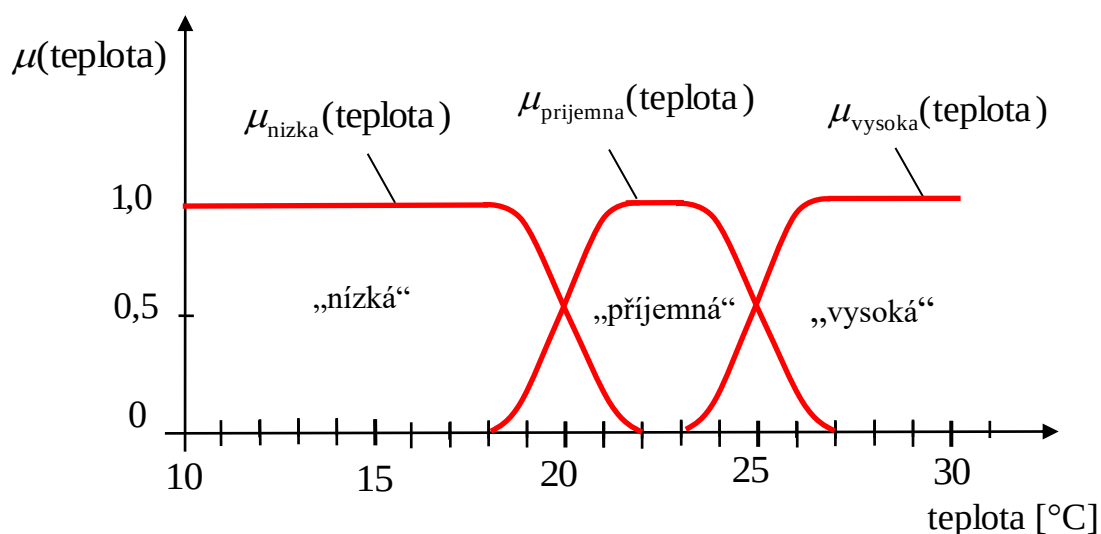
Právě možnost volby různých t- a s-norem a nejrůznějších implikací a kompozic dává na jedné straně obrovskou volnost, ale na druhé straně vyžaduje velikou zkušenost a intuici. Z tohoto důvodu někteří odborníci problematiku spojenou s fuzzy množinami odmítají a jiní ji obdivují a s velikou oblibou ji používají v různých vědních oblastech.

3 Jazykové proměnné

V běžném životě nejrůznější veličiny často vyjadřujeme nepřesně, jako např. málo, hodně, velmi hodně atd. Týká se to jak veličin fyzikálně měřitelných (teplota, tlak, síla, hmotnost, napětí atd.), tak i veličin fyzikálně neměřitelných (nálada, radost, smutek, krása, pohoda atd.). Oba druhy veličin můžeme vyjádřit **kvalitativně** (qualitatively) tak, že danou veličinu považujeme za **jazykovou proměnnou** (linguistic variable) s **jazykovými hodnotami** (linguistic values), tzv. **termy** (terms). Je výhodné jazykové hodnoty vyjádřit graficky podobně, jak je to ukázáno na obr. 3.1, kde jsou kvalitativně zobrazeny jazykové hodnoty „nízká“, „příjemná“ a „vysoká“ pro jazykovou proměnnou „teplota“ v místnosti. Je zřejmé, že každá osoba vnímá teplotu v místnosti jinak, a proto pro každou jazykovou hodnotu se obdrží podobné, ale obecně jiné křivky. Tyto křivky můžeme **objektivizovat** (objectivize) např. zprůměrováním a dále je můžeme upravit tak, aby vyhovovaly podmínkám pro funkce příslušnosti. Tzn., že každou jazykovou hodnotu vyjádříme vhodnou fuzzy množinou s funkcí příslušnosti $\mu_{\text{hodnota}}(\text{teplota})$, viz příklad 3.1 a také 1.1.

Příklad 3.1

Na obr. 3.1 je zobrazena jazyková proměnná „teplota“ v místnosti a její tři jazykové hodnoty (termy) „nízká“, „příjemná“ a „vysoká“. Jazykové hodnoty byly získány od několika osob a po úpravě (proložení vhodné hladké křivky) vyjádřeny graficky na obr. 3.1. Z obrázku vyplývá, že jazykové hodnoty mohou být přímo považovány za odpovídající funkce příslušnosti, tj. za odpovídající fuzzy množiny.



Obr. 3.1 Jazyková proměnná „teplota“ a její jazykové hodnoty „nízká“, „příjemná“ a „vysoká“ – příklad 3.1

Je zřejmé, že přiřazením vhodné funkce příslušnosti, tj. vhodné fuzzy množiny, k dané jazykové hodnotě, dochází k její **kvantifikaci** (quantification). Kvantifikace jazykových hodnot umožňuje analyticky popsat jazykovou proměnnou a její hodnoty (tj. fuzzy proměnnou považujeme za kvantifikovanou jazykovou proměnnou), a tedy dále s ní pracovat jako s **fuzzy proměnnou** (fuzzy variable) s odpovídajícími **fuzzy hodnotami** (fuzzy values).

Jazykové hodnoty, a tedy i fuzzy hodnoty popsané odpovídajícími funkcemi příslušnosti, lze dále upravovat pomocí **modifikátorů** (operátorů) (modifiers, operators). Mezi nejdůležitější modifikátory patří [A je fuzzy množina s funkcí příslušnosti $\mu_A(x)$]:

$$\text{značně (highly)} \quad \mu_{\text{znacne}A}(x) = [\mu_A(x)]^3, \quad (3.1)$$

$$\text{velmi (very)} \quad \mu_{\text{velmi}A}(x) = [\mu_A(x)]^2, \quad (3.2)$$

$$\text{trochu (a little)} \quad \mu_{\text{trochu}A}(x) = [\mu_A(x)]^{1,3}, \quad (3.3)$$

$$\text{více méně (more or less)} \quad \mu_{\text{vice mene}A}(x) = [\mu_A(x)]^{0,5}, \quad (3.4)$$

$$\text{zhruba (roughly)} \quad \mu_{\text{zhruba}A}(x) = [\mu_A(x)]^{0,25}. \quad (3.5)$$

Pro modifikátory (3.2) a (3.4) se používá označení

$$\text{koncentrace (concentration) CON(A): } \mu_{\text{velmi}A}(x) = [\mu_A(x)]^2, \quad (3.6a)$$

$$\text{dilatace (dilation) DIL(A): } \mu_{\text{vice mene}A}(x) = [\mu_A(x)]^{0,5}. \quad (3.6b)$$

Modifikaci „ne“ považujeme za negaci a vyjadřujeme ji doplňkem, tj.

$$\text{ne (non)} \quad \mu_{\text{ne}A}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (3.7)$$

Je třeba si uvědomit, že jazykovou hodnotu modifikujeme slovně, tj. kvalitativně, naproti tomu fuzzy hodnotu modifikujeme analyticky (pomocí matematické operace), tj. kvantitativně.

Příklad 3.2

Jazyková hodnota „vysoký“ (vysoký = V) jazykové proměnné „výška“ (výška = x [cm]) byla kvantifikována pomocí funkce příslušnosti

$$\mu_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 170 \\ \frac{x-170}{20} & \text{pro } 170 \leq x \leq 190. \\ 1 & \text{pro } x > 190 \end{cases} \quad (3.8)$$

Fuzzy hodnotu „vysoký“, tj. V je třeba modifikovat pomocí modifikátorů „velmi“, „více méně“ a „ne“.

Řešení:

Pro fuzzy hodnotu „velmi vysoký“ v souladu s (3.2) dostaneme

$$\mu_{\text{velmiV}}(x) = [\mu_V(x)]^2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 170 \\ \left(\frac{x-170}{20}\right)^2 & \text{pro } 170 \leq x \leq 190 \\ 1 & \text{pro } x > 190 \end{cases} \quad (3.9)$$

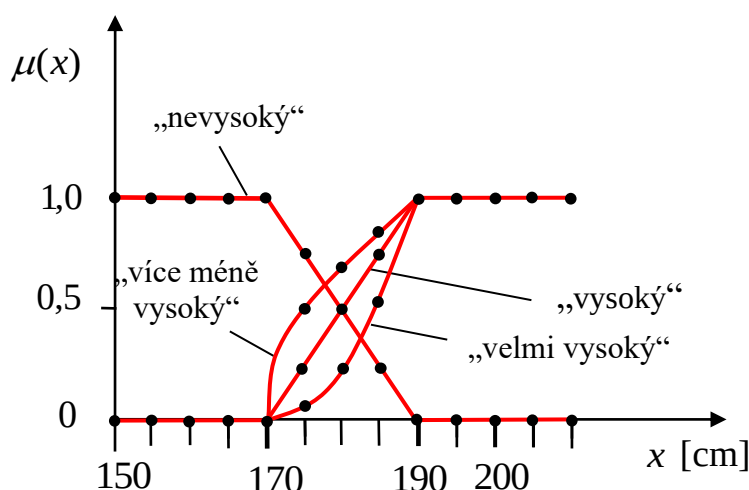
Podobně pro fuzzy hodnotu „více méně vysoký“ v souladu s (3.4) dostaneme

$$\mu_{\text{vicemeneV}}(x) = \sqrt{\mu_V(x)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 170 \\ \sqrt{\frac{x-170}{20}} & \text{pro } 170 \leq x \leq 190 \\ 1 & \text{pro } x > 190 \end{cases} \quad (3.10)$$

Pro fuzzy hodnotu „nevysoký“ použijeme vztah (3.7)

$$\mu_{\text{neV}}(x) = 1 - \mu_V(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 170 \\ \frac{190-x}{20} & \text{pro } 170 \leq x \leq 190 \\ 0 & \text{pro } x > 190 \end{cases} \quad (3.11)$$

Modifikované hodnoty jsou ukázány na obr. 3.2.



Obr. 3.2 Modifikace fuzzy hodnoty „vysoký“ – příklad 3.2 a 3.3

Příklad 3.3

Předpokládejme, že jazyková hodnota „vysoký“ (vysoký = V) z příkladu 3.2 je kvantifikována pro diskrétní hodnoty „výška“ (výška = x [cm])

s intervalem 5 cm. Odpovídající fuzzy hodnota V je v souladu s (3.8) vyjádřena vztahem

$$V = \left\{ \dots; 0/170; 0,25/175; 0,5/180; 0,75/185; 1/190; \dots \right\}. \quad (3.12)$$

Fuzzy hodnotu V je třeba modifikovat pomocí modifikátorů „velmi“, „více méně“ a „ne“.

Řešení:

Pro fuzzy hodnotu „velmi vysoký“ = „*velmiV*“ na základě vztahu (3.2) dostaneme

$$\begin{aligned} velmiV &= \left\{ \dots; 0^2/170; 0,25^2/175; 0,5^2/180; 0,75^2/185; 1^2/190; \dots \right\} = \\ &= \left\{ \dots; 0/170; 0,0625/175; 0,25/180; 0,5625/185; 1/190; \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Podobně pro fuzzy hodnotu „více méně vysoký“ = „*více meneV*“ v souladu s (3.4) obdržíme

$$\begin{aligned} vicemeneV &= \left\{ \dots; \sqrt{0}/170; \sqrt{0,25}/175; \sqrt{0,5}/180; \sqrt{0,75}/185; \sqrt{1}/190; \dots \right\} = \\ &= \left\{ \dots; 0/170; 0,5/175; 0,707/180; 0,866/185; 1/190; \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

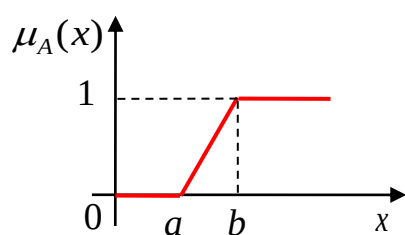
Pro fuzzy hodnotu „nevysoký“ = „*neV*“ použijeme vztah (3.7) a dostaneme

$$\begin{aligned} neV &= \left\{ \dots; (1-0)/170; (1-0,25)/175; (1-0,5)/180; (1-0,75)/185; (1-1)/190; \dots \right\} = \\ &= \left\{ \dots; 1/170; 0,75/175; 0,5/180; 0,25/185; 0/190; \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

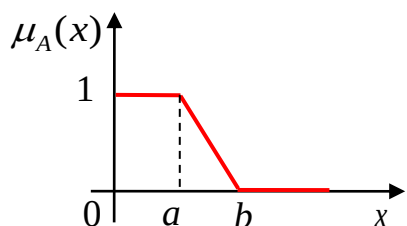
Modifikované fuzzy hodnoty jsou na obr. 3.2 označeny černými body.

Funkce příslušnosti $\mu_A(x)$ popisující fuzzy množinu A může mít různý tvar v závislosti na subjektivním názoru osoby, která danou jazykovou hodnotu chce vyjádřit a kvantifikovat.

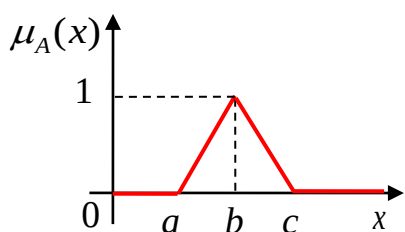
Je vhodné, aby funkce příslušnosti $\mu_A(x)$ byla jednoduše popsitelná, protože to usnadňuje její další využití a zpracování. Uvedeme pouze jednoduché, nejčastěji používané tvary, viz obr. 3.3.



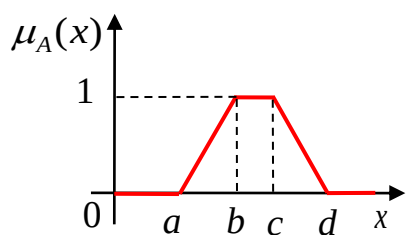
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases} \quad (3.16)$$



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{b-x}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases} \quad (3.17)$$



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{pro } b < x \leq c \\ 1 & \text{pro } x > c \end{cases} \quad (3.18)$$



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{pro } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{pro } c < x \leq d \\ 0 & \text{pro } x > d \end{cases} \quad (3.19)$$

Obr. 3.3 Jednoduché tvary funkcí příslušnosti

Jazykové proměnné můžeme využít při tvorbě **jazykových modelů** (linguistic models) a po kvantifikaci i **fuzzy modelů** (fuzzy models). Základním nástrojem je implikace ve tvaru IF – THEN pravidla (IF – THEN rule)

$$R_i : \text{IF } x \text{ is } A_i \text{ THEN } y \text{ is } B_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3.20)$$

kde x je vstupní jazyková proměnná (předpoklad) mající jazykovou hodnotu A_i , y – výstupní jazyková proměnná (důsledek) mající jazykovou hodnotu B_i , R_i – jednotlivé IF – THEN pravidlo, N – počet jednotlivých pravidel.

Celkový jazykový model je dán sjednocením jednotlivých jazykových pravidel

$$R = R_1 \text{ OR } R_2 \text{ OR} \dots \text{OR } R_N, \quad (3.21)$$

kde OR = „nebo“ je operátor sjednocení.

Po zastoupení jazykových hodnot A_i a B_i odpovídajícími fuzzy množinami, tj. odpovídajícími funkcemi příslušnosti $\mu_{A_i}(x)$ a $\mu_{B_i}(y)$ (tj. po kvantifikaci) dostaneme fuzzy implikaci – fuzzy IF – THEN pravidlo (použijeme např. Mamdaniho implikaci)

$$\mu_{R_i}(x, y) = \min[\mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y)] = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y). \quad (3.22)$$

Celkový fuzzy model je dán sjednocením jednotlivých fuzzy pravidel

$$\begin{aligned} \mu_R(x, y) &= \max[\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y), \dots, \mu_{R_N}(x, y)] = \\ &= \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y) \vee \dots \vee \mu_{R_N}(x, y). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pro Mamdaniho implikaci (3.22) fuzzy model (3.23) se nazývá **Mamdaniho model**.

Použijeme-li Larsenovu implikaci

$$\mu_{R_i}(x, y) = \mu_{A_i}(x) \cdot \mu_{B_i}(y), \quad (3.24)$$

pak fuzzy model (3.23) se nazývá **Larsenův model**.

Obecnější je **Takagi-Sugeno-Kangův model**, dále budeme používat zjednodušený název **Sugenův model**, kde jednotlivé implikace, tj. IF – THEN pravidla mají tvar

$$R_i : \text{IF } x \text{ is } A_i \text{ THEN } y = f_i(x), \quad (3.25a)$$

kde $f_i(x)$ je ostrá, nejčastěji, lineární funkce (Sugenův model 1. řádu).

Výsledná hodnota y může být určena např. na základě vztahu

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) y_i}{\sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x)}, \quad (3.25b)$$

kde y_i je hodnota výstupu odpovídající hodnotě $f_i(x)$.

Příklad 3.4

Utvoříme jazykový a fuzzy model pece vyhřívané plynovým hořákem, do kterého je přiváděn plyn s konstantním průtokem [m^3s^{-1}] a vzduch s proměnným průtokem [m^3s^{-1}].

Je zřejmé, že při nedostatku vzduchu spalování plynu bude nedokonalé, a proto teplota plamene, a tedy i tepelný výkon hořáku [kW] budou nízké. Podobně při přebytku vzduchu dojde k ochlazení plamene, a proto teplota plamene i tepelný výkon budou rovněž nízké. Při správném poměru palivo – vzduch, tj. při správném spalovacím poměru, účinnost spalování bude nejvyšší, a proto také teplota plamene i tepelný výkon hořáku budou nejvyšší. Předpokládá se, že maximální účinnost spalování, maximální teplota a maximální tepelný výkon hořáku vystupují přibližně při stejném spalovacím poměru.

Zavedeme vstupní u a výstupní y proměnnou, jejich hodnoty a označení.

Za vstupní jazykovou proměnnou u zvolíme „průtok (P)“ vzduchu s jazykovými hodnotami „nízký průtok (NP)“, „dobrý průtok (DP)“ a „vysoký průtok (VP)“. Podobně za výstupní jazykovou proměnnou y volíme „teplota (T)“ v peci (v pevně zvoleném místě) s jazykovými hodnotami „nízká teplota (NT)“ a „vysoká teplota (VT)“.

Nyní již můžeme zformulovat **jazykový model** pece:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 : \text{IF } u \text{ is } NP \text{ THEN } y \text{ is } NT \\ R_2 : \text{IF } u \text{ is } DP \text{ THEN } y \text{ is } VT \\ R_3 : \text{IF } u \text{ is } VP \text{ THEN } y \text{ is } NT \end{array} \right\} \quad (3.26a)$$

$$R = R_1 \text{ OR } R_2 \text{ OR } R_3. \quad (3.26b)$$

Je zřejmé, že jazykový model pece (3.26) je statický, protože v něm nevystupují žádné časové změny (přírůstky proměnných v čase).

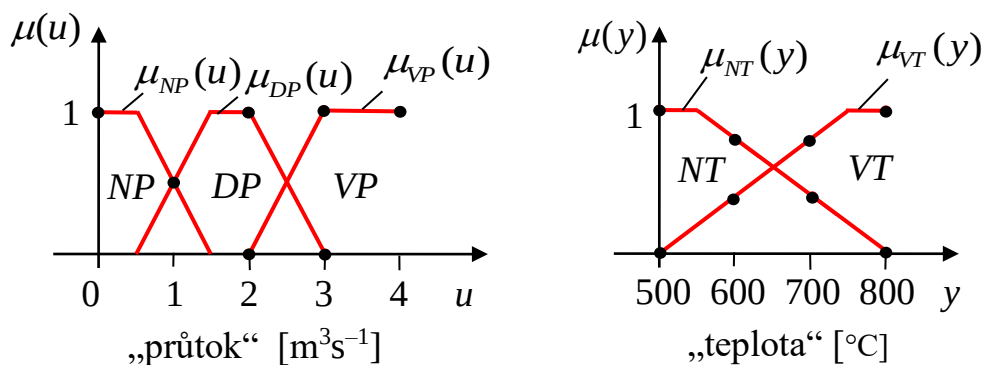
Tuto statickou závislost můžeme kvalitativně zobrazit pomocí tabulky sestavené na základě jazykového modelu pece (3.26a).

vstup: průtok u

		u	NP	DP	VP
výstup: teplota y	y				
	VT		R_2		
	NT	R_1			R_3

Obr. 3.4 Vyjádření jazykového modelu pece (3.26) pomocí tabulky

Každému jednotlivému pravidlu IF – THEN přiřadíme uprostřed obdélníčku (čtverečku) bod. Protože jazykový model pece (3.26) má 3 pravidla, v tabulce budou 3 body, kterými proložíme křivku (zaznačenou čárkovaně).



Obr. 3.5 Kvantifikace jazykových hodnot proměnných „průtok“ a „teplota“ – příklad 3.4

V souladu s předpokladem vidíme, že statické vlastnosti pece mají extrémní charakter, viz také příklad 4.1.

Jazykové hodnoty proměnných „průtok“ vzduchu a „teplota“ v peci byly expertem kvantifikovány v souladu s obr. 3.5.

Nyní můžeme jazykový model pece (3.26) vyjádřit ve tvaru **fuzzy modelu** [uvažujeme Mamdaniho implikaci (2.22)]

$$\left. \begin{aligned} \mu_{R_1}(u, y) &= \min[\mu_{NP}(u), \mu_{NT}(y)], \\ \mu_{R_2}(u, y) &= \min[\mu_{DP}(u), \mu_{VT}(y)], \\ \mu_{R_3}(u, y) &= \min[\mu_{VP}(u), \mu_{NT}(y)], \end{aligned} \right\} \quad (3.27a)$$

$$\mu_R(u, y) = \max[\mu_{R_1}(u, y), \mu_{R_2}(u, y), \mu_{R_3}(u, y)]. \quad (3.27b)$$

Vyjádříme fuzzy model pece numericky pomocí matice.

Tab. 3.1 Diskretizace fuzzy hodnot proměnné „průtok“

	„průtok“ vzduchu [m^3s^{-1}]				
u_i	0	1	2	3	4
$\mu_{NP}(u_i)$	1	0,5	0	0	0
$\mu_{DP}(u_i)$	0	0,5	1	0	0
$\mu_{VP}(u_i)$	0	0	0	1	1

Tab. 3.2 Diskretizace fuzzy hodnot proměnné „teplota“

	„teplota“ v peci [°C]			
y_i	500	600	700	800
$\mu_{NT}(y_i)$	1	0,8	0,4	0
$\mu_{VT}(y_i)$	0	0,4	0,8	1

Z důvodu jednoduchosti budeme uvažovat diskrétní univerza pro „průtok“ vzduchu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ v m^3s^{-1} a „teplotu“ v peci $\{500, 600, 700, 800\}$ ve $^{\circ}\text{C}$. Diskretizace je velmi hrubá (viz obr. 3.5), ale pro ilustraci je vyhovující.

Diskretizované fuzzy hodnoty proměnných „průtok“ vzduchu a „teplota“ v peci jsou uvedeny v tab. 3.1 a 3.2.

Na základě tab. 3.1 a 3.2 vyjádříme fuzzy hodnoty odpovídajícími vektory $[NP - (\mathbf{np}), DP - (\mathbf{dp}), VP - (\mathbf{vp}), NT - (\mathbf{nt}), VT - (\mathbf{vt})]$.

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{np}) &= [1; 0,5; 0; 0; 0]^T \\ (\mathbf{dp}) &= [0; 0,5; 1; 0; 0]^T \\ (\mathbf{vp}) &= [0; 0; 0; 1; 1]^T \end{aligned} \right\} \text{„průtok“ vzduchu} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{nt}) &= [1; 0,8; 0,4; 0]^T \\ (\mathbf{vt}) &= [0; 0,4; 0,8; 1]^T \end{aligned} \right\} \text{„teplota“ v peci.} \quad (3.29)$$

Z důvodu jednoznačnosti vektory skládající se z více písmen budeme dávat do závorek.

Fuzzy model pece (3.27) vyjádříme pro diskrétní univerza na základě vztahů (2.34), (3.28) a (3.29):

$$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{nt}) \circ (\mathbf{np})^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (3.30a)$$

$$\mathbf{R}_2 = (\mathbf{vt}) \circ (\mathbf{dp})^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,8 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (3.30b)$$

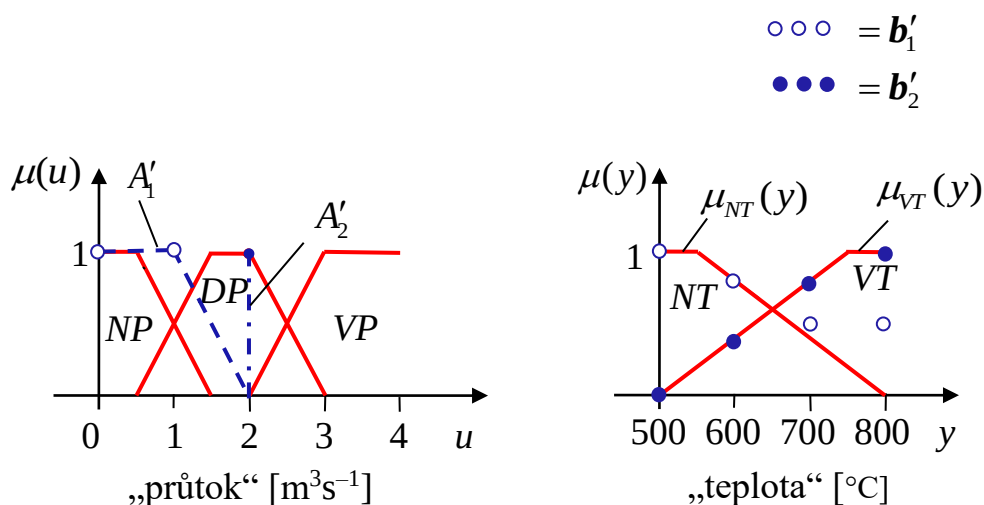
$$\mathbf{R}_3 = (\mathbf{nt}) \circ (\mathbf{vp})^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30c)$$

kde $\circ$ je operátor dyadického násobení, kde místo násobení se použije operace min.

Sjednocením implikací, tj. relací (3.30a) – (3.30c), tj. dílčích implikací získáme celkový fuzzy model pece ve tvaru matice

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,5 & 0,4 & 0,8 & 0,8 \\ 0,4 & 0,5 & 0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30d)$$

kde $\circ$ je operátor sjednocení relací, který formálně vyjadřuje součet matic, přičemž součet je zastoupen operací max.



Obr. 3.6 Fuzzy hodnoty proměnných „průtok“ a „teplota“ – příklad 3.4

Předpokládejme nyní, že „průtok“ vzduchu je dán fuzzy hodnotou A'_1 (viz obr. 3.6 – čárkovaná funkce příslušnosti), která je přibližně popsána vektorem

$$\mathbf{a}'_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (3.31)$$

I když diskretizace je velmi hrubá, pro ilustraci postupu je dostačující.

Určíme výstupní fuzzy hodnotu B'_1 , tj. odpovídající vektor $\mathbf{b}'_1$.

Nejdříve použijeme celkový fuzzy model (3.30d). V souladu se vztahem (2.25) můžeme psát

$$\mathbf{b}'_1 = \mathbf{R} \circ \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,5 & 0,4 & 0,8 & 0,8 \\ 0,4 & 0,5 & 0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

kde $\circ$ je operátor kompozice, který formálně vyjadřuje násobení matice $\mathbf{R}$ vektorem $\mathbf{a}'_1$, přičemž násobení je zastoupeno operací min a součet operací max.

Výstupní fuzzy hodnota B'_1 reprezentována vektorem $\mathbf{b}'_1$ je na pravém obr. 3.6 označena kroužky. Podle očekávání dominuje fuzzy hodnota „teplota“ NT . Kroužky nejsou spojeny žádnou čarou, protože pro její průběh bychom museli použít jemnější diskretizaci.

Nyní určíme výstupní fuzzy množinu B'_1 ($\mathbf{b}'_1$) z dílčích implikací (relací) (3.30a) – (3.30c) a dílčí výstupní fuzzy hodnoty sjednotíme v celkovou fuzzy hodnotu.

Na základě vztahu (2.25) [viz také (3.32)] můžeme psát:

$$\mathbf{b}'_{11} = \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{b}'_{12} = \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad (3.33b)$$

$$\mathbf{b}'_{13} = \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33c)$$

kde $\circ$ je operátor kompozice, který formálně vyjadřuje násobení matice $\mathbf{R}_i$ ($i = 1, 2, 3$) vektorem $\mathbf{a}'_1$, přičemž násobení je zastoupeno operací min a součet operací max.

Celkovou výslednou fuzzy hodnotu $\mathbf{b}'_1$ získáme sjednocením dílčích hodnot $\mathbf{b}'_{11}$, $\mathbf{b}'_{12}$ a $\mathbf{b}'_{13}$, tj.

$$\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}'_{11} \circ \mathbf{b}'_{12} \circ \mathbf{b}'_{13} = [1 \quad 0,8 \quad 0,5 \quad 0,5]^T, \quad (3.33d)$$

kde $\circ$ je operátor sjednocení, který formálně vyjadřuje součet vektorů, přičemž součet je zastoupen operací max.

Podle očekávání jsme obdrželi stejný výsledek, tzn., že pro výpočet výsledné výstupní fuzzy hodnoty můžeme použít jak dílčí relace (implikace) $\mathbf{R}_i$, tak i celkovou relaci (výsledný model) $\mathbf{R}$.

Ještě určíme výstupní fuzzy hodnotu B'_2 jako odezvu na vstupní ostrou hodnotu A'_2 (na levém obr. 3.6 singleton označený čerchovanou čarou), tj.

$$\mathbf{a}'_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (3.34)$$

Použijeme pouze celkový fuzzy model pece (3.30d) a na základě vztahů (2.25) a (2.34) dostaneme

$$\mathbf{b}'_2 = \mathbf{R} \circ \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,5 & 0,4 & 0,8 & 0,8 \\ 0,4 & 0,5 & 0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

kde $\circ$ je operátor kompozice, který formálně vyjadřuje násobení matice $\mathbf{R}$ vektorem $\mathbf{a}'_2$, přičemž násobení je zastoupeno operací min a součet operací max.

Podle očekávání jsme obdrželi výstupní fuzzy hodnotu proměnné „teplota“ VT [viz pravý obr. 3.6 a vztah (3.29)]

$$(\mathbf{vt}) = \mathbf{b}'_2. \quad (3.36)$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že stejný výsledek dostaneme při výpočtu $\mathbf{b}'_2$ z dílčích relací (implikací).

Příklad 3.5

Je dán Sugenuv jazykový model statického systému ve tvaru

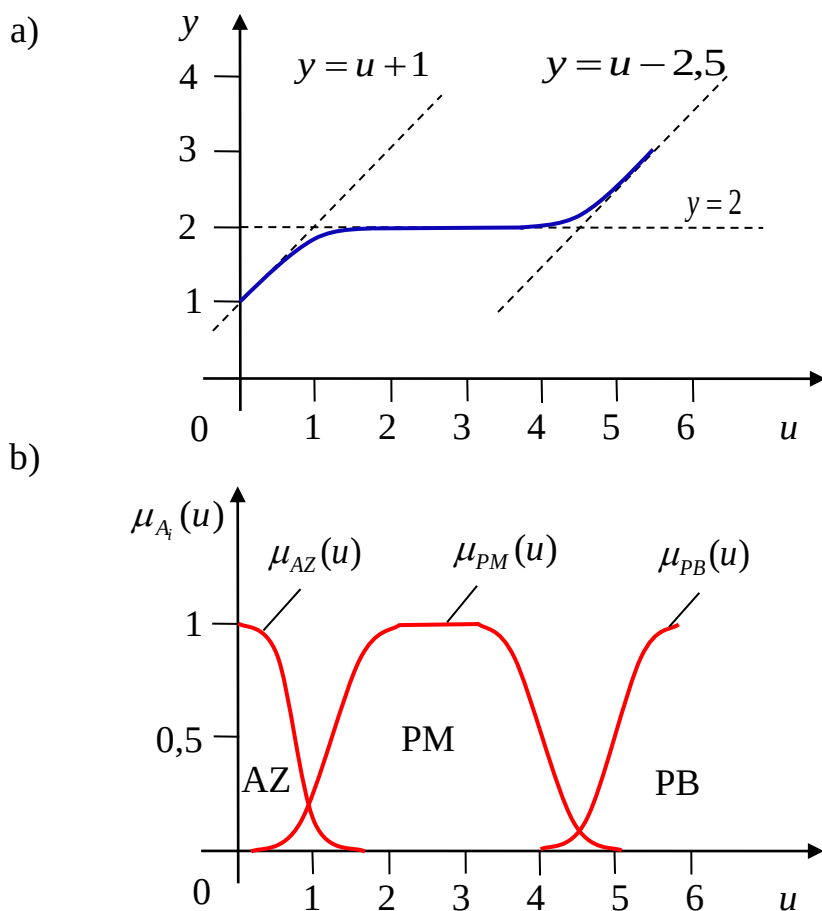
$$R_1 : \text{IF } u \text{ is } AZ \text{ THEN } y = u + 1$$

$$R_2 : \text{IF } u \text{ is } PM \text{ THEN } y = 2$$

$$R_3 : \text{IF } u \text{ is } PB \text{ THEN } y = u - 2,5$$

Kvantifikace jazykových hodnot AZ , PM a PB pomocí odpovídajících fuzzy hodnot $\mu_{AZ}(u)$, $\mu_{PM}(u)$ a $\mu_{PB}(u)$ je na obr. 3.7b.

Je třeba určit přibližnou statickou charakteristiku daného systému, tj. závislost výstupu y na vstupu u .



Obr. 3.7 Sugenuv model: a) výsledný statický model, b) rozložení vstupních jazykových (fuzzy) hodnot – příklad 3.5

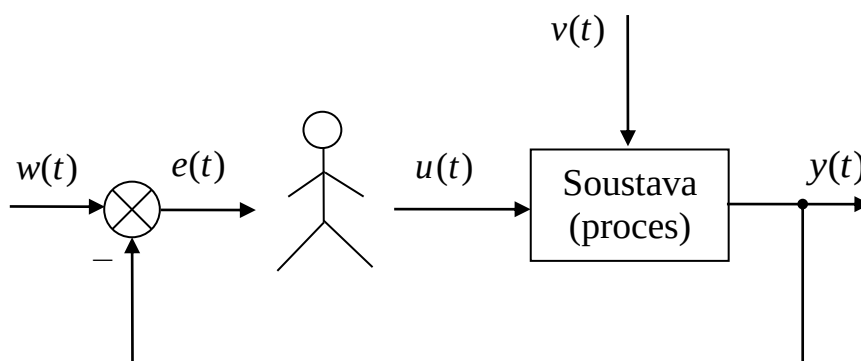
Pro určení výstupu y může být použit vztah (3.25b). Průběh je možné ještě vhodně upravit, aby přechody mezi jednotlivými úseky byly hladké. Přibližná statická charakteristika daného systému získaná ze Sugenova modelu je na obr. 3.7a.

4 Fuzzy řízení

Fuzzy množiny mohou být využity v různých oblastech, ale především tam, kde doposud některé činnosti vykonával výlučně člověk. Např. při složitých rozhodovacích procesech člověk je často úspěšně zastupován expertními systémy, které využívají pravděpodobnostní nebo fuzzy přístup umožňující vyjádřit neurčitost a nejistotu ve znalostech i ve výsledném rozhodnutí. Ukázalo se, že fuzzy přístup je podstatně rychlejší než přístup pravděpodobnostní, přibližně při stejné kvalitě rozhodování, ale při podstatně nižší výpočetní náročnosti.

Velmi důležitá a zajímavá je aplikace fuzzy množin při řízení složitějších technologických procesů, které člověk úspěšně řídil a které odolávaly automatizaci. Člověk dovedl tuto řídicí činnost popsat slovy, tj. vyjádřit ji pomocí jazykových implikací, ale teprve fuzzy množiny umožnily toto kvalitativní vyjádření řídicí činnosti kvantifikovat a popsat pomocí matematického aparátu fuzzy množin a následně automatizovat.

Uvažujme regulační obvod na obr. 4.1, kde funkci regulátoru zastává člověk – operátor. Při experimentech bylo zjištěno, že pokud po určitém „zpracování“ člověk dovede jakoukoliv soustavu (proces) řídit, pak vlastnosti takového otevřeného regulačního obvodu okolo úhlového kmitočtu řezu ω_r [$|G_o(j\omega_r)|=1$] se dají popsat logaritmickou amplitudovou kmitočtovou charakteristikou se sklonem -20 dB/dek. Tato vlastnost je dodnes využívána při návrhu regulačních obvodů pomocí logaritmických kmitočtových charakteristik.



Obr. 4.1 Regulační obvod s člověkem – operátorem

Na obr. 4.1 značí: $w(t)$, $u(t)$, $y(t)$, $v(t)$ a $e(t)$ – žádaná, akční, regulovaná, poruchová veličina a regulační odchylka.

Dále bylo zjištěno, že člověk dovede sledovat regulační odchylku $e(t)$ a její časovou změnu $de(t)/dt$, přičemž dovede přibližně rozlišit u obou veličin okolo 7 ± 2 hodnot a že jeho řídicí činnost v diskrétním okamžiku kT ($k = 0, 1, 2, \dots$) bylo možné vyjádřit některým z následujících vztahů (T – vzorkovací perioda)

$$u(kT) = f_P[e(kT)], \quad (4.1a)$$

$$\Delta u(kT) = f_I[e(kT)], \quad (4.1b)$$

$$u(kT) = f_{PD}[e(kT), \Delta e(kT)], \quad (4.1c)$$

$$\Delta u(kT) = f_{PI}[e(kT), \Delta e(kT)], \quad (4.1d)$$

kde

$$\Delta e(kT) = e(kT) - e[(k-1)T], \quad (4.2)$$

$$\Delta u(kT) = u(kT) - u[(k-1)T] \quad (4.3)$$

jsou zpětné difference, které se často označují jako $\nabla e(kT)$ a $\nabla u(kT)$ a vyjadřují časové změny regulační odchylky a akční veličiny.

Ve vztazích (4.1) funkce f_P , f_I , f_{PD} a f_{PI} vyjadřují symbolicky závislost na tvarech funkcí příslušnosti, jejich rozložení a také na způsobu určení výsledné fuzzy množiny akčního zásahu $u(kT)$ nebo $\Delta u(kT)$. Konkrétní akční zásah $u(kT)$ nebo $\Delta u(kT)$ se získá **defuzzifikací** (viz dále) této výsledné množiny.

Je zřejmé, že vztahy (4.1) vyjadřují nelineární regulátory typu P, I, PD a PI. Regulátory I a PI jsou v přírůstkovém tvaru.

Z důvodu zajištění stability regulátory v přírůstkovém tvaru (I, PI) se nejčastěji používají pro regulované soustavy, u kterých při konstantním vstupu výstup se vždy ustálí na konstantní hodnotě.

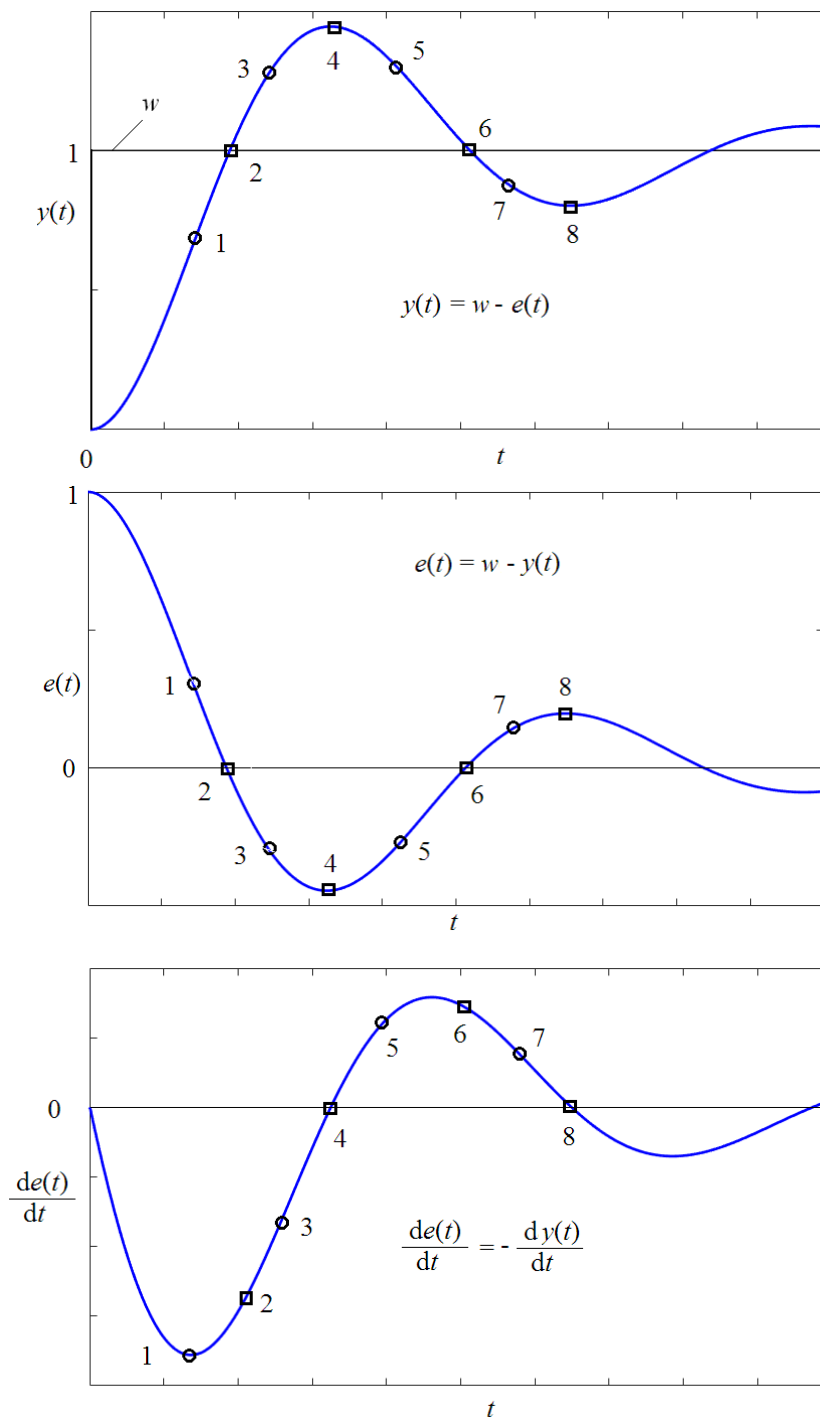
Vzorkovací perioda T vyjadřuje tu skutečnost, že člověk ke své reakci potřebuje určitý čas.

U přírůstkových tvarů akční zásah v okamžiku kT je dán vztahem (4.3), tj.

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \Delta u(kT). \quad (4.4)$$

Aby člověk – operátor svou řídicí činnost mohl vyjádřit pomocí jazykových implikací, musel si nejdříve vytvořit množinu jazykových hodnot. Proto zavedeme pro regulační odchylku, její časovou změnu (přírůstek), akční veličinu a její časovou změnu, např. 7 hodnot, které označíme z důvodu univerzálnosti a jednoduchosti anglickými zkratkami:

$$\left. \begin{array}{l} NB \text{ (negative big) – záporný velký,} \\ NM \text{ (negative medium) – záporný střední,} \\ NS \text{ (negative small) – záporný malý,} \\ AZ \text{ (approximately zero) – přibližně nulový,} \\ PS \text{ (positive small) – kladný malý,} \\ PM \text{ (positive medium) – kladný střední,} \\ PB \text{ (positive big) – kladný velký.} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$



Obr. 4.2 Průběhy regulované veličiny $y(t)$, regulační odchylky $e(t)$ a její derivace

$$\frac{de(t)}{dt} \text{ pro } w = \text{konst}$$

Jazykový model regulátoru se tvoří pomocí jazykových implikací – pravidel ve tvaru:

$$\text{typ P} \quad R_i : \text{IF } e(kT) \text{ is ? THEN } u(kT) \text{ is ?}, \quad (4.6a)$$

$$\text{typ I} \quad R_i : \text{IF } e(kT) \text{ is ? THEN } \Delta u(kT) \text{ is ?}, \quad (4.6b)$$

$$\text{typ PD } R_i : \text{IF } e(kT) \text{ is ? AND } \Delta e(kT) \text{ is ? THEN } u(kT) \text{ is ?}, \quad (4.6c)$$

$$\text{typ PI } R_i : \text{IF } e(kT) \text{ is ? AND } \Delta e(kT) \text{ is ? THEN } \Delta u(kT) \text{ is ?}, \quad (4.6d)$$

kde AND = „a zároveň“ je operátor průniku a otazník ? představuje konkrétní jazykovou hodnotu, viz (4.5).

Celkový jazykový model regulátoru je dán sjednocením dílčích jazykových implikací (pravidel) a tvoří tzv. bázi pravidel (rule base).

Na začátku používání fuzzy regulátorů jejich jazykový model byl vytvářen člověkem operátorem na základě jeho zkušeností s ruční regulací. V současné době se jazykový model regulátoru nejčastěji navrhuje uměle na základě předpokládaného průběhu regulační odchylky $e(t)$ a její derivace $\frac{de(t)}{dt}$, viz obr. 4.2.

Velmi hrubé schéma pro sestavení dílčích jazykových implikací – pravidel může mít např. pro regulátor typu PD a 3 jazykové hodnoty N , AZ a P pro akční veličinu $u(kT)$, regulační odchylku $e(kT)$ a její přírůstek $\Delta e(kT)$ tvar [P = kladný (positive), N = záporný (negative)]:

$$\begin{aligned} \text{IF } e(kT) \text{ is } P \text{ AND } \begin{cases} \Delta e(kT) \text{ is } P \text{ THEN } u(kT) \text{ is } P & (7) \\ \Delta e(kT) \text{ is } AZ \text{ THEN } u(kT) \text{ is } P & (8) \\ \Delta e(kT) \text{ is } N \text{ THEN } u(kT) \text{ is } AZ \text{ OR } P & (1) \end{cases} \\ \text{IF } e(kT) \text{ is } AZ \text{ AND } \begin{cases} \Delta e(kT) \text{ is } P \text{ THEN } u(kT) \text{ is } P & (6) \\ \Delta e(kT) \text{ is } AZ \text{ THEN } u(kT) \text{ is } AZ & (4.7) \\ \Delta e(kT) \text{ is } N \text{ THEN } u(kT) \text{ is } N & (2) \end{cases} \\ \text{IF } e(kT) \text{ is } N \text{ AND } \begin{cases} \Delta e(kT) \text{ is } P \text{ THEN } u(kT) \text{ is } AZ \text{ OR } N & (5) \\ \Delta e(kT) \text{ is } AZ \text{ THEN } u(kT) \text{ is } N & (4) \\ \Delta e(kT) \text{ is } N \text{ THEN } u(kT) \text{ is } N & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Jednotlivé případy jsou na obr. 4.2 a ve schématu (4.7) označeny čísly.

Schéma (4.7) je vhodné vyjádřit tabulkou (4.1), která je přehledná a velmi vhodná především v případě většího počtu jazykových hodnot.

V tab. 4.1 jsou jazykové hodnoty $u(kT)$.

Tab. 4.1 Jazykový model regulátoru PD odpovídající schématu (4.7)

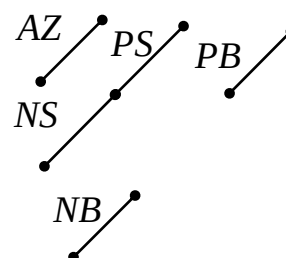
		$e(kT)$		
		N	AZ	P
$\Delta e(kT)$	P	N (5) AZ	P (6)	P (7)
	AZ	N (4)	AZ	P (8)
	N	N (3)	N (2)	P (1) AZ

Tab. 4.2 vyjadřuje jazykový model regulátoru PD pro 5 jazykových hodnot, NB , NS , AZ , PS a PB pro všechny proměnné $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $u(kT)$. Při jejím sestavování bylo postupováno podobně jako v případě tab. 4.1 s tím, že byly uvažovány jazykové hodnoty (4.5).

Z tab. 4.2 (i z tab. 4.1) je vidět, že jazykové hodnoty akční veličiny $u(kT)$ tvoří oblasti – pásy stejných hodnot. To umožňuje při návrhu jazykového modelu regulátoru doplnit chybějící jazykové hodnoty.

Tab. 4.2 Jazykový model regulátoru PD pro 5 jazykových hodnot všech proměnných

		$e(kT)$				
		NB	NS	AZ	PS	PB
$\Delta e(kT)$	PB	AZ	PS	PB	PB	PB
	PS	NS	AZ	PS	PS	PB
	AZ	NS	NS	AZ	PS	PS
	NS	NB	NS	NS	AZ	PS
	NB	NB	NB	NB	NS	AZ

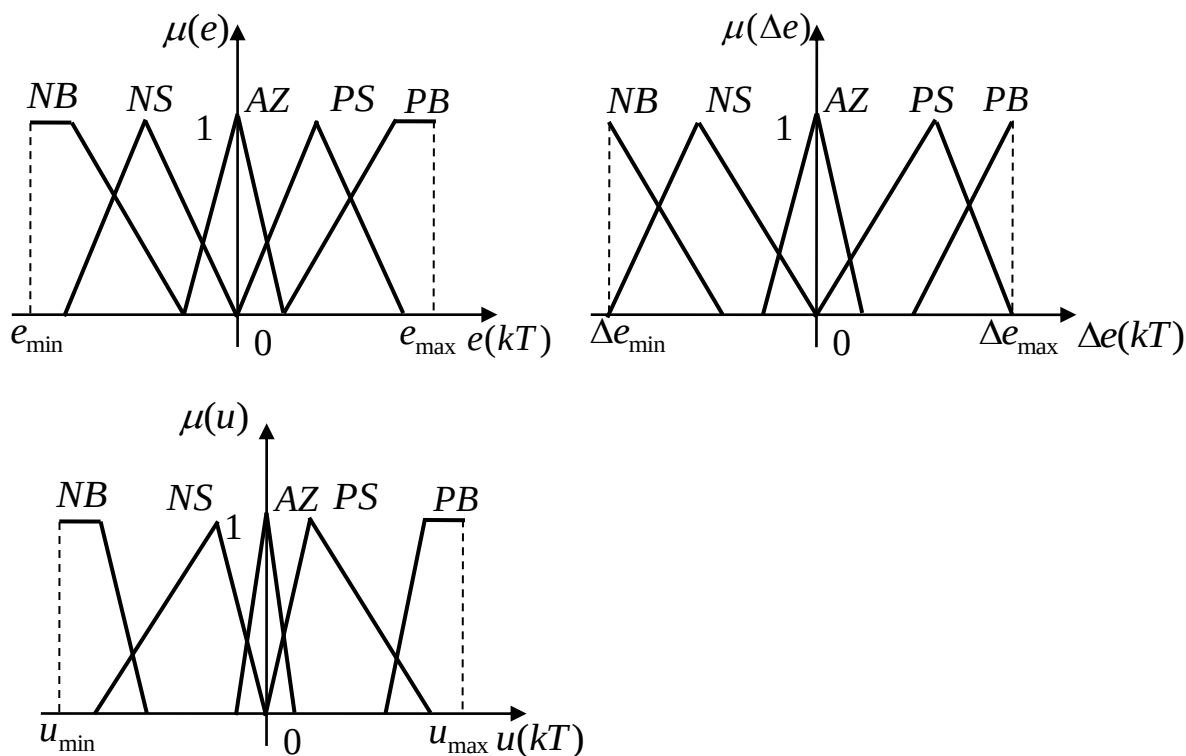


Jazykový model regulátoru PD (tab. 4.2) můžeme vyjádřit popisem [viz (4.6c)]:

$$\begin{aligned}
 R_1 : & \text{IF } e(kT) \text{ is } NB \text{ AND } \Delta e(kT) \text{ is } PB \text{ THEN } u(kT) \text{ is } AZ, \\
 R_2 : & \text{IF } e(kT) \text{ is } NS \text{ AND } \Delta e(kT) \text{ is } PB \text{ THEN } u(kT) \text{ is } PS, \\
 & \vdots \\
 R_{25} : & \text{IF } e(kT) \text{ is } PB \text{ AND } \Delta e(kT) \text{ is } NB \text{ THEN } u(kT) \text{ is } AZ.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Je zřejmé, že vyjádření jazykového modelu regulátoru PD pomocí tab. 4.2 je přehlednější, jednodušší a také pohodlnější.

Po sestavení jazykového modelu, např. ve tvaru tabulky (tab. 4.2), je ho třeba kvantifikovat, tj. vyjádřit ho ve tvaru fuzzy modelu. Jazykové hodnoty zastoupíme fuzzy hodnotami, tj. fuzzy množinami popsány vhodně zvolenými funkcemi příslušnosti. Nejčastěji se používají jednoduché tvary funkcí příslušnosti, např. v souladu s obr. 3.3.



Obr. 4.3 Kvantifikace jazykových hodnot proměnných $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $u(kT)$

Na obr. 4.3 je ukázána kvantifikace jazykových hodnot z tab. 4.2. Intervaly (rozsahy) změn proměnných $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $u(kT)$ mohou být symetrické, nesymetrické a také jednostranné (tj. uvažující pouze kladné, nebo záporné hodnoty).

Kvantifikace jazykových hodnot vyžaduje velikou zkušenost a intuici. I když na tvarech funkcí příslušnosti příliš nezáleží, velmi hodně záleží na jejich počtu, a především na jejich rozložení.

K vyjádření fuzzy modelu regulátoru PD, podobně jako (4.8) je třeba zvolit vhodný model implikace. Např. pro Mamdaniho implikaci v souladu s tab. 4.2 a vztahem (4.8) se dostane ($N = 25$):

$$\begin{aligned} R_1 : \mu_{R1}(e, \Delta e, u) &= \min[\mu_{NB}(e), \mu_{PB}(\Delta e), \mu_{AZ}(u)], \\ R_2 : \mu_{R2}(e, \Delta e, u) &= \min[\mu_{NS}(e), \mu_{PB}(\Delta e), \mu_{PS}(u)], \\ &\vdots \\ R_{25} : \mu_{R25}(e, \Delta e, u) &= \min[\mu_{PB}(e), \mu_{NB}(\Delta e), \mu_{AZ}(u)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Z důvodu přehlednosti a zjednodušení je ve vztazích (4.9) vynechán diskrétní čas kT .

Podobně pro Larsenovu implikaci se dostane:

$$\begin{aligned} R_1 : \mu_{R1}(e, \Delta e, u) &= \min[\mu_{NB}(e), \mu_{PB}(\Delta e)] \cdot \mu_{AZ}(u), \\ R_2 : \mu_{R2}(e, \Delta e, u) &= \min[\mu_{NS}(e), \mu_{PB}(\Delta e)] \cdot \mu_{PS}(u), \\ &\vdots \\ R_{25} : \mu_{R25}(e, \Delta e, u) &= \min[\mu_{PB}(e), \mu_{NB}(\Delta e)] \cdot \mu_{AZ}(u). \end{aligned} \quad (4.10)$$

V obou případech celkový fuzzy model regulátoru PD pro vztahy (4.9) a (4.10) má nejčastěji tvar

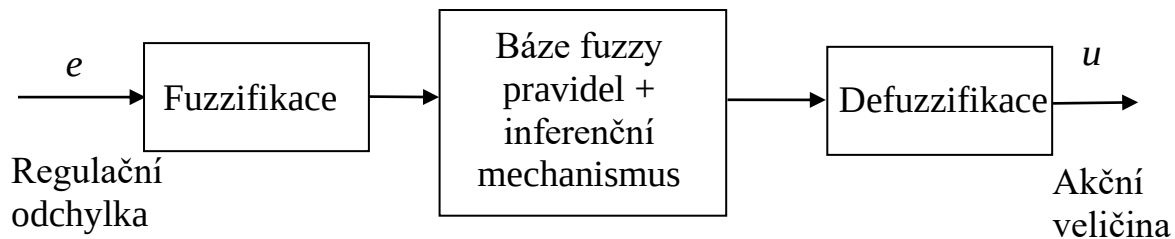
$$R : \mu_R(e, \Delta e, u) = \max[\mu_{R1}(e, \Delta e, u), \mu_{R2}(e, \Delta e, u), \dots, \mu_{R25}(e, \Delta e, u)]. \quad (4.11)$$

Jazykový model regulátoru představuje soubor jazykových pravidel (implikací) IF – THEN spolu s odpovídajícími jazykovými hodnotami. Tvoří ho **báze jazykových pravidel** (linguistic rule base).

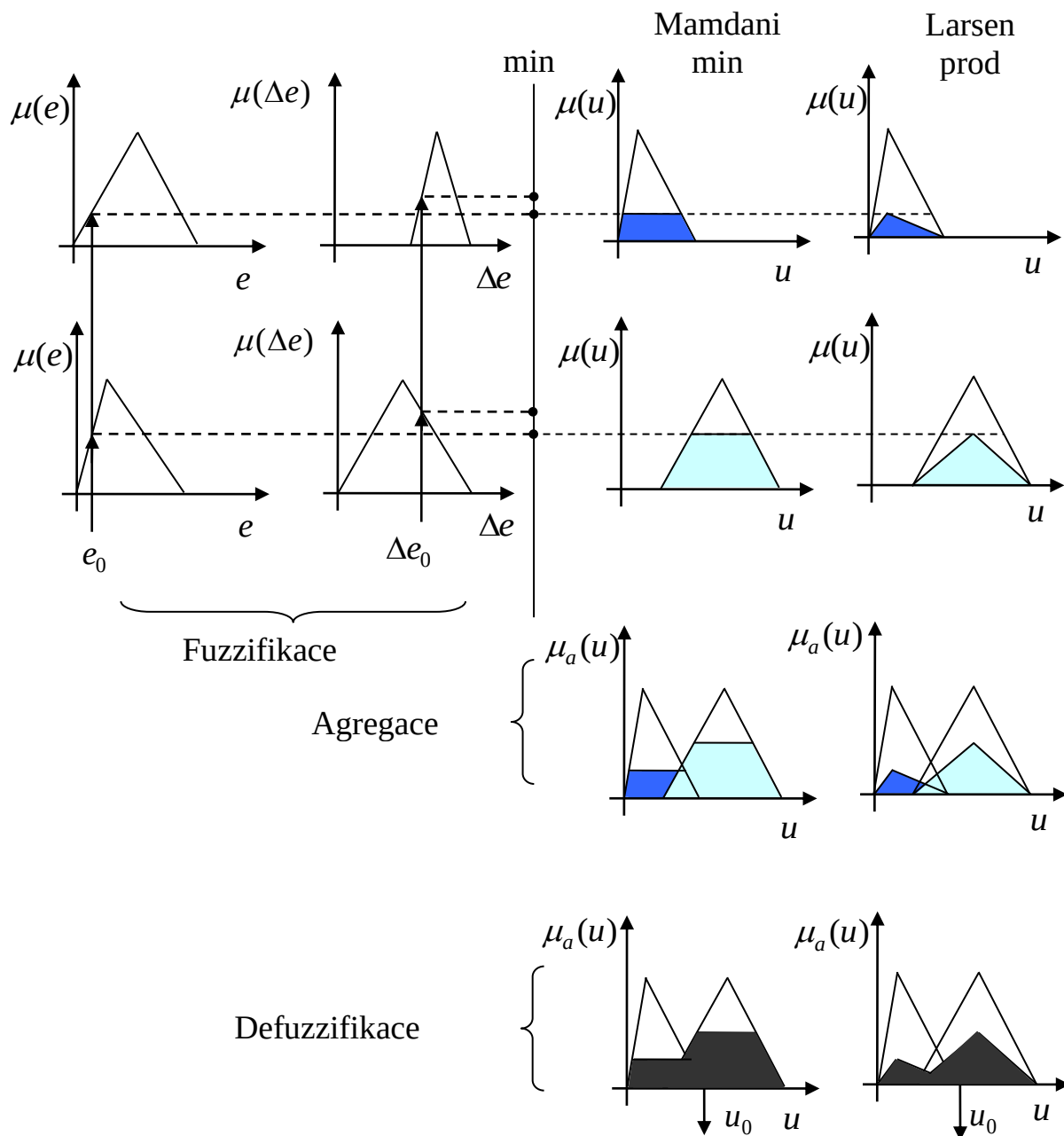
Vstupem jazykového modelu regulátoru jsou jazykové proměnné a výstupem je rovněž jazyková proměnná.

Fuzzy model regulátoru má podobnou strukturu. Předpokládá se však, že vstupem jsou fuzzy proměnné a výstupem je rovněž fuzzy proměnná, tj. fuzzy model regulátoru je tvořen **bází fuzzy pravidel** (fuzzy rule base) spolu s inferenčním mechanismem.

U reálného **fuzzy regulátoru** (fuzzy logic controller – FLC) vstupní i výstupní veličiny mají ostré hodnoty, tj. regulační odchylka $e(kT)$ a její přírůstek $\Delta e(kT)$ v čase kT mají konkrétní hodnoty získané měřením. Rovněž jeho výstupní, tj. akční veličina $u(kT)$ musí být konkrétní – ostrá, protože podle ní se v okamžiku kT nastaví akční orgán. Jeho struktura je na obr. 4.4.



Obr. 4.4 Struktura fuzzy regulátoru – FLC

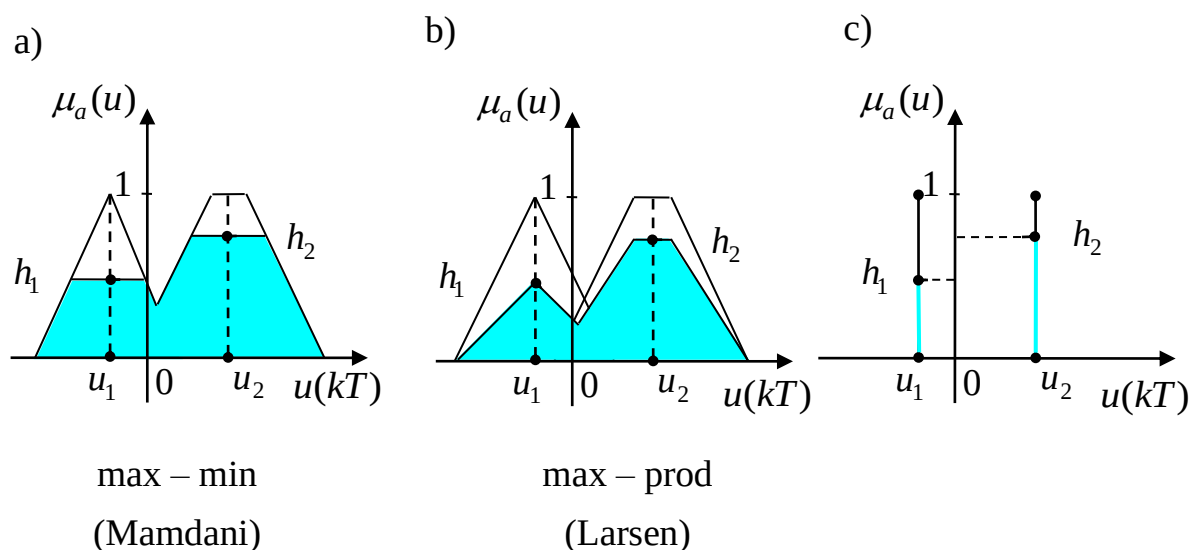
Obr. 4.5 Zpracování ostrých hodnot $e_0(kT)$ a $\Delta e_0(kT)$ fuzzy regulátorem na ostrou hodnotu akčního zásahu $u_0(kT)$

V bloku „**Fuzzifikace**“ (fuzzification) ostré hodnoty regulační odchylky $e_0(kT)$ a jejího přírůstku $\Delta e_0(kT)$ aktivují odpovídající fuzzy hodnoty vyjádřené funkcemi příslušnosti (obr. 4.5). Ostré hodnoty $e_0(kT)$ a $\Delta e_0(kT)$ na těchto fuzzy hodnotách vytnou stupně příslušnosti, viz obr. 4.5. Každá dvojice ostrých hodnot $e_0(kT)$ a $\Delta e_0(kT)$ aktivuje odpovídající fuzzy pravidla (implikace).

V bloku „**Báze fuzzy pravidel + inferenční mechanismus**“ se určí výsledná fuzzy hodnota akčního zásahu v souladu se zvolenou Mamdaniho nebo Larsenovou inferencí, viz obr. 4.5.

Výsledné fuzzy hodnoty se pak **agregují** (aggregate) a vznikne agregovaná (celková) fuzzy hodnota akčního zásahu $\mu_a[u(kT)]$, ze které se v bloku „**Defuzzifikace**“ (defuzzification) určí konkrétní hodnota akčního zásahu $u_0(kT)$, viz obr. 4.5.

Pro defuzzifikaci existuje více metod, ze kterých si ukážeme pouze tři základní metody, viz obr. 4.6.



Obr. 4.6 Defuzzifikace agregované fuzzy hodnoty akčního zásahu

Obr. 4.6a ukazuje agregovanou hodnotu akčního zásahu pro Mamdaniho inferenci a obr. 4.6b pro Larsenovu inferenci. Na obr. 4.6c jsou použity singletony se stupni příslušnosti h_1 a h_2 , které odpovídají hodnotám u_1 a u_2 . V tomto případě Mamdaniho i Larsenova inference dávají stejný výsledek. Použití singletonů pro akční veličinu lze chápat jako nejjednodušší případ Sugeny inference (Sugenův model 0. řádu).

Metoda těžiště (centre of gravity, centre of area, centroid) je nejpoužívanější, ale současně je výpočetně velmi náročná. Akční zásah se vypočte na základě vztahu

$$u_0(kT) = \frac{\int u \cdot \mu_a(u) du}{\int \mu_a(u) du}. \quad (4.12)$$

Metoda bisekce (bisector method) vychází ze vztahu

$$\int_{u_{\min}}^{u_0} \mu_a(u) du = \int_{u_0}^{u_{\max}} \mu_a(u) du. \quad (4.13)$$

Rovněž i v tomto případě je výpočet akčního zásahu velmi náročný.

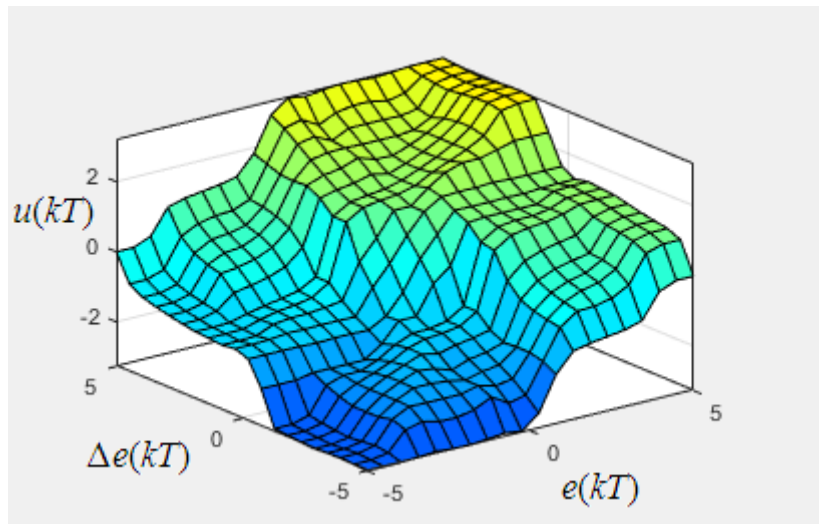
Výpočetně velmi jednoduchá je **metoda výšek** (height method), která je velmi výhodná pro všechny tři případy (obr. 4.6).

Tato metoda uvažuje výšky fuzzy hodnot. V případě plochého maxima je uvažován střed. K výpočtu akčního zásahu se používá jednoduchý vztah

$$u_0(kT) = \frac{u_1 h_1 + u_2 h_2}{h_1 + h_2}, \quad (4.14)$$

kde h_1 a h_2 jsou výšky fuzzy hodnoty, u_1 a u_2 – hodnoty akčních zásahů odpovídajícím středům maxim.

Fuzzy regulátor (FLC) každé dvojici ostrých hodnot regulační odchylky $e(kT) \in [e_{\min}, e_{\max}]$ a jejího přírůstku $\Delta e(kT) \in [\Delta e_{\min}, \Delta e_{\max}]$ přiřadí ostrou hodnotu akčního zásahu $u(kT) \in [u_{\min}, u_{\max}]$. Tyto hodnoty vytvoří tzv. **řídící plochu** (control surface), viz obr. 4.7.



Obr. 4.7 Řídící plocha fuzzy regulátoru PD

Řídící plocha fuzzy regulátoru PD na obr. 4.7 byla získána v programu MATLAB (Fuzzy Logic Toolbox) pro Mamdaniho inferenci, rozložení fuzzy hodnot $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $u(kT)$ na obr. 4.3 (viz také tab. 4.2) a pro defuzzifikaci metodou těžiště (centroid).

Podobnou řídicí plochu bychom obdrželi i pro fuzzy regulátor PI, ale jeho výstupem by byl přírůstek akčního zásahu $\Delta u(kT)$. Akční zásah $u(kT)$ se pak určí na základě vztahu (4.4).

Je tedy zřejmé, že *fuzzy regulátor (FLC) je deterministický, často silně nelineární regulátor.*

U lineárních regulátorů řídicí plocha je rovina.

Příklad 4.1

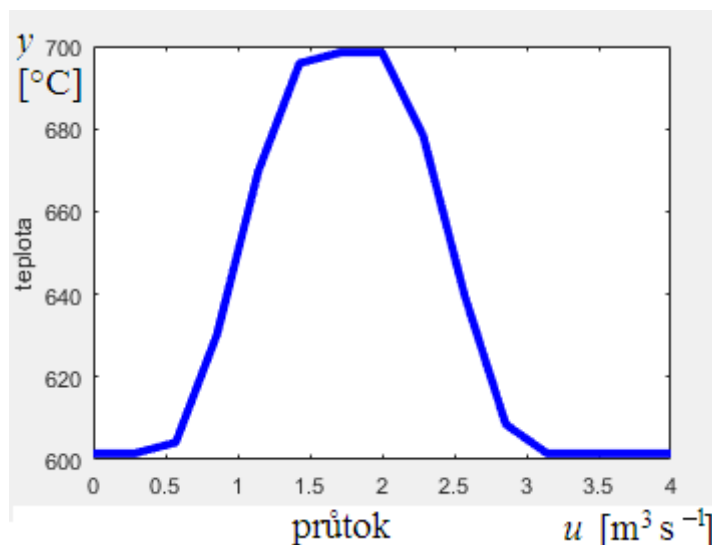
Je třeba určit statickou charakteristiku pece z příkladu 3.4. Mamdaniho fuzzy model pece je dán vztahy (3.27), kde jednotlivé fuzzy hodnoty průtoku vzduchu u [m^3s^{-1}] a teploty pece y [$^{\circ}\text{C}$] jsou na obr. 3.5.

Protože statická charakteristika pece je závislost výstupní teploty y na vstupním průtoku u v ustáleném stavu, tj. je třeba určit závislost ostrých hodnot výstupu (teploty) y na ostrých hodnotách vstupu (průtoku) u .

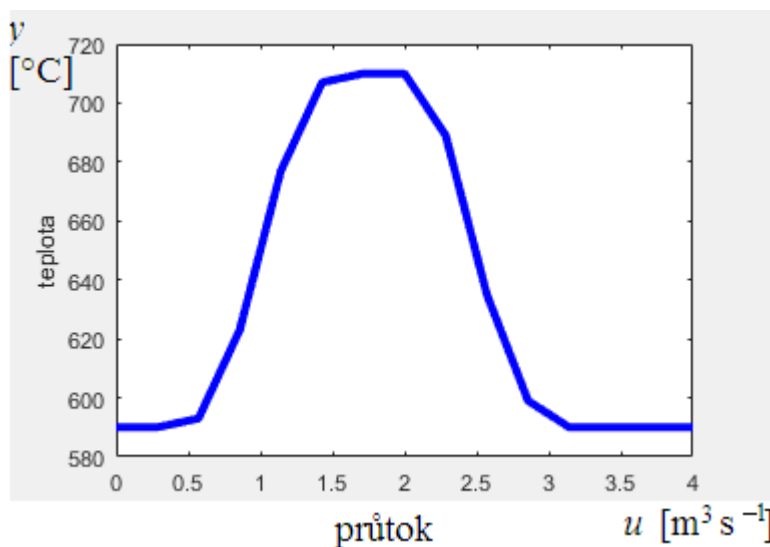
Ruční výpočet by byl příliš pracný (viz příklad 3.4), proto byl použit program MATLAB (Fuzzy Logic Toolbox) a pro Mamdaniho inferenci a defuzzifikaci metodou těžiště (centroid) a metodou bisekce (bisector) byl získán průběh statické charakteristiky pece (obr. 4.8). Vidíme, že v obou případech statická charakteristika pece má extrémální charakter, porovnej s obr. 3.4.

I když statické charakteristiky se vzájemně liší, jejich extrémy vystupují přibližně pro stejnou hodnotu průtoku vzduchu, tj. pro přibližně stejný spalovací poměr, a to je důležité při zajištění přibližně optimálního tepelného výkonu při spalování.

a)



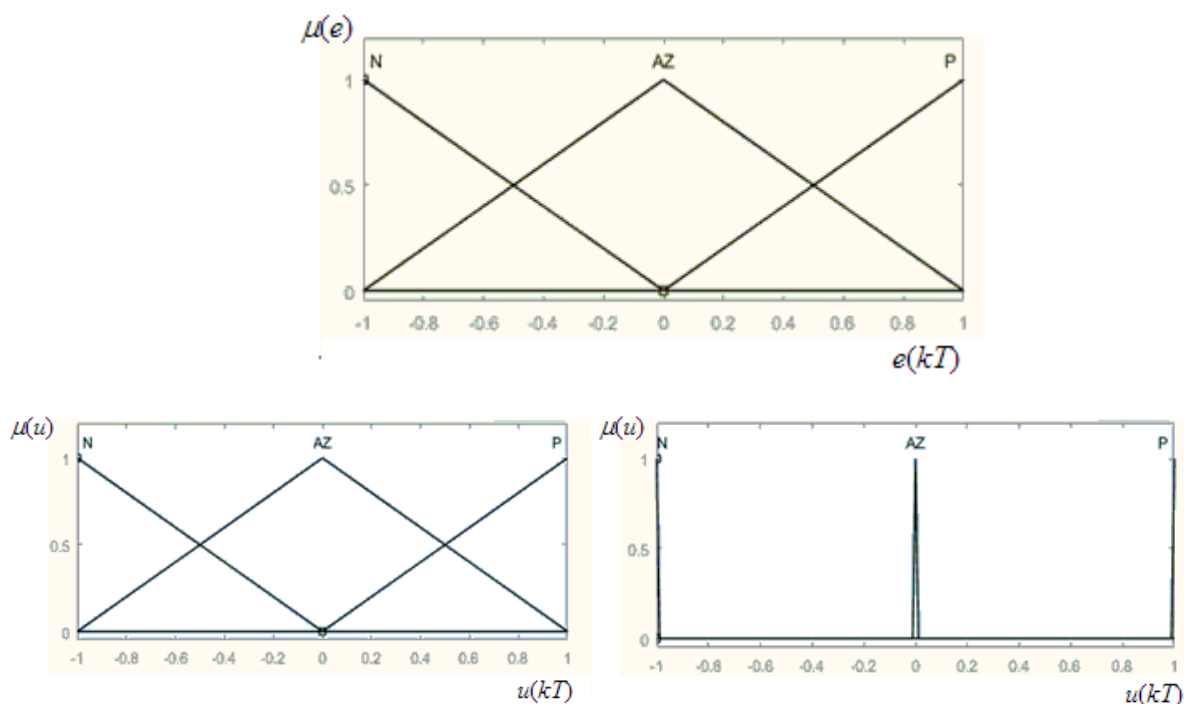
b)



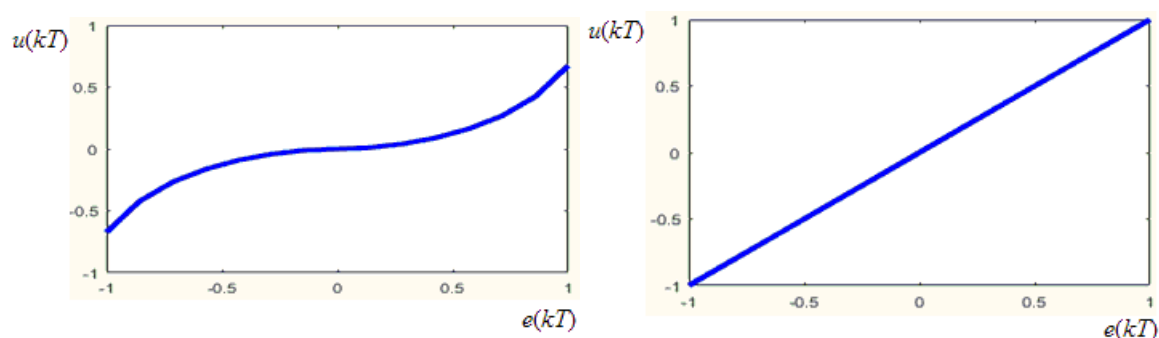
Obr. 4.8 Statická charakteristika pece získána defuzzifikací metodou: a) těžiště, b) bisekce – příklad 4.1

Uvažujme nejjednodušší fuzzy regulátor P (4.1a) pro tři fuzzy hodnoty regulační odchylky $e(kT)$ i akční veličiny $u(kT)$ – N , AZ a P se symetrickým rozložením v intervalu $[-1, 1]$. Protože vstupem fuzzy regulátoru P je pouze regulační odchylka $e(kT)$, řídicí plocha v tomto případě bude jeho statická charakteristika.

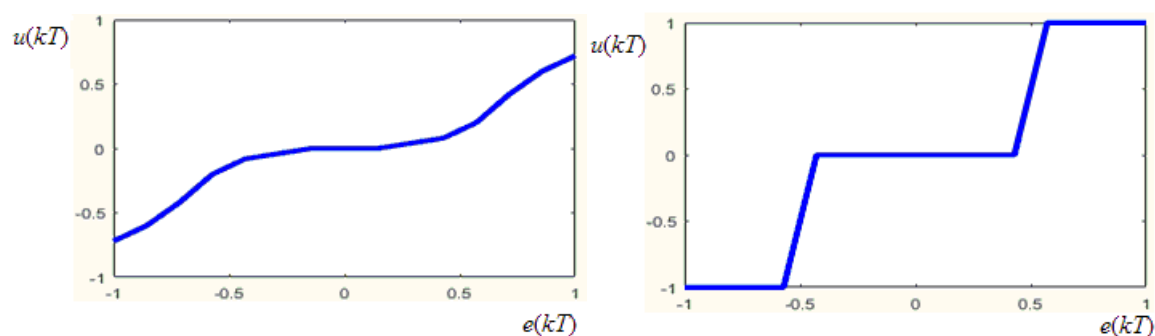
Pomocí programu MATLAB (Fuzzy Logic Toolbox) byly získány statické charakteristiky pro rovnoměrné rozložení trojúhelníkových fuzzy hodnot regulační odchylky $e(kT)$, pro rovnoměrné rozložení trojúhelníkových fuzzy hodnot akční veličiny $u(kT)$ (obr. 4.9 vlevo) a pro symetrické rozložení ostrých hodnot akční veličiny $u(kT)$ (obr. 4.9 vpravo).



Metoda těžiště (centroid)



Metoda bisekce (bisector)



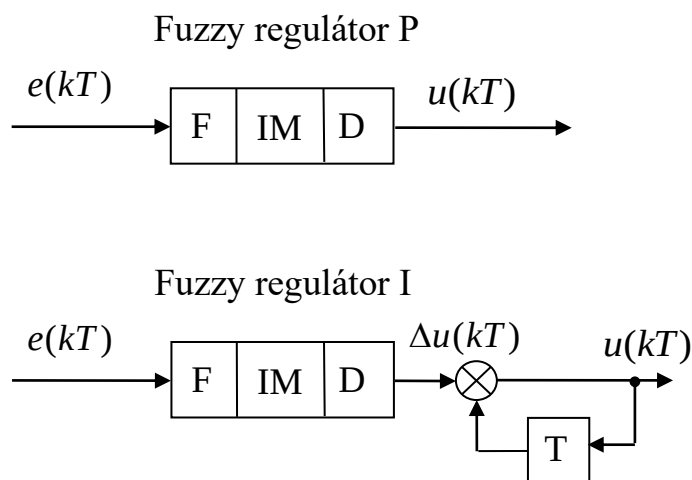
Obr. 4.9 Statické charakteristiky fuzzy regulátoru P

Ostré hodnoty vyjádřené pomocí singletonů byly získány jako mezní trojúhelníkové fuzzy hodnoty. Pro defuzzifikaci byly použity pouze dvě metody, a to metoda těžiště (centroid) a metoda bisekce (bisector), viz obr. 4.9.

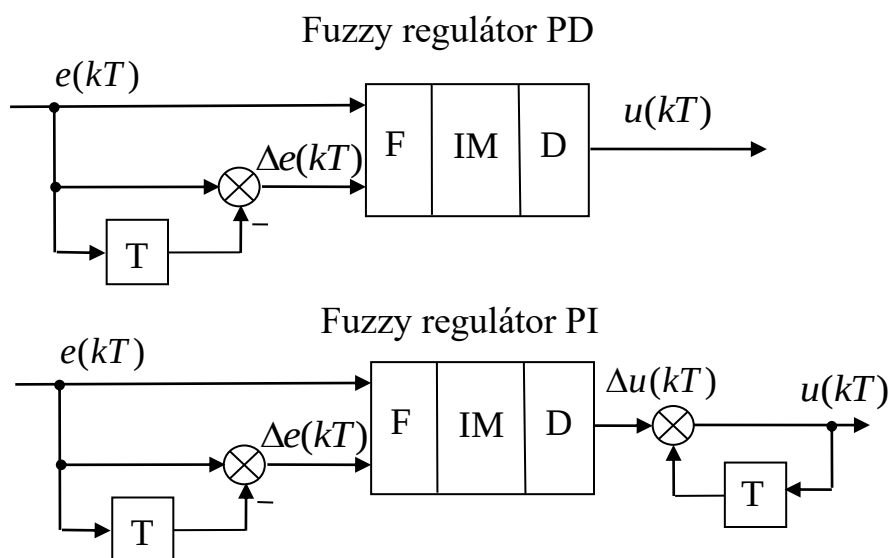
Z obr. 4.9 vyplývá, že vhodnou volbou fuzzy hodnot a metod defuzzifikace lze dosáhnout velmi rozdílných tvarů statických charakteristik – od lineárního až po silně nelineární.

Je zřejmé, že u fuzzy regulátorů zpracovávajících regulační odchylku $e(kT)$ a její přírůstek $\Delta e(kT)$ řídicí plocha může být velmi složitá, a proto obecně návrh a seřízení fuzzy regulátorů vyžaduje velikou zkušenost a intuici.

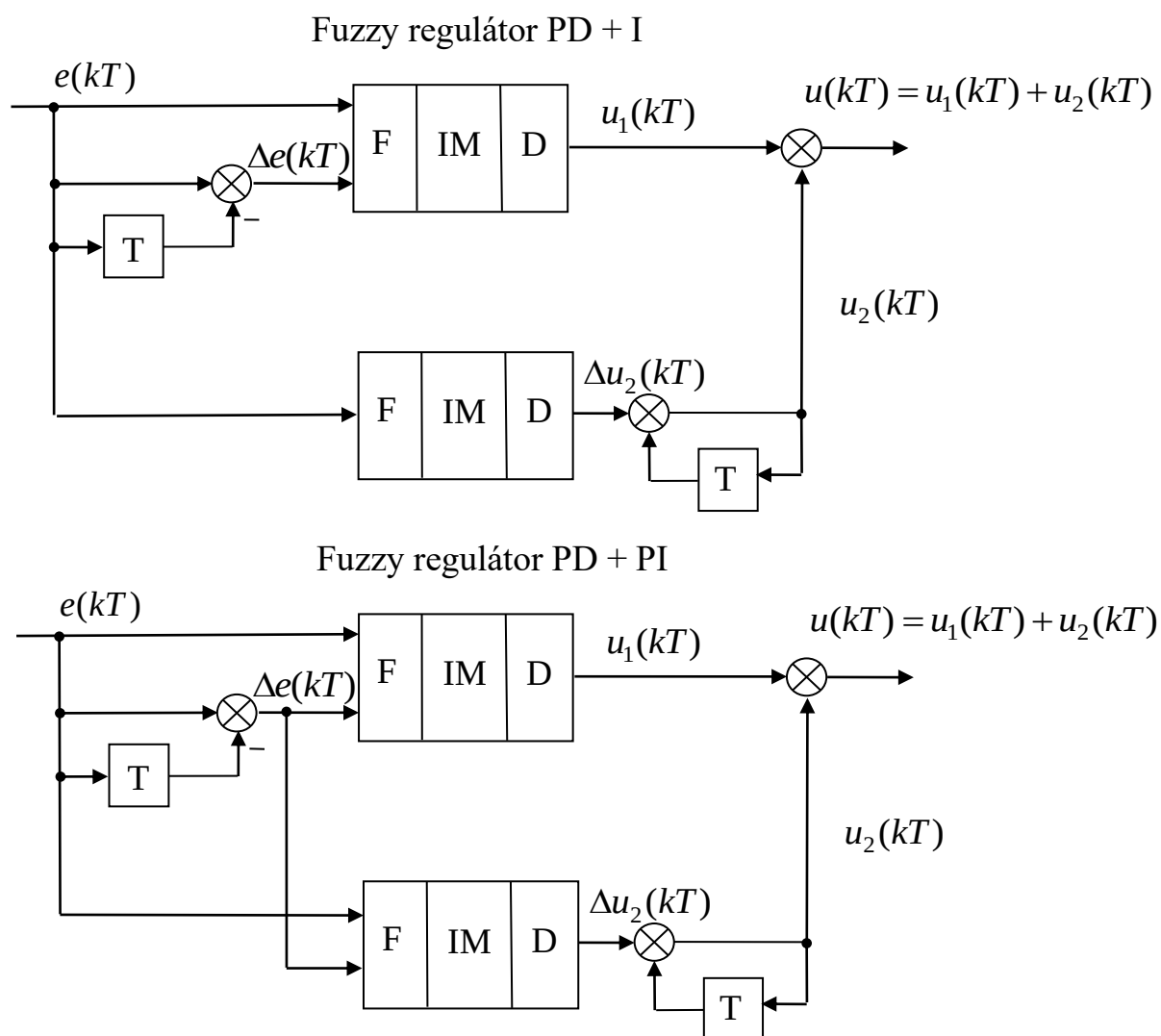
Základní struktury fuzzy regulátorů jsou na obr. 4.10. – 4.12, kde značí: F – fuzzifikace, IM – inferenční mechanismus, D – defuzzifikace, T – zpoždění o jednu vzorkovací periodu T .



Obr. 4.10 Fuzzy regulátory P a I



Obr. 4.11 Fuzzy regulátory PD a PI



Obr. 4.12 Fuzzy regulátory PD + I a PD + PI

Z obr. 4.12 vyplývá, že kombinované fuzzy regulátory PD+I a PD+PI realizují vlastně fuzzy regulátory PID. Jejich struktura může být zjednodušena tím, že u fuzzy regulátoru PD se výstupní fuzzy hodnoty akční veličiny $u(kT)$ považují také za její přírůstky $\Delta u(kT)$, viz příklad 4.3.

Pokud je důležité pouze odstranění škodlivého vlivu poruchové veličiny $v(t)$ působící před soustavou, je vhodné zastoupit přírůstek regulační odchylky $\Delta e(kT)$ záporným přírůstkem regulované veličiny, tj. $-\Delta y(kT)$.

U fuzzy regulátorů stavitelné parametry v nejjednodušším případě se uvažují jako váhy (zesílení) jeho vstupních veličin $e(kT)$ a $\Delta e(kT)$ a výstupních veličin $u(kT)$, případně $u_1(kT)$ a $u_2(kT)$, viz obr. 4.10 – 4.12 a příklady 4.2 a 4.3.

Příklad 4.2

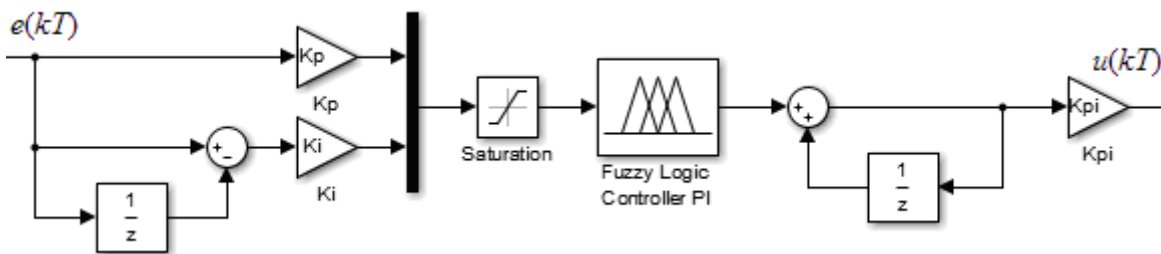
Je třeba navrhnout a seřadit fuzzy regulátor PI pro regulovanou soustavu

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s},$$

kde $k_1 = 1$ je koeficient přenosu, $T_1 = 1$ s – časová konstanta, $T_d = 1$ s – dopravní zpoždění.

Řešení:

Použijeme program MATLAB/Simulink a Fuzzy Logic Toolbox, jazykový model regulátoru (tab. 4.2) a rozložení fuzzy hodnot v souladu s obr. 4.3 s tím, že akční veličinu budeme považovat za přírůstky $\Delta u(kT)$.



Obr. 4.13 Podrobné blokové schéma fuzzy regulátoru PI v programu Simulink – příklad 4.2

Pro srovnání kvality regulace byl použit lineární (klasický) regulátor PI s přenosem

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right),$$

kde K_P je zesílení regulátoru, T_I – integrační časová konstanta. Regulátor byl seřízen metodou požadovaného modelu pro relativní překmit okolo 5 %. Pro optimální hodnoty lineárního regulátoru PI platí (* znamená optimální nebo doporučený)

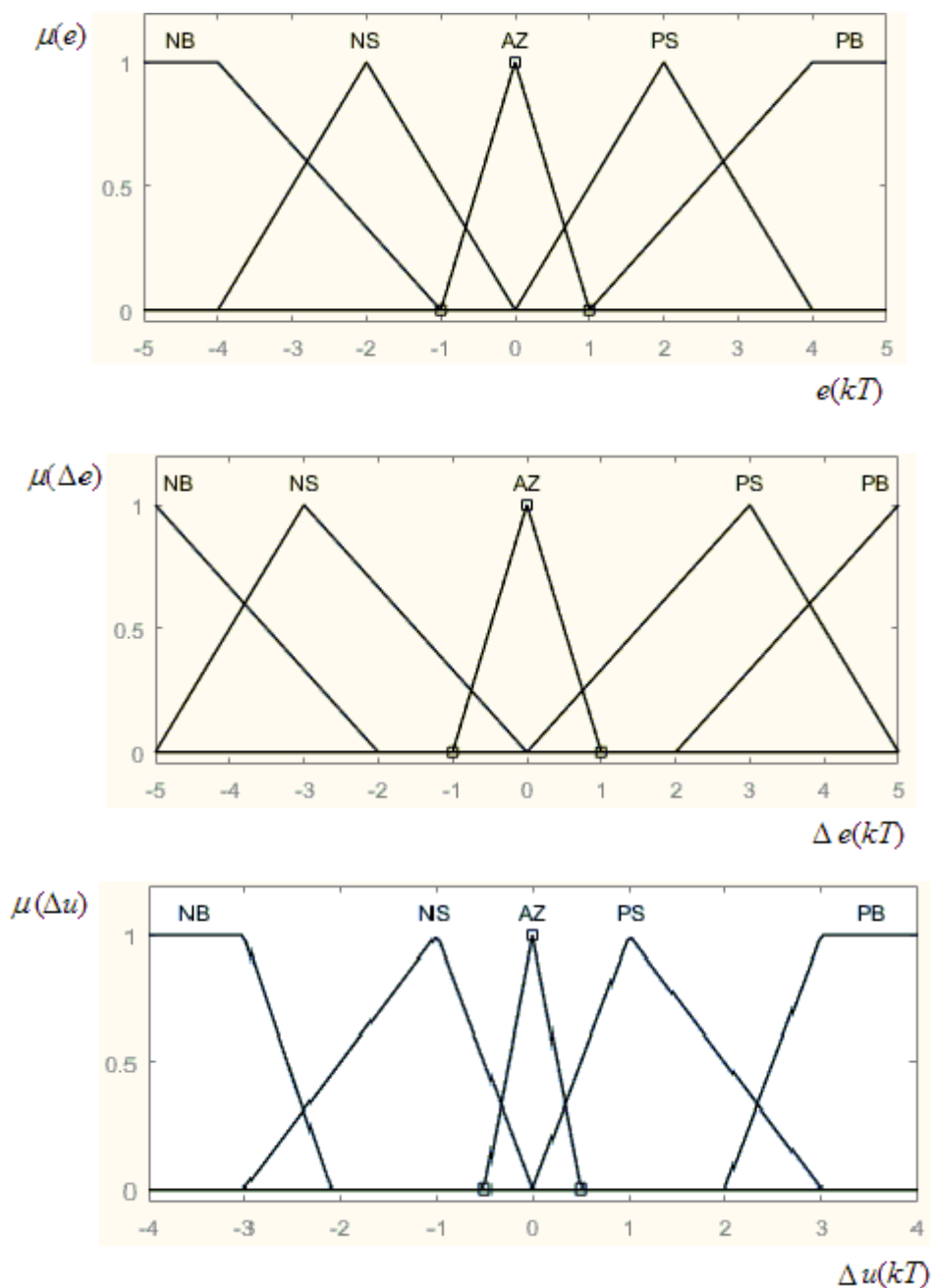
$$K_P^* = \frac{T_1}{2k_1 T_d} = 0,5; \quad T_I^* = T_1 = 1 \text{ s}.$$

V tomto případě seřízení metodou požadovaného modelu a metodou SIMC je shodné.

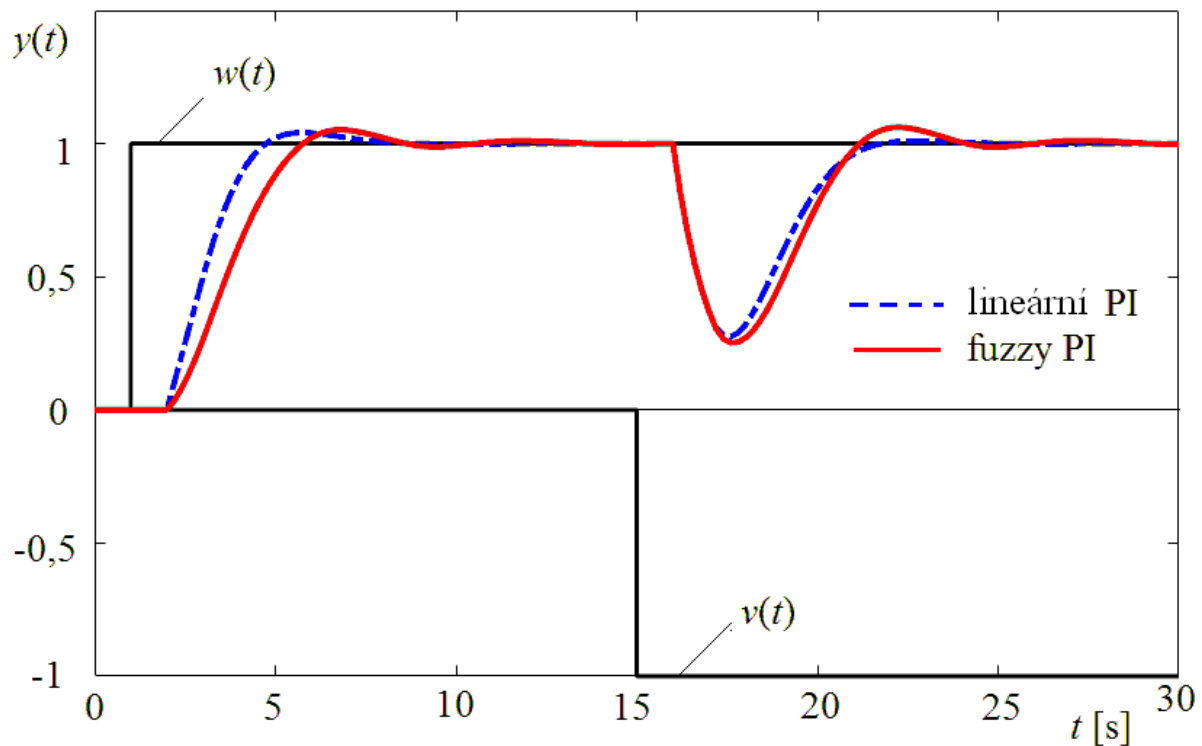
Pro nastavené rozložení fuzzy hodnot $e(kT)$, $\Delta e(kT)$, $\Delta u(kT)$, $T = 0,2$ s (obr. 4.14), pro Mamdaniho inferenci experimentálně metodou „pokus – omyl“ a defuzzifikaci metodou těžiště (centroid) byly získány hodnoty stavitelných parametrů fuzzy regulátoru PI: $K_p = 0,5$; $K_i = 2,8$; $K_{pi} = 0,1$, viz obr. 4.13.

Podobným způsobem pro Larsenovu inferenci byly získány hodnoty stavitelných parametrů: $K_p = 0,5$; $K_i = 4$; $K_{pi} = 0,15$, viz obr. 4.13.

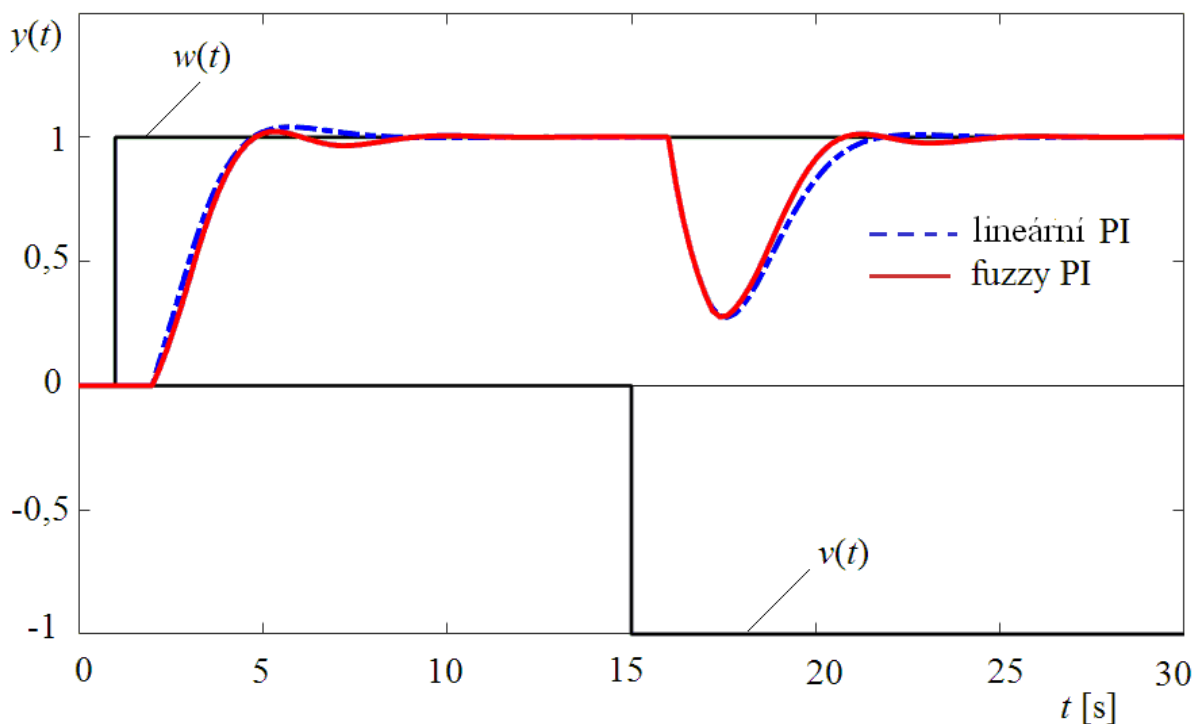
Skokové odezvy lineárního a fuzzy regulátoru PI pro Mamdaniho inferenci jsou na obr. 4.15 a pro Larsenovu inferenci na obr. 4.16.



Obr. 4.14 Rozložení fuzzy hodnot veličin $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $\Delta u(kT)$ pro fuzzy regulátor PI – příklad 4.2



Obr. 4.15 Skokové odezvy regulačního obvodu s lineárním a fuzzy regulátorem PI pro Mamdaniho inferenci – příklad 4.2



Obr. 4.16 Skokové odezvy regulačního obvodu s lineárním a fuzzy regulátorem PI pro Larsenovu inferenci – příklad 4.2

I když se zdá, že fuzzy regulátory dávají horší kvalitu regulace než odpovídající lineární regulátory, nemusí to být pravda. U fuzzy regulátorů nebyly využity všechny možnosti jejich seřízení. Nebyla např. uvažována změna rozložení fuzzy hodnot $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $\Delta u(kT)$ ani jejich počty. Mohly být použity různé s- a t-normy jak pro inferenci, tak i pro agregaci. Rovněž velký vliv na kvalitu regulace a její vlastnosti má metoda defuzzifikace atd.

Je zřejmé, že pro lineární soustavy použití fuzzy regulátorů není vhodné, protože lineární regulátory dovedeme snadno seřídít a v případě potřeby vhodně doladit.

Příklad 4.3

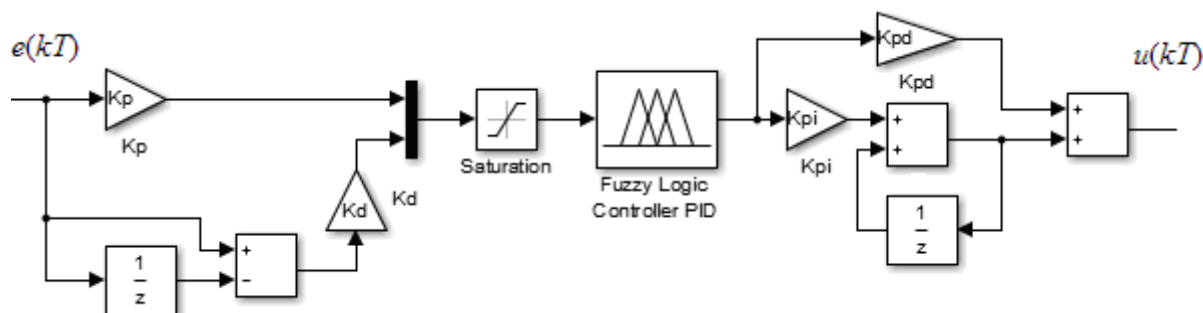
Pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1(1-\tau s)}{(T_1's + 1)(T_2's + 1)(T_3's + 1)} e^{-T_d's}$$

je třeba navrhnout a seřídít fuzzy regulátor PID pro parametry soustavy: $k_1 = 1$, $T_1' = 8s$; $T_2' = 6s$, $T_3' = 4s$, $\tau = 2s$ a $T_d' = 1s$.

Řešení:

Podobně jako v předchozím příkladě 4.2 použijeme program MATLAB/Simulink a Fuzzy Logic Toolbox. Budeme uvažovat strukturu fuzzy regulátoru PID podle obr. 4.17.



Obr. 4.17 Podrobné blokové schéma fuzzy regulátoru PID v programu Simulink – příklad 4.3

Z důvodu jednoduchosti použijeme rozložení fuzzy hodnot $e(kT)$, $\Delta e(kT)$ a $\Delta u(kT)$ v souladu s obr. 4.14 pro $T = 0,2s$ a fuzzy hodnoty pro $\Delta u(kT)$ budeme uvažovat i za fuzzy hodnoty $u(kT)$. To, že se jedná o různé veličiny, je uvažováno ve stavitelných parametrech K_{pi} a K_{pd} , viz obr. 4.17.

Pro srovnání s klasickou regulací byl použit lineární standardní regulátor PID s přenosem

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right),$$

kde T_D je derivační časová konstanta.

Pro seřízení byla použita metoda požadovaného modelu pro relativní překmit okolo 5 %, co rovněž odpovídá seřízení metodou SIMC.

Přenos soustavy 3. řádu byl na základě „pravidla poloviny“ upraven na 2. řád

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_d s},$$

kde

$$T_1 = T_1' = 8 \text{ s},$$

$$T_2 = T_2' + \frac{T_3'}{2} = 8 \text{ s} = T_1,$$

$$T_d = T_d' + \frac{T_3'}{2} + \tau = 5 \text{ s}.$$

V souladu s metodou požadovaného modelu se dostane

$$K_P^* = \frac{T_1 + T_2}{2k_1 T_d} = 1,6; \quad T_I^* = T_1 + T_2 = 16 \text{ s}; \quad T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 4 \text{ s}.$$

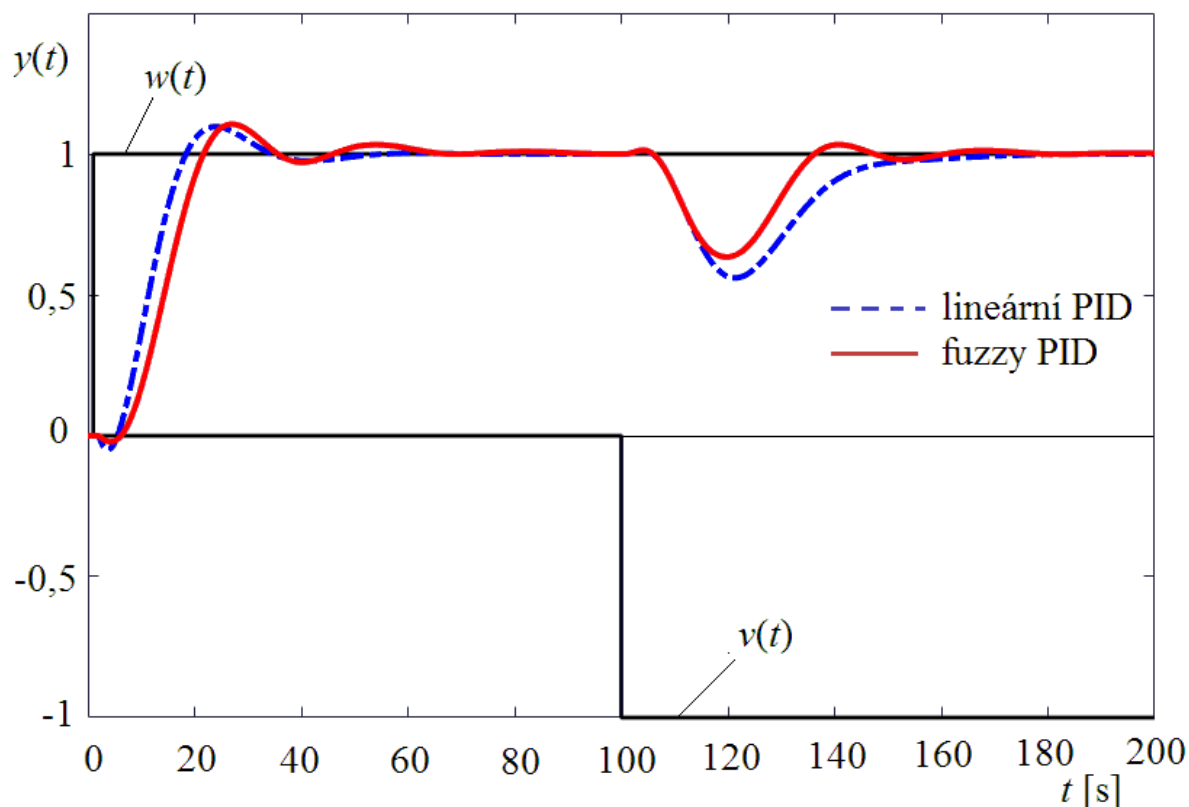
Seřízení fuzzy regulátoru PID bylo provedeno experimentální metodou „pokus – omyl“.

Pro Mamdaniho inferenci byly získány hodnoty stavitelných parametrů: $K_p = 0,11$; $K_d = 6$; $K_{pd} = 2,8$ a $K_{pi} = 0,08$.

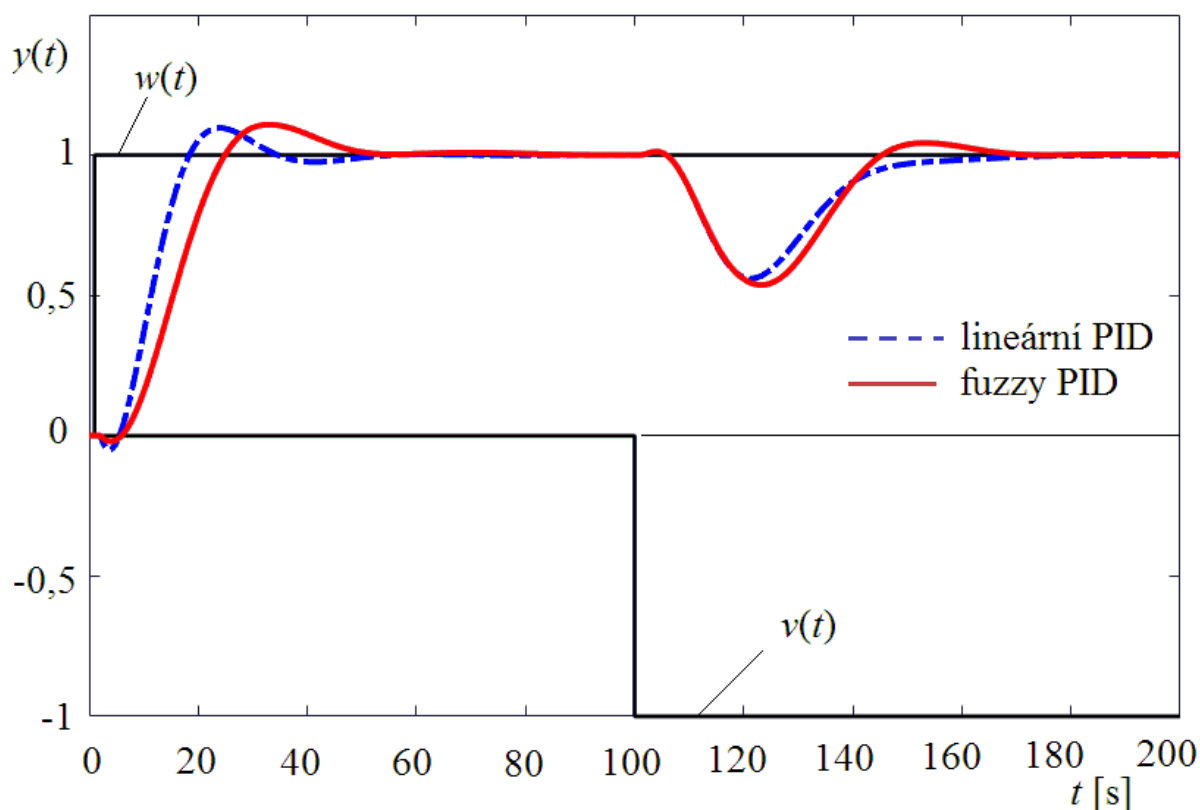
Skokové odezvy jsou na obr. 4.18.

Podobně pro Larsenovu inferenci byly získány hodnoty stavitelných parametrů: $K_p = 0,11$; $K_d = 6$; $K_{pd} = 3,2$ a $K_{pi} = 0,11$. Skokové odezvy jsou na obr. 4.19.

I když z hlediska odstranění škodlivého vlivu poruchové veličiny v je fuzzy regulátor PID s Mamdaniho inferencí lepší než lineární regulátor PID, nemusí to platit obecně, protože lineární regulátor PID mohl být seřízen vhodnější metodou. A proto i v tomto případě platí stejné závěry jako v předchozím příkladě 4.2.



Obr. 4.18 Skokové odezvy regulačního obvodu s lineárním a fuzzy regulátorem PID pro Mamdaniho inferenci – příklad 4.3



Obr. 4.19 Skokové odezvy regulačního obvodu s lineárním a fuzzy regulátorem PID pro Larsenovu inferenci – příklad 4.3

Závěr

Problematika fuzzy množin a jejich aplikace v nejrůznějších vědních oblastech patří do tzv. Soft Computing. Je to přístup, který řeší složité problémy při neurčitých a nepřesných vstupech a podmínkách a který je charakterizován třemi technikami:

- umělými neuronovými sítěmi,
- fuzzy logikou,
- stochastickými heuristickými metodami (např. genetickými algoritmy).

Je tedy zřejmé, že učební texty se pouze dotkly základních problémů fuzzy logiky a jejímu využití při modelování jednoduchých rozhodovacích problémů v aplikaci na jednorozměrovou regulaci. Vzhledem k pracnosti ručních výpočtů byly pro simulaci použity programy MATLAB/Simulink a Fuzzy Logic Toolbox. Protože se jedná pouze o základní studijní materiál, nebyl řešen problém stability a robustnosti regulačních obvodů s fuzzy regulátorem. Tato problematika je velmi složitá a teoreticky náročná, a proto se doporučuje ověřovat stabilitu a robustnost navržených regulačních obvodů s fuzzy regulátorem číslicovou simulací.

Je třeba si uvědomit, že i když fuzzy regulátory se mohou chovat jako lineární, jejich struktura jim umožňuje přizpůsobit své vlastnosti nelineárním vlastnostem soustavy, a tím dosáhnout vyšší kvality řízení. Vyžaduje to však velmi dobré znalosti a praktické zkušenosti. Velkým problémem je seřizování fuzzy regulátorů a jejich udržování v provozu. U lineárních, tj. klasických regulátorů tato činnost je jednoduchá a může ji vykonávat běžná obsluha. Proto použití fuzzy řízení je oprávněné pouze u složitých zařízení a procesů, kde klasické metody a přístupy nejsou úspěšné.

Literatura

- BABUŠKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. Springer Science + Business Media, New York, 1998, 268 p., ISBN 978-94-011-4868-9
- DONLAGIĆ, D. ET AL. *Osnove snovanja mehkih (fuzzy) regulacij*. Univerza v Mariboru, Maribor, 1994, 168 str., ISBN 86-435-0050-X
- DRIANKOV, D., HELLENDORRN, H. REINFRANK, M. *An Introduction to Fuzzy Control*. Second Edition. Springer – Verlag, Berlin, 1993, 329 p., ISBN 978-3-642-08234-4
- JANTZEN, J. *Foundation of Fuzzy Control*. John Wiley & Sons, Chichester, 2007, 209 p., ISBN 978-0-470-0296-3
- JURA, P. *Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování*. Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2003, 132 str., ISBN 80-214-2261-0
- KANDEL, A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. Addison – Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1986, 274 p., ISBN 0-201-11752-5
- LEE, K. H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2005, 337 p., ISBN 3-540-22988-4
- MAMDANI, E. H., ASSILIAN, S. An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. *International Journal Man-Machine Studies*, 7/1975, pp. 1-13
- NAVARA, M., OLŠÁK, P. *Základy fuzzy množin*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002, 136 str., ISBN 80-01-02585-3
- NOVÁK, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. Druhé, upravené vydání. SNTL, Praha, 1990, 296 str., ISBN 80-03-00325-3
- NOVÁK, V. *Základy fuzzy modelování*. BEN – technická literatura, Praha, 2000, 176 str., ISBN 80-7300-009-1
- NOVÁK, V., PERFILIEVA, I., DVOŘÁK, A. *Insight into Fuzzy Modeling*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2016, 247 p., ISBN 978-1-119-1931-97
- PIEGAT, A. *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 1999, 678 str., ISBN 83-87674-14-1
- PIVOŇKA, P. *Číslicová a řídicí technika*. VUT v Brně, 2003, 151 str.
- PIVOŇKA, P. *Vyšší formy řízení*. VUT v Brně, 2003, 74 str.
- POKORNÝ, M. *Umělá inteligence v modelování a řízení*. BEN – technická literatura, Praha, 1996, 192 str., ISBN 80-901984-4-9

- ŠATÁNEK, J. *Aplikace fuzzy algoritmů při řízení technologických procesů*. Disertační práce (školitel A. Víteček), VŠB – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 1999, 131 str.
- ŠVARC, I., MATOUŠEK, R., ŠEDA, M., VÍTEČKOVÁ, M. *Automatické řízení*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2011, 349 str.
- VYSOKÝ, P. *Fuzzy řízení*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997, 131 str., ISBN 80-01-01429-8
- VÍTEČEK, A. Jednoduché fuzzy algoritmy regulace. In: *Zborník referátov z konferencie katedier technickej kybernetiky a automatizácie strojních fakult ČSSR*. Košice, September 1980, str. 70 -78.
- VÍTEČEK, A. Rozmazané algoritmy řízení. In: *Sborník 2. mezinárodní vědecké konference VŠB. Ostrava*, září 1980, sekce 25, str. 12
- VÍTEČEK, A. Design of the Simple Control Algorithms on the Basis of the Fuzzy Approach. *BUSEFAL*, 15/1983, pp. 39 – 42
- VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Základy automatické regulace*. 2. rozšířené vydání (2. dotisk). Ostrava, 2019, ISBN 978-80-248-1924-2
- YAGER, R. R., FILEV, D. P. *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. John Wiley&Sons, 1994, 408p., ISBN 978-0-471-01761-5
- ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8/1965, pp. 338-353
- ZIMMERMANN, H. J. *Fuzzy Sets Theory and Its Applications*. Fourth Edition, Springer Science + Business Media, New York, 2001, 514 p., ISBN 978-94-010-3870-6
- ZHANG, H., LIU, D. *Fuzzy Modeling and Fuzzy Control*. Birkhäuser, Boston, 2006, 414 p., ISBN 100-8176-4539-7

Autoři:	Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc. Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.
Katedra:	Automatizační techniky a řízení
Název:	Nelineární systémy. Fuzzy řízení
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2020, 1. vydání
Počet stran:	61
Vydavatel:	VŠB – Technická univerzita Ostrava 17. listopadu 15/2172 708 33 Ostrava - Poruba

ISBN 978-80-248-4414-5

On-line