VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Fakulta strojní

NELINEÁRNÍ SYSTÉMY

ANALÝZA

Miluše Vítečková

Antonín Víteček

Ostrava 2019

Lektor: Prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.

Copyright ©: Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.
Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.

NELINEÁRNÍ SYSTÉMY. ANALÝZA
ISBN 978-80-248-4302-5
On-line

Předmluva

Učební texty „Nelineární systémy“ jsou věnovány základním vlastnostem a analýze nelineárních dynamických systémů z hlediska automatického řízení. Hlavní důraz je kladen na jednoduchost a názornost. Texty obsahují plně řešené příklady, které tvoří nedílnou součást probírané teorie. Předpokládá se znalost teorie automatického řízení v rozsahu skript: Vítečková, M., Víteček, A. *Základy automatické regulace.* 2. rozšířené vydání. Ostrava, 2014, příp. jiných podobných učebních textů.

Vzhledem k tomu, že učební texty pojednávají o základech nelineárních systémů, nejsou v nich uváděny přesné důkazy ani odkazy na použitou literaturu. Pro prohloubení a rozšíření problematiky nelineárních systémů jsou doporučeny níže uvedené publikace:

ČELIKOVSKÝ, M. *Nelineární systémy*. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006

HUBA, M. *Nelineárne systémy*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2003

KHALIL, H. *Nonlinear systems.* Third edition. Prentice-Hall, New Jersey, 2002

NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů.* Montanex, Ostrava, 1999

RAZÍM, M., ŠTECHA, J. *Nelineární systémy.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997

SASTRY, S. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control.* Springer-Verlag, New York, 1999

Učební texty jsou určeny pro studenty, kteří se zabývají teorií automatického řízení.

Obsah

Předmluva ... 3
Obsah ... 4
Seznam základního značení a symbolů ... 5
1 Úvod ... 11
1.1 Systémy a jejich základní vlastnosti ... 11
1.2 Některé zvláštnosti ve vlastnostech nelineárních systémů ... 16
1.3 Nelineární systémy řízení ... 28
2 Matematické modely nelineárních systémů ... 30
2.1 Spojité stavové modely ... 30
2.1.1 Základní spojité stavové modely ... 30
2.1.2 Vlastnosti rovnovážných stavů a mezních cyklů ... 33
2.2 Klasické modely nelineárních systémů ... 42
2.2.1 Základní nelinearity ... 43
2.2.2 Základní zapojení statických nelinearit ... 53
2.3 Analýza nelineárních dynamických systémů ... 63
2.3.1 Analýza ve stavové a fázové rovině ... 65
2.3.2 Nepřímá Ljapunovova metoda ... 91
2.3.3 Přímá Ljapunovova metoda ... 97
2.3.4 Kruhové kritérium stability ... 112
2.3.5 Popovovo kritérium stability ... 133
2.3.6 Metoda ekvivalentního přenosu ... 143
2.3.7 Experimentální identifikace soustav metodou relé ... 158
Literatura ... 169

Seznam základního značení a symbolů

$a, a_i, b, b_i, c, d\ldots$ konstanty

a_e amplituda regulační odchylky

a_i koeficienty levé strany diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, koeficienty charakteristického mnohočlenu

a_u amplituda první harmonické

a_M amplituda kmitů mezního cyklu

$A(\omega) = \mathrm{mod}G(\mathrm{j}\omega) = \left|G(\mathrm{j}\omega)\right|$ modul kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $A(\omega)$ = amplitudová kmitočtová charakteristika

$\boldsymbol{A}$ matice systému (dynamiky) řádu n [typu (n, n), $(n\times n)$]

b_i koeficienty pravé strany lineární diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu v čitateli přenosu

b koeficient viskózního tření

B konstanta

$\boldsymbol{B}$ matice vstupu typu (n, r)

$\boldsymbol{C}$ matice výstupu typu (m, n)

C integrační konstanta

$\boldsymbol{D}$ matice převodu typu (m, r)

e regulační odchylka

$\boldsymbol{e}$ vektor regulačních odchylek dimenze n

$e(\infty)$ trvalá regulační odchylka

E energie

$E(s)$ L- obraz regulační odchylky

f obecná funkce

$\boldsymbol{f}$ vektorová obecně nelineární funkce dimenze n

$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ kmitočet

$g(t)$ obecná nelineární funkce, impulsní funkce

g gravitační zrychlení

$\boldsymbol{g}$ vektorová obecně nelineární funkce

$G(s)$ přenos

$G_M(s)$ přenos měřicího členu

$G_R(s)$ přenos regulátoru

$G_S(s)$ přenos soustavy

$G_t(s)$ transformovaný přenos

$G(\mathrm{j}\omega) = P(\omega) + \mathrm{j}Q(\omega) = A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ kmitočtový přenos, grafické vyjádření $G(\mathrm{j}\omega)$ = amplitudofázová kmitočtová charakteristika

$G_m(\mathrm{j}\omega) = P_m(\omega) + \mathrm{j}Q_m(\omega)$ Popovova charakteristika

$G_N(a_e)$ ekvivalentní přenos

$h(t)$ přechodová funkce

$\boldsymbol{h}$ vektorová obecně nelineární funkce

$\boldsymbol{H}$ Hurwitzova matice

$\boldsymbol{I}$ jednotková matice

$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ imaginární jednotka

J moment setrvačnosti

k_i koeficient přenosu (zisk)

k_t zesílení pro transformaci

K konstanta, zesílení lineárního regulátoru

K_P zesílení regulátoru, váha proporcionální složky regulátoru

K_A zesílení u Ajzermanovy hypotézy

K_K zesílení u Kalmanovy hypotézy

K_H zesílení pro Hurwitzův sektor

l délka

m stupeň mnohočlenu v čitateli přenosu, dimenze výstupního signálu $\boldsymbol{y}$, řád derivace vstupního signálu, hmotnost

m_0 moment tření

n stupeň charakteristického mnohočlenu, stupeň mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, dimenze vektoru stavových proměnných $\boldsymbol{x}$, řád systému

N charakteristický mnohočlen, mnohočlen ve jmenovateli přenosu (kořeny = póly)

$\boldsymbol{P}$ reálná symetrická kladně definitní matice řádu n [typu (n, n), $(n \times n)$]

$P(\omega) = \mathrm{Re}G(\mathrm{j}\omega)$ reálná část kmitočtového přenosu

$P_m(\omega)$ reálná část u Popovovy charakteristiky

$Q(\omega) = \mathrm{Im}G(\mathrm{j}\omega)$ imaginární část kmitočtového přenosu

$Q_m(\omega)$ imaginární část u Popovovy charakteristiky

$\boldsymbol{Q}$ reálná symetrická kladně definitní matice řádu n [typu (n, n), $(n \times n)$]

r dimenze vstupního signálu $\boldsymbol{u}$, rádius vektor (průvodič) u polárních souřadnic

R množina reálných čísel

$s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ komplexní proměnná, nezávisle proměnná v Laplaceově transformaci

s_i póly lineárního dynamického systému = kořeny mnohočlenu $N(s)$, vlastní čísla matice $\boldsymbol{Q}$

t (spojitý) čas

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ perioda

T_d dopravní zpoždění

T_D derivační časová konstanta

T_I integrační časová konstanta

T_i (setrvačná) časová konstanta

T_p perioda ustálených kmitů

u akční veličina, řízení, vstupní veličina (vstup), napětí

$\boldsymbol{u}$ vektor vstupních veličin (vstup) dimenze r

$U(s)$ L-obraz akční veličiny

v, v_1 poruchová veličina (porucha)

$V(\boldsymbol{x})$ Ljapunovova funkce

w žádaná veličina

$W(s)$ L-obraz žádané veličiny

$\boldsymbol{w}$ vektor žádaných veličin (dimenze m)

x stavová, fázová veličina (stav, fáze), obecný signál

$\boldsymbol{x}$ vektor stavových (fázových) veličin (stav, fáze) dimenze n

$\boldsymbol{x}_e$ rovnovážný stav

y regulovaná veličina, výstupní veličina (výstup)

$Y(s)$ L-obraz regulované veličiny

$\boldsymbol{y}$ vektor výstupních veličin dimenze m

$\boldsymbol{z}$ vektor (pomocných) stavových veličin

$\boldsymbol{z}_e$ rovnovážný stav

α sklon přímky, úhel vychýlení kyvadla, reálná konstanta, úhel sklonu tečny stavové trajektorie

$\alpha = \mathrm{Re}\, s$ reálná část komplexní proměnné s

β sklon přímky, konstanta

$\delta(\varepsilon)$ oblast počátečních stavů

Δ přírůstek, konstanta

ε kladné číslo, oblast stavů

$\eta(t)$ Heavisideův jednotkový skok

$\omega = 2\pi f$ úhlový kmitočet, úhlová rychlost

$\omega = \mathrm{Im}\, s$ imaginární část komplexní proměnné s

ω_M úhlový kmitočet kmitů mezního cyklu

$\varphi(\omega) = \arg G(\mathrm{j}\omega)$ fáze kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $\varphi(\omega)$ = fázová kmitočtová charakteristika

φ_u fázové zpoždění první harmonické

φ úhel (argument) u polárních souřadnic

λ reálná konstanta

ξ koeficient poměrného tlumení

τ čas

Horní indexy

* optimální, doporučený

–1 inverzní

T transponovaný

Dolní indexy

w žádaný

t transformovaný, transformace

0 počáteční hodnota

Symboly

$\dot{}$ (totální) derivace podle času

$\wedge$ odhad

$\|\cdot\|$ norma (zobecněná vzdálenost)

$|\cdot|$ absolutní hodnota

Relační znaménka

$\approx$ přibližně rovno

$\doteq$ po zaokrouhlení rovno

$\triangleq$ korespondence mezi originálem a obrazem

$\Rightarrow$ implikace

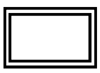
$\Leftrightarrow$ ekvivalence

$\wedge$ a zároveň, konjunkce

Grafické značky

$\times$ (jednonásobný) pól

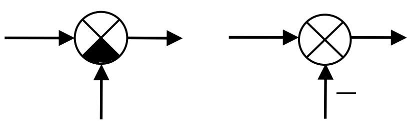
⋇ dvojnásobný pól

 nelineární systém (prvek, člen)

 lineární systém (prvek, člen)

$\longrightarrow$ jednorozměrový signál (veličina)

$\boldsymbol{\longrightarrow}$ mnohorozměrový signál (veličina)



součtový člen (vyplněný segment označuje znaménko minus)

Zkratky

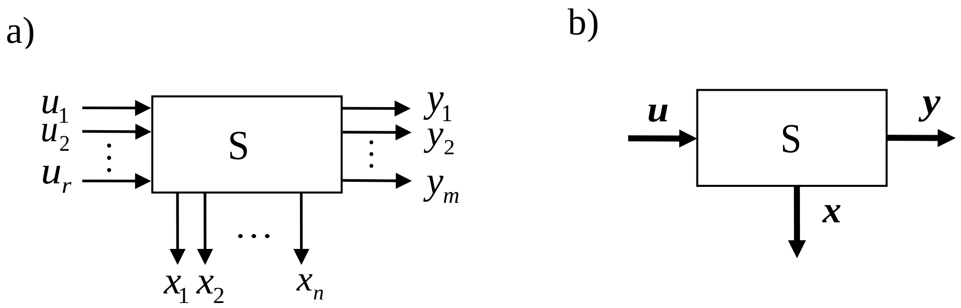
arg	argument
asign	aproximace sign
const	konstanta
det	determinant
dim	dimenze (rozměr)
grad	gradient
Im	imaginární, imaginární část
lim	limita
Re	reálný, reálná část
sat	nasycení
sign	znaménko, znaménková funkce

1 Úvod

1.1 Systémy a jejich základní vlastnosti

Prostředí, ve kterém žijeme (tj. vše, co nás obklopuje), tvoří ***objektivní realitu***. Je zřejmé, že objektivní realita ovlivňuje náš život, a proto je důležité poznávat a znát její nejdůležitější vlastnosti. Většinou se soustředíme na její určité části, které jsou z ní vyčleněny a které budeme dále nazývat ***systémy***.

Systémy (S) ovlivňují objektivní realitu svými ***výstupy*** $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2,\ldots, y_m]^T$ a objektivní realita ovlivňuje zase tyto systémy pomocí ***vstupů*** $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2,\ldots, u_r]^T$, viz obr. 1.1. Vnitřní podmínky, ve kterých se systém nalézá, jednoznačně vyjadřují ***stavy*** $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2,\ldots, x_n]^T$.



Obr. 1.1 Schéma systému: a) složkové, b) vektorové

Z obr. 1.1 vidíme, že vstupy, výstupy a stavy můžeme vyjádřit složkově $u_1, u_2,\ldots, u_r$; $y_1, y_2,\ldots, y_m$ a $x_1, x_2,\ldots, x_n$ nebo kompaktně vektorově $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}$.

Systémy, u kterých vstup u a výstup y jsou skaláry, jsou ***jednorozměrové,*** v opačném případě jsou ***mnohorozměrové***.

Abychom mohli využít kladných vlastností systémů a současně potlačit, příp. odstranit jejich záporné vlastnosti, musíme důkladně poznat a znát tyto jejich vlastnosti. Nejlepší cestou, jak tyto vlastnosti poznat, je mít k dispozici jejich ***matematický model***. S matematickým modelem lze pak provádět nejrůznější experimenty bez rizika poškození nebo zničení skutečného systému. Experimentování s modelem se nazývá ***simulace***.

Získáním adekvátního matematického modelu daného systému se zabývá ***identifikace***, která může být ***experimentální*** a ***analytická***. U nelineárních systémů se nejčastěji analytickou cestou získá matematický model a jeho parametry se upřesní experimentálně.

Všechny činnosti s modelem, tj. tvorba a získávání modelu (identifikace), experimentování s modelem (simulace), upřesňování a ověřování modelu (verifikace a validace) se nazývají ***modelováním***.

Velmi často budeme pojmy systém a model vzájemně zaměňovat, samozřejmě pouze v těch případech, kdy nemůže dojít k neporozumění.

Uvažujeme ***jednorozměrový*** (tj. s jedním vstupem a jedním výstupem) ***systém*** popsaný obecně obyčejnou nelineární diferenciální rovnicí

$$g[y^{(n)}(t),\ldots,\dot{y}(t),y(t),u^{(m)}(t),\ldots,\dot{u}(t),u(t)]=0\,. \tag{1.1a}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}(t)&=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\ y^{(i)}(t)=\frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i};\ i=2,3\ldots,n,\\ \dot{u}(t)&=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t},\ u^{(j)}(t)=\frac{\mathrm{d}^j u(t)}{\mathrm{d}t^j};\ j=2,3\ldots,m,\end{aligned}\right\} \tag{1.1b}$$

při počátečních podmínkách

$$\left.\begin{aligned}&y(0)=y_0,\dot{y}(0)=\dot{y}_0,\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)},\\ &u(0)=u_0,\dot{u}(0)=\dot{u}_0,\ldots,u^{(m-1)}(0)=u_0^{(m-1)},\end{aligned}\right\} \tag{1.1c}$$

kde $u(t)$ je ***vstupní veličina*** (signál, proměnná) = vstup, $y(t)$ – ***výstupní veličina*** (signál, proměnná) = výstup, g – obecně nelineární funkce, n – ***řád systému***.

Pokud platí

$$n>m \tag{1.2}$$

pak matematický model vyhovuje ***silné podmínce fyzikální realizovatelnosti***. V případě

$$n=m \tag{1.3}$$

vyhovuje pouze ***slabé podmínce fyzikální realizovatelnosti***.

Pokud platí

$$n<m, \tag{1.4}$$

matematický model je ***fyzikálně nerealizovatelný***, a tedy nevyjadřuje vlastnosti reálného systému.

Fyzikální realizovatelnost vyjadřuje tzv. **kauzalitu** (příčinnost) - ***příčina nemůže předcházet následkům***.

Matematický model (1.1a), ve kterém vystupují derivace (1.1b), popisuje ***dynamický systém*** – s pamětí.

Z diferenciální rovnice (1.1a) pro

$$\lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t)=0;\ i=1,2,\ldots,n,$$

$$\lim_{t\to\infty} u^{(j)}(t)=0;\ j=1,2,\ldots,m$$

je možné získat rovnici (pokud existuje)

$$y = f(u), \tag{1.5}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} y &= \lim_{t\to\infty} y(t), \\ u &= \lim_{t\to\infty} u(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Rovnice (1.5) vyjadřuje ***statickou charakteristiku*** daného dynamického systému (1.1), viz např. obr. 1.3.

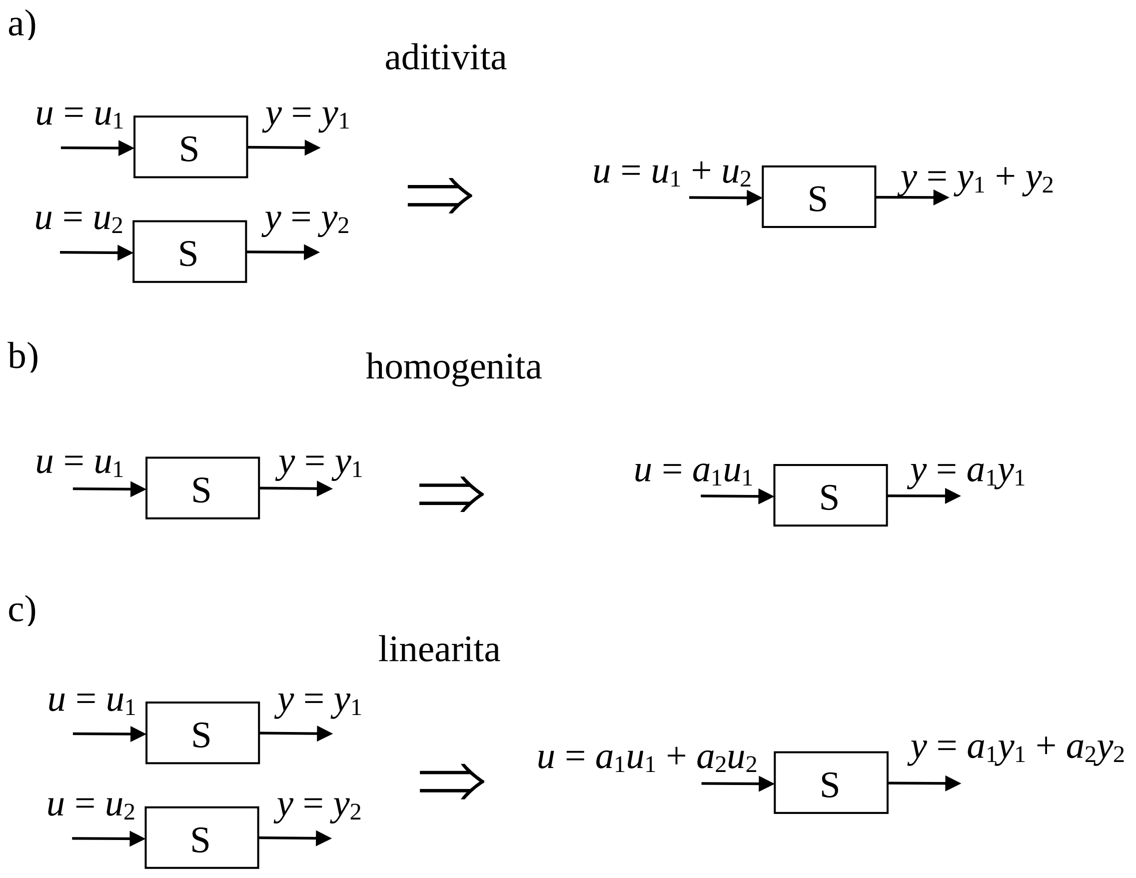
Statická charakteristika popisuje závislost mezi výstupní y a vstupní u veličinou v ***ustáleném stavu***.

Pokud v rovnici (1.1a) nevystupují derivace, tj.

$$g[y(t), u(t)] = 0 \quad \text{nebo} \quad g(y, u) = 0,$$

pak je to matematický model ***statického systému*** – bez paměti.

Hlavní pozornost bude věnována spojitým dynamickým systémům, tj. dynamickým systémům se spojitým časem t.



Obr. 1.2 Systém vyhovuje podmínce: a) aditivity, b) homogenity, c) linearity

Pro studium vlastností systémů je velmi důležitá ***linearita*** jejich matematických modelů. Systém nebo jeho model je lineární, pokud splňuje ***podmínku aditivity*** (obr. 1.2a) a ***homogenity*** (obr. 1.2b). Obě tyto podmínky mohou být vyjádřeny současně (obr. 1.2c), kde a_1 a a_2 jsou libovolné konstanty.

Linearita systému je taková jeho vlastnost, kdy váženému součtu vstupů odpovídá stejně vážený součet výstupů.

Velmi důležitou vlastností lineárního systému nebo jeho modelu je, že každá jeho lokální vlastnost je současně jeho globální vlastností.

Příklad 1.1

Statický systém je popsán lineární algebraickou rovnicí 1. stupně

$$y(t) = k_1 u(t) + y_0\,, \tag{1.7}$$

kde t – čas, k_1 a y_0 – konstanty.

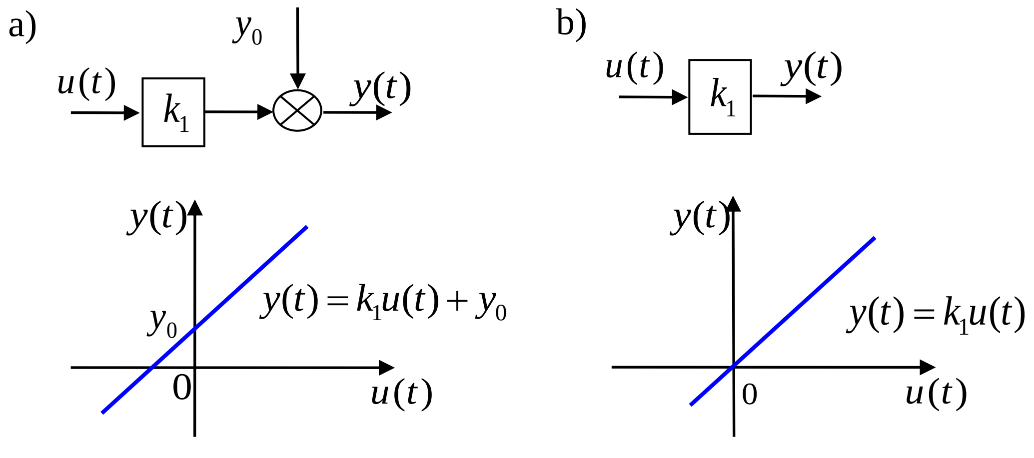
Řešení:

Zvolme např. $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = 2t$ a pak v souladu s obr. 1.2 můžeme psát

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) = 1 \;\ldots\; y_1(t) = k_1 + y_0 \\ u_2(t) = 2t \;\ldots\; y_2(t) = 2k_1 t + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = (1+2t)k_1 + 2y_0\,,$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 1 + 2t \;\;\ldots\;\; y(t) = (1+2t)k_1 + y_0 \neq y_1(t) + y_2(t)\,.$$

Vidíme, že pro $y_0 \neq 0$ matematický model (1.7) z hlediska definice linearity není lineární (i když má tvar lineární algebraické rovnice). Matematický model (1.7) bude lineární pouze pro $y_0 = 0$, viz obr. 1.3.



Obr. 1.3 Matematický model statického systému: a) nelineární, b) lineární – příklad 1.1

Z výše uvedeného je zřejmé, že u ***lineárního systému statická charakteristika*** (pokud existuje) ***musí vždy procházet počátkem souřadnic***.

Příklad 1.2

Dynamický systém je popsán lineární diferenciální rovnicí 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}=k_1 u(t),\; y(0)=y_0, \tag{1.8a}$$

příp. ekvivalentní lineární integrální rovnicí

$$y(t)=k_1\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau+y_0, \tag{1.8b}$$

kde k_1 a y_0 jsou konstanty.

Je třeba ověřit linearitu daného systému.

Řešení:

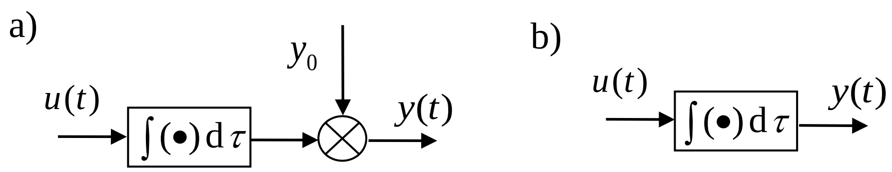
Matematický model (1.8) popisuje integrátor. Pro ověření linearity zvolíme stejné vstupy jako v příkladě 1.1, tj. $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = 2t$. Pak v souladu s obr. 1.2 dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t)=1 \;\ldots\; y_1(t)=k_1 t+y_0 \\ u_2(t)=2t \;\ldots\; y_2(t)=k_1 t^2+y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1(t)+y_2(t)=t(1+t)k_1+2y_0,$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=1+2t \;\ldots\; y(t)=t(1+t)k_1+y_0 \neq y_1(t)+y_2(t).$$

Podobně jako v předchozím příkladě 1.1 vidíme, že matematický model (1.8) pro $y_0 \neq 0$ nevyhovuje podmínkám linearity, viz obr. 1.4. V tomto případě neexistuje ani statická charakteristika.

Závěr může být zobecněn. ***U lineárního systému (modelu) musíme vždy uvažovat nulové počáteční podmínky***. V opačném případě nemůžeme s ním pracovat jako s lineárním systémem (modelem).



Obr. 1.4 Matematický model integrátoru: a) nelineární, b) lineární – příklad 1.2

Všechny systémy, které nesplňují podmínky linearity, jsou nelineární. Je tedy zřejmé, že lineární systémy tvoří pouze nepatrnou část všech systémů a protože reálný svět je nelineární, představují lineární systémy vždy jen určitou aproximaci skutečných systémů.

Teorie nelineárních systémů je otevřená a nikdy nebude uzavřená. Z tohoto důvodu pro nelineární systémy neexistují obecné přístupy a metody. Známé přístupy a metody řeší pouze některé problémy, a to pouze pro určitou skupinu nelineárních systémů.

Dále se budeme zabývat dynamickými systémy se soustředěnými parametry, tj. takovými systémy, jejichž vlastnosti se dají vyjádřit pomocí obyčejných diferenciálních rovnic s případným dopravním zpožděním. Výjimečně se budeme také zabývat diskrétními systémy popsanými obyčejnými diferenčními rovnicemi.

Vstupy, výstupy a stavy budeme u matematických modelů také nazývat vstupními, výstupními a stavovými proměnnými, veličinami nebo signály. Nelineární systémy (modely, prvky) budeme označovat zdvojenými obdélníky a proměnné (vstupy, výstupy, stavy atd.) malými písmeny bez argumentu (protože argumentem může být spojitý nebo diskrétní čas, komplexní proměnná s nebo z atd.). Z důvodu přehlednosti argument budeme rovněž vynechávat ve složitějších vztazích a tam, kde nemůže dojít k omylu.

Vzhledem k tomu, že teorie lineárních systémů je velmi dobře propracovaná s mnoha obecnými přístupy, je snaha zastoupit nelineární systémy jejich lineárními aproximacemi. Bohužel u nelineárních systémů existuje celá řada jevů, které lineární teorie nedovede popsat ani vysvětlit.

1.2 Některé zvláštnosti ve vlastnostech nelineárních systémů

Jak již bylo řečeno, u lineárních systémů každá lokální vlastnost je současně globální vlastností. U nelineárních systémů tomu tak není. Většina vlastností je lokální, tj. týkají se určitého bodu nebo oblasti ve stavovém prostoru.

Nyní formou příkladů si ukážeme některé vlastnosti, které vystupují u nelineárních systémů a které budou v dalším textu vysvětleny podrobněji.

U nelineárních systémů nelze zaměňovat pořadí prvků zapojených sériově (příklad 1.3), může vystoupit tzv. ***únik v konečném čase*** (příklad 1.4), ve stavovém prostoru může vzniknout uzavřená křivka, tzv. ***mezní cyklus***, jejíž tvar nezáleží na počátečních podmínkách (příklad 1.5), může existovat ***více řešení*** (příklad 1.6), nemusí existovat ***žádné řešení*** (příklad 1.7), může vystoupit ***bifurkace*** (příklad 1.8), při harmonickém vstupu se mohou na výstupu objevit ***nižší nebo vyšší harmonické*** (příklad 1.9), nelineární systém řízení může být stabilizován při saturovaném řízení (příklad 1.10) apod.

Velmi důležité je, že ***u nelineárních systémů*** ve většině případů ***tratí svůj význam některé matematické modely,*** jako např. ***obrazové a kmitočtové přenosy, impulsní a přechodové funkce***.

Příklad 1.3

Je třeba určit odezvy integrátoru s nasycením na vstupu nebo výstupu (obr. 1.5) pro skokové změny vstupu

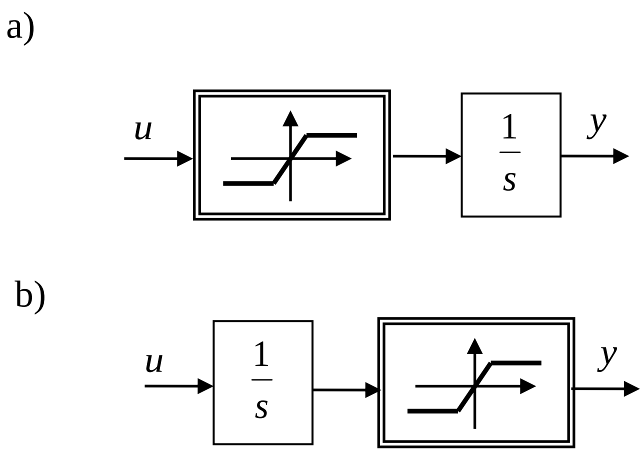
$$u(t) = u_0 \eta(t).$$

Statická nelinearita ***nasycení*** je definována vztahem (obr. 1.6)

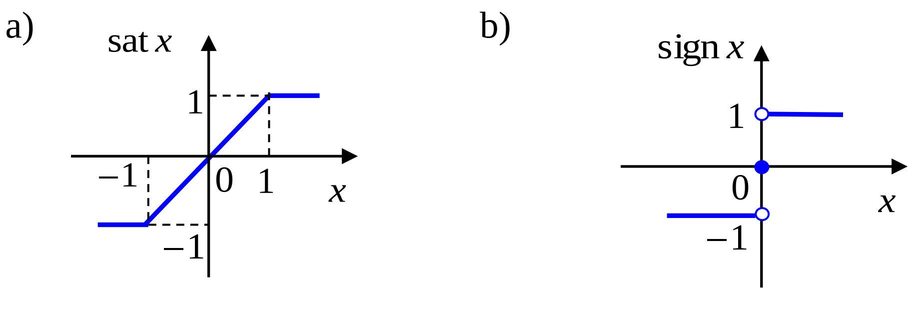
$$\operatorname{sat} x = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & |x| \le 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases} \qquad \text{nebo} \quad \operatorname{sat} x = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ \operatorname{sign} x, & |x| > 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Vztah (1.10) popisuje nelinearitu ***ideální dvoupolohové relé*** (znaménkovou funkci).



Obr. 1.5 Integrátor s nasycením na: a) vstupu, b) výstupu – příklad 1.3



Obr. 1.6 Statická nelinearita: a) nasycení, b) ideální dvoupolohové relé

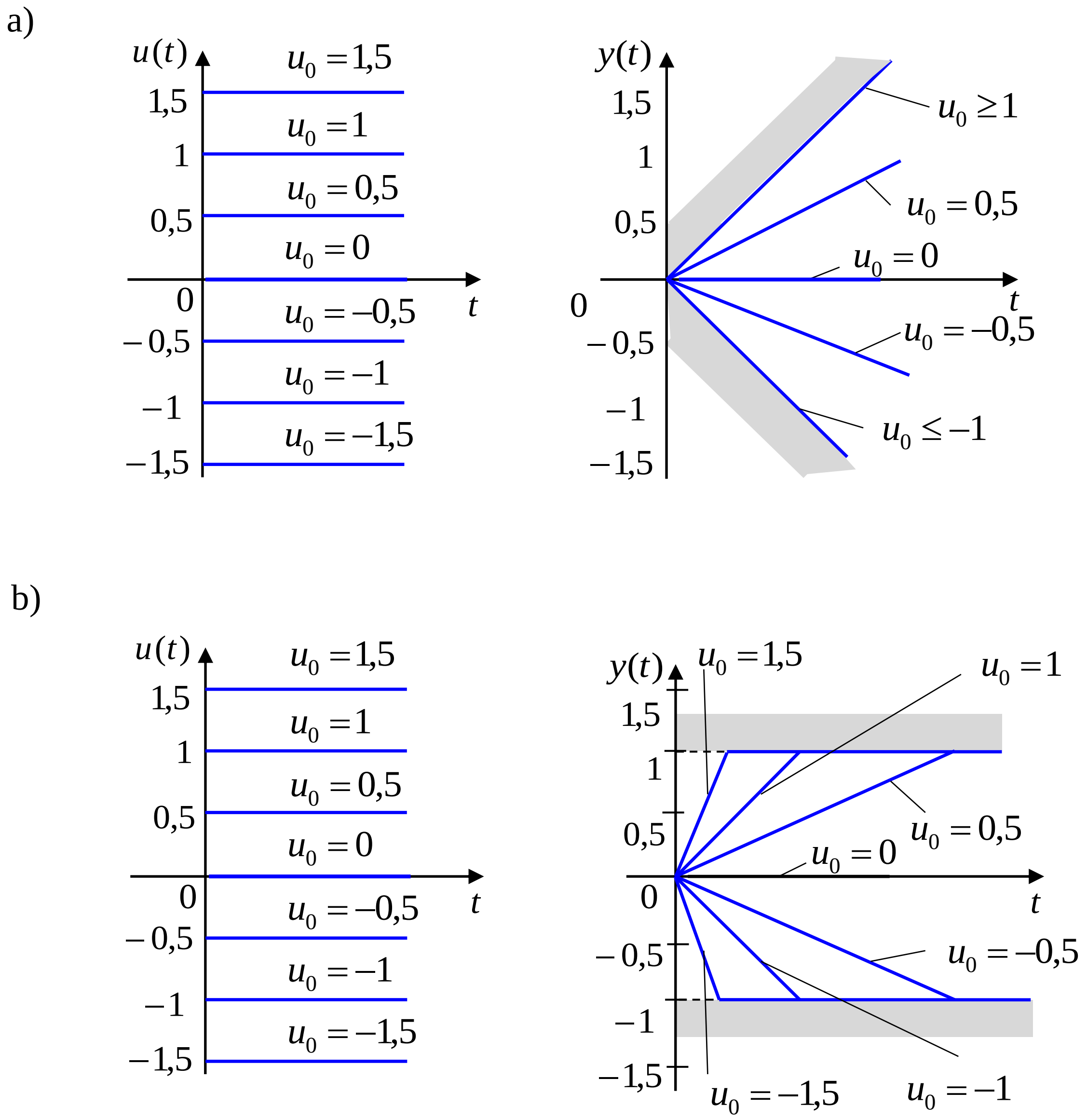
Řešení:

Je zřejmé, že pro integrátor s nasycením na vstupu platí (obr. 1.7a)

$$y(t) = \begin{cases} u_0 t, & |u_0| \le 1, \\ t \operatorname{sign} u_0, & |u_0| > 1. \end{cases}$$

Bude-li nasycení na výstupu, pak lze psát (obr. 1.7b)

$$y(t) = \begin{cases} u_0 t, & |u_0 t| \le 1, \\ \text{sign } u_0, & |u_0 t| > 1. \end{cases}$$



Obr. 1.7 Odezvy integrátoru na skokové změny s nasycením na: a) vstupu, b) výstupu – příklad 1.3

Z obr. 1.7 vyplývá, že u nelineárních systémů při změně pořadí jejich prvků dochází k podstatnému rozdílu v jejich odezvách, a tedy i jejich vlastností. ***Je také zřejmé, že u nelineárních systémů tratí svůj význam přechodová funkce (charakteristika), protože její průběh závisí na velikosti skokové změny.***

Příklad 1.4

Je dán nelineární dynamický systém bez vstupu

$$\dot{y}(t) = y^3(t), \quad y(0) = y_0 .$$

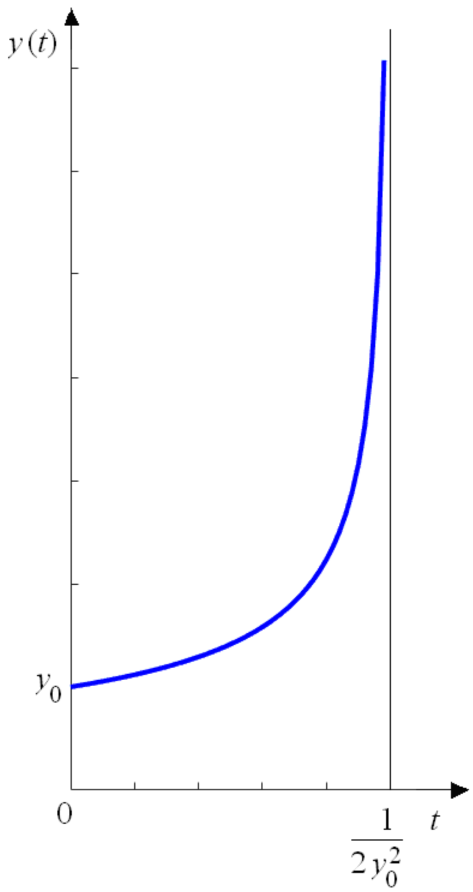
Je třeba určit jeho odezvu na počáteční podmínku, tj. řešení dané diferenciální rovnice pro zadanou počáteční podmínku.

Řešení:

Lze psát

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = y^3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{y^3}\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,t \;\Rightarrow\; \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{y^3}\mathrm{d}\,y = \int_0^t \mathrm{d}\,\tau \;\Rightarrow\; \left[-\frac{1}{2y^2}\right]_{y_0}^{y(t)} = \left[\tau\right]_0^t \;\Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-2y_0^2 t}}.$$



Obr. 1.8 Únik v konečném čase – příklad 1.4

Byl využit vztah

$$\int x^n\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x > 0, n \in R \setminus \{-1\}. \tag{1.11}$$

Je zřejmé, že platí (obr. 1.8)

$$\lim_{t \to \frac{1}{2y_0^2}} y(t) = \lim_{t \to \frac{1}{2y_0^2}} \frac{y_0}{\sqrt{1-2y_0^2 t}} = \infty .$$

Z obr. 1.8 vyplývá, že pro $t = 1/2y_0^2$ nastává ***únik*** odezvy. Naproti tomu u ***lineárních systémů všechny odezvy (stabilní i nestabilní) trvají nekonečně dlouho, protože jsou dány vždy váženým součtem exponenciálních funkcí***.

Příklad 1.5

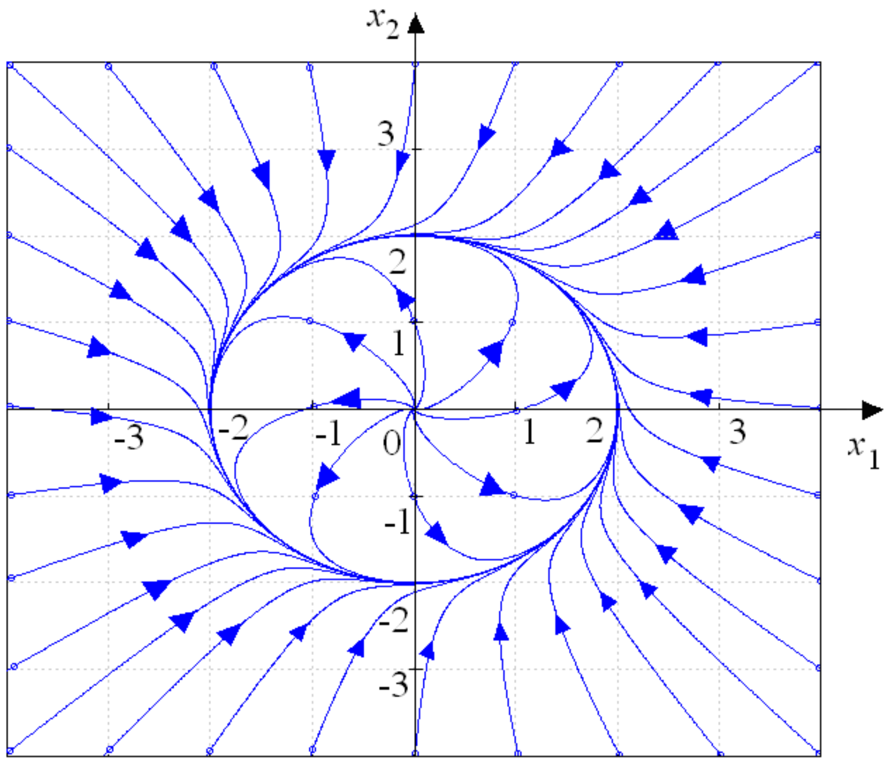
Je dán nelineární dynamický systém popsaný soustavou dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a^2 - x_1^2 - x_2^2) - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2(a^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_1, \end{aligned} \tag{1.12}$$

u kterého je třeba určit řešení pro různé počáteční podmínky (stavy) $x_1(0)$ a $x_2(0)$.

Řešení:

Úloha byla řešena pomocí počítače (analyticky bude řešená dále) a byly získány průběhy pro a = 2 ukázané na obr. 1.9.



Obr. 1.9 Stavový portrét nelineárního dynamického systému – příklad 1.5

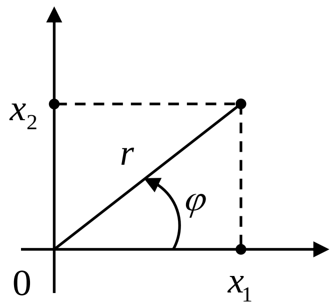
Křivky vycházející z různých počátečních podmínek se nazývají ***stavové trajektorie***, stav $\boldsymbol{x}(t)$ pro konkrétní $t \geq 0$ se nazývá ***zastupující*** nebo ***zobrazující bod*** a soubor průběhů stavových trajektorií pro různé počáteční podmínky se nazývá ***stavový portrét*** daného nelineárního dynamického systému. Orientace stavových trajektorií ukazuje směr růstu času t.

Ze stavového portrétu na obr. 1.9 vyplývá, že všechny stavové trajektorie, ačkoliv vycházejí z různých počátečních podmínek, se přibližují k uzavřené křivce a setrvávají na ní (platí to pro náš případ). Tato uzavřená křivka se nazývá ***mezní cyklus*** a odpovídají mu stabilní periodické kmity.

Ke stejnému závěru můžeme přijít, když pravoúhlé souřadnice původního systému zastoupíme polárními souřadnicemi (obr. 1.10)

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},$$
$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi, \tag{1.13}$$

kde r je radiusvektor (průvodič), φ – argument.



Obr. 1.10 Zavedení polárních souřadnic

Protože platí

$$\dot{x}_1 = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{x}_2 = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

proto po dosazení do rovnic původního systému a úpravě se dostane

$$\dot{r} - r(a^2 - r^2) = r\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(\dot{\varphi} - 1),$$

$$\dot{r} - r(a^2 - r^2) = -r\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(\dot{\varphi} - 1).$$

Odečtením druhé rovnice od první rovnice se získá vztah

$$0 = r\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)(\dot{\varphi} - 1),$$

ze kterého vyplývá, že může být splněn pouze pro $\dot{\varphi} = 1$.

Obdrželi jsme matematický model nelineárního dynamického systému transformovaný do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(a^2 - r^2), \qquad & r(0) &= r_0, \\ \dot{\varphi} &= 1, & \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Z první rovnice vyplývá, že pro $\dot{r} = 0$ dostaneme v polárních souřadnicích kružnici o poloměru a ($a^2 - r^2 = 0$), tj. vznikne mezní cyklus. Druhé řešení $r = 0$ ($x_1 = 0, x_2 = 0$) odpovídá ***rovnovážnému stavu*** (ekvilibriu) v počátku souřadnic. Protože stavové trajektorie se od něho vzdalují, jde o ***nestabilní rovnovážný stav***.

Soustavu rovnic (1.14) můžeme snadno vyřešit

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{1}{r(a^2 - r^2)} \mathrm{d}r = \int_0^t \mathrm{d}\tau \;\Rightarrow\; \frac{1}{2a^2}\left[\ln \frac{r^2}{a^2 - r^2}\right]_{r_0}^{r(t)} = [\tau]_0^t \;\Rightarrow$$

$$r^2(t) = \frac{a^2\,\mathrm{e}^{2a^2 t}}{K + \mathrm{e}^{2a^2 t}} = \frac{a^2}{1 + K\,\mathrm{e}^{-2a^2 t}}, \quad K = \frac{a^2 - r_0^2}{r_0^2},$$

$$r(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + K\,\mathrm{e}^{-2a^2 t}}},$$

$$\int_0^{\varphi(t)} \mathrm{d}\varphi = \int_0^t \mathrm{d}\tau \;\Rightarrow\; \varphi(t) = t.$$

Obdrželi jsme řešení v polárních souřadnicích

$$r(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + K\,\mathrm{e}^{-2a^2 t}}}, \quad \varphi(t) = t \tag{1.15}$$

a po dosazení do (1.13) v pravoúhlých souřadnicích

$$x_1(t) = \frac{a\cos t}{\sqrt{1 + K\,\mathrm{e}^{-2a^2 t}}}, \quad x_2(t) = \frac{a\sin t}{\sqrt{1 + K\,\mathrm{e}^{-2a^2 t}}} \tag{1.16}$$

Je zřejmé, že pro $K = 0$ z obou řešení (1.15) a (1.16) se obdrží rovnice kružnice o poloměru a, tj. vznikne mezní cyklus. Pro jiné hodnoty vznikne spirála, která se pro $r_0 < a \Rightarrow 0 < K$ přibližuje k meznímu cyklu zevnitř a pro $r_0 > a \Rightarrow K < 0$ spirála se bude přibližovat k meznímu cyklu z vnějšku, viz obr. 1. 9. Je tedy zřejmé, že ***mezní cyklus je stabilní***.

Příklad 1.6

U nelineárního dynamického systému

$$\dot{y}(t) = \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 0$$

je třeba určit odezvu na zadanou počáteční podmínku.

Řešení:

Podobně jako v příkladě 1.4 lze psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{y} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}t \;\Rightarrow$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}\tau \;\Rightarrow\; \left[2\sqrt{y}\right]_0^{y(t)} = \left[\tau\right]_0^t \;\Rightarrow$$

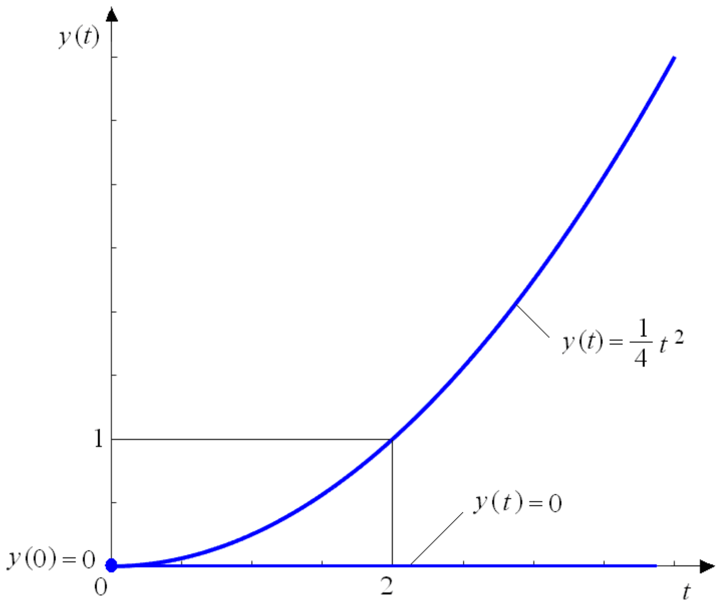
$$y(t) = \frac{1}{4}t^2.$$

Při integraci byl použit vztah (1.11).

Obdržené řešení není jediné, protože nelineární diferenciální rovnici popisující daný systém vyhovuje pro počáteční podmínku $y(0) = 0$ rovněž řešení

$$y(t) = 0.$$

Vidíme tedy, že z počáteční podmínky vycházejí dvě rozdílná řešení, co u lineární diferenciální rovnice není možné.



Obr. 1.11 Dvě rozdílná řešení – příklad 1.6

Příklad 1.7

Je zřejmé, že u nelineárního dynamického systému

$$\dot{y}(t) = -\operatorname{sign} y(t), \quad y(0) = 0,$$

kde

$$\operatorname{sign} y = \begin{cases} 1 & \text{pro } y > 0, \\ -1 & \text{pro } y < 0, \end{cases}$$

neexistuje žádné řešení, protože žádná spojitě diferencovatelná funkce nevyhovuje dané diferenciální rovnici. Přesto takové podobné dynamické systémy mají veliký význam pro robustní řízení v tzv. ***klouzavých módech***. Uvedený nelineární systém může např. popisovat jednoduchý regulační obvod s integrační soustavou a ideálním dvoupolohovým regulátorem, kde $y(t) = e(t)$ je regulační odchylka.

Příklad 1.8

Je třeba provést podrobnou analýzu ***logistického modelu růstu populace***

$$\dot{x}(t) = ax(t)\left[1 - \frac{x(t)}{b}\right], \quad x(0) = x_0, \tag{1.17}$$

kde $x(t)$ je velikost populace daného druhu v čase t (např. počet jedinců), a – konstanta růstu populace (např. počet jedinců za časovou jednotku), b – „ideální“ velikost populace (např. počet jedinců). Uvedený model je spojitý, a proto při interpretaci výsledků je třeba brát v úvahu např. zaokrouhlení na nejbližší nižší celé číslo.

Řešení:

Můžeme psát

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x(b-x)} \mathrm{d}x = \frac{a}{b}\int_0^t \mathrm{d}\tau \Rightarrow \frac{1}{b}\int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x}\right) \mathrm{d}x = \frac{a}{b}\int_0^t \mathrm{d}\tau \Rightarrow$$

$$\left[\ln \frac{x}{b-x}\right]_{x_0}^{x(t)} = a[\tau]_0^t \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{x_0 b\, \mathrm{e}^{at}}{b - x_0 + x_0\, \mathrm{e}^{at}} = \frac{x_0 b}{x_0 + (b - x_0)\, \mathrm{e}^{-at}}. \tag{1.18}$$

Průběhy řešení pro různé počáteční podmínky x_0 (na obr. 1.12a je zaznačena pouze jedna počáteční podmínka x_0) a $t \geq 0$ jsou na obr. 12a. Jsou to vlastně ***rozšířené stavové trajektorie*** (rozšířené o čas).

Jejich průmět na osu x vytváří v podstatě jedinou stavovou trajektorii na přímce (pro $n = 1$). Z obr. 1.12a vyplývá, že rozšířené stavové trajektorie pro $x_0 > 0$ se sbíhají k hodnotě $x = x_e = b$ (***asymptoticky stabilní*** rovnovážný stav), viz obr. 1.12b. Je zřejmé, že rovnovážný stav $x = x_e = 0$ je ***nestabilní***. Na obr. 1.12b jsou vlastnosti obou rovnovážných stavů $x_e = b$ a $x_e = 0$ vyjádřeny pomocí šipek.

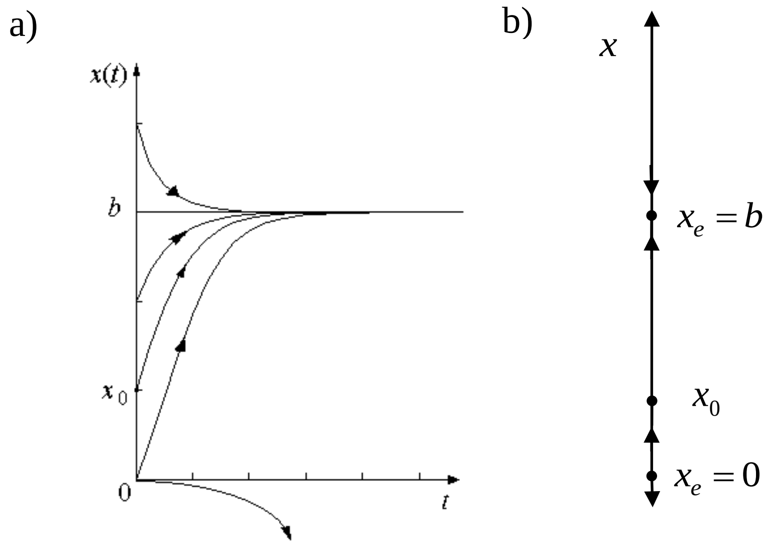
U lineárních dynamických systémů existuje vždy jediný rovnovážný stav.

Uvažujme nyní logistický model růstu populace ve tvaru

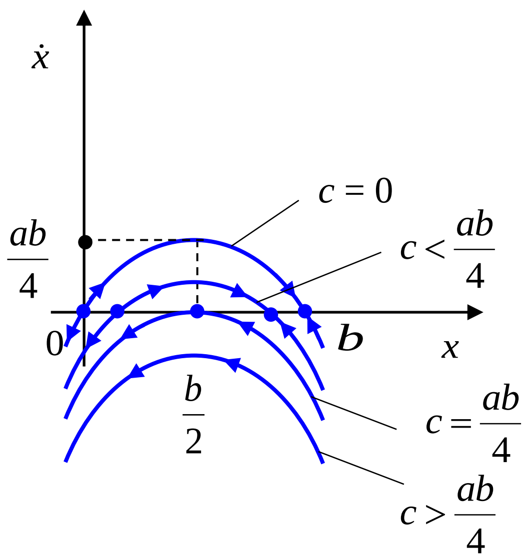
$$\dot{x}(t) = ax(t)\left[1 - \frac{x(t)}{b}\right] - c\,, \tag{1.19}$$

kde c je velikost odebírané populace (např. počet jedinců za časovou jednotku).

Stavová trajektorie v rovině $n = 2$ pro různé hodnoty c jsou na obr. 1.13. Pro $c = 0$ stavová trajektorie odpovídá vztahu (1.17).



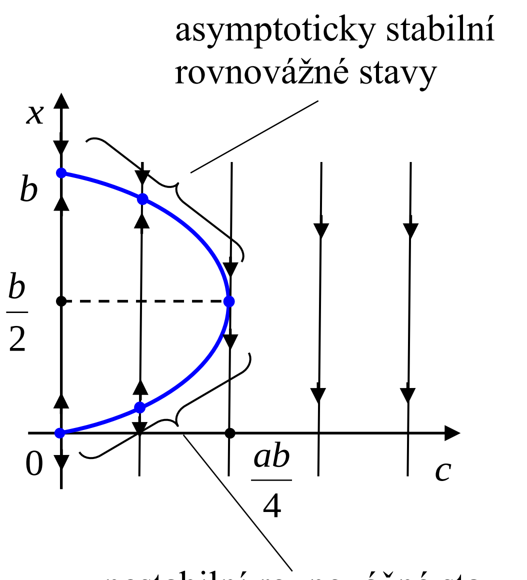
Obr. 1.12 Logistický model růstu populace: a) rozšířené stavové trajektorie, b) stavové trajektorie – příklad 1.8



Obr. 1.13 Stavové trajektorie logistického modelu růstu populace v rovině pro různé hodnoty c – příklad 1.8

Z průběhů stavových trajektorií vyplývá, že pro $0 \le c < \dfrac{ab}{4}$ velikost populace se ustálí na hodnotě

$$x = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{1 - 4\frac{c}{ab}}\,.$$



Obr. 1.14 Bifurkační graf pro logistický model růstu populace (1.16) – příklad 1.8

Kritický případ nastává pro $c = ab/4$, kdy asymptoticky stabilní a nestabilní rovnovážný stav splynou v jediný nestabilní rovnovážný stav.

Pro $c > ab/4$ již nevznikne žádný rovnovážný stav a následuje katastrofický pokles populace až do jejího zániku. Pro $c = ab/4$ vystupuje tzv. ***bifurkace***, tj. kvalitativní změna vlastností daného systému (modelu) při sebemenší změně ***bifurkačního parametru*** c. Názorně se to dá vyjádřit pomocí ***bifurkačního grafu***, viz obr. 1.14.

Příklad 1.9

Vstupem nelineárního statického systému

$$y = u^2$$

je harmonický průběh

$$u(t) = a \sin \omega t\,,$$

kde a je amplituda, ω – úhlový kmitočet.

Je třeba určit výstupní průběh.

Řešení:

Využijeme vztah

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{1.20}$$

a dostaneme

$$y(t) = \frac{a^2}{2}(1 - \cos 2\omega t).$$

Vidíme, že ačkoliv úhlový kmitočet na vstupu je ω, na výstupu se objevil dvojnásobný úhlový kmitočet, tj. 2ω.

Této vlastnosti se využívá v extremální regulaci, kde statická charakteristika extremální soustavy v okolí extrému může být zastoupena kvadratickou funkcí (parabolou 2. stupně). Objeví-li se na výstupu při harmonickém vstupu pouze 2. harmonická, pak bylo dosaženo extrému.

U lineárních systémů se na výstupu objeví vždy průběh se stejným úhlovým kmitočtem jak na vstupu, ale obecně s jinou amplitudou a jiným fázovým úhlem.

Příklad 1.10

Nelineární systém

$$\dot{x}(t) = ax(t) - x(t)u(t), \quad a > 0$$

je třeba stabilizovat konstantním (saturovaným) vstupem.

Řešení:

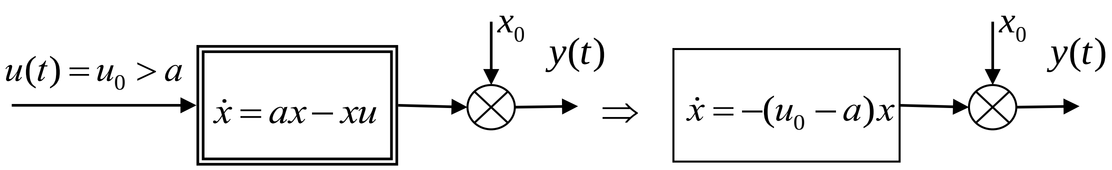
Uvažujme, že konstantní vstup má hodnotu $u(t) = u_0$, pak lze psát

$$\dot{x}(t) = ax(t) - u_0 x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -(u_0 - a)x(t).$$

Obdržený systém je popsán lineární homogenní diferenciální rovnicí, a proto nutnou a postačující podmínkou asymptotické stability je (obr. 1.15)

$$u_0 > a.$$

Nestabilní lineární systém nemůže být stabilizován konstantním vstupem.



Obr. 1.15 Systém s konstantním vstupem – příklad 1.10

1.3 Nelineární systémy řízení

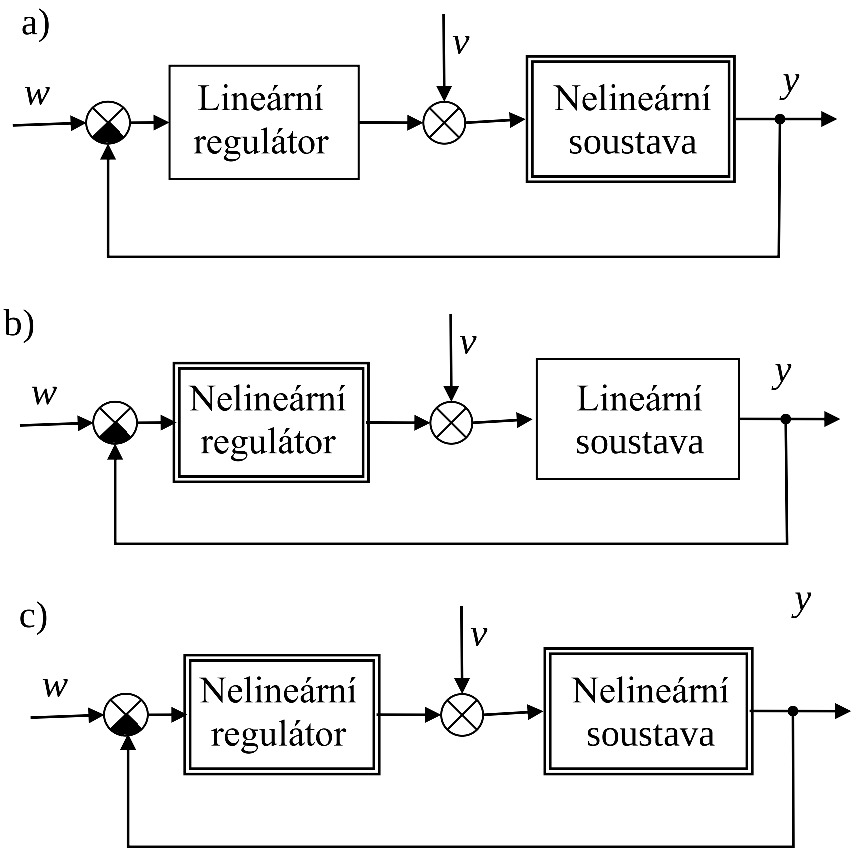
Nelineární systémy mohou být ***jednorozměrové*** nebo ***mnohorozměrové*** a vyznačují se tím, že alespoň jeden jejich prvek (člen) je nelineární.

Cíl řízení u mnohorozměrových nelineárních systémů řízení bývá stejný jako u lineárních systémů řízení s tím, že nejčastěji je formulován ve tvaru

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{0}, \tag{1.21}$$

kde $\boldsymbol{e}$ je vektor regulačních odchylek, $\boldsymbol{w}$ – vektor žádaných veličin, $\boldsymbol{y}$ – vektor výstupních (řízených) veličin. Nezávisle proměnnou ve vztahu (1.21) může být spojitý t nebo diskrétní kT čas (k – diskrétní relativní čas, T – vzorkovací perioda).

Plnění cíle řízení (1.21) zaručuje jak sledování vektoru žádaných veličin $\boldsymbol{w}$ vektorem výstupních veličin $\boldsymbol{y}$, tak i odstranění, případně potlačení negativního vlivu na řízení vektoru poruchových veličin $\boldsymbol{v}$ a změn vlastností ***řízeného podsystému***.



Obr. 1.16 Struktury nelineárních regulačních obvodů

Dále budeme obecně používat (především u stavových modelů) pojmy systém, podsystém, prvek atd. Klasické pojmy používané v praxi, jako regulační obvod, regulátor, regulovaná soustava, člen, budeme používat v případě jiných než stavových modelů.

Nejčastěji se budeme zabývat jednorozměrovými nelineárními regulačními obvody, pro které cíl řízení (1.21) bude skalární.

Nelineární regulační obvody mohou mít jednu ze struktur na obr. 1.16.

2 Matematické modely nelineárních systémů

2.1 Spojité stavové modely

2.1.1 Základní spojité stavové modely

Mezi velmi obecné matematické modely nelineárních dynamických systémů patří ***stavové modely***, které pro spojitý čas t mají tvar

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t],\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad - \text{stavová rovnice} \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \qquad - \text{výstupní rovnice} \tag{2.1b}$$

kde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2,\ldots, x_n]^T$ je vektor stavových proměnných (stav) dimenze n, $\boldsymbol{x}_0$ – počáteční stav dimenze n, $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2,\ldots, u_r]^T$ – vektor vstupních proměnných (vstup) dimenze r, $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2,\ldots, f_n]^T$ – vektorová obecně nelineární funkce dimenze n, $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2,\ldots, y_m]^T$ – vektor výstupních proměnných (výstup) dimenze m, $\boldsymbol{h} = [h_1, h_2,\ldots, h_m]^T$ – vektorová obecně nelineární funkce dimenze m.

Počáteční stav $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ budeme uvažovat, pokud nebude řečeno jinak, nejčastěji pro $t_0 = 0$.

Pokud vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{h}$ budou lineární z hlediska stavu $\boldsymbol{x}$ a vstupu $\boldsymbol{u}$, pak matematický model (2.1) bude mít tvar

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t), \tag{2.2b}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je čtvercová ***matice systému*** (dynamiky) řádu n [typu (n, n)], $\boldsymbol{B}$ – ***matice vstupu*** typu (n, r), $\boldsymbol{C}$ – ***matice výstupu*** typu (m, n), $\boldsymbol{D}$ – ***matice převodu*** typu (m, r).

Matematický model (2.1) je velmi obecný a popisuje ***t-variantní*** (nestacionární) ***nelineární dynamický systém***. Matematický model (2.2) popisuje ***t-variantní*** (nestacionární) ***lineární dynamický systém***.

Pokud vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{u}$ nezávisí explicitně na čase t, pak jde o ***t-invariantní*** (stacionární) ***nelineární dynamický systém*** (obr. 2.1a)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)],\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.3a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)] \tag{2.3b}$$

a podobně, pokud matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{D}$ u matematického modelu (2.2) nezávisí na čase t, pak odpovídající ***lineární dynamický systém*** je ***t-invariantní*** (stacionární) (obr. 2.1b)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.4a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t). \tag{2.4b}$$

Názorně je to ukázáno na obr. 2.2.

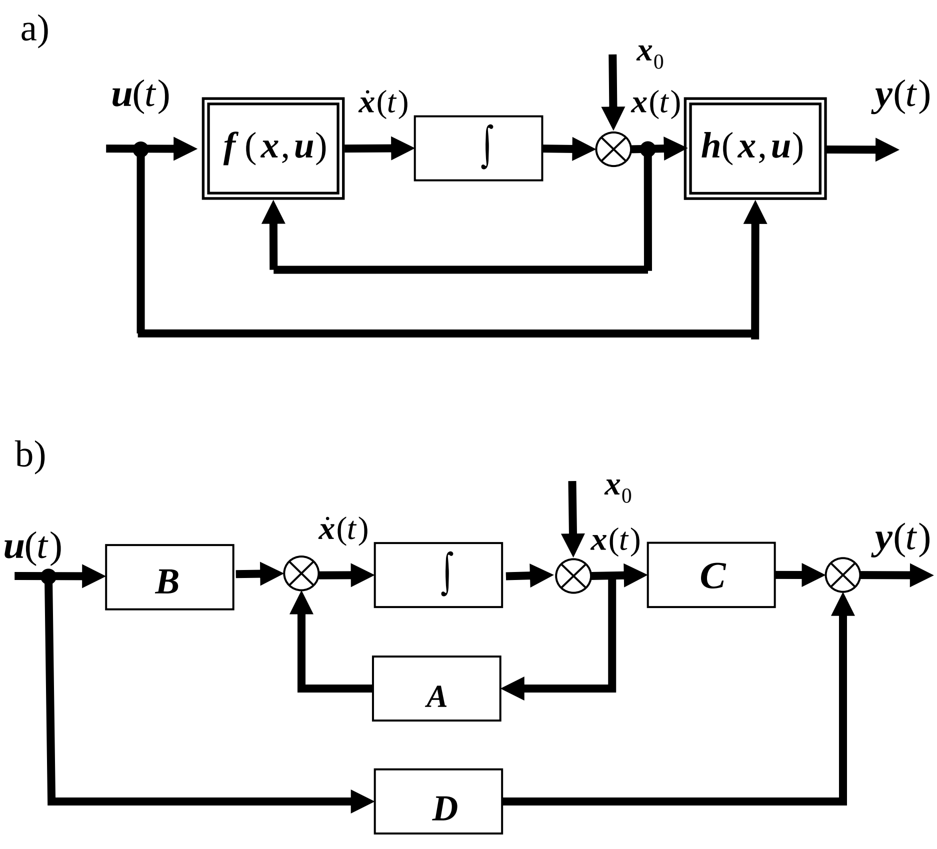
Pod znakem integrálu v blokových schématech na obr. 2.1 je třeba si představit diagonální matici, ve které na diagonále jsou výrazy

$$\int_0^t x_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Pokud ve stavové a výstupní rovnici dynamických systémů (2.1) – (2.4) nevystupuje vstup $\boldsymbol{u}(t)$, pak jde o ***systémy bez vstupů*** (nebuzené systémy).

Vystupuje-li vstup $\boldsymbol{u}(t)$ ve výstupních rovnicích dynamických systémů (modelů) (2.1b) – (2.4b), pak tyto modely jsou ***slabě fyzikálně realizovatelné***. V opačném případě jsou ***silně fyzikálně realizovatelné***.

Je tedy zřejmé, že běžné stavové modely jsou nejméně slabě fyzikálně realizovatelné.



Obr. 2.1 Dynamický t-invariantní systém: a) nelineární, b) lineární

Výstupní rovnice fyzikálně nerealizovatelných t-invariantních systémů mohou mít tvar

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t), \ldots], \tag{2.5}$$

resp.

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}_1\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \ldots, \tag{2.6}$$

kde $\boldsymbol{D}_1$ je matice typu (m,r) atd.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$$

t-variantní nelineární dynamický systém

$\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{h}$ nezávisí explicitně na čase

$\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{h}$ jsou lineární vzhledem k $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)]$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)]$$

t-invariantní nelineární dynamický systém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

t-variantní lineární dynamický systém

$\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{h}$ jsou lineární vzhledem k $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$

matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{D}$ nezávisí na čase t

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

t-invariantní lineární dynamický systém

Obr. 2.2 Stavové modely spojitých dynamických systémů

Dynamické t-invariantní systémy se často nazývají ***stacionární***.

Dynamické t-invariantní systémy bez vstupu (nebuzené)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)], \;\; \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.7a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t)], \tag{2.7b}$$

resp.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \;\; \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \tag{2.8a}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{2.8b}$$

se nazývají ***autonomní***.

Výstupní rovnice (2.7b) a (2.8b) nemají vliv na dynamické vlastnosti systémů (2.7) a (2.8), a tedy ani na jejich stabilitu, proto při jejich analýze se většinou neuvažují. Pokud dynamické systémy (2.7) a (2.8) jsou řízeny pomocí zpětné vazby, tj. vektor řídicích proměnných $\boldsymbol{u}(t)$ je funkcí vektoru stavových proměnných $\boldsymbol{x}(t)$, případně vektoru výstupních proměnných $\boldsymbol{y}(t)$, pak při konstantním vektoru žádaných proměnných $\boldsymbol{w}(t)$ se rovněž obdrží autonomní dynamický systém. Z tohoto důvodu se autonomními dynamickými systémy budeme zabývat podrobněji.

Při zkoumání vlastností daného rovnovážného stavu $\boldsymbol{z}_e$ u nelineárního systému

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{z}(t)],\ \boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{z}_0 \tag{2.9}$$

je vhodné ho přesunout do počátku nových souřadnic, tj.

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}_e \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x}_e=0\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\dot{\boldsymbol{z}}(t)\end{cases} \tag{2.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)],\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{2.11a}$$

kde

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{z}_e],\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{z}(0)-\boldsymbol{z}_e. \tag{2.11b}$$

Na závěr ještě jednou přehledně shrňme základní tvary stavových matematických modelů:

$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ – neautonomní (buzený, t-variantní),

$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ – neautonomní (buzený, t-invariantní),

$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ – autonomní (nebuzený, t-variantní),

$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – autonomní (nebuzený, t-invariantní).

2.1.2 Vlastnosti rovnovážných stavů a mezních cyklů

Při analýze vlastností autonomních dynamických systémů zkoumáme chování (průběh) stavových trajektorií vycházejících ze zadaných počátečních stavů (podmínek), tj. zkoumáme vlastnosti jejich odezev na různé počáteční stavy (podmínky).

U autonomních dynamických systémů (2.7a) a (2.8a) mohou nastat pro $t \to \infty$ ustálené stavy ***rovnovážné*** (klidové) a ***periodické*** (pohybové).

Uvažujme nejdříve lineární autonomní dynamický systém (2.8a). Označme

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}\,, \tag{2.12}$$

pak pro rovnovážný stav platí

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.13}$$

tj.

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,.$$

Tato rovnice má jediné řešení

$$\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.14}$$

tzn., že ***lineární autonomní dynamický systém má jediný rovnovážný stav*** (2.14) v počátku stavových souřadnic (obr. 2.3a). Tento rovnovážný stav se nazývá ***ekvilibrum***.

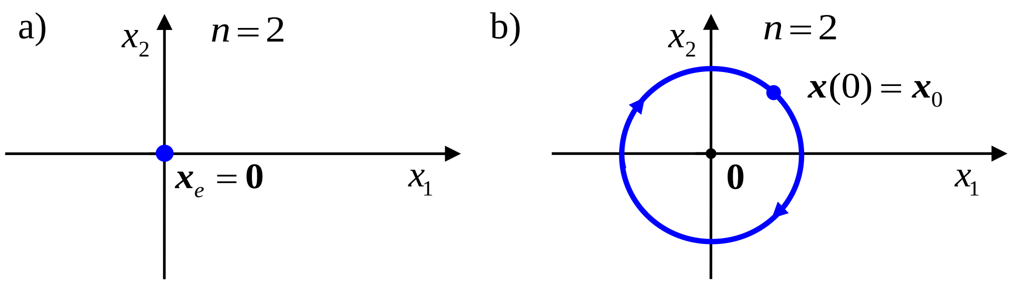
Rovnovážný stav je ***singulárním stavem*** (bodem) ve stavovém prostoru, protože jím může procházet nekonečně mnoho stavových trajektorií. Naproti tomu ***regulárním stavem*** (bodem) může procházet pouze jediná stavová trajektorie (samozřejmě pro daný dynamický systém a daný počáteční stav).

V případě periodického ustáleného stavu platí

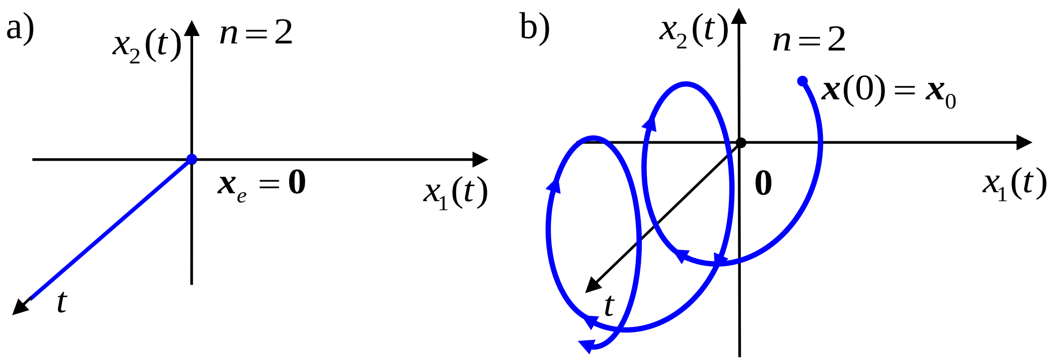
$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t + T_p)\,,$$

kde T_p je perioda ustálených kmitů.

V případě periodického ustáleného stavu u lineárního autonomního dynamického systému vznikne ve stavovém prostoru pouze jediná uzavřená křivka, která je jednoznačně určena počátečním stavem $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ (obr. 2.3b).



Obr. 2.3 Ustálený stav ve stavové rovině: a) rovnovážný, b) periodický



Obr. 2.4 Ustálený stav v rozšířeném stavovém prostoru: a) rovnovážný (klidový), b) periodický

V rozšířeném stavovém prostoru (o čas) rovnovážnému stavu odpovídá časová osa (2.4.a) a periodickému ustálenému stavu (periodickému pohybu) odpovídá neměnící se nekonečná spirála začínající v počátečním stavu $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ (obr. 2.4b). Obr. 2.3 a 2.4 platí pro $n = 2$, tj. pro stavovou rovinu.

U nelineárního autonomního dynamického systému (2.7a) pro

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{0}, \tag{2.15}$$

se dostane

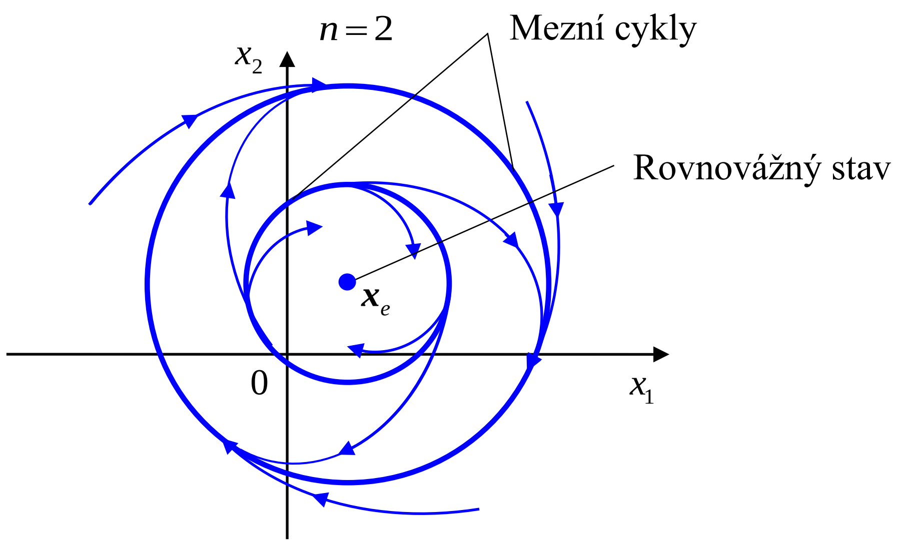
$$\mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{2.16}$$

Je zřejmé, že tato nelineární rovnice nemusí mít řešení, může mít více řešení a dokonce i nekonečný počet řešení.

Vyplývá z toho, že ***nelineární autonomní dynamický systém nemusí mít žádný rovnovážný stav, může mít několik izolovaných rovnovážných stavů a dokonce může mít i nekonečný počet rovnovážných stavů***, které mohou tvořit souvislou nebo nesouvislou oblast ve stavovém prostoru.

V případě periodického ustáleného stavu u nelineárního autonomního dynamického systému vznikne ve stavovém prostoru uzavřená křivka, tzv. mezní cyklus, ke které se stavové trajektorie sbíhají (obr. 1.9), ***nebo od ní odbíhají, případně se některé sbíhají a jiné odbíhají pro různé počáteční stavy*** (v okolí této uzavřené křivky), tj. ***mezní cyklus nezávisí na počátečních stavech***.

Obecně u nelineárního autonomního dynamického systému může vzniknout několik mezních cyklů, přičemž větší mezní cyklus může obsahovat menší vnitřní mezní cyklus, ve kterém vždy vystupuje klidový rovnovážný stav (obr. 2.5).



Obr. 2.5 Mezní cykly a rovnovážný stav ve stavové rovině

Vlastnosti rovnovážných stavů a mezních cyklů určují vlastnosti celého autonomního dynamického systému. Nejdůležitější vlastností rovnovážných stavů a mezních cyklů je ***stabilita***. U nelineárních dynamických systémů již nevystačíme s definicí stability pro lineární dynamické systémy. Poměrně velmi obecný přístup ke stabilitě byl navržen A. A. Ljapunovem.

Stabilita ve smyslu Ljapunova

Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je ***lokálně stabilní*** (ve smyslu Ljapunova), když pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že platí (obr. 2.6a)

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad t \geq t_0, \tag{2.17}$$

kde $\|\cdot\|$ je libovolná norma.

U stabilního rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$ stavová trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ zůstává v jeho blízkém okolí (obr. 2.6a).

Pokud stavová trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ se od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$ vzdaluje a existuje takový časový okamžik t_1, že platí

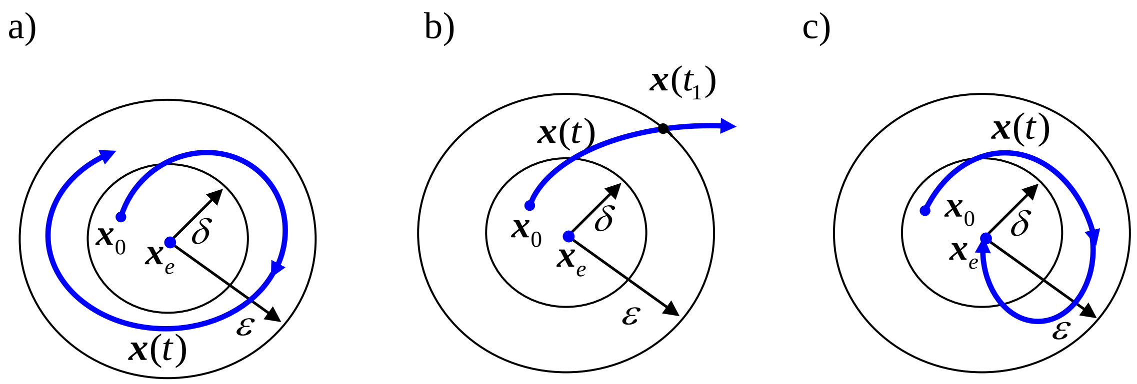
$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| > \varepsilon \quad \text{pro} \quad t > t_1 > t_0, \tag{2.18}$$

pak rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je ***nestabilní*** (obr. 2.6b).

Asymptotická stabilita ve smyslu Ljapunova

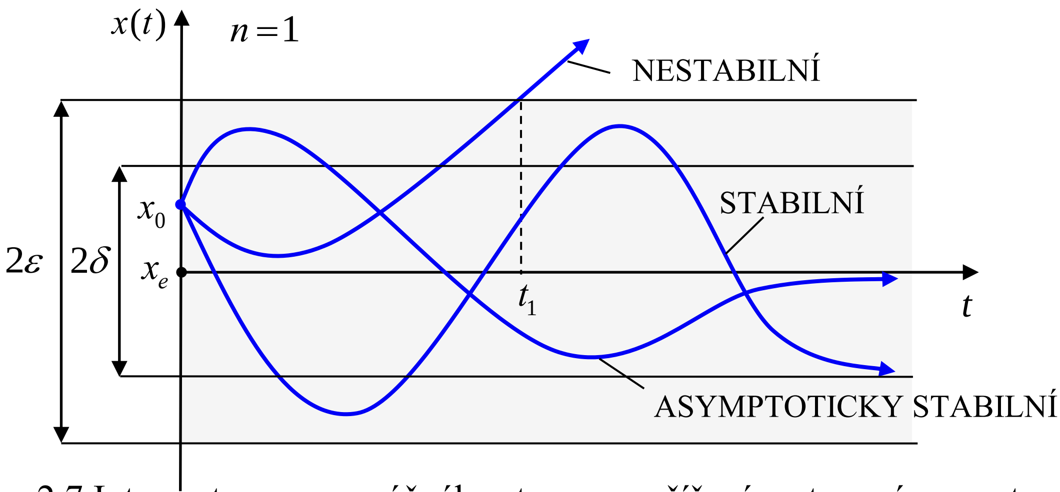
Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je ***lokálně asymptoticky stabilní*** (ve smyslu Ljapunova), když je lokálně stabilní (2.17) a navíc platí (obr. 2.6c)

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| < \delta \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_e . \tag{2.19}$$

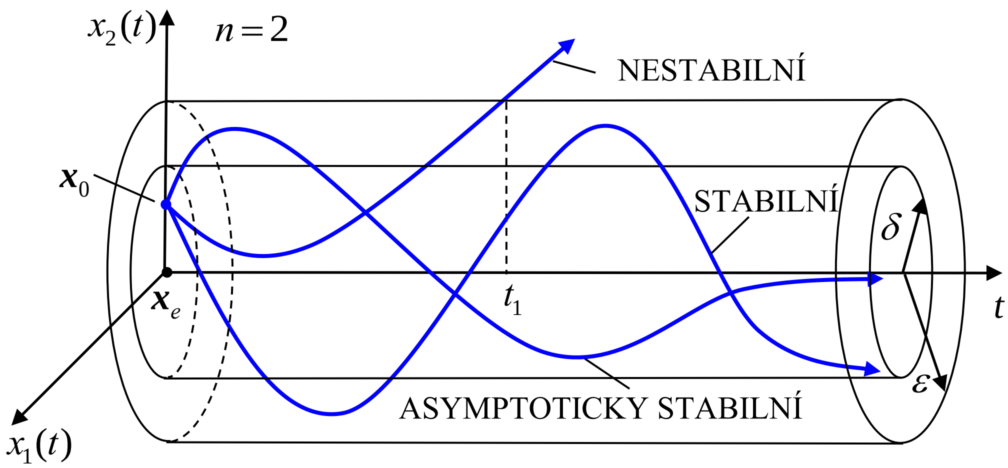


Obr. 2.6 Rovnovážný stav: a) stabilní, b) nestabilní, c) asymptoticky stabilní

Interpretace rovnovážného stavu v rozšířeném stavovém prostoru pro n = 1 a n = 2 je na obr. 2.7 a 2.8, viz také příklad 1.8.



Obr. 2.7 Interpretace rovnovážného stavu v rozšířeném stavovém prostoru pro n = 1



Obr. 2.8 Interpretace rovnovážného stavu v rozšířeném stavovém prostoru pro n = 2

Exponenciální stabilita

Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je ***lokálně exponenciálně stabilní***, když existují takové reálné konstanty $\alpha, \lambda > 0$, že platí

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\| \leq \alpha \|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e\| \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} \quad \text{pro} \quad t \geq t_0 . \tag{2.20}$$

Z exponenciální stability vyplývá asymptotická stabilita. Opačné tvrzení neplatí, tj. exponenciální stabilita je přísnější než stabilita asymptotická.

Pokud oblast počátečních stavů

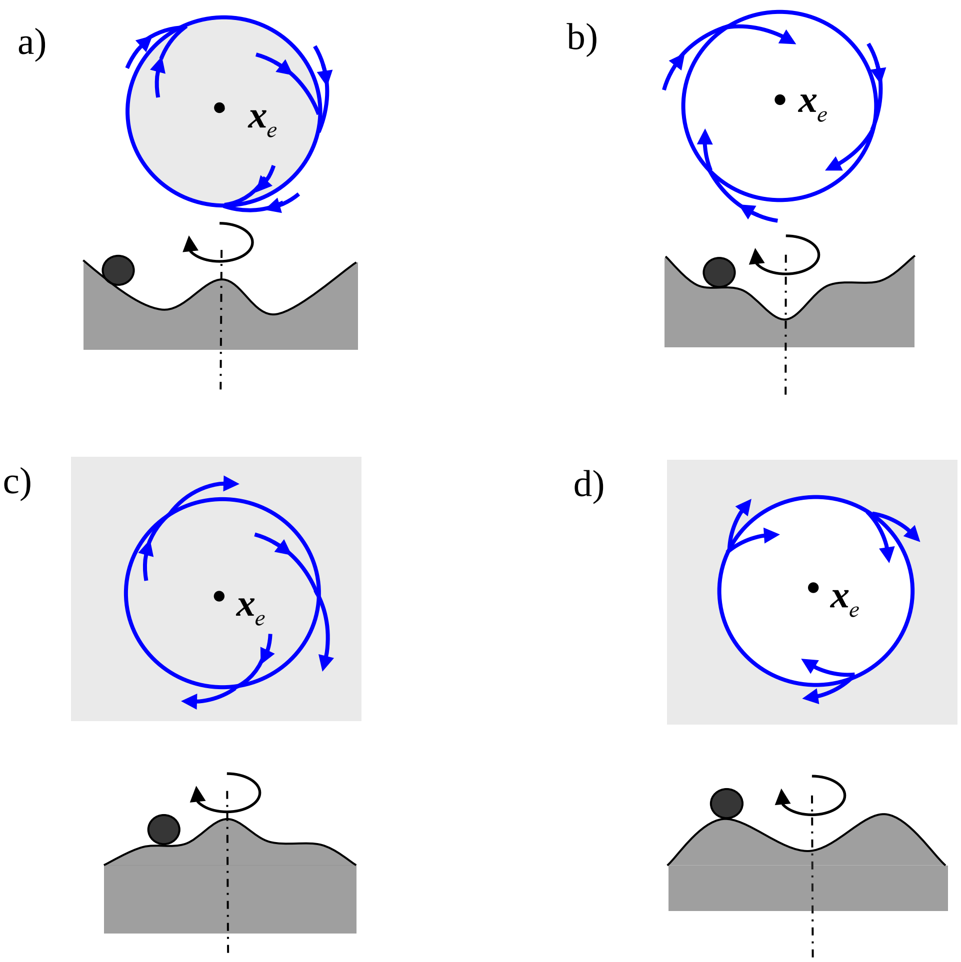
$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\| < \delta$$

může být rozšířena na celý stavový prostor, pak jsou to ***globální*** vlastnosti daného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$. Je zřejmé, že v tomto případě může existovat pouze jediný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$.

V případě jediného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$ jeho vlastnost můžeme vztáhnout na celý systém. Z tohoto důvodu u ***lineárního*** dynamického systému hovoříme o stabilitě či nestabilitě jako o vlastnosti tohoto systému, a ne o vlastnosti jeho jediného rovnovážného stavu.

Jak již bylo dříve řečeno, u nelineárních dynamických systémů mohou vystupovat mezní cykly. Pro jednoduchost budeme uvažovat autonomní nelineární dynamický systém pro $n = 2$, tj. stavovou rovinu. Rovnovážné stavy mohou být obklopeny jedním i více mezními cykly. Uvnitř mezního cyklu může vystupovat další mezní cyklus nebo musí existovat rovnovážný stav, příp. celá oblast rovnovážných stavů. Základní druhy mezních cyklů s jedním rovnovážným stavem $\boldsymbol{x}_e$ ve stavové rovině ($n = 2$) jsou na obr. 2.9, kde je ukázána rovněž jejich zjednodušená fyzikální interpretace pomocí rotačního tělesa a kuličky.

Nestabilní oblasti u mezních cyklů na obr. 2.9a, c, d jsou značeny šedě.



Obr. 2.9 Mezní cykly ve stavové rovině: a) stabilní s nestabilním rovnovážným stavem, b) polostabilní se stabilním rovnovážným stavem, c) polonestabilní s nestabilním rovnovážným stavem, d) nestabilní se stabilním rovnovážným stavem

Příklad 2.1

U dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - 1, \qquad & z_1(0) = z_{10} = 4, \\ \dot{z}_2 &= -z_1 + 2, \qquad & z_2(0) = z_{20} = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

je třeba určit rovnovážný stav a trajektorii vycházející se zadaného počátečního stavu.

Řešení:

Nejdříve určíme rovnovážný stav

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 0 \\ \dot{z}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_{1e} &= 2 \\ z_{2e} &= 1 \end{aligned}\right\} \ \boldsymbol{z}_e = [2{,}1]^T . \tag{2.22}$$

Zavedeme nové stavové proměnné v souladu s (2.9) – (2.11)

$$x_1 = z_1 - z_{1e} = z_1 - 2,$$
$$x_2 = z_2 - z_{2e} = z_2 - 1$$

a dostaneme stavový model dynamického systému (2.21) v jednodušším tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \qquad x_1(0) = x_{10} = z_{10} - 2 = 2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \qquad x_2(0) = x_{20} = z_{20} - 1 = -1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

s rovnovážným stavem

$$\boldsymbol{x}_e = [x_{1e}, x_{2e}]^T = [0,0]^T. \tag{2.24}$$

Vydělením druhé rovnice v (2.23) první rovnicí se dostane

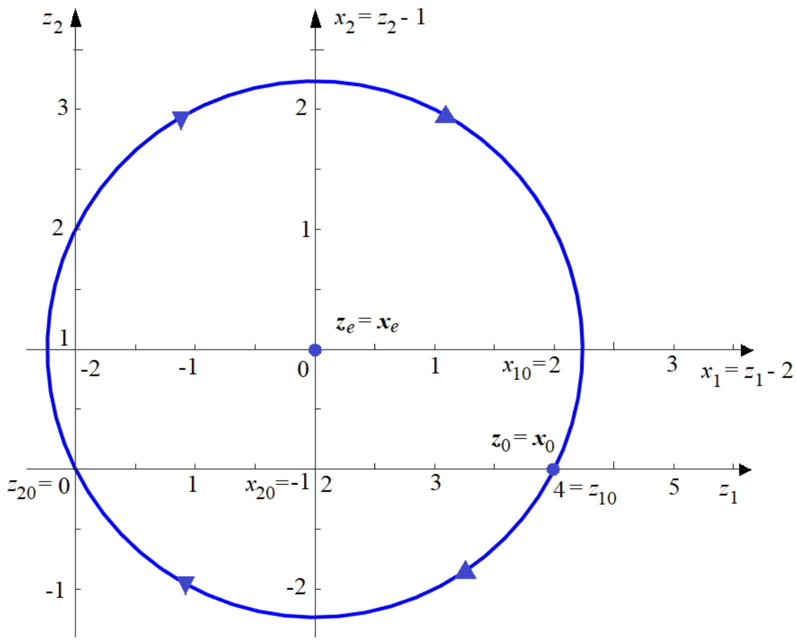
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{x_1}{x_2} \;\Rightarrow\; x_2\,\mathrm{d}x_2 = -x_1\,\mathrm{d}x_1 \;\Rightarrow$$

$$\int_{x_{20}}^{x_2(t)} x_2\,\mathrm{d}x_2 = -\int_{x_{10}}^{x_1(t)} x_1\,\mathrm{d}x_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}[x_2^2]_{x_{20}}^{x_2(t)} = -\frac{1}{2}[x_1^2]_{x_{10}}^{x_1(t)} \;\Rightarrow$$

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_{10}^2 + x_{20}^2 \;\Rightarrow$$

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = 5, \;\; t \geq 0. \tag{2.25}$$

Stavová trajektorie pro $t \geq 0$ vytvoří kružnici o poloměru $\sqrt{5}$ se středem v rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e = [0,0]^T$ v nových souřadnicích (x_1, x_2), případně v $\boldsymbol{z}_e = [2,1]^T$ v původních souřadnicích (z_1, z_2), viz obr. 2.10.



Obr. 2.10 Průběh stavové trajektorie – příklad 2.1

Orientaci stavové trajektorie určíme na základě rovnice $\dot{x}_1 = x_2$, ze které vyplývá, že z počátečního stavu $\boldsymbol{x}(0) = [2,-1]^T$, tj. pro $x_2(0) = -1 < 0$ musí s rostoucím časem klesat $x_1(t)$, a proto orientace stavové trajektorie vycházející z počátečního stavu $\boldsymbol{x}(0)$ bude zprava – doleva a shora – dolů.

I když stavová trajektorie tvoří uzavřenou křivku (v našem případě kružnici), není to mezní cyklus, protože pro jiný počáteční stav $\boldsymbol{x}(0)$, resp. $\boldsymbol{z}(0)$ se dostane jiná uzavřená křivka (kružnice). Rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$, resp. $\boldsymbol{z}_e$ je tzv. ***střed***, podrobněji viz podkap. 2.3.1.

Je zřejmé, že pro libovolný počáteční stav $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ trajektorie zůstane vždy v „blízkosti“ jediného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$, a proto rovnovážný stav typu střed je globálně stabilní (ve smyslu Ljapunova). Tuto globální vlastnost rovnovážného stavu lze rozšířit na celý systém, tj. daný dynamický systém (2.21), resp. (2.23) je globálně stabilní (ve smyslu Ljapunova).

Příklad 2.2

Na obr. 2.11 je stavový portrét nelineárního dynamického systému s matematickým modelem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] - x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] + x_1. \end{aligned} \tag{2.26}$$

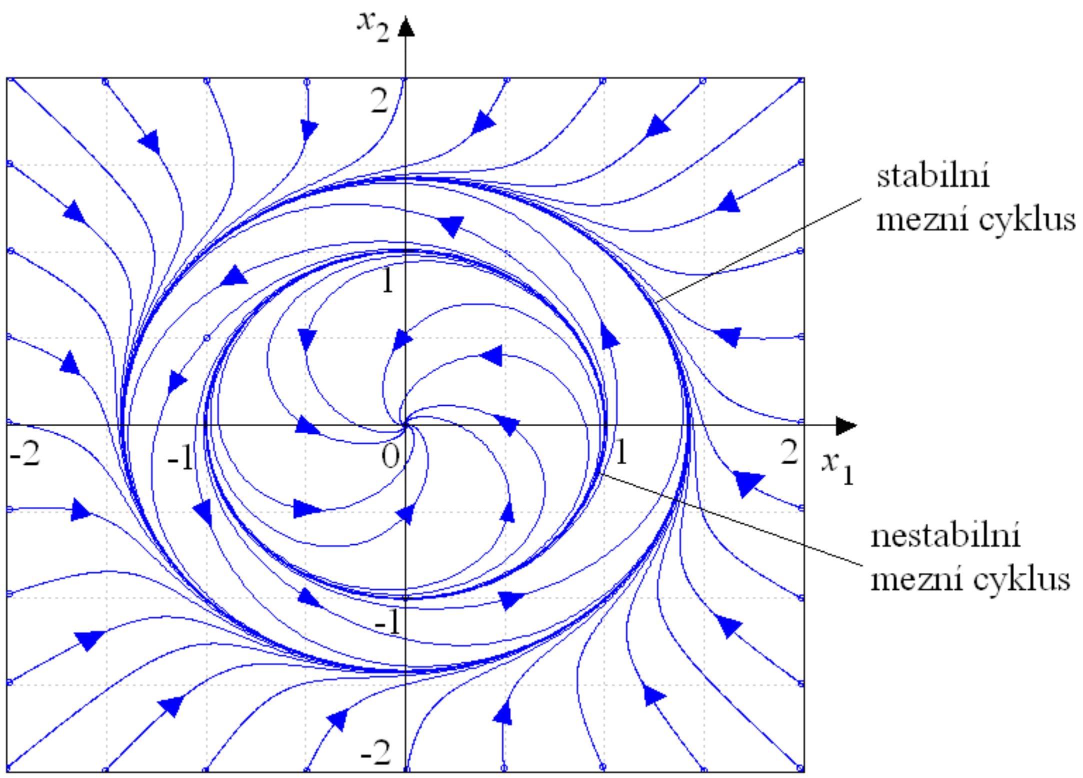
Vzhledem ke složitosti matematického modelu stavový portrét včetně orientace stavových trajektorií byl získán pomocí počítače. Je třeba určit vlastnosti obou mezních cyklů a jediného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$.

Řešení:

Stavové trajektorie v okolí rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$ se do něho sbíhají, a proto rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je lokálně asymptoticky stabilní, je to tzv. ***ohnisko***.

Stavové trajektorie se od vnitřního mezního cyklu vzdalují, a proto jde o nestabilní mezní cyklus. K vnějšímu meznímu cyklu se z obou stran stavové trajektorie sbíhají, a proto jde o stabilní mezní cyklus.

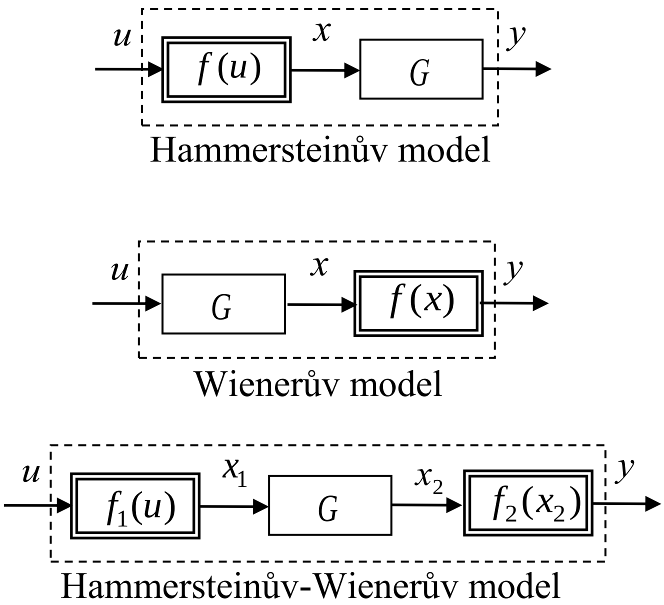
Dynamický systém (2.26) bude podrobněji analyzován v příkladu 2.20.



Obr. 2.11 Stavový portrét se dvěma mezními cykly – příklad 2.2

2.2 Klasické modely nelineárních systémů

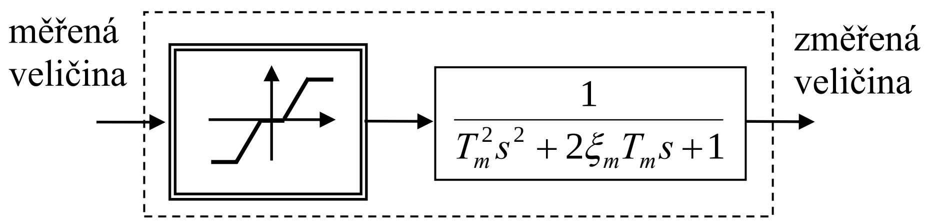
Jednorozměrové nelineární dynamické systémy lze popsat pomocí lineární dynamické části vyjádřené přenosem a nelineární statické části vyjádřené statickou charakteristikou, viz obr. 2.12.



Obr. 2.12 Základní klasické modely nelineárních dynamických systémů

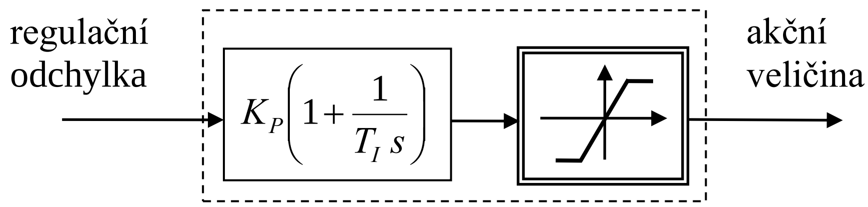
Pro výše uvedené modely nelineárních dynamických systémů existují speciální metody analýzy, syntézy a identifikace, které využívají některé přístupy z lineární teorie.

Např. na obr. 2.13 je ručkový měřicí přístroj s necitlivostí a omezením vstupu popsaný Hammersteinovým modelem. Časová konstanta T_m vyjadřuje setrvačnost pohybového ústrojí měřicího přístroje a koeficient tlumení ξ_m je nastaven na hodnotu (optimálně) $1/\sqrt{2} = 0{,}707$.



Obr. 2.13 Ručkový měřicí přístroj s necitlivostí a omezením vstupu vyjádřený Hammersteinovým modelem

Podobně regulátor PI s omezením výstupu může být vyjádřen ve tvaru Wienerova modelu (obr. 2.14), kde K_P je zesílení regulátoru a T_I je integrační časová konstanta.



Obr. 2.14 Regulátor PI s omezením výstupu vyjádřený Wienerovým modelem

2.2.1 Základní nelinearity

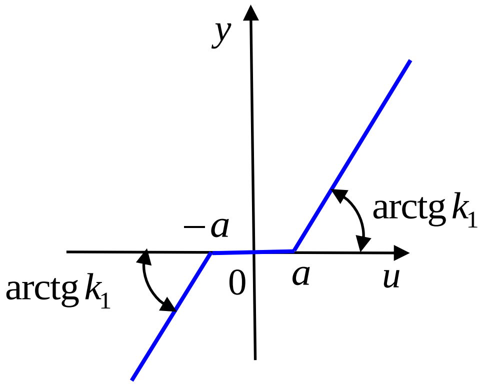
Vyjmenovat a popsat všechny nelinearity není možné, protože v podstatě všechny reálné systémy a procesy v nich probíhající jsou nelineární. Uvedeme si pouze některé základní symetrické nelinearity používané především v klasických matematických modelech nelineárních dynamických systémů.

Necitlivost (obr. 2.15)

Necitlivost (pásmo necitlivosti) je statická nelinearita, která vystupuje téměř ve všech reálných systémech, kde dochází k pohybu. Bývá způsobena suchým třením u ručkových a zapisovacích přístrojů, překrytím u pneumatických a hydraulických šoupátkových ventilů, atd.

Grafické vyjádření nelinearity nazýváme často ***charakteristikou***, např. na obr. 2.15 je charakteristika necitlivosti.

$$y = \begin{cases} k_1(u-a) & \text{pro} \quad u > a \\ 0 & \text{pro} \quad |u| \le a \\ k_1(u+a) & \text{pro} \quad u < -a \end{cases} \tag{2.27}$$



Obr. 2.15 Necitlivost

Necitlivost je popsána vztahem (2.27). Úsečka $[-a, a]$ vyjadřuje tzv. ***pásmo necitlivosti***.

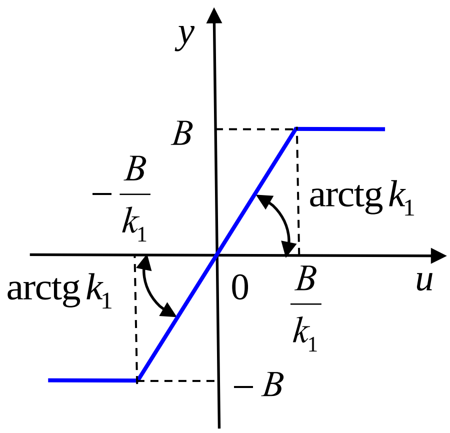
Tuto nelinearitu někdy speciálně zavádíme z důvodu omezení malých šumů a oscilací.

Nasycení (obr. 2.16)

Nasycení vystupuje téměř u všech reálných systémů. Projevuje se omezenou (konečnou) hodnotou výstupní veličiny. Vystupuje např. u zesilovačů, převodníků, u zařízení se zarážkami atd. Často nelinearitu typu omezení speciálně zavádíme na vstup měřicích a jiných přístrojů z důvodu zabránění jejich přetížení a následného zničení. Nasycení lze vyjádřit níže uvedenými vztahy (2.28a) nebo (2.28b):

$$y = \begin{cases} B & \text{pro} \quad u > \dfrac{B}{k_1} \\ k_1 u & \text{pro} \quad |u| \le \dfrac{B}{k_1} \\ -B & \text{pro} \quad u < -\dfrac{B}{k_1} \end{cases} \tag{2.28a}$$

$$y = \begin{cases} k_1 u & \text{pro} \quad |u| \le \dfrac{B}{k_1} \\ B\,\mathrm{sign}(u) & \text{pro} \quad |u| > \dfrac{B}{k_1} \end{cases} \tag{2.28b}$$



Obr. 2.16 Nasycení

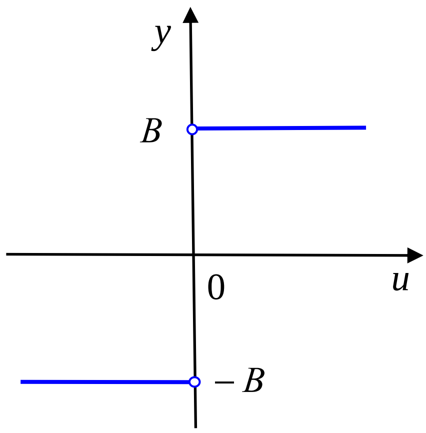
Vzhledem k důležitosti nelinearity typu nasycení je definována funkce nasycení (saturation), viz obr. 1.6a a vztah (1.9), takže tuto nelinearitu můžeme rovněž popsat vztahem

$$y = B\,\mathrm{sat}\left(\frac{k_1 u}{B}\right). \tag{2.28c}$$

Ideální (dvoupolohové) relé (obr. 2.17)

Nelinearita ***ideální relé*** (2.29) je velmi důležitá, a to jak z teoretického, tak i praktického hlediska (dvoupolohová regulace, řízení v klouzavých módech atd.). V matematice je definována funkcí signum (znaménkovou funkcí), viz obr. 1.6b a vztah (1.10).

$$y = \begin{cases} B & \text{pro} \quad u > 0 \\ -B & \text{pro} \quad u < 0 \end{cases} \tag{2.29a}$$



Obr. 2.17 Ideální relé

Pro hodnotu $u = 0$ výstupní hodnota často nebývá definována, viz vztah (2.29a), a proto lze psát

$$y = B\,\mathrm{sign}(u) = B\frac{u}{|u|}. \tag{2.29b}$$

Protože nelinearita ideální relé je nespojitá v bodě u = 0, často se nahrazuje spojitou nehladkou nelinearitou nasycení

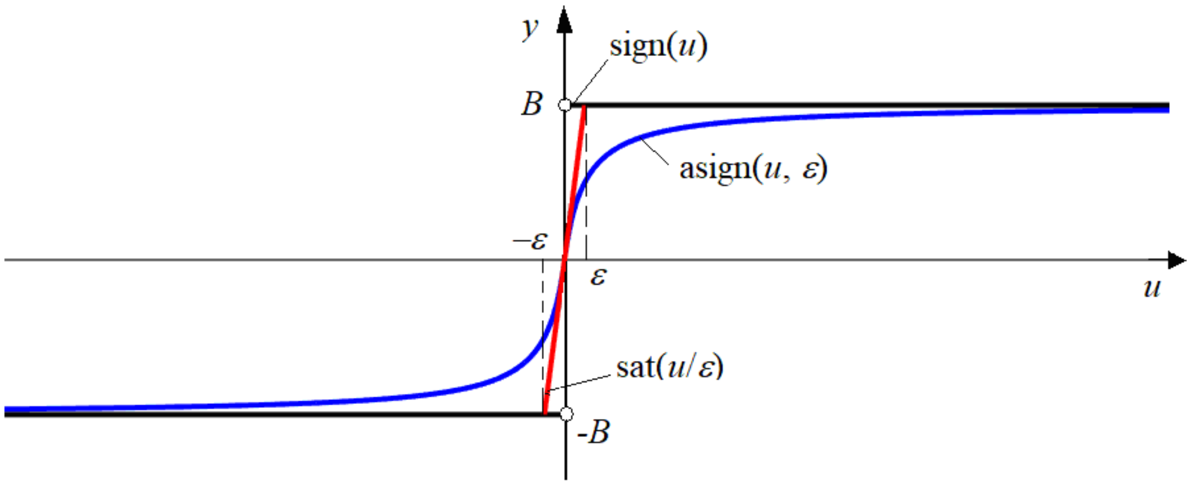
$$y = B\,\mathrm{sat}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$$

nebo spojitou hladkou nelinearitou (ε je malé kladné číslo)

$$y = B\,\mathrm{asign}(u,\varepsilon) = B\frac{u}{|u|+\varepsilon} \tag{2.30}$$

(asign = approximate sign).

Spojité náhrady funkce sign jsou ukázány pro ε = 0,05 na obr. 2.18.



Obr. 2.18 Spojité náhrady funkce sign

Je zřejmé, že platí

$$\mathrm{sat}_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = \mathrm{sign}(u), \tag{2.31}$$

$$\mathrm{asign}_{\varepsilon\to 0}(u,\varepsilon) = \mathrm{sign}(u). \tag{2.32}$$

Obě aproximace, tj.

$$\mathrm{sat}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \quad \text{a} \quad \mathrm{asign}(u,\varepsilon)$$

mají pro u = 0 stejnou tečnu se sklonem $1/\varepsilon$.

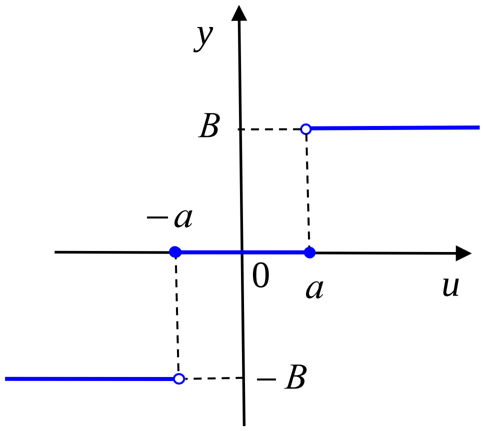
Ideální třípolohové relé (obr. 2.19)

Ideální třípolohové relé (2.33) je uměle vytvořena nelinearita, která se používá v regulaci. Jednotlivé polohy pak mohou např. znamenat: topení – netopení ani nechlazení – chlazení, otáčky vlevo – stop – otáčky vpravo atd. Ideální třípolohové relé je vlastně ideální (dvoupolohové) relé s pásmem necitlivosti.

Ideální třípolohové relé můžeme popsat jednoduchým vztahem

$$y = \begin{cases} B & \text{pro} \quad u > a \\ 0 & \text{pro} \quad |u| \le a \\ -B & \text{pro} \quad u < -a \end{cases} \tag{2.33a}$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad |u| \le a \\ B\,\mathrm{sign}(u) & \text{pro} \quad |u| > a \end{cases} \tag{2.33b}$$



Obr. 2.19 Ideální třípolohové relé

Výše uvedené nelinearity jsou ***jednoznačné*** a ***nemají paměť***. Jsou to statické nelinearity a nejčastěji reprezentují statickou část (charakteristiku) v klasických modelech nelineárních dynamických systémů.

Následující nelinearity obsahují tzv. ***hysterezi***. Jsou nejednoznačné a mají paměť. Právě existence paměti signalizuje, že nejde o čistě statické nelinearity, ale že jsou to nelinearity mající „určitou“ dynamiku projevující se kromě paměti existencí derivace podle času v jejich matematických modelech.

Příklad 2.3

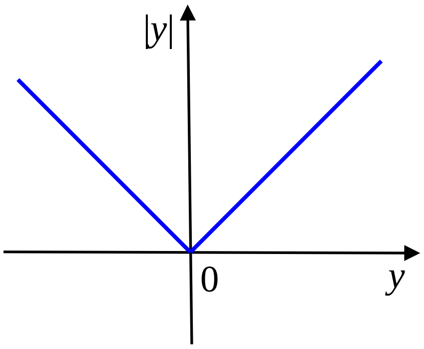
Matematický model nelineárního statického systému je dán rovnicí

$$y(|y| - 2) = u\,. \tag{2.34}$$

Je třeba explicitně analyticky i graficky vyjádřit závislost výstupní veličiny *y* na vstupní veličině *u* (statickou charakteristiku).

Řešení:

Protože v rovnici (2.34) vystupuje jednoznačná nelinearita ***absolutní hodnota*** (obr. 2.20), je třeba uvažovat dva případy.



Obr. 2.20 Absolutní hodnota

a) $y > 0 \Rightarrow |y| = y$

V tomto případě rovnice (2.34) bude

$$y^2 - 2y = u \;\;\Rightarrow\;\; y^2 - 2y - u = 0.$$

Její řešení je

$$y = \begin{cases} 1 + \sqrt{1+u} & \text{pro} \quad u \in (-1, \infty), \\ 1 - \sqrt{1+u} & \text{pro} \quad u \in (-1, 0], \end{cases} \tag{2.35}$$

pro interval $u \in (-1, \infty)$ se jedná o stabilní horní větev, viz obr. 2.21 a pro interval $u \in (-1, 0]$ je to nestabilní část.

b) $y < 0 \Rightarrow |y| = -y$

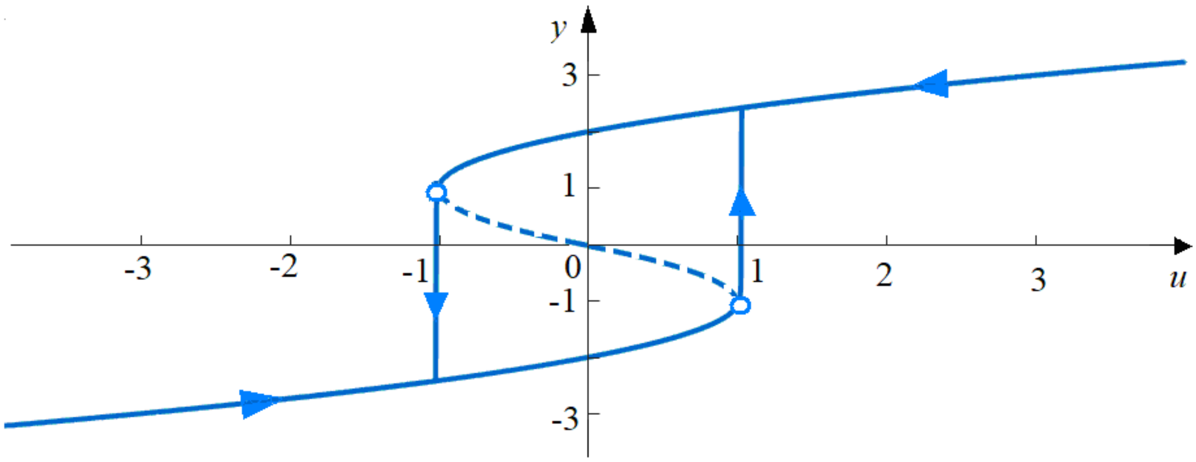
Rovnice (2.34) pak bude

$$-y^2 - 2y = u \;\;\Rightarrow\;\; y^2 + 2y + u = 0.$$

Její řešení je

$$y = \begin{cases} -1 + \sqrt{1-u} & \text{pro} \quad u \in (0, 1), \\ -1 - \sqrt{1-u} & \text{pro} \quad u \in (-\infty, 1), \end{cases} \tag{2.36}$$

pro interval $u \in (0, 1)$ se jedná o nestabilní část, a pro interval $u \in (-\infty, 1)$ je to stabilní spodní větev (obr. 2.21).



Obr. 2.21 Nelinearita typu hystereze – příklad 2.3

Závislosti výstupní veličiny y na vstupní veličině u (2.35) a (2.36) jsou ukázány na obr. 2.21. Plnou čarou jsou označeny stabilní úseky (větve) a čárkovanou čarou nestabilní úseky (větve). Je zřejmé, že pro hodnoty vstupní veličiny $u = \pm 1$ dochází ke skokovým změnám z jedné stabilní větve na druhou. Např. při periodickém průběhu vstupní veličiny u s amplitudou větší než 1 se vytvoří uzavřená smyčka tzv. ***hystereze*** obsahující nestabilní úsek.

V rozmezí vstupní veličiny $u \in (-1{,}1)$ hodnota výstupní veličiny y závisí na její předchozí hodnotě, tj. na její historii. Dochází zde k určitému rozporu – systém je statický, ale má paměť. V okolí hodnot vstupní veličiny $u = \pm 1$ hodnota výstupní veličiny y závisí nejenom na její historii, ale i na její časové změně, tj. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, příp. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Znovu je zde určitý rozpor – systém je statický, ale pro určité hodnoty vstupní veličiny jeho vlastnosti závisí na derivaci $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, příp. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ (existence časových derivací je vlastnost dynamických systémů).

Vidíme, že „dynamika“ se projevuje pouze tam, kde statická charakteristika systému je ***nejednoznačná***.

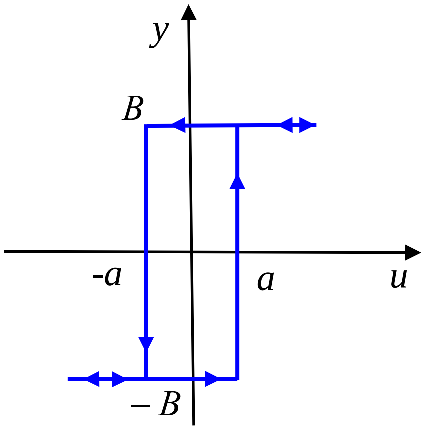
Velkým problémem je, že existuje mnoho druhů hysterezí s nejrůznějšími vlastnostmi, které jsou popisovány matematickými modely s různou strukturou a složitostí.

Většina autorů hysterezi zahrnuje mezi statické charakteristiky, ale vhodnější je hovořit o ***nelinearitě typu hystereze*** (nelinearita s hysterezí).

Dvoupolohové relé s hysterezí (obr. 2.22)

Matematický model (dvoupolohového) ***relé s hysterezí*** (2.37) je neúplný model, který popisuje jeho vlastnosti např. pro harmonický vstup. Většinou jde o uměle vytvořenou nelinearitu, která má široké použití v regulaci a při praktické realizaci řízení v klouzavém módu.

$$y = \begin{cases} B & \text{pro} \quad u > a \wedge \dot{u} > 0 \\ -B & \text{pro} \quad u < a \wedge \dot{u} > 0 \\ B & \text{pro} \quad u > -a \wedge \dot{u} < 0 \\ -B & \text{pro} \quad u < -a \wedge \dot{u} < 0 \end{cases} \tag{2.37}$$



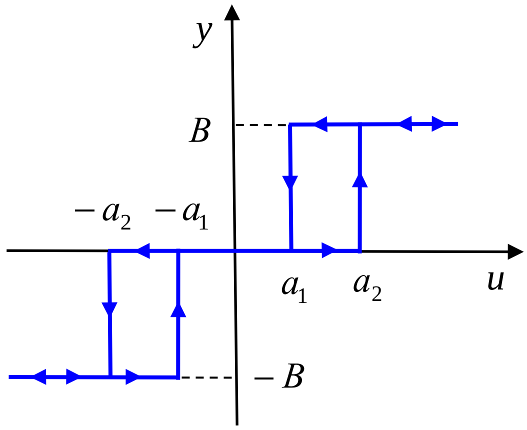
Obr. 2.22 Dvoupolohové relé s hysterezí

Je zajímavé, že relé s hysterezí může být vytvořeno zpětnovazebním zapojením statických jednoznačných nelinearit, viz obr. 2.24 a v podkapitole 2.2.2. v příkladě 2.6.

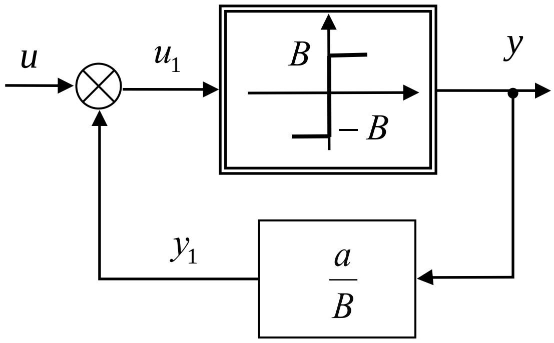
Třípolohové relé s hysterezí (obr. 2.23)

Rovněž tato nelinearita je uměle vytvořena. Má použití v regulačních obvodech, především v klimatizačních zařízeních, servomechanismech atd. Její matematický model (2.38) je také neúplný a popisuje její vlastnosti např. pro harmonický vstup.

$$y = \begin{cases} B & \text{pro} \quad u > a_2 \wedge \dot{u} > 0 \\ 0 & \text{pro} \quad -a_1 \le u \le a_2 \wedge \dot{u} > 0 \\ -B & \text{pro} \quad u < -a_1 \wedge \dot{u} > 0 \\ B & \text{pro} \quad u > a_1 \wedge \dot{u} < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad -a_2 \le u \le a_1 \wedge \dot{u} < 0 \\ -B & \text{pro} \quad u < -a_2 \wedge \dot{u} < 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

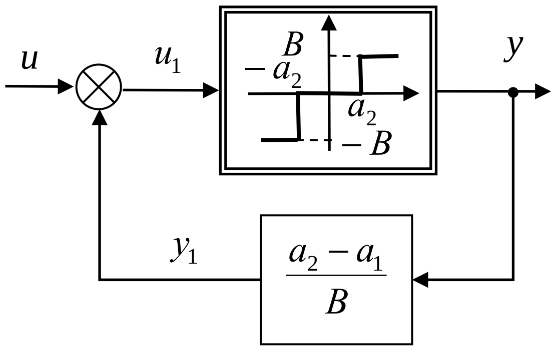


Obr. 2.23 Třípolohové relé s hysterezí



Obr. 2.24 Realizace dvoupolohového relé s hysterezí pomocí kladné zpětné vazby

Realizace třípolohového relé s hysterezí pomocí kladné zpětné vazby je na obr. 2.25.



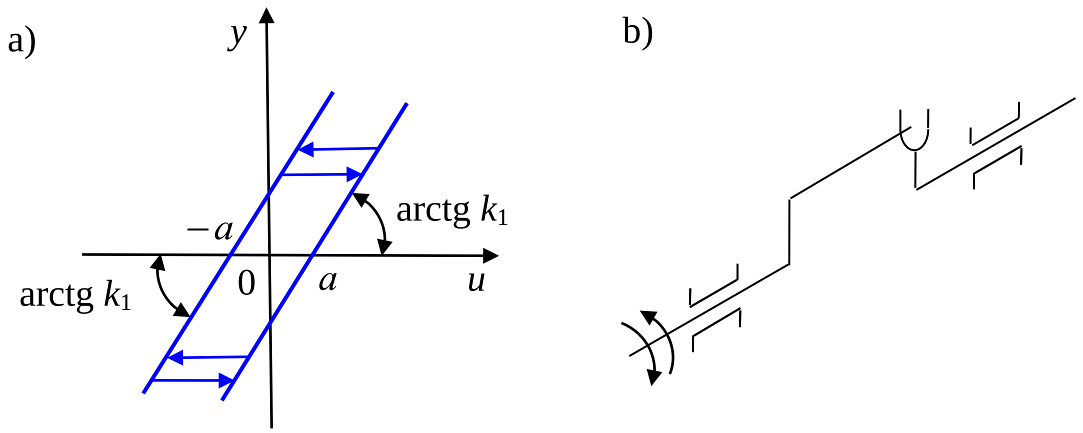
Obr. 2.25 Realizace třípolohového relé s hysterezí pomocí kladné zpětné vazby

Vůle (obr. 2.26)

Nelinearita ***vůle*** vystupuje v nejrůznějších mechanismech, kde jedna část předává pohyb jiné části. Jsou to především ozubené a pákové převody, kloubové mechanismy atd.

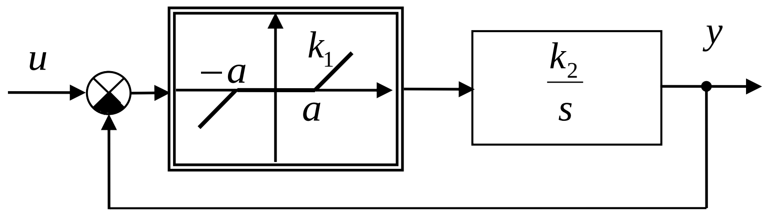
Nelinearita vůle je zvláštní typ nelinearity, jejíž vlastnosti vystihuje obr. 2.26b a částečně i neúplný matematický model (2.39).

$$y=\begin{cases} k_1(u-a) & \text{pro} \quad \dot{u}>0 \\ \text{konst} & \text{pro} \quad \left|u-\dfrac{y}{k_1}\right|<a \wedge \dot{u}=0 \\ k_1(u+a) & \text{pro} \quad \dot{u}<0 \end{cases} \tag{2.39}$$



Obr. 2.26 Nelinearita vůle: a) charakteristika, b) interpretace

Realizace hystereze nelinearity vůle je na obr. 2.27, ze kterého je rovněž zřejmá její dynamika. Sklon obou větví je k_1 a k_2 je veliké číslo $(k_2 >> 1)$.



Obr. 2.27 Realizace nelinearity vůle pomocí záporné zpětné vazby

Jak již bylo řečeno v příkladu 2.3, existuje mnoho různých hysterezí. U některých dochází k nespojitostem (např. obr. 2.21, 2.22, 2.23), ale většina hysterezí nespojitosti neobsahuje. Důležité je, že hystereze vytváří uzavřenou smyčku, která nezmizí ani při velmi malých kmitočtech vstupní periodické veličiny. ***S hysterezí se setkáváme u každého reálného systému, stejně jako s necitlivostí a nasycením***.

2.2.2 Základní zapojení statických nelinearit

Při analýze a syntéze základních zapojení statických jednoznačných nelinearit se používají jak analytické, tak i grafické metody.

U analytických metod se předpokládá, že statické nelinearity jsou jednoznačné a prosté, tj. musí platit

$$u_1 \neq u_2 \;\Leftrightarrow\; f(u_1) \neq f(u_2). \tag{2.40}$$

U grafických metod se z důvodu jednoduchosti většinou předpokládá, že nelinearity jsou liché, tj.

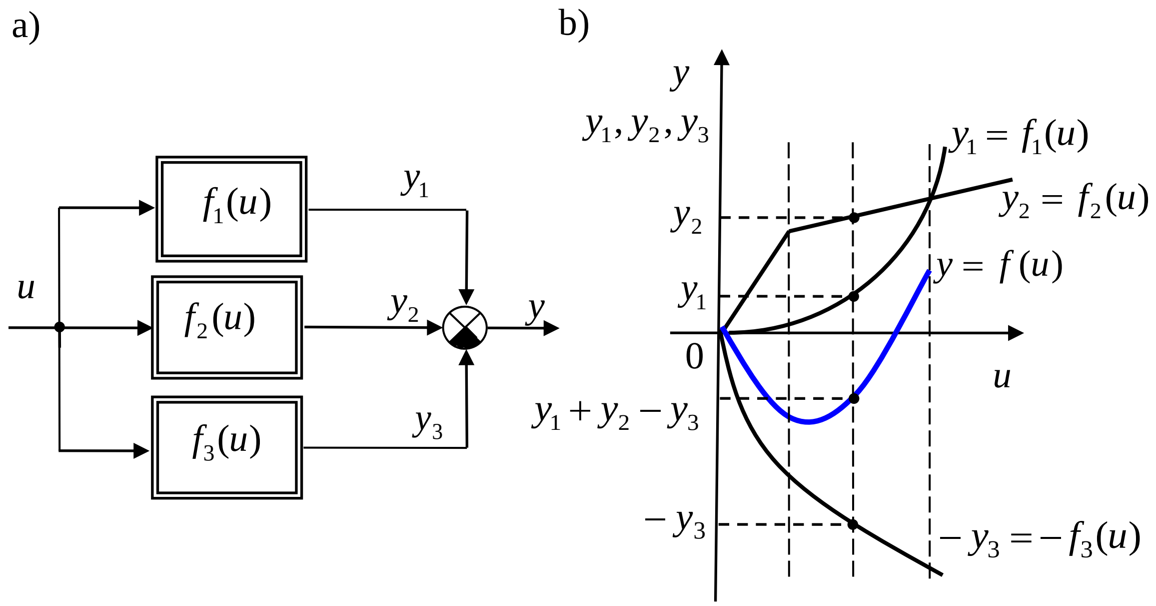
$$-f(-u) = f(u), \tag{2.41}$$

a proto při konstrukci výsledné statické nelinearity lze uvažovat u každé nelinearity pouze její polovinu v prvním kvadrantu.

Paralelní zapojení

Pro paralelní zapojení tří nelinearit v souladu s obr. 2.28a platí

$$y = f(u) = y_1 + y_2 - y_3 = f_1(u) + f_2(u) - f_3(u). \tag{2.42}$$



Obr. 2.28 Paralelní zapojení statických nelinearit: a) blokové schéma, b) konstrukce výsledné statické nelinearity

Ze vztahu (2.42) vyplývá přímo grafická konstrukce výsledné statické nelinearity (obr. 2.28b). Pro zvolenou hodnotu vstupní veličiny *u* sečteme pořadnice y_1, y_2 a y_3 s uvažováním příslušných znamének u součtového uzlu a dostaneme tak výslednou hodnotu y. Je zřejmé, že uvedena metoda může být použita pro libovolný počet statických nelinearit.

Příklad 2.4

Je dána statická nelinearita

$$y_1 = f_1(u) = \frac{u}{u+1} \tag{2.43}$$

a je třeba navrhnout vhodnou paralelní statickou nelinearitu $y_2 = f_2(u)$ tak, aby výsledná statická nelinearita byla lineární se sklonem 2, tj. $y = f(u) = 2u$.

$$y = f(u) = 2u. \tag{2.44}$$

Řešení:

Pro paralelní zapojení nelinearit lze psát

$$y = y_1 + y_2 \;\Rightarrow\; y_2 = y - y_1 \;\Rightarrow$$

$$y_2 = 2u - \frac{u}{u+1} = \frac{2u^2+u}{u+1} \;\Rightarrow$$

$$y_2 = f_2(u) = \frac{2u^2+u}{u+1}. \tag{2.45}$$

Je zřejmé, že platí

$$y = y_1 + y_2 = \frac{u}{u+1} + \frac{2u^2+u}{u+1} = 2u,$$

a proto zadání bylo splněno.

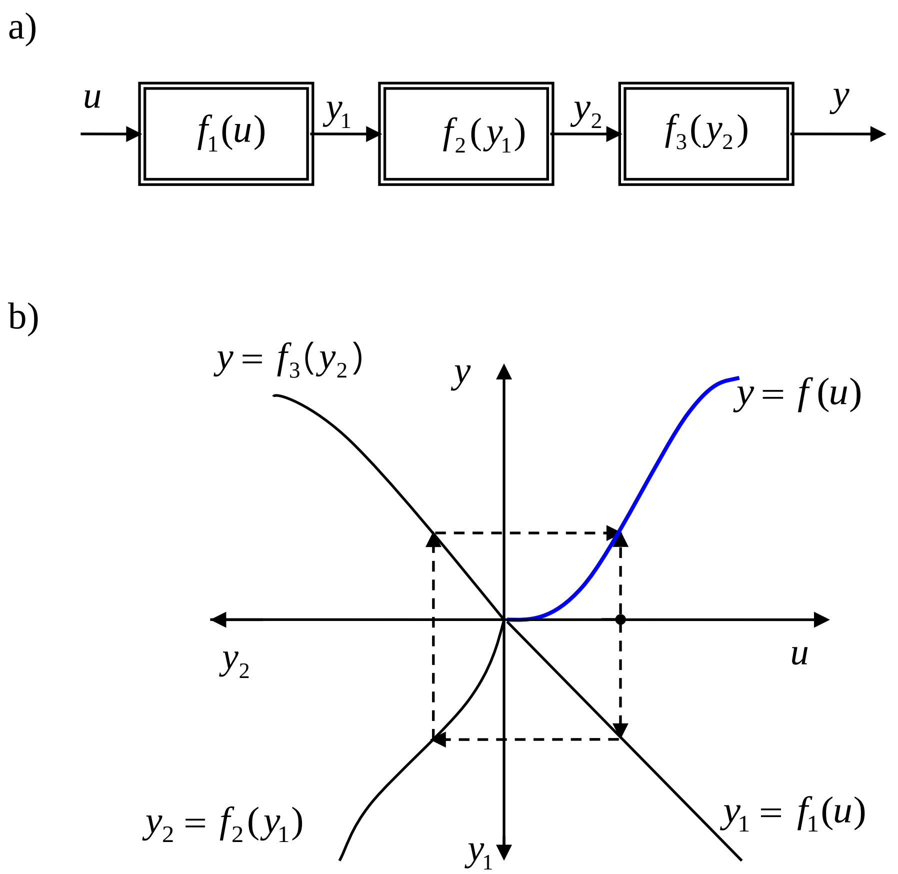
Sériové zapojení

Pro sériové zapojení tří jednoznačných statických nelinearit v souladu s obr. 2.29a lze psát

$$y = f_3(y_2),\quad y_2 = f_2(y_1),\quad y_1 = f_1(u)$$

$$y = f_3\{f_2[f_1(u)]\}. \tag{2.46}$$

Sestrojení výsledné statické nelinearity je zřejmé z obr. 2.29b. Pro zvolenou hodnotu vstupní veličiny u postupně určíme hodnoty y_1, y_2 a odpovídající hodnotu y. Při větším počtu nelinearit sestrojíme nejdříve dílčí výsledné nelinearity a pak teprve výslednou statickou nelinearitu. Při menším počtu než 3 zastoupíme nelinearitu lineární závislosti, např. druhou nelinearitu $y_2 = y_1$.



Obr. 2.29 Sériové zapojení statických nelinearit: a) blokové schéma, b) konstrukce výsledné statické nelinearity

Příklad 2.5

Pro statickou nelinearitu (2.43) z příkladu 2.4, tj. $y_1 = \dfrac{u}{u+1}$ je třeba navrhnout sériovou statickou nelinearitu $y = f_2(y_1)$, která zajistí výslednou lineární statickou charakteristiku (2.44), tj. $y = 2u$.

Řešení:

V souladu se vztahem (2.46) můžeme psát

$$y = f_2(y_1) = f_2\left[f_1(u)\right].$$

Zvolíme-li

$$f_2(y_1) = 2 f_1^{-1}(y_1), \quad u = f_1^{-1}(y_1)$$

kde

$$f_1^{-1}(y_1) = \frac{y_1}{1 - y_1}$$

je inverzní funkce (funkce f_1 je prostá, lze tedy k ní vytvořit funkci inverzní), pak dostaneme

$$y = f_2(y_1) = \frac{2y_1}{1-y_1}. \tag{2.47}$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$y = f_2\left[f_1(u)\right] = \frac{2\dfrac{u}{u+1}}{1-\dfrac{u}{u+1}} = 2u\,.$$

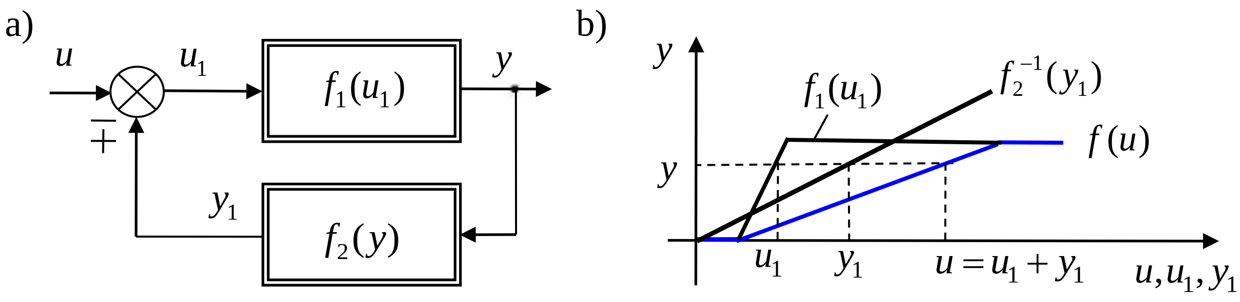
Zpětnovazební zapojení

Pro zpětnovazební zapojení statických nelinearit v souladu s obr. 2.30a lze psát

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = u \mp y_1 \;\Rightarrow \\ &u = u_1 \pm y_1 = f_1^{-1}(y) \pm f_2(y) = f^{-1}(y) \;\Rightarrow \\ &y = f(u) \end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

Vztahy (2.48) ukazují na postup řešení zpětnovazebního zapojení, tj. nejdříve se určí závislost $u = f^{-1}(y)$ a pak teprve $y = f(u)$.

Konstrukce výsledné statické nelinearity pro zápornou zpětnou vazbu je ukázána na obr. 2.30b. Nejdříve se vykreslí nelinearita přímé větve $y = f_1(u_1)$ a inverzní nelinearita zpětnovazební větve $y = f_2^{-1}(y_1)$ a pro zvolenou hodnotu výsledné veličiny y sečteme úseky u_1, y_1 a dostaneme odpovídající hodnotu vstupní veličiny u ($u = u_1 + y_1$ pro zápornou zpětnou vazbu).



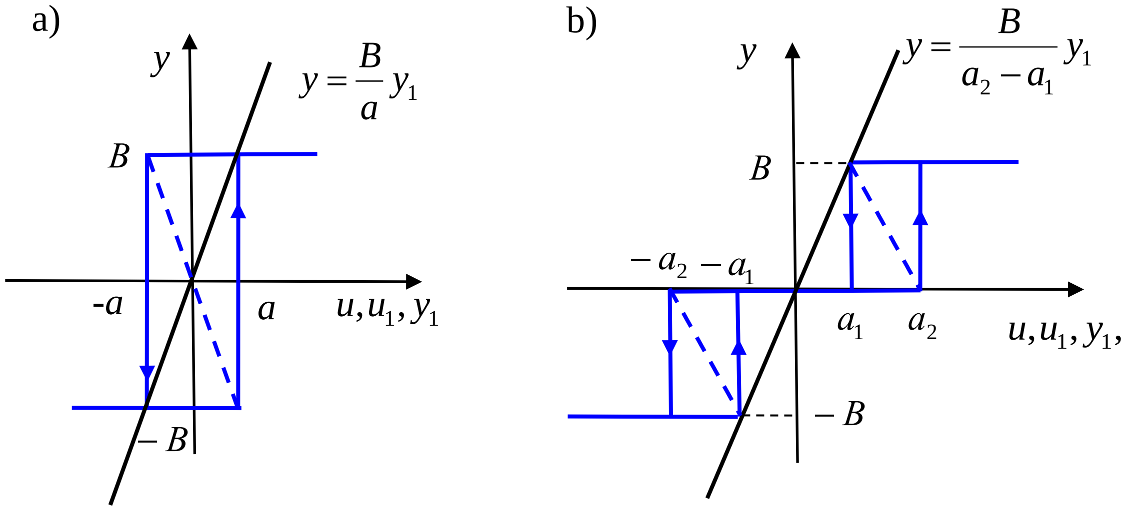
Obr. 2.30 Zpětnovazební zapojení statických nelinearit: a) blokové schéma, b) konstrukce výsledné statické nelinearity pro zápornou zpětnou vazbu

Příklad 2.6

Je třeba ukázat, že zapojení s kladnou zpětnou vazbou na obr. 2.24 a 2.25 skutečně realizuje dvoupolohové a třípolohové relé s hysterezí obr. 2.22 a 2.23.

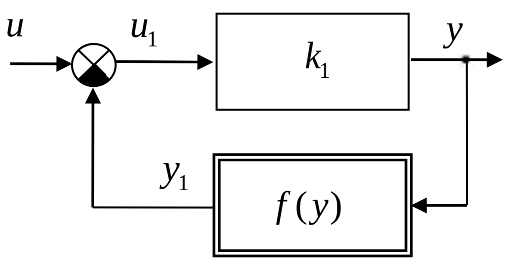
Řešení:

Vzhledem k tomu, že obě reléové nelinearity se skládají z přímkových úseků a kladná zpětná vazba je lineární, konstrukce výsledných nelinearit je velmi snadná (stačí vždy určit 1 bod, např. pro $y = B$ a uvědomit si, že v prvém případě $u_1 = 0$, ve druhém případě $u_1 = \pm a_2$ a využít středovou symetrii), viz obr. 2.31. Nestabilní úseky reléových nelinearit s hysterezí jsou čárkované.



Obr. 2.31 Konstrukce reléových nelinearit s hysterezí: a) dvoupolohové relé, b) třípolohové relé

Zapojení se zápornou zpětnou vazbou lze použít pro realizaci inverzní statické nelinearity, viz obr. 2.32.



Obr. 2.32 Blokové schéma se zápornou zpětnou vazbou pro realizaci inverzní funkce

V souladu s obr. 2.32 a vztahy (2.48) můžeme psát

$$u_1 = u - y_1 \quad \Rightarrow$$

$$u = u_1 + y_1 = \frac{1}{k_1} y + f(y)$$

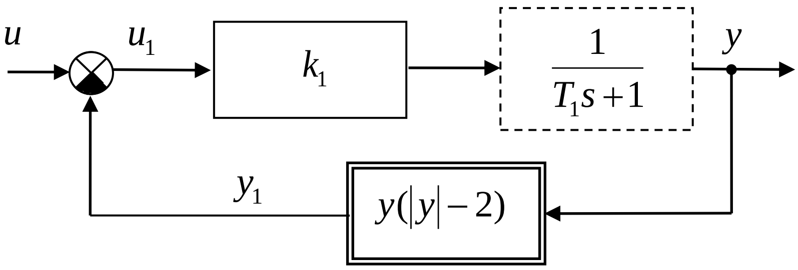
Pro $k_1 \to \infty$ dostaneme

$$\frac{1}{k_1} y \to 0 \;\Rightarrow\; u \approx f(y) \;\Rightarrow\; y \approx f^{-1}(u). \tag{2.49}$$

Obdrželi jsme důležitou vlastnost záporné zpětné vazby – ***při dostatečně vysoké hodnotě koeficientu přenosu (zesílení)*** k_1 ***v přímé větvi zapojení se zápornou zpětnou vazbou realizuje inverzi zpětné vazby***.

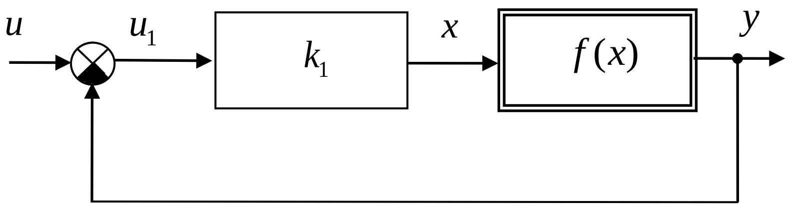
Zapojení na obr. 2.32 bylo použito při vykreslení funkce (2.34), viz obr. 2.21. Protože inverzní funkce je nejednoznačná, vznikla hystereze. Bylo použito zpětnovazební zapojení na obr. 2.33 pro parametry $k_1 = 100$ a $T_1 = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Vstupní veličina měla harmonický průběh s amplitudou 4.

Čárkovaně je na obr. 2.33 označená malá setrvačnost řešící problém „algebraické smyčky" při číslicové simulaci. Tato setrvačnost při analýze zapojení nemusí být uvažována.



Obr. 2.33 Realizace inverzní funkce (2.34)

Zapojení se zápornou zpětnou vazbou lze rovněž s výhodou použít k linearizaci i velmi silné nelinearity, která může být i s hysterezí.



Obr. 2.34 Linearizace nelinearity pomocí záporné zpětné vazby

Na základě obr. 2.34 a vztahů (2.48) můžeme psát

$$u_1 = u - y \quad \Rightarrow$$

$$u = u_1 + y = \frac{1}{k_1} f^{-1}(y) + y.$$

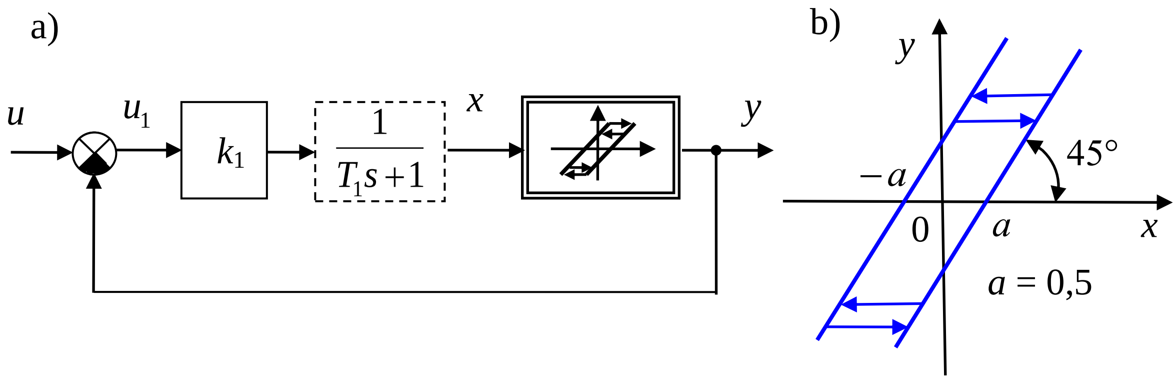
Pro $k_1 \to \infty$ dostaneme

$$\frac{1}{k_1} f^{-1}(y) \to 0 \Rightarrow u \approx y \Rightarrow y \approx u\,. \tag{2.50}$$

Obdrželi jsme očekávaný výsledek. Záporná zpětná vazba je jednotková, a proto její inverze je rovněž jednotka.

Příklad 2.7

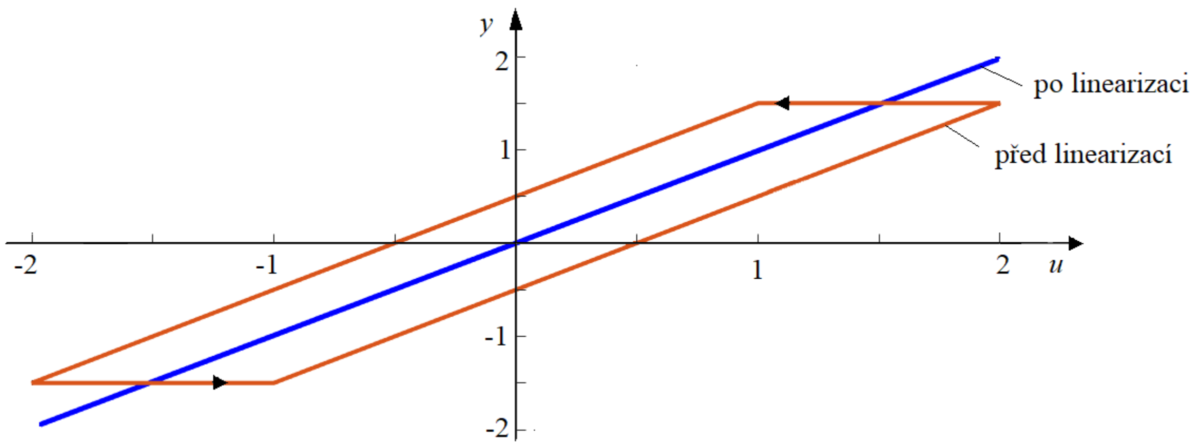
Je třeba linearizovat nelinearitu vůle s parametry uvedenými na obr. 2.35b.



Obr. 2.35 Linearizace: a) blokové schéma zpětnovazebního zapojení, b) linearizovaná nelinearita

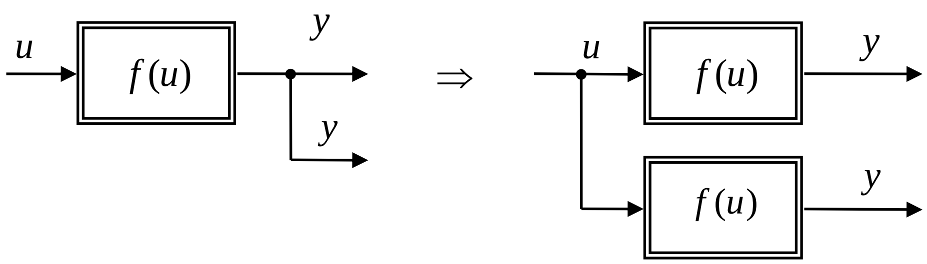
Řešení:

Pro linearizaci bylo použito blokové schéma na obr. 2.35a pro $k_1 = 100$ a $T_1 = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Při harmonické vstupní veličině s amplitudou 2 byla získána téměř lineární závislost, viz obr. 2.36, kde je současně zobrazena i původní nelinearita. Malá setrvačnost (označena čárkovaně na obr. 2.35a) je použita pro odstranění problému „algebraická smyčka“.

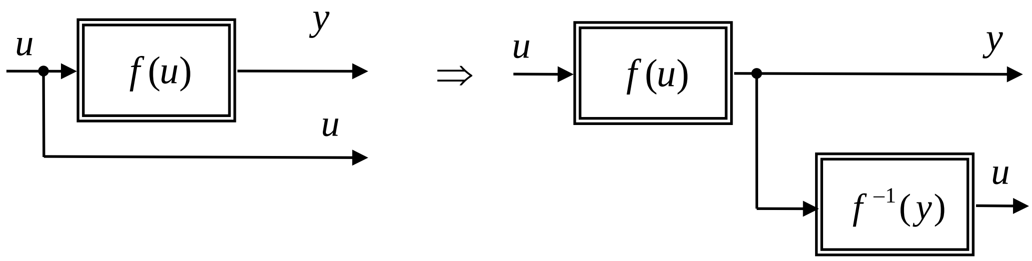


Obr. 2.36 Výsledek linearizace příklad 2.7

Někdy je třeba blokové schéma s nelinearitou upravit. Protože neplatí princip linearity (superpozice), nelze použít postupy známé z lineární teorie. Na obr. 2.37 je ukázáno přesunutí informačního uzlu před nelinearitu a na obr. 2.38 za nelinearitu. V tomto případě z důvodu existence inverze $f^{-1}(y)$ se předpokládá, že funkce $f(u)$ je prostá.

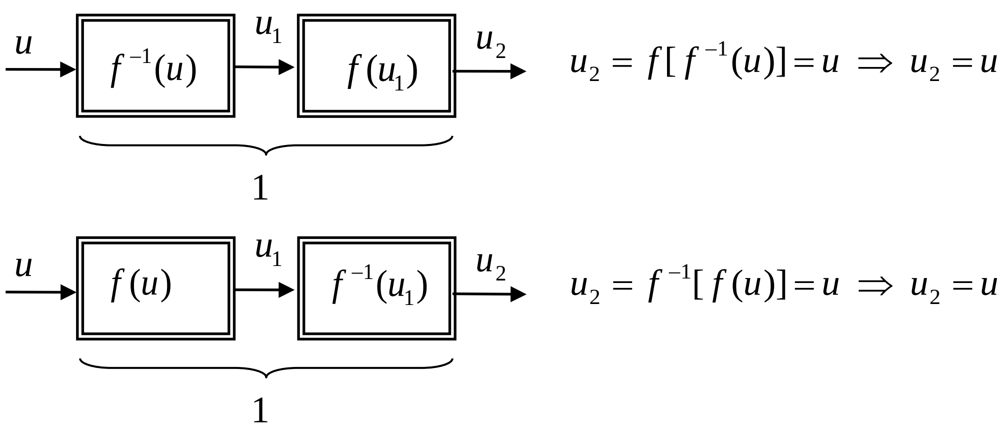


Obr. 2.37 Přesunutí informačního uzlu před nelinearitu



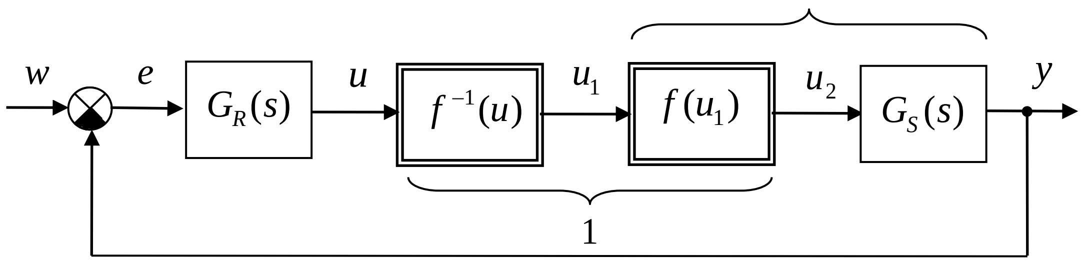
Obr. 2.38 Přesunutí informačního uzlu za nelinearitu

V případě, že regulovaná soustava je popsána ve tvaru Hammersteinova nebo Wienerova modelu (obr. 2.12), pak za předpokladu, že lineární dynamická část je popsána přenosem $G_S(s)$ a nelineární statická část prostou funkcí f, je možné využít vlastností inverzní funkce f^{-1}, viz obr. 2.39.



Obr. 2.39 Sériové zapojení prosté funkce f a její inverze f^{-1}

Např. pro soustavu s Hammersteinovým modelem lze použít schéma na obr. 2.40.

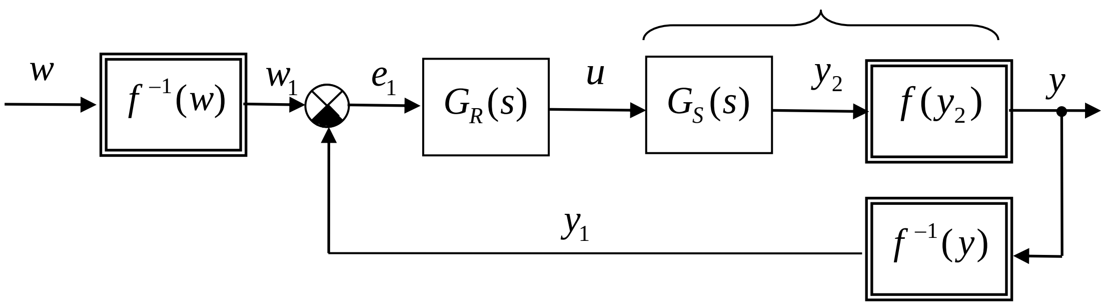


Obr. 2.40 Regulační obvod se soustavou popsanou Hammersteinovým modelem

Z obr. 2.40 je zřejmé, že pro volbu regulátoru a jeho seřízení lze použít libovolnou metodu z lineární teorie, protože platí

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1+G_R(s)G_S(s)}.$$

V případě Wienerova modelu soustavy je možné použít schéma regulačního obvodu na obr. 2.41.



Obr. 2.41 Regulační obvod se soustavou popsanou Wienerovým modelem

Protože platí $y_1(t) = y_2(t)$, viz obr. 2.39, lze pro regulační obvod na obr. 2.41 psát

$$\frac{Y_2(s)}{W_1(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1+G_R(s)G_S(s)},$$

tj. i v tomto případě lze pro volbu regulátoru a jeho seřízení použít libovolnou metodu pro lineární regulační obvody. Samozřejmě je třeba ještě zajistit, aby $y(t) \rightarrow w(t)$ vhodnou nelinearitou

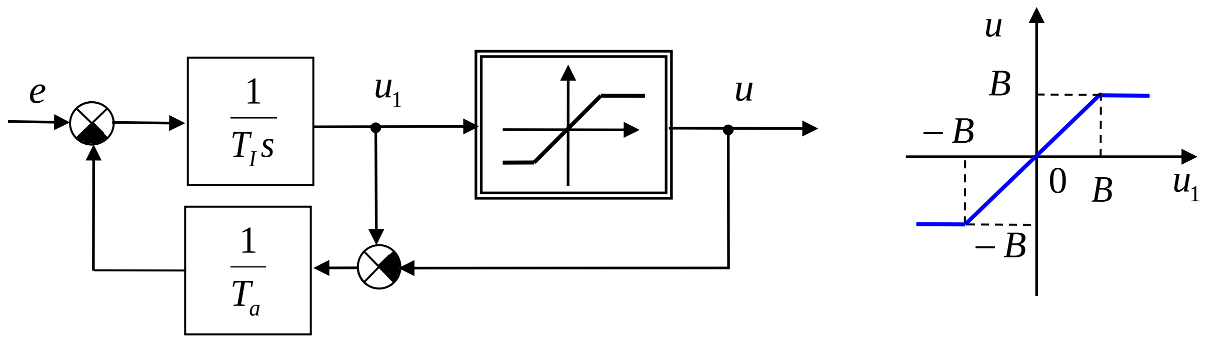
$$w_1 = f^{-1}(w),$$

která může být vyjádřena např. ve tvaru grafu nebo tabulky, podle kterého operátor nastaví v závislosti na žádané hodnotě $w(t)$ hodnotu $w_1(t)$.

Je zřejmé, že pro Hammersteinův – Wienerův model se použije kombinace obou přístupů.

Pro konvenční regulátory s omezením výstupu se často používá Wienerův model, viz např. obr. 2.14. Pokud regulátor obsahuje integrační složku, nelinearita typu nasycení (obr. 2.16) způsobuje pokračování integrace i při dosažení nasycení, tzv. ***windup***, který nejenom podstatně zhoršuje kvalitu regulace, ale může být příčinou i nestability.

Podstatného snížení pokračující integrace lze dosáhnout opatřením, které se nazývá ***antiwindup***. Nejčastěji používané opatření proti pokračující integraci je ukázáno na obr. 2.42.



Obr. 2.42 Regulátor I s opatřením antiwindup

Na obr. 2.42 T_I je integrační časová konstanta a $1/T_a$ – konstanta. Pro regulátor I s opatřením antiwindup platí

$$U_1(s) = \frac{1}{T_I s}\left\{E(s) - \frac{1}{T_a}[U_1(s) - U(s)]\right\} \Rightarrow$$

$$U_1(s) = \frac{T_a}{T_a T_I s + 1}E(s) + \frac{1}{T_a T_I s + 1}U(s).$$

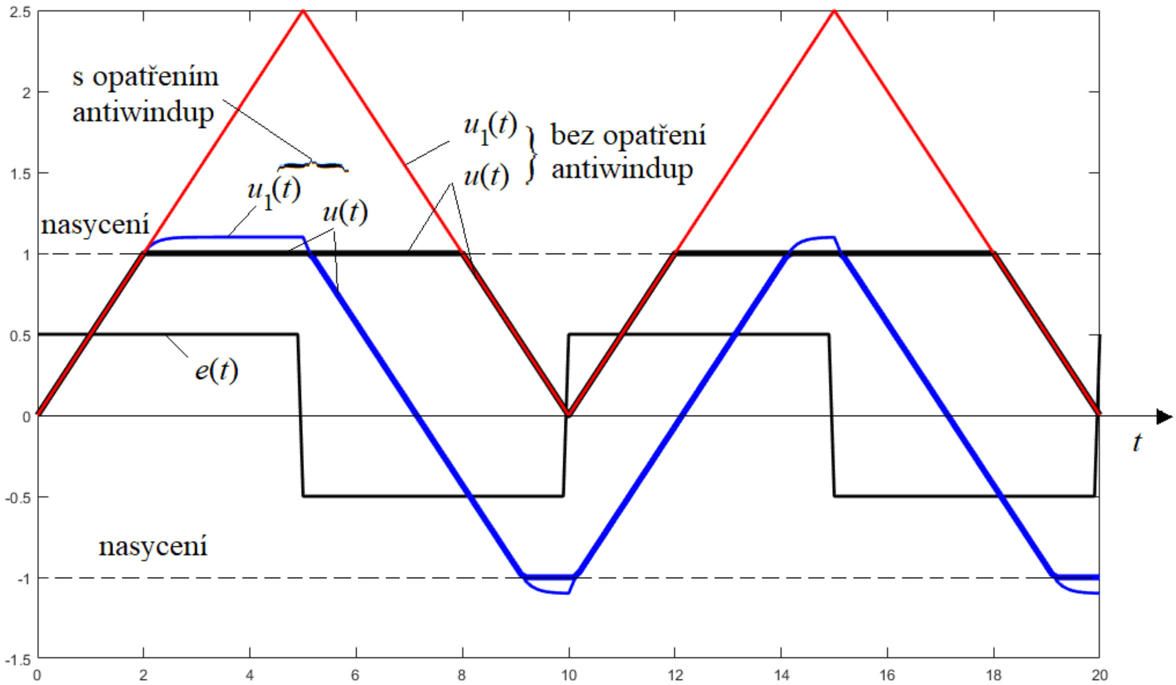
Z těchto vztahů vyplývá, že

$$U_1(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_I s}E(s) & \text{pro} \quad |u_1(t)| \le B \\ \dfrac{T_a}{T_a T_I s + 1}E(s) + \dfrac{1}{T_a T_I s + 1}U(s) & \text{pro} \quad |u_1(t)| > B \end{cases}$$

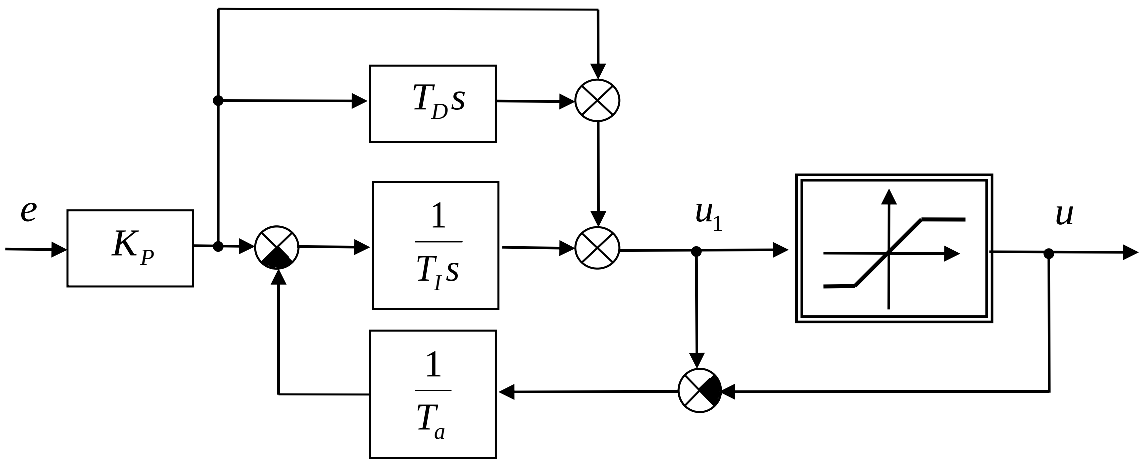
tj. pro $|u_1(t)| \le B$ se regulátor chová jako integrační a pro $|u_1(t)| > B$ se integrátor změní na proporcionální člen se setrvačností 1. řádu.

Funkce opatření antiwindup podstatně sníží překročení mezní hodnoty nasycení. Názorně to ukazuje obr. 2.43, kde byly použity hodnoty $T_I = 1\,\mathrm{s}$ a $T_a = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Průběh regulační odchylky byl obdélníkový s periodou 5 s.

Regulátor PID s opatřením antiwindup je na obr. 2.44.



Obr. 2.43 Průběhy veličin pro regulátor I s opatřením antiwindup a bez něho



Obr. 2.44 Regulátor PID s opatřením antiwindup

2.3 Analýza nelineárních dynamických systémů

V podkapitole 2.1 byly popsány základní vlastnosti nelineárních dynamických systémů. Nyní se budeme věnovat podrobněji nelineárním autonomním, tj. nebuzeným *t*-invariatním systémům, jejichž obecné (stavové) složkové vyjádření má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), & x_2(0) &= x_{20}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), & x_n(0) &= x_{n0}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Velmi výhodný je tvar, ve kterém každá stavová složka je derivací předchozí složky, tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(0) &= x_{20}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n), & x_n(0) &= x_{n0}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

V tomto případě stav $\mathbf{x}$ se nazývá ***fáze*** a všude místo pojmu stavový se používá pojem ***fázový***, např. fázový model, fázový prostor, fázová trajektorie atd. Pojem stav je obecnější než pojem fáze, tj. každá fáze je stavem, ale opačně to neplatí. Někdy, především v matematické literatuře, pojmy stav a fáze se nerozlišují.

Výhodou fázového vyjádření je snadné určení orientace fázové trajektorie především pro $n = 2$ a např. u mechanických systémů interpretace fázových složek: x – poloha, $\dot{x}$ – rychlost, $\ddot{x}$ – zrychlení, $\dddot{x}$ – ryv.

Převedení (transformace) stavového vyjádření na fázové vyjádření nemusí být jednoduché a vždy možné.

Příklad 2.8

Nelineární dynamický systém je popsán stavovým modelem

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + z_2, & z_1(0) &= z_{10}, \\ \dot{z}_2 &= z_1^2 + z_2^3, & z_2(0) &= z_{20}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

který je třeba převést na fázový model.

Řešení:

Zvolíme např.

$$x_1 = z_1, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1 \ \Rightarrow\ x_2 = x_1 + z_2 \ \Rightarrow\ z_2 = x_2 - x_1$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10} = z_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (x_2 - x_1)^3 + x_2, & x_2(0) &= x_{20} = z_{10} + z_{20}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Úspěšnost převedení stavového modelu na fázový model závisí na jeho složitosti a na vhodné volbě nových stavových složek (proměnných).

Příklad 2.9

Dynamický systém je popsán nelineární diferenciální rovnicí n-tého řádu

$$\begin{aligned} &z^{(n)} = f(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ldots, z^{(n-1)}), \\ &z(0) = z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \ldots, z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Daný model je třeba vyjádřit fázově.

Řešení:

Zvolíme

$$x_1 = z, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}, \ldots, x_n = \dot{x}_{n-1} = z^{(n-1)}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, && x_1(0) = x_{10} = z_0, \\ &\dot{x}_2 = x_3, && x_2(0) = x_{20} = \dot{z}_0, \\ &\quad\vdots && \quad\vdots \\ &\dot{x}_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), && x_n(0) = x_{n0} = z_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

2.3.1 Analýza ve stavové a fázové rovině

Metoda stavové nebo fázové roviny dovoluje analyzovat vlastnosti dynamických systémů popsaných soustavou dvou diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), && x_1(0) = x_{10}, \\ &\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), && x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

případně diferenciální rovnicí 2. řádu

$$\ddot{z} = f(z, \dot{z}), \quad z(0) = z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \tag{2.58}$$

kterou lze vždy přímo zapsat fázově (viz příklad 2.9), tj. pro $x_1 = z, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$ se dostane

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, && x_1(0) = x_{10} = z_0, \\ &\dot{x}_2 = f(x_1, x_2), && x_2(0) = x_{20} = \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Je zřejmé, že fázové vyjádření (2.59) je speciálním případem stavového vyjádření (2.57) pro $f_1(x_1, x_2) = x_2$.

Stavovou trajektorii $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ pro $0 \le t < \infty$ můžeme získat složkově řešením soustavy rovnic (2.57) a obdržíme parametrické řešení

$$x_1 = x_1(t), \;\; x_2 = x_2(t) \tag{2.60}$$

s parametrem t.

Eliminací parametru (času) t získáme rovnici stavové trajektorie

$$x_2 = x_2(x_1)\,. \tag{2.61}$$

Rovnici stavové trajektorie (2.61) můžeme často získat přímo. Vydělením druhé rovnice první rovnicí v (2.57) se dostane diferenciální rovnice 1. řádu stavové trajektorie

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}\,, \tag{2.62}$$

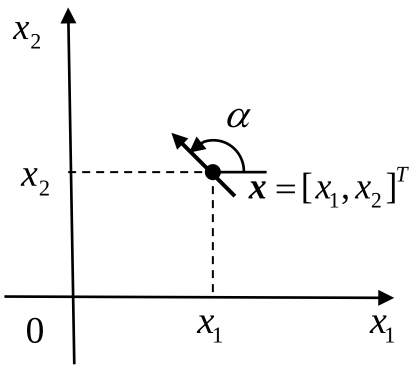
protože

$$\dot{x}_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\,,\ \dot{x}_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\,.$$

Řešením diferenciální rovnice (2.62) se obdrží přímo rovnice stavové trajektorie (2.61) pro daný počáteční stav $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$. Bohužel tato diferenciální rovnice bývá často silně nelineární a její analytické řešení nelze vždy snadno určit. Často pro posouzení vlastností dynamických systémů 2. řádu dobře poslouží přibližný průběh stavové (fázové) trajektorie získaný ručním náčrtem.

Z diferenciální rovnice (2.62) na základě její pravé strany lze pro každý bod $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$ získat směrnici tečny stavové trajektorie (která tímto bodem prochází). Tečna v daném bodě se znázorní krátkou úsečkou se sklonem α (obr. 2.45) s případnou orientací. Pokud se tyto tečny (úsečky) určí pro celou síť bodů v definiční oblasti pravé strany diferenciální rovnice (2.62), tak se obdrží její ***směrové pole***.

Ruční získání směrového pole je pracné. Některé grafické kalkulačky mají tuto funkci zabudovanou jako slope (direction, vector) field. Pro zadaný počáteční stav lze průběh stavové trajektorie (v matematice se používá pojem integrální křivka) přibližně načrtnout.



Obr. 2.45 Úsečka reprezentující tečnu stavové trajektorie v bodě $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$

Pro ruční vykreslení stavové (fázové) trajektorie nebo stavového (fázového) portrétu je značně výhodnější ***metoda izoklín***. ***Izoklína*** je geometrické místo bodů, v nichž tečny stavových trajektorií mají stejný sklon.

Rovnici izoklín získáme z diferenciální rovnice stavové trajektorie (2.62) pro konstantní sklon, tj. pro konstantní směrnici tečny stavové trajektorie

$$\frac{\mathrm{d}\, x_2}{\mathrm{d}\, x_1} = \mathrm{tg}\,\alpha_i\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_i = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \;\Rightarrow \tag{2.63}$$

$$x_2 = f(x_1, \mathrm{tg}\,\alpha_i)\,. \tag{2.64}$$

Z rovnice izoklín (2.64) pro daný úhel sklonu tečny stavové trajektorie α_i nebo její směrnice $\mathrm{tg}\,\alpha_i$ se dostane odpovídající izoklína. ***Izoklíny se mohou protínat pouze v singulárních bodech, tj. v rovnovážných stavech***.

Podobně jako u směrového pole pro danou izoklínu sklony tečen znázorníme krátkými úsečkami s případnou orientací.

Při sestrojování průběhu stavové (fázové) trajektorie nebo stavového (fázového) portrétu metodou izoklín postupujeme tak, že v definiční oblasti funkcí $f_1(x_1, x_2)$ a $f_2(x_1, x_2)$ určíme ***hlavní izoklíny***, pro které $\dot{x}_1 = 0$ a $\dot{x}_2 = 0$, tj. pro které je nulová změna v čase pro x_1 a x_2:

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = f_{10}(x_1)\,, \tag{2.65}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = f_{20}(x_1)\,. \tag{2.66}$$

Je zřejmé, že izoklína (2.65) určuje tečny kolmé na osu x_1 (nulová rychlost $\dot{x}_1 = 0$) a izoklína (2.66) určuje zase tečny kolmé na osu x_2 (nulová rychlost $\dot{x}_2 = 0$), viz obr. 2.46.

Průsečík hlavních izoklín (2.65) a (2.66) určuje rovnovážný stav (obecně nemusí existovat).

Izoklína (2.65) rozděluje orientaci (směr) stavových trajektorií zleva – doprava a naopak, tj.

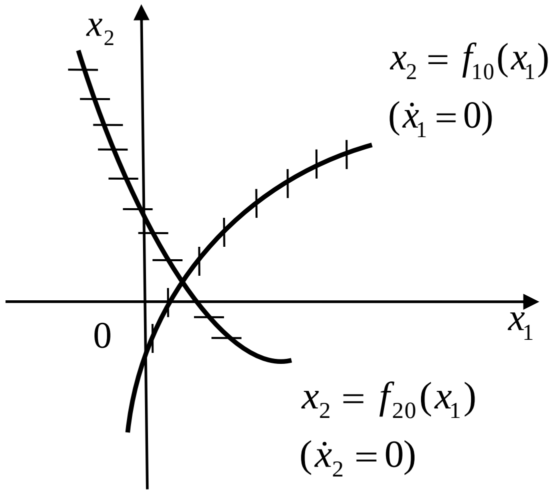
$$f_1(x_1, x_2) > 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}_1 \approx \frac{\Delta x_1}{\Delta t} > 0,\;\; \Delta t > 0 \;\Rightarrow\; \Delta x_1 > 0\,. \tag{2.67}$$

Časový přírůstek Δt musí být vždy kladný, čas nelze vrátit, a proto orientace stavových trajektorií bude ***zleva – doprava***.

Podobně pro

$$f_1(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 \approx \frac{\Delta x_1}{\Delta t} < 0, \ \Delta t > 0 \Rightarrow \Delta x_1 < 0 \tag{2.68}$$

je orientace stavových trajektorií je ***zprava – doleva***.



Obr. 2.46 Hlavní izoklíny pro $\dot{x}_1 = 0$ a $\dot{x}_2 = 0$

Izoklína (2.66) rozděluje orientaci stavových trajektorií shora – dolů a naopak, tj. pro

$$f_2(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta t} > 0, \ \Delta t > 0 \Rightarrow \Delta x_2 > 0 \tag{2.69}$$

je orientace stavových trajektorií je ***zdola – nahoru***.

Podobně pro

$$f_2(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta t} < 0, \ \Delta t > 0 \Rightarrow \Delta x_2 < 0 \tag{2.70}$$

je orientace stavových trajektorií je ***shora – dolů***.

Pro fázové vyjádření modelu dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.71}$$

rovnice (2.65) má jednoduchý tvar $x_2 = 0$. V tomto případě platí jednoduché pravidlo: ***v horní polorovině fázové roviny*** ($x_2 = \dot{x}_1 > 0$) ***orientace fázových trajektorií je zleva – doprava a v dolní polorovině*** ($x_2 = \dot{x}_1 < 0$) ***zprava – doleva. Fázové trajektorie, na rozdíl od stavových trajektorií, v regulárních bodech protínají osu*** x_1 ***vždy pod pravým úhlem (kolmo). Pouze v rovnovážných***

stavech, tj. singulárních bodech, mohou osu x_1 ***protínat pod libovolným úhlem. U fázového vyjádření*** (2.71) ***rovnovážné stavy vždy leží na ose*** x_1 ***(pokud existují).***

Protože pro blízké okolí rovnovážných stavů vlastnosti nelineárního dynamického systému popisují přibližně odpovídající vlastnosti linearizovaného dynamického systému v těchto rovnovážných stavech, lze pro klasifikaci rovnovážných stavů nelineárního dynamického systému použít klasifikaci rovnovážných stavů lineárního dynamického systému.

Uvažujme nelineární dynamický systém [viz (2.57)]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \qquad x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \qquad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{2.72}$$

s rovnovážnými stavy $\boldsymbol{x}_{ei} = [x_{1ei}, x_{2ei}]^T$, $i = 1,2,\ldots$

Linearizujeme nelineární dynamický systém v rovnovážných stavech $\boldsymbol{x}_{ei}$ a dostaneme

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_{ei}} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}, \tag{2.73a}$$

resp.

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_{ei}} \Delta\boldsymbol{x}, \tag{2.73b}$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_{1ei}, \quad \Delta\dot{x}_1 = \dot{x}_1, \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_{2ei}, \quad \Delta\dot{x}_2 = \dot{x}_2, \end{aligned} \tag{2.73c}$$

$$\begin{aligned} & a = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}_{ei}}, \; b = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}_{ei}}, \; c = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}_{ei}}, \; d = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}_{ei}}, \\ & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_{ei}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_{ei}}. \end{aligned} \tag{2.73d}$$

Vlastnosti rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_{ei}$ linearizovaného nelineárního dynamického systému jsou dány jeho dvěma póly s_1 a s_2, tj. kořeny charakteristického mnohočlenu

$$\begin{aligned} N_i(s) &= \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_{ei}}) = \begin{vmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{vmatrix} = (s-a)(s-d) - cb = \\ &= (s-s_1)(s-s_2). \end{aligned} \tag{2.74}$$

Jsou možné tyto případy:

a) Oba póly jsou reálné záporné $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***asymptoticky stabilní uzel***. Stavové trajektorie se nespirálovitě blíží k rovnovážnému stavu (obr. 2.47a).

b) Oba póly jsou reálné kladné $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***nestabilní uzel***. Stavové trajektorie se nespirálovitě vzdalují od rovnovážného stavu (obr. 2.47b).

c) Oba póly jsou reálné, jeden je záporný a druhý kladný $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***nestabilní sedlo***. Stavové trajektorie se nejdříve blíží k rovnovážnému stavu a pak se od něj vzdalují (obr. 2.47c).

d) Oba póly jsou komplexní se zápornou reálnou částí $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***asymptoticky stabilní ohnisko***. Stavové trajektorie se spirálovitě blíží k rovnovážnému stavu (obr. 2.47d).

e) Oba póly jsou komplexní s kladnou reálnou částí $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***nestabilní ohnisko***. Stavové trajektorie se spirálovitě vzdalují od rovnovážného stavu (obr. 2.47e).

f) Oba póly jsou ryze imaginární $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***stabilní střed***. Stavové trajektorie tvoří uzavřené křivky okolo rovnovážného stavu. Tyto křivky závisí na počátečních stavech (obr. 2.47f).

Výše uvedené případy jsou nesingulární a jsou z praktického hlediska důležité, protože jednoznačně určují vlastnosti daného rovnovážného stavu. Pro úplnost si uvedeme základní singulární případy:

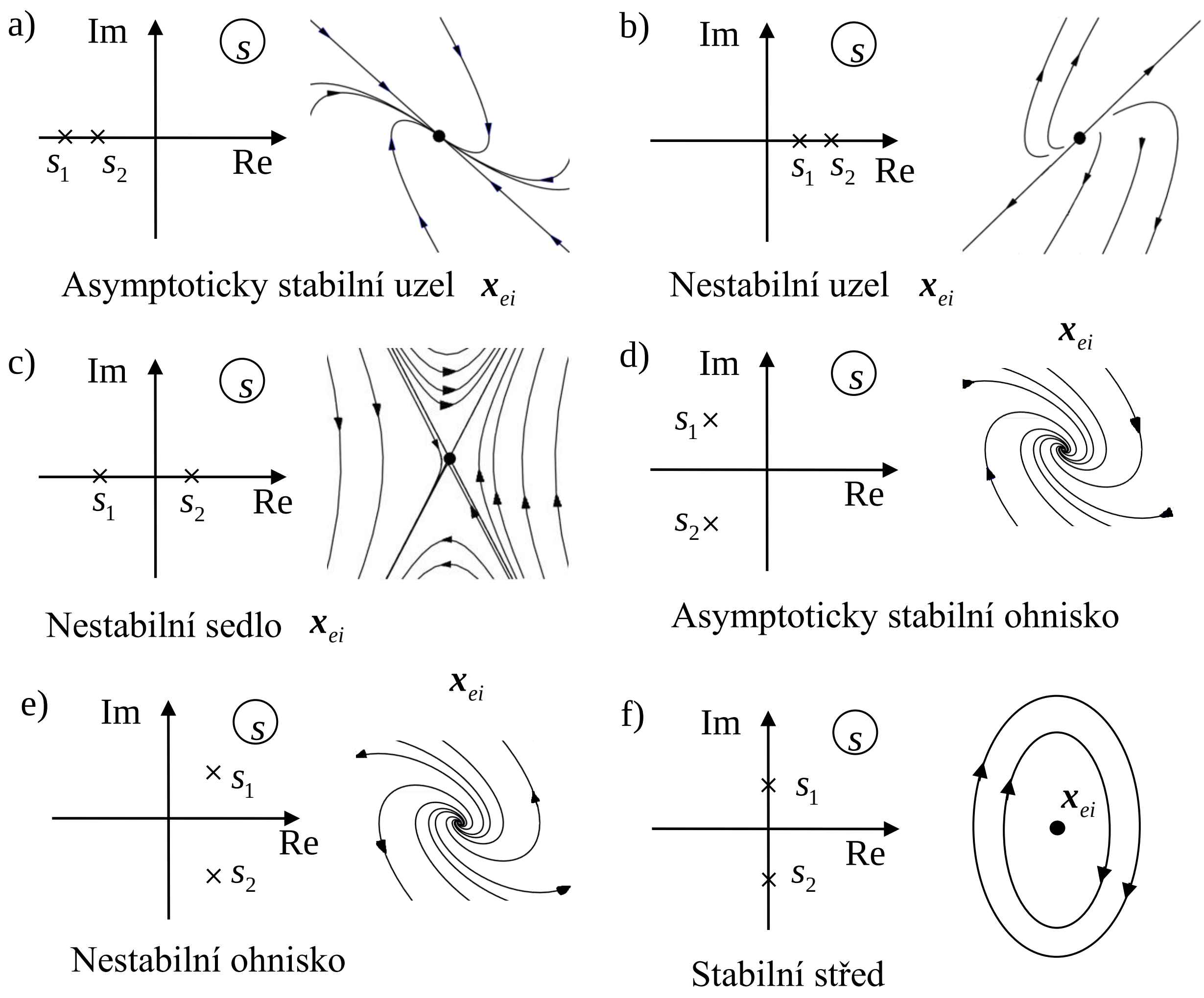
g) Jeden pól je reálný záporný a druhý je nulový $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***degenerovaný stabilní uzel***. V tomto případě rovnovážný stav není jediný bod, ale je tvořen nekonečně mnoha body, které tvoří přímku (tečkovaná čára na obr. 2.48g), ke které se sbíhají stavové trajektorie.

h) Jeden pól je reálný kladný a druhý je nulový $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***degenerovaný nestabilní uzel***. V tomto případě rovnovážný stav není jediný bod, ale je tvořen nekonečně mnoha body, které tvoří přímku (tečkovaná čára na obr. 2.48h), od které se stavové trajektorie vzdalují.

i) Oba póly jsou nulové $\Rightarrow$ rovnovážný stav je ***degenerovaný uzel***. V tomto případě rovnovážný stav je rovněž tvořen nekonečně mnoha body, které tvoří přímku (tečkovaná čára na obr. 2.48i). Stavové trajektorie probíhají paralelně s touto přímkou, ale na jejích opačných stranách mají opačnou orientaci. Pro počáteční stavy nacházející se na této přímce, stavové trajektorie tuto přímku neopustí.

Z výše uvedeného a z obou obr. 2.47 a 2.48 vyplývá, že pokud póly dynamického systému pro $n = 2$ jsou reálné, pak rovnovážný stav je nestabilní sedlo, stabilní nebo nestabilní uzel, který v případě nulového jednoho nebo obou pólů může být degenerovaný.

Jsou-li póly komplexní (vždy musí být komplexně sdružené), pak rovnovážný stav je stabilní nebo nestabilní ohnisko a v případě nulové reálné části rovnovážný stav je stabilní střed.



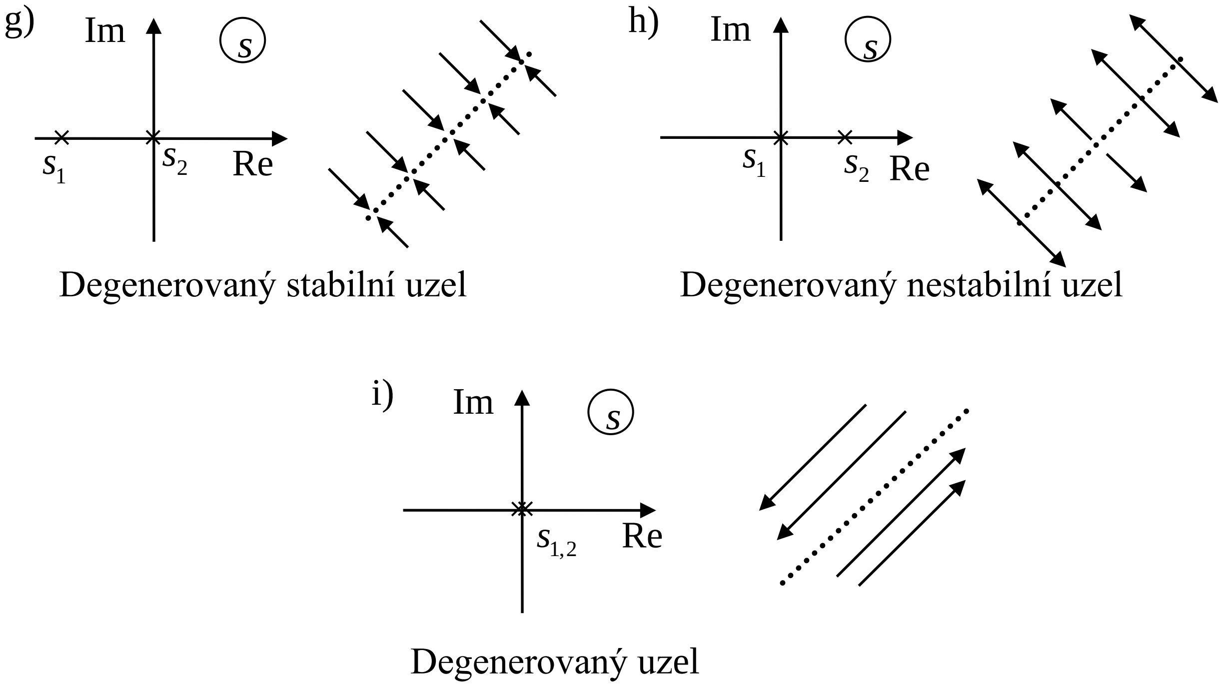
Obr. 2.47 Poloha dvojice pólů linearizovaného dynamického systému a odpovídající průběhy stavových trajektorií (nesingulární případy)

Příklad 2.10

Matematický model lineárního dynamického systému má ve fázovém vyjádření tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Je třeba určit směrové pole pro $-3 \le x_1 \le 3$, $-3 \le x_2 \le 3$ a izoklíny pro $-\pi \le \alpha \le \pi$.



Obr. 2.48 Poloha pólů linearizovaného dynamického systému a odpovídající průběhy stavových trajektorií (singulární případy)

Řešení:

Vydělením druhé rovnice první rovnicí (2.75) se získá diferenciální rovnice fázových trajektorií

$$\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,x_1} = -\frac{x_1}{x_2}. \tag{2.76}$$

Jejím řešením [viz příklad 2.1, vztah (2.25)] pro počáteční stav $\boldsymbol{x}_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$ získáme rovnici stavové trajektorie

$$x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2. \tag{2.77}$$

Je to kružnice se středem v počátku souřadnic a poloměrem

$$\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}\,. \tag{2.78}$$

Pro každý počáteční stav $\boldsymbol{x}_0$ dostaneme uzavřenou křivku – kružnici, jejíž poloměr (2.78) je dán tímto počátečním stavem. Rovnovážný stav je stabilní střed. Protože jde o fázové vyjádření, orientace fázové trajektorie je zřejmá, tj.

ve směru pohybu hodinových ručiček (horní polorovina zleva-doprava, dolní polorovina zprava-doleva).

Směrové pole

Pro určení směrového pole sestavíme tabulku (tab. 2.1) a pro každý bod $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$ s krokem 1 vypočteme na základě (2.76) hodnotu $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1 = \mathrm{tg}\,\alpha$, kde α je úhel sklonu tečny fázové trajektorie a $\mathrm{tg}\,\alpha$ – směrnice tečny (viz obr. 2.49).

Směrové pole s fázovou trajektorií pro $\boldsymbol{x}_0 = [2,-1]^T$ je na obr. 2.49.

Tab. 2.1 Hodnoty směrnic $\mathrm{tg}\,\alpha$ – příklad 2.10

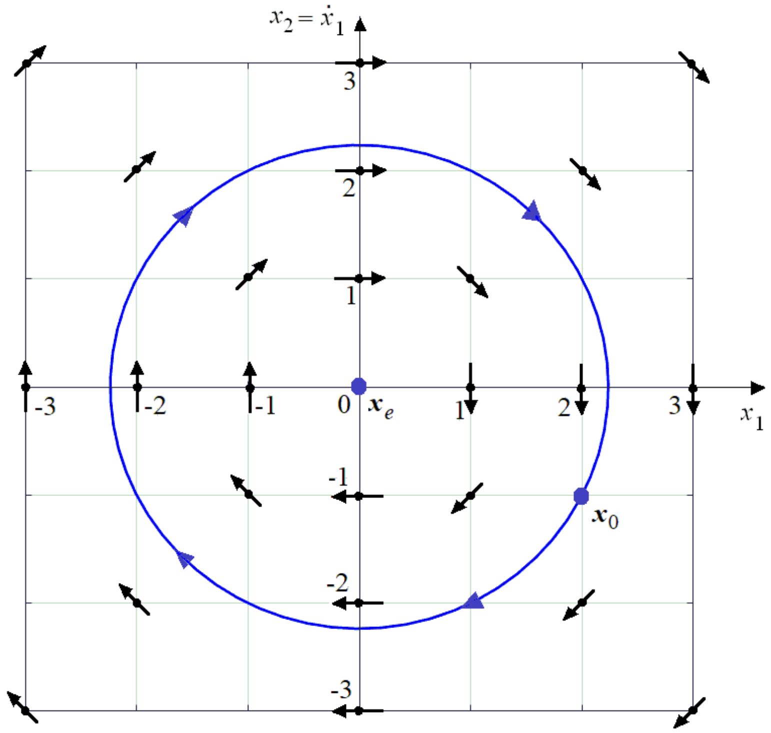
$x_2 \backslash x_1$	-3	-2	-1	0	1	2	3
3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1
2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
1	3	2	1	0	-1	-2	-3
0	∞	∞	∞		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
-1	-3	-2	-1	0	1	2	3
-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
-3	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$\mathrm{tg}\,\alpha$

Při vyznačování orientace úseček, které reprezentují tečny, je vhodné si uvědomit hodnoty $\mathrm{tg}\,\alpha$ pro dané úhly α, viz tab. 2.2.

Tab. 2.2 Znaménko $\mathrm{tg}\,\alpha$

α	$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	+	–	+	–



Obr. 2.49 Směrové pole s fázovou trajektorií – příklad 2.10

Izokliny

Rovnici izoklín dostaneme z (2.76)

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x_1}{x_2} \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} x_1 . \tag{2.79}$$

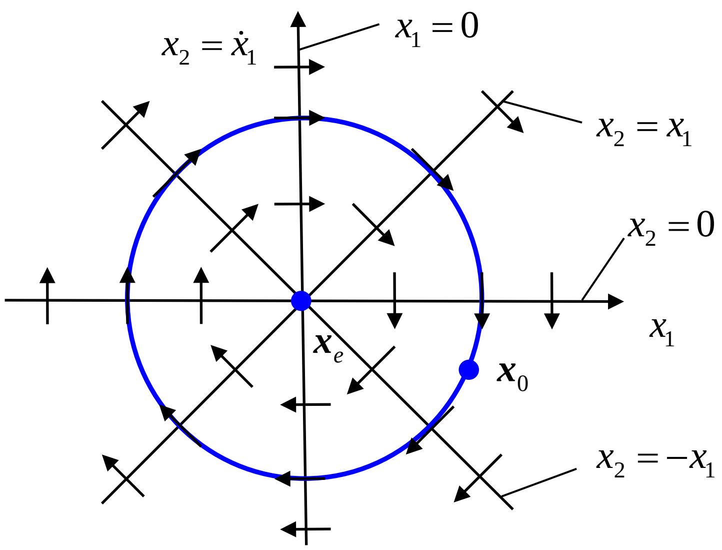
Vidíme, že izokliny jsou přímky procházející počátkem souřadnic se směrnicí $-1/\operatorname{tg}\alpha$, tj. úsečky reprezentující tečny fázových trajektorií jsou kolmé na odpovídající izokliny (součin jejich směrnic je roven – 1).

Sestavíme tabulku tab. 2.3 a pro význačnější úhly α určíme rovnice izoklín.

Izokliny jsou na obr. 2.50 s fázovou trajektorií pro $\boldsymbol{x}_0 = [2, -1]^T$. Je zřejmé, že metoda izoklín je méně pracná, umožňuje snadnější načrtnutí fázové (stavové) trajektorie a většinou bývá také rychlejší.

Tab. 2.3 Rovnice izoklín – příklad 2.10

α	$\operatorname{tg}\alpha$	Rovnice izoklíny
0	0	$x_1 = 0$
$\pm\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$x_2 = -\sqrt{3}x_1$
$\pm\dfrac{\pi}{4}$	1	$x_2 = -x_1$
$\pm\dfrac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$	$x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1$
$\pm\dfrac{\pi}{2}$	∞	$x_2 = 0$
$\pm\dfrac{2}{3}\pi$	$\sqrt{3}$	$x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1$
$\pm\dfrac{3}{4}\pi$	-1	$x_2 = x_1$
$\pm\dfrac{5}{6}\pi$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$x_2 = \sqrt{3}x_1$
$\pm\pi$	0	$x_1 = 0$



Obr. 2.50 Izoklíny s fázovou trajektorií – příklad 2.10

Příklad 2.11

Pro lineární dynamický systém popsaný stavovým modelem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -4x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2\end{aligned} \tag{2.80}$$

je třeba nakreslit stavový portrét.

Řešení:

Dynamický systém je lineární, a proto charakteristický mnohočlen bude

$$N(s) = \det\left(s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s+4 & -2 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix} = s(s+5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s_1 = -5,\ s_2 = 0.$$

Oba póly jsou reálné, jde tedy o uzel, a protože jeden pól je nulový, dochází k degradaci.

Z ustáleného stavu

$$\begin{aligned}0 &= -4x_1 + 2x_2, \\ 0 &= 2x_1 - x_2\end{aligned} \tag{2.81}$$

je zřejmé, že rovnovážné stavy tvoří přímku

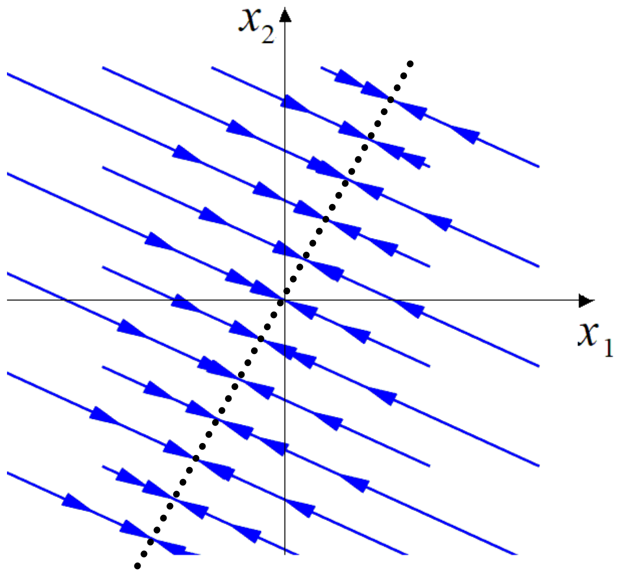
$$x_2 = 2x_1. \tag{2.82}$$

Tato rovnice rovněž popisuje hlavní společnou izoklínu pro $\dot{x}_1 = 0$ a $\dot{x}_2 = 0$, která rozděluje stavovou rovinu na dvě poloroviny. Nad přímkou (2.82) ze vztahů (2.80) dostaneme $\dot{x}_1 > 0$ a současně $\dot{x}_2 < 0$, tzn., že stavové trajektorie budou směrovat zleva – doprava a shora – dolů. Podobně pod touto přímkou (2.82) ze vztahů (2.80) dostaneme $\dot{x}_1 < 0$ a $\dot{x}_2 > 0$, tzn., že stavové trajektorie budou směrovat zprava – doleva a zdola – nahoru. Stavové trajektorie se tedy vždy budou blížit k přímce rovnovážných stavů (2.82).

Rovnice izoklín se získá z (2.80) vydělením druhé rovnice první rovnicí, tj.

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}. \tag{2.83}$$

Vidíme, že všechny tečny ke stavovým trajektoriím mají stejnou směrnici (2.83). Protože součin směrnice přímky rovnovážných stavů (2.82) a směrnice tečen se rovná – 1, proto stavové trajektorie jsou kolmé na přímku rovnovážných stavů (tečkovaná čára), viz obr. 2.51. Z obrázku vyplývá, že přímka rovnovážných stavů je degenerovaný stabilní uzel.



Obr. 2.51 Stavový portrét dynamického systému – příklad 2.11

Příklad 2.12

Pro nelineární dynamický systém 2. řádu

$$\ddot{y} - y + y^2 = 0 \tag{2.84}$$

je třeba nakreslit přibližný stavový (fázový) portrét.

Řešení:

Matematický model nelineárního dynamického systému (2.84) je třeba zapsat stavově. Zvolíme-li stavové proměnné

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y},$$

obdržíme fázový model

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^2. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Z ustáleného stavu určíme rovnovážné stavy

$$\begin{aligned} 0 &= x_2, \\ 0 &= x_1 - x_1^2, \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\boldsymbol{x}_{e1} = [0,0]^T, \ \boldsymbol{x}_{e2} = [1,0]^T. \tag{2.87}$$

Nelineární systém (2.85) zlinearizujeme

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2, \\ \Delta\dot{x}_2 &= (1-2x_1)\Delta x_1, \end{aligned}$$

tj.

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.88}$$

Nyní určíme typ a vlastnosti obou rovnovážných stavů

a) $\boldsymbol{x}_{e1} = [0,0]^T$

Charakteristický mnohočlen pro rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_{e1}$ má tvar

$$N_1(s) = \det\left(s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x_1 & 0 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_{e1}} \right) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 1 = (s+1)(s-1) \Rightarrow$$

$s_1 = -1,\ s_2 = 1.$

Póly jsou reálné a opačného znaménka, a proto rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_{e1}$ je nestabilní sedlo.

b) $\boldsymbol{x}_{e2} = [1,0]^T$

Charakteristický mnohočlen pro rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_{e2}$ má tvar

$$N_2(s) = \det\left(s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x_1 & 0 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_{e2}} \right) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1 = (s+\mathrm{j})(s-\mathrm{j}) \Rightarrow$$

$s_1 = -\mathrm{j},\ s_2 = \mathrm{j}.$

Póly jsou ryze imaginární, a proto rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_{e2}$ je lokálně stabilní střed.

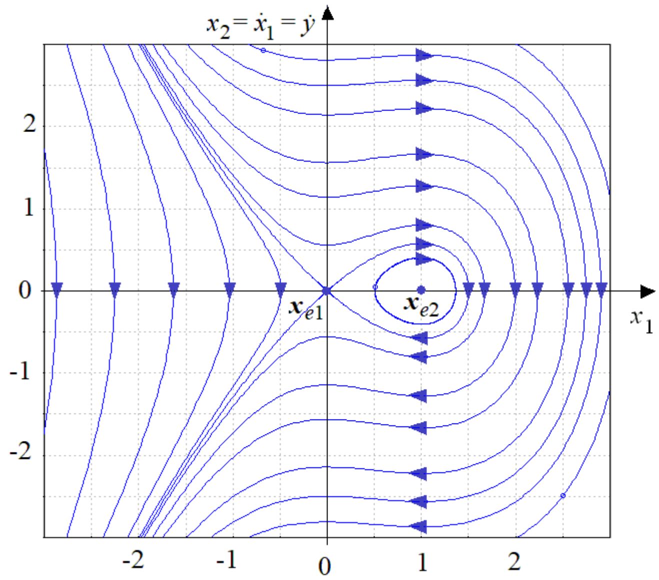
Určíme ještě hlavní izoklíny [viz (2.65) a (2.66)], které jsou dány vztahy (2.86), tj.

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ a } x_1 = 1.$$

Přesný fázový portrét získaný na počítači je na obr. 2.52.

Protože jde o fázový model (2.85) orientace fázových trajektorií v horní polorovině fázové roviny je zleva – doprava a v dolní polorovině zprava – doleva.



Obr. 2.52 Fázový portrét nelineárního dynamického systému – příklad 2.12

Metoda stavové nebo fázové roviny může být s úspěchem použita při analýze vlastností jednodušších nelineárních regulačních obvodů. V tomto případě je výhodné považovat za stavovou proměnnou regulační odchylku e, protože lze snadno ověřit plnění cíle regulace [viz (1.21)]

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; e(t) \to 0. \qquad (2.89)$$

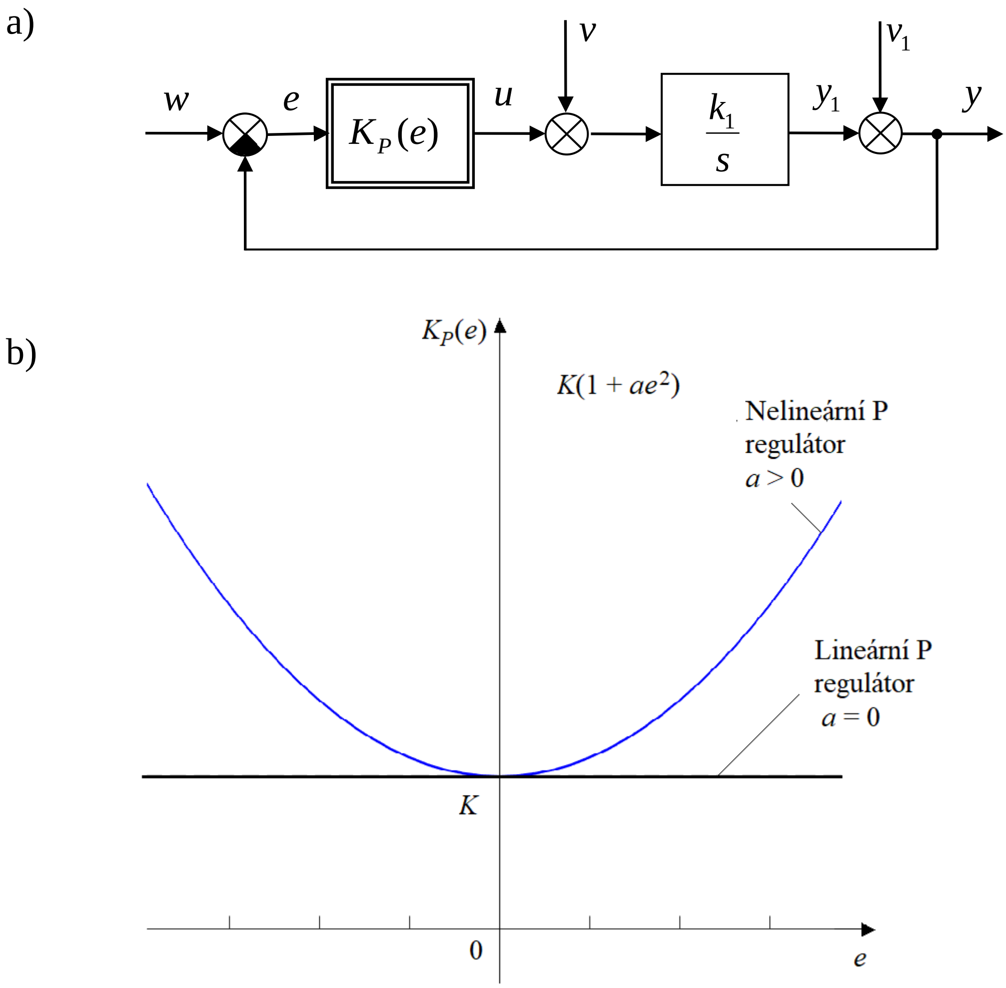
Protože metoda stavové roviny vyžaduje autonomní systém (nebuzený a t-invariantní), proto se předpokládá, že vstupní veličiny (žádaná, poruchová) způsobí určitý počáteční stav a dále již nepůsobí, případně jsou konstantní.

Příklad 2.13

Je třeba provést analýzu dynamických vlastností jednoduchého regulačního obvodu (servomechanismu) s nelineárním P regulátorem (obr. 2.53)

$$u(t) = K[1 + ae^2(t)]e(t), \quad a \ge 0, \qquad (2.90)$$

kde a je nezáporná konstanta, K – zesílení lineárního regulátoru. Značení na obr. 2.53: e je regulační odchylka, w – žádaná veličina, u – akční veličina, y_1 – výstup z regulované soustavy, y – výstupní veličina, v a v_1 – poruchové veličiny, k_1 – koeficient přenosu soustavy [s^{-1}], K_P – zesílení nelineárního regulátoru.



Obr. 2.53 Regulační obvod s nelineárním P regulátorem: a) blokové schéma, b) statická charakteristika nelineárního regulátoru – příklad 2.13

Řešení:

Předpokládá se, že některá vstupní veličina (nezáleží na tom, zda jde o žádanou veličinu nebo některou z poruchových veličin) způsobí počáteční stav $e(0)=e_0>0$ a dále již nepůsobí, a proto pro $t\geq 0$ lze považovat všechny vstupní veličiny za nulové.

Pro nelineární regulační obvod na obr. 2.53a lze psát

$$e=w-y,\ u=K(1+ae^2)e,\ \ \dot{y}_1=k_1(u+v),\ \ y=y_1+v_1. \tag{2.91}$$

Po uvažování $w=v=v_1=0$ pro $t>0$ a vzájemném dosazení a úpravě dostaneme nelineární diferenciální rovnici 1. řádu

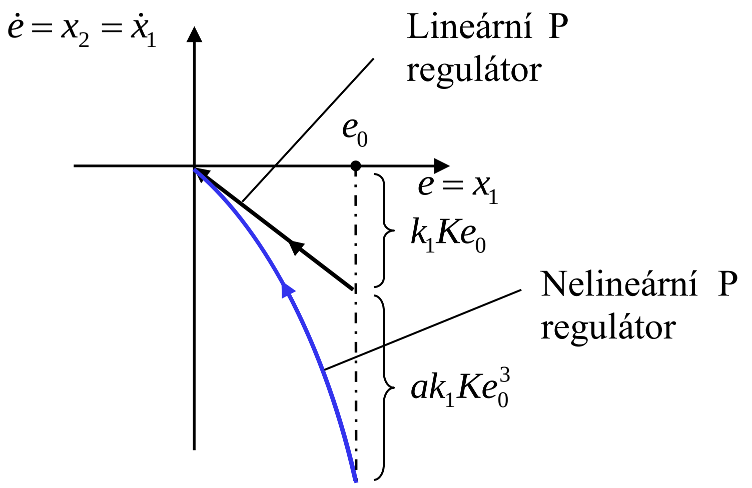
$$\dot{e}+k_1K(1+ae^2)e=0,\ \ e(0)=e_0>0. \tag{2.92}$$

Zvolíme-li stavové, v našem případě fázové, proměnné

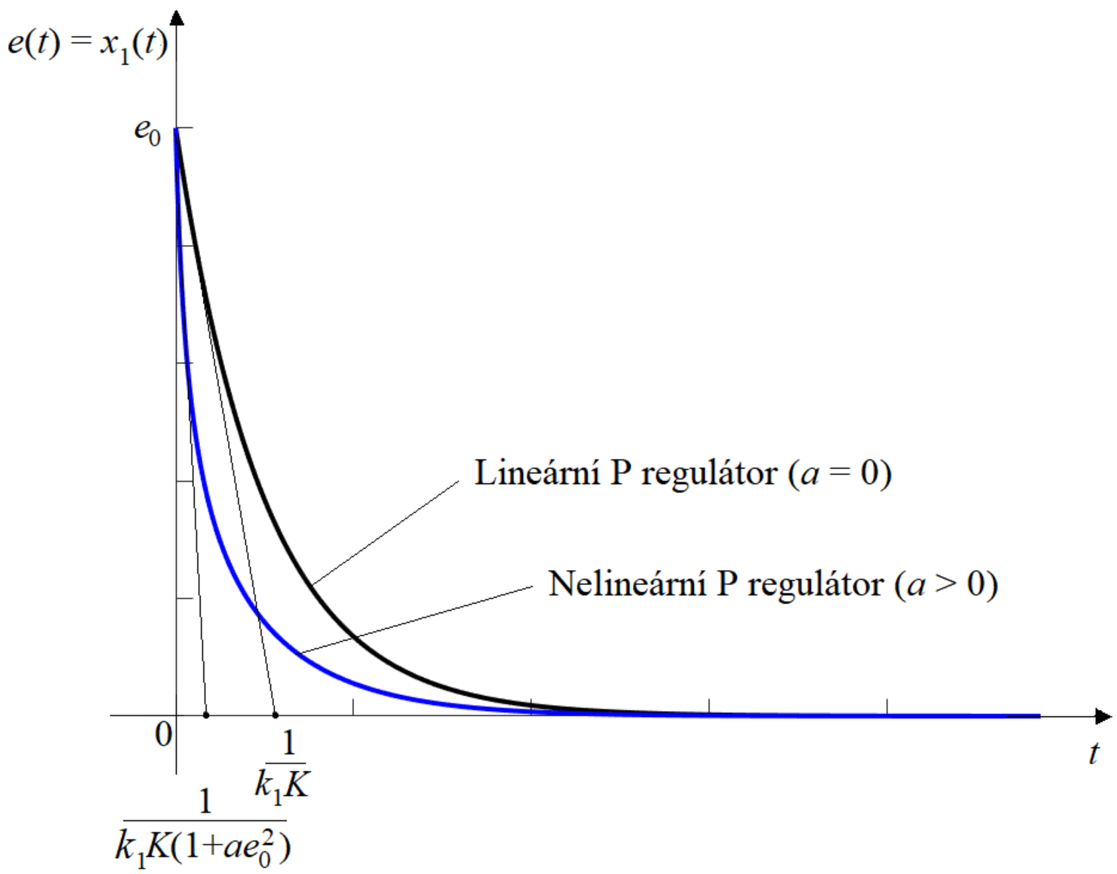
$$e=x_1,\ \ \dot{e}=\dot{x}_1=x_2, \tag{2.93}$$

pak fázovou trajektorii můžeme vykreslit přímo, viz obr. 2.54a.

a)



b)



Obr. 2.54 Regulační obvod s nelineárním P regulátorem: a) průběhy fázových trajektorií, b) časové odezvy – příklad 2.13

Z obr. 2.54a vyplývá, že nelineární P regulátor odstraní regulační odchylku e_0 podstatně rychleji z důvodu vyšší počáteční rychlosti. Rovněž je zřejmé, že regulační obvod s nelineárním P regulátorem je asymptoticky stabilní (má jediný rovnovážný stav $e = e_e = 0$).

Nelineární diferenciální rovnici (2.92) můžeme vyřešit analyticky, tj.

$$\int_{e_0}^{e(t)} \frac{\mathrm{d}e}{e(1+ae^2)} = -k_1 K \int_0^t d\tau \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\frac{e^2}{1+ae^2}\right]_{e_0}^{e(t)} = -k_1 K[\tau]_0^t \Rightarrow$$

$$e(t) = \frac{e_0}{\sqrt{1+ae_0^2(1-\mathrm{e}^{-2k_1Kt})}}\mathrm{e}^{-k_1Kt}. \tag{2.94}$$

Je zřejmé, že pro lineární P regulátor ($a = 0$) dostaneme

$$e(t) = e_0\,\mathrm{e}^{-k_1Kt}. \tag{2.95}$$

Odezvy regulačního obvodu pro nelineární a lineární P regulátor na počáteční regulační odchylku e_0 pro $k_1 = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, $K = 2$, $a = 5$ jsou na obr. 2.54b.

Poznámka:

Pro nenulové vstupní veličiny ($w \neq 0$, $v \neq 0$, $v_1 \neq 0$) regulační obvod s nelineárním P regulátorem na obr. 2.53a v souladu s (2.90) a (2.91) popisuje nelineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -k_1K[1+ae^2(t)]e(t) - k_1v(t) + \frac{\mathrm{d}[w(t)-v_1(t)]}{\mathrm{d}t}. \tag{2.96}$$

Z této diferenciální rovnice vyplývá, že poruchová veličina $v_1(t)$ působící na výstupu soustavy má na regulační odchylku $e(t)$ stejný vliv, jako žádaná veličina $w(t)$ (až na znaménko). Platí to pro všechny regulační obvody s jednotkovou zpětnou vazbou.

Dále je zřejmé, že při skokové změně žádané veličiny $w(t)$ je vstupem impuls

$$\frac{\mathrm{d}\,w(t)}{\mathrm{d}t} = w_0\delta(t) \quad \text{pro} \quad w(t) = w_0\eta(t), \tag{2.97}$$

kde $\delta(t)$ je Diracův jednotkový impuls, $\eta(t)$ – Heavisideův jednotkový skok. Derivaci skoku ve vztahu (2.97) je třeba chápat jako zobecněnou derivaci.

Impuls (2.97) způsobí sice nenulovou počáteční odchylku e_0, ale trvalá regulační odchylka $e(\infty)$ bude nulová.

Naproti tomu skoková změna poruchové veličiny $v(t) = v_0\eta(t)$ způsobí trvalou regulační odchylku určenou vztahem

$$e(\infty) + ae^3(\infty) = -\frac{1}{K}v_0 . \tag{2.98}$$

Příklad 2.14

Na obr. 2.55a je zjednodušené blokové schéma servomechanismu se servomotorem a převodovkou. Servomotor je napájen střídavým napětím ze zesilovače (P regulátor se zesílením K_P [V·rad^{-1}]). Servomotor s převodovkou je popsán nelineární diferenciální rovnicí 2. řádu

$$J\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + m_0 \operatorname{sign} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = k_1 u(t) , \tag{2.99}$$

kde $y(t)$ je úhlová výchylka výstupního hřídele [rad], J – moment setrvačnosti pohybujících se částí redukovaný na výstupní hřídel [kg·m^2], m_0 – moment tření (obr. 2.55b) [kg·m^2·s^{-2}·rad], $u(t)$ – napětí [V], k_1 – koeficient přenosu servomotoru s převodovkou [kg·m^2·s^{-2}·V^{-1}·rad].

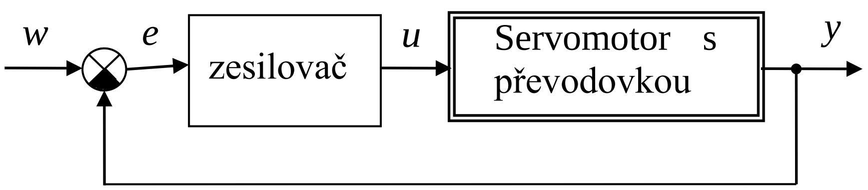
Nelinearita vyjádřena výrazem

$$m_0 \operatorname{sign} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.100}$$

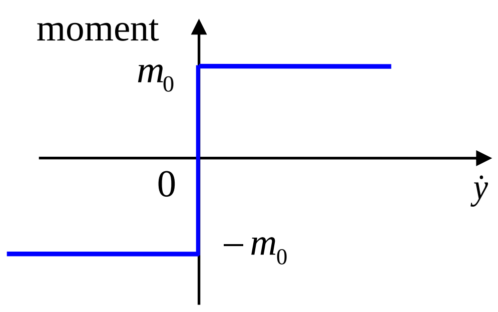
je způsobena Coulombovým suchým třením (obr. 2.55b).

Je třeba nakreslit stavovou trajektorii pro skokovou změnu žádané veličiny $w(t) = w_0\eta(t)$.

a)



b)



Obr. 2.55 Servomechanismus: a) zjednodušené blokové schéma, b) nelinearita tření – příklad 2.14

Řešení:

V souladu s obr. 55a a vztahem (2.99) můžeme psát

$$e(t) = w(t) - y(t) \;\Rightarrow\; y(t) = w(t) - e(t), \tag{2.101}$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2[w(t)-e(t)]}{\mathrm{d}t^2} + m_0 \operatorname{sign}\frac{\mathrm{d}[w(t)-e(t)]}{\mathrm{d}t} = k_1 K_P e(t), \tag{2.102}$$

Skoková změna žádané veličiny $w(t)$ způsobí počáteční regulační odchylku

$$e(0) = e_0 = w_0 \tag{2.103}$$

a proto pro $t > 0$ po úpravě dostaneme

$$\begin{gathered} J\frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2} + m_0 \operatorname{sign}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + k_1 K_P e(t) = 0, \\ e(0) = e_0 = w_0,\; \dot{e}(0) = \dot{e}_0 = 0 \end{gathered} \tag{2.104}$$

protože

$$\operatorname{sign}\left(-\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right) = -\operatorname{sign}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Zvolíme-li za stavové proměnné $x_1 = e,\; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{e}$, tak dostaneme fázový model

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10} = e_0 = w_0, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1 K_P}{J} x_1 - \frac{m_0}{J}\operatorname{sign} x_2, & x_2(0) &= x_{20} = \dot{e}_0 = 0. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Diferenciální rovnici fázové trajektorie získáme vydělením druhé rovnice první rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\dfrac{k_1 K_P}{J} x_1 + \dfrac{m_0}{J}\operatorname{sign} x_2}{x_2}, \tag{2.106a}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\dfrac{k_1 K_P}{J} x_1 \pm \dfrac{m_0}{J}}{x_2}, \tag{2.106b}$$

kde znaménko + platí pro $x_2 > 0$ a znaménko – pro $x_2 < 0$.

Diferenciální rovnici fázové trajektorie (2.106b) lze řešit analyticky

$$\int\limits_{x_{20}}^{x_2(t)} x_2(\tau)\,\mathrm{d}x_2 = -\frac{k_1 K_P}{J}\int\limits_{x_{10}}^{x_1(t)}\left[x_1(\tau) \pm \frac{m_0}{k_1 K_P}\right]\mathrm{d}x_1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[x_2^2\right]_{x_{20}}^{x_2(t)} = -\frac{k_1 K_P}{2J}\left[x_1^2 \pm \frac{2m_0}{k_1 K_P}x_1\right]_{x_{10}}^{x_1(t)} \quad \Rightarrow$$

$$x_2^2(t) + \frac{k_1 K_P}{J}\left(x_1 \pm \frac{m_0}{k_1 K_P}\right)^2 = r_0^2\,, \tag{2.107}$$

pro

$$r_0^2 = \frac{k_1 K_P}{J}\left[w_0 \pm \frac{m_0}{k_1 K_P}\right]^2,$$

kde r_0 je délka poloosy elips (pro osu x_2) a

$$\pm\frac{m_0}{k_1 K_P} \tag{2.108}$$

jsou středy elips. Horní znaménko platí pro $x_2 > 0$ a dolní znaménko pro $x_2 < 0$. Fázová trajektorie začíná v počátečním stavu a skládá se z posloupnosti polovin elips, přičemž každá předchozí elipsa určí počáteční stav na ose x_1 pro následující elipsu atd. a to až poslední elipsa (zastupující bod) padne do intervalu rovnovážných stavů

$$\left[-\frac{m_0}{k_1 K_P}, \frac{m_0}{k_1 K_P}\right]. \tag{2.109}$$

Ke změně elips dochází na ose x_1, je to tzv. ***přepínací křivka*** (obr. 2.56). Zvolíme-li vhodně parametry servomechanismu, např.

$$\frac{k_1 K_P}{J} = 1\,\mathrm{s}^{-2}, \qquad \frac{m_0}{k_1 K_P} = 0{,}5\,\mathrm{rad}, \tag{2.110}$$

pak dostaneme rovnice kružnice o poloměru r_0

$$x_2^2 + (x_1 \pm 0{,}5)^2 = r_0^2\,, \tag{2.111}$$

tj. fázová trajektorie se skládá z posloupnosti půlkružnic, viz obr. 2.56.

Přibližný průběh fázové trajektorie můžeme určit metodou izoklín. Hlavní izoklíny získáme z fázových rovnic (2.105)

$$\dot{x}_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0,$$

$$\dot{x}_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \begin{cases} -\dfrac{m_0}{k_1 K_P} = -0{,}5 \text{ pro } x_2 > 0, \\[2ex] \dfrac{m_0}{k_1 K_P} = 0{,}5 \text{ pro } x_2 < 0. \end{cases} \tag{2.112}$$

Další izoklíny získáme z rovnice izoklín viz [(2.106b) pro (2.110)]

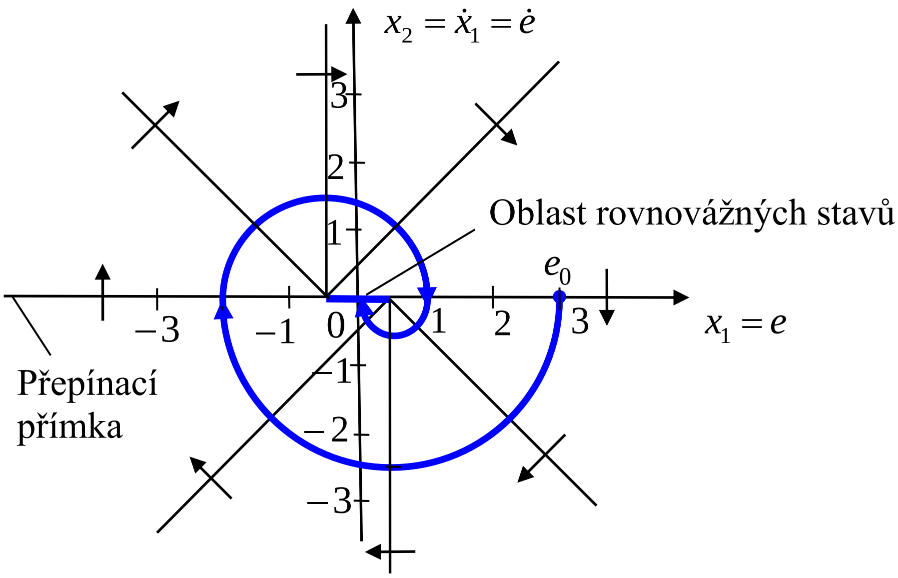
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x_1 \pm 0{,}5}{x_2} \Rightarrow x_2 = -\frac{x_1 \pm 0{,}5}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{2.113}$$

Sestavíme tab. 2.4 pro významnější úhly α sklonu tečen fázových trajektorií a doplníme o hlavní izoklíny (2.112).

Tab. 2.4 Rovnice izoklín – příklad 2.14

	α	$\operatorname{tg}\alpha$	Rovnice izoklíny
$x_2 > 0$	0	0	$x_1 = -0{,}5$
	$\pm\frac{\pi}{4}$	± 1	$x_2 = \mp x_1 \mp 0{,}5$
	$\pm\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	$x_2 = 0$ pro $x_1 < -0{,}5$
		$-\infty$	$x_2 = 0$ pro $x_1 > 0{,}5$
$x_2 < 0$	0	0	$x_1 = 0{,}5$
	$\pm\frac{\pi}{4}$	± 1	$x_2 = \mp x_1 \pm 0{,}5$
	$\pm\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	$x_2 = 0$ pro $x_1 < -0{,}5$
		$-\infty$	$x_2 = 0$ pro $x_1 > 0{,}5$

Izoklíny a fázová trajektorie jsou na obr. 2.56.



Obr. 2.56 Fázová trajektorie nelineárního servomechanismu – příklad 2.14

Z obr. 2.56 vyplývá, že nelineární servomechanismus má jedinou souvislou oblast rovnovážných stavů (2.109), a proto je globálně asymptoticky stabilní.

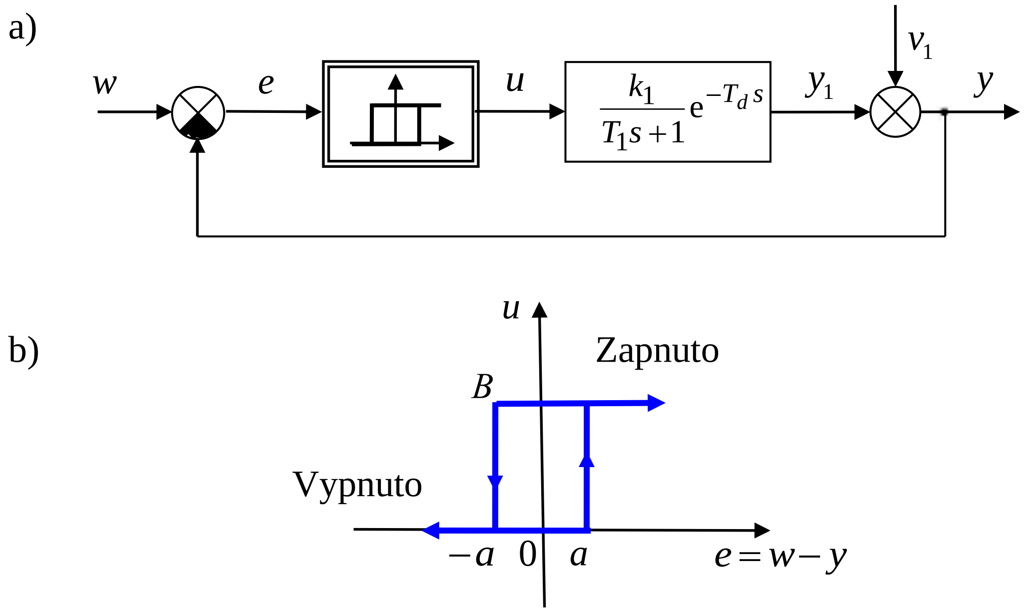
Dále je zřejmé, že moment servomotoru nestačí k překonání momentu tření m_0 a že vznikne trvalá regulační odchylka

$$|e(\infty)| \le \frac{m_0}{k_1 K_P} . \qquad (2.114)$$

Snížení trvalé regulační odchylky $e(\infty)$ a zlepšení „sledování" změn žádané veličiny w lze dosáhnout zvýšením hodnot koeficientů k_1, K_P a snížením momentu tření m_0.

Příklad 2.15

Na obr. 2.57a je blokové schéma obvodu dvoupolohové regulace. Je třeba provést jeho analýzu za předpokladu, že žádaná veličina $w(t)$ se v okamžiku t = 0 změní skokem z hodnoty 0 na hodnotu w_0 > 0. Dopravní zpoždění $T_d \ge 0$.



Obr. 2.57 Obvod dvoupolohové regulace: a) blokové schéma, b) dvoupolohové relé s hysterezí – příklad 2.15

Řešení:

Odvod dvoupolohové regulace na obr. 2.57a můžeme popsat vztahy

$$T_1\dot{y}_1(t) + y_1(t) = k_1 u(t - T_d), \; e(t) = w(t) - y(t), \; y(t) = y_1(t) + v_1(t)$$

a obr. 2.57b.

U nelineárních regulačních obvodů je často výhodnější sledovat průběh regulační odchylky $e(t)$ než průběh výstupní veličiny $y(t)$, proto po dosazení a úpravě dostaneme

$$T_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + e(t) = T_1 \frac{\mathrm{d}[w(t) - v_1(t)]}{\mathrm{d}t} + w(t) - v_1(t) - k_1 u(t - T_d). \qquad (2.115)$$

Protože pro $t < 0$ jsou $w(t) = 0$, $v_1(t) = 0$ a $y(t) = 0$ a pro $t \geq 0$ platí $w(t) = w_0$, $v_1(t) = 0 \Rightarrow e_0 = w_0 > 0$, můžeme pro $t > 0$ psát

$$T_1 \dot{e}(t) + e(t) = e_0 - k_1 u(t - T_d), \qquad (2.116a)$$

resp. pro $T_d = 0$

$$T_1 \dot{e}(t) + e(t) = e_0 - k_1 u(t). \qquad (2.116b)$$

Nejdříve budeme uvažovat soustavu bez dopravního zpoždění (2.116b).

Pro větší názornost budeme současně vyšetřovat časový průběh regulační odchylky $e(t)$ (obr. 2.58) i průběh fázové trajektorie (obr. 2.59).

V intervalu $0 \leq t_1$ (zapnuto) akční veličina $u(t) = B$ $(e_0 > a)$. Řešením diferenciální rovnice (2.116b) dostaneme časový průběh regulační odchylky

$$e(t) = e_0 - k_1 B \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}} \right).$$

Odpovídající fázovou trajektorii získáme přímo pro $x_1 = e$ a $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{e}$ z diferenciální rovnice (2.116b) pro $u(t) = B$, tj.

$$\dot{e} = \frac{1}{T_1}(e_0 - k_1 B - e).$$

V okamžiku t_1 regulační odchylka nabude hodnoty $e(t_1) = -a$, a proto nastoupí skoková změna (přepnutí) akční veličiny z $u(t) = B$ na $u(t) = 0$.

Řešením diferenciální rovnice (2.116b) pro $u(t) = 0$ a novou počáteční podmínku $e(t_1) = -a$ dostaneme časový průběh regulační odchylky v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$ (vypnuto)

$$e(t) = (e_0 + a) \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t - t_1}{T_1}} \right) \eta(t - t_1) - a.$$

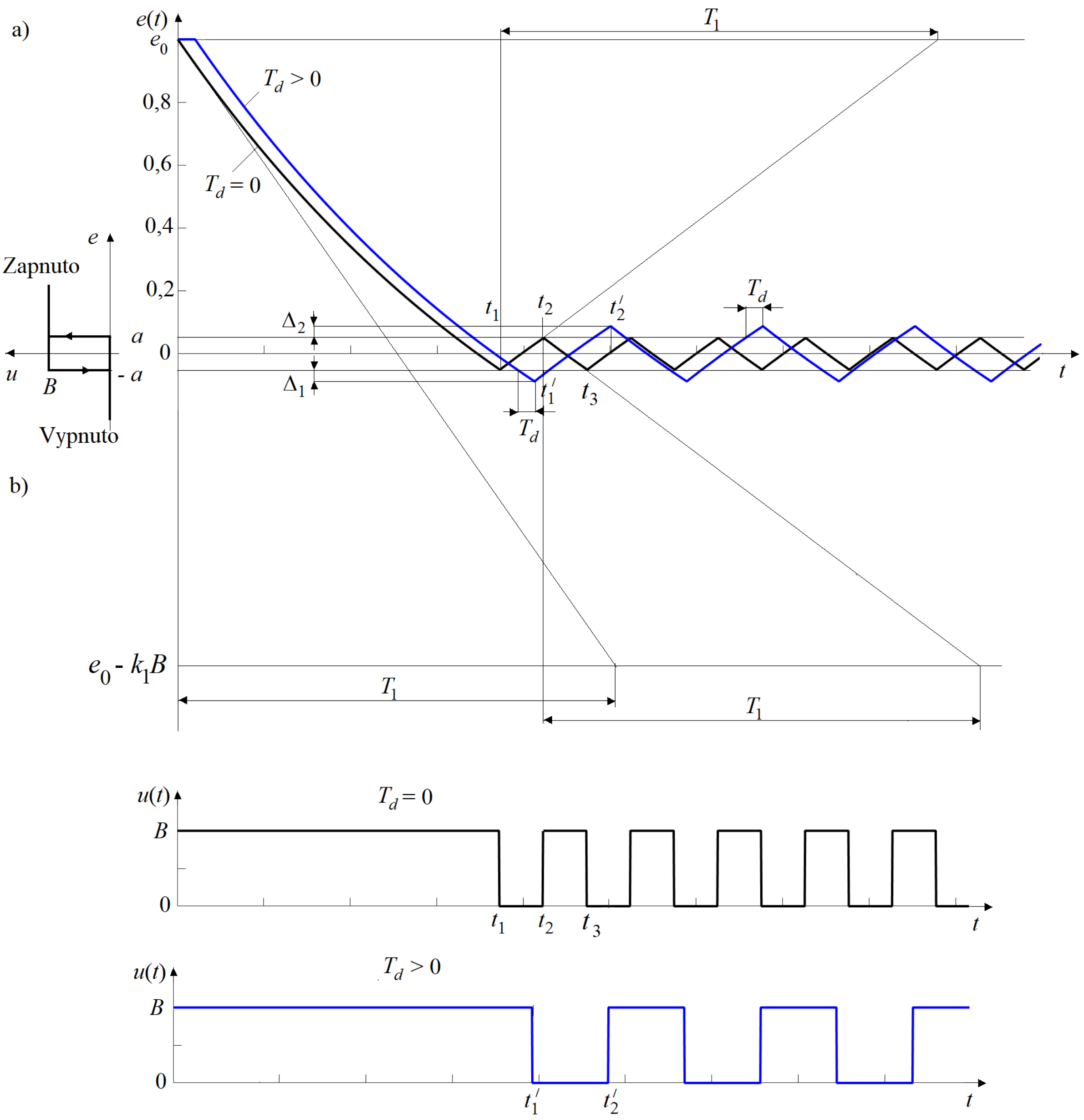
Fázovou trajektorii obdržíme z diferenciální rovnice (2.116b) pro $u(t) = 0$, tj.

$$\dot{e} = \frac{1}{T_1}(e_0 - e).$$

V okamžiku t_2 regulační odchylka dosáhne hodnoty $e(t_2)=a$, v tomtéž okamžiku akční veličina se skokem změní (přepne) z hodnoty $u(t)=0$ na $u(t)=B$.

Časový průběh regulační odchylky v intervalu $t_2 \le t \le t_3$ (zapnuto) získáme řešením diferenciální rovnice (2.116b) pro $u(t)=B$ a novou počáteční podmínku $e(t_2)=a$

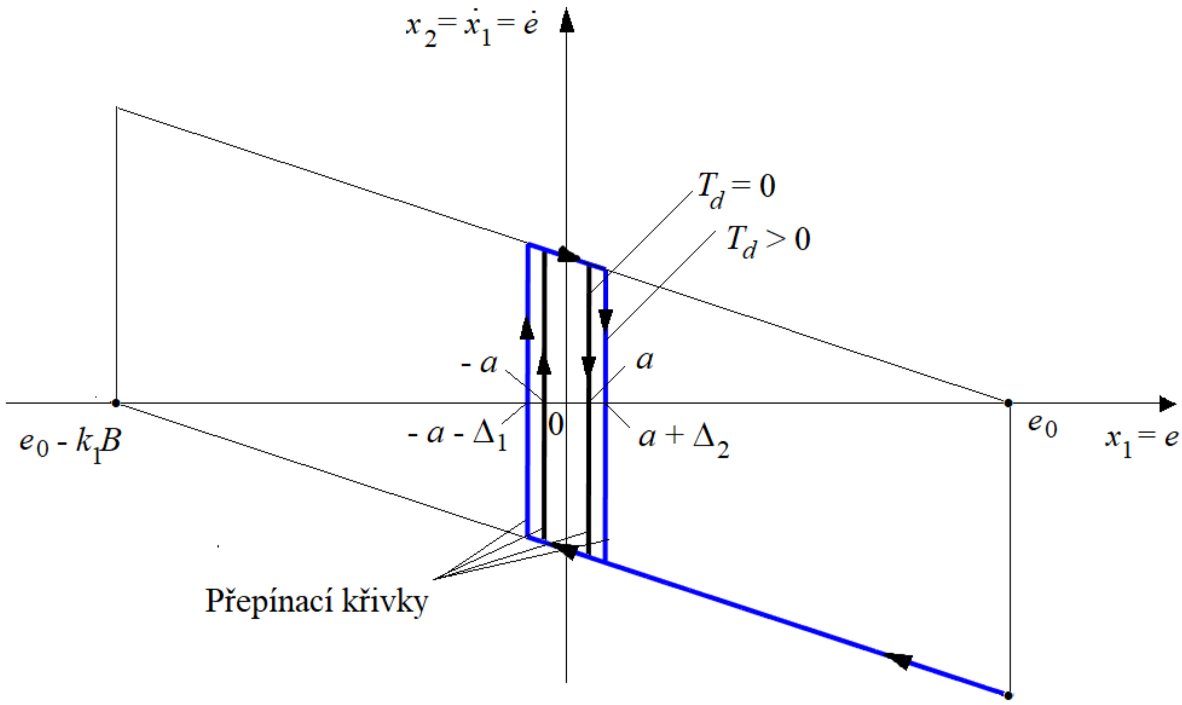
$$e(t)=(e_0-k_1B+a)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_2}{T_1}}\right)\eta(t-t_2)+a.$$



Obr. 2.58 Dvoupolohová regulace: a) průběhy regulační odchylky, b) průběhy akčních veličin – příklad 2.15

Ze stejné diferenciální rovnice získáme přímo fázovou trajektorii

$$\dot{e} = \frac{1}{T_1}(e_0 - k_1 B - e).$$



Obr. 2.59 Průběhy fázových trajektorií pro $T_d = 0$ a $T_d > 0$ – příklad 2.15

V okamžiku t_3 nastoupí zase skoková změna akční veličiny z $u(t) = B$ na $u(t) = 0$. Je zřejmé, že jak časový průběh regulační odchylky, tak i průběh fázové trajektorie se periodicky opakuje. Změna průběhů (přepnutí) vystoupí pro

$$e = \pm a. \tag{2.117}$$

Vztah (2.117) popisuje tzv. ***přepínací křivky***. V našem případě jsou to přímky (obr. 2.59). Fázová trajektorie vytvořila uzavřenou křivku, tj. stabilní mezní cyklus. V obvodě dvoupolohové regulace vzniknou stabilní periodické kmity. Jejich amplituda je dána polovinou šířky hystereze a dvoupolohového regulátoru.

Podobně bychom mohli vyšetřovat časový průběh regulační odchylky a fázové trajektorie pro soustavu s dopravním zpožděním $T_d > 0$, tj. (2.116a).

V tomto případě přepnutí nastoupí v okamžiku $t_1' = t_1 + 2T_d$, když regulační odchylka dosáhne hodnoty

$$e(t_1') = -a - \Delta_1.$$

Další přepnutí nastoupí v okamžiku t_2', ve kterém regulační odchylka dosáhne hodnoty

$$e(t_2') = a + \Delta_2 \text{ atd.}$$

Odtud vyplývá, že přepínacími křivkami budou rovněž přímky

$$e = -a - \Delta_1, \quad e = a + \Delta_2. \tag{2.118}$$

Veličiny Δ_1 a Δ_2 (obr. 2.58a a 2.59) lze přibližně určit analyticky, ale přesněji a rychleji se určí simulací.

Při simulaci na obr. 2.58 a 2.59 byly použity hodnoty parametrů: $w_0 = 1$, $a = 0{,}05$, $B = 2$, $k_1 = 1$, $T_1 = 5$ s, $T_d = 0{,}2$ s. Jak z časových průběhů, tak i z průběhů fázových trajektorií vyplývá, že dopravní zpoždění značně snižuje kvalitu dvoupolohové regulace. Nejčastěji se vyžaduje splnění podmínky

$$\frac{T_d}{T_1} < 0{,}2. \tag{2.119}$$

Dvoupolohová regulace je (pokud je použitelná) vysoce robustní. Jakoukoliv regulační odchylku (způsobenou žádanou nebo poruchovou veličinou, dokonce i změnou vlastností soustavy) vždy odstraňuje maximálním akčním zásahem, tj. $u(t) = B$, nebo $u(t) = 0$.

2.3.2 Nepřímá Ljapunovova metoda

Nepřímá (první, linearizační) ***Ljapunovova metoda*** spočívá v ověření stability nelineárního dynamického systému ve zvoleném rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e$ na základě lineární aproximace nelineárního dynamického systému v tomto rovnovážném stavu.

Existuje mnoho různých definicí stability nelineárních dynamických systémů a přístupů k jejímu ověřování. Nejdůležitější a nejrozšířenější je Ljapunovova teorie stability, která zavádí pojmy asymptotická stabilita (ve smyslu Ljapunova), stabilita (ve smyslu Ljapunova) a nestabilita a které již byly definovány a vysvětleny v podkapitole 2.1.2.

Je uvažován autonomní nelineární dynamický systém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)], \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.120}$$

kde $\boldsymbol{x}$ je vektor stavových proměnných – stav dimenze n, $\boldsymbol{f}$ – obecně nelineární vektorová funkce dimenze n.

Je to systém t-invariantní a bez vstupu. Na tento typ systému lze snadno převést i systém zpětnovazebního řízení

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)] \tag{2.121a}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je vektor řídicích proměnných – řízení dimenze r

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}_2[\boldsymbol{x}(t)], \tag{2.121b}$$

protože můžeme psát

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1\{\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{f}_2[\boldsymbol{x}(t)]\} \Rightarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]. \tag{2.122}$$

Podobně i v případě řízeného systému (2.121a) řízení $\boldsymbol{u}(t)$ (tj. vstup) pro $t \le t_0$ mohlo systém přivést do počátečního stavu $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ a pak pro $t > t_0$ může být konstantní, tj. $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_0$, případně již nepůsobí, tj. $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}$; můžeme tedy psát

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}_0], \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{2.123}$$

Pro

$$\boldsymbol{f}_1[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}_0] = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]$$

se dostane vztah (2.122).

Předpokládá se, že obecně nelineární vektorové funkce $\boldsymbol{f}_1$ a $\boldsymbol{f}_2$ mají odpovídající dimenzi.

Pro $t \to \infty$ platí

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \to 0 \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \tag{2.124}$$

kde $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\infty)$.

Řešením rovnice (2.124) dostaneme rovnovážné stavy $\boldsymbol{x}_e$ (body, ekvilibria).

Vlastnosti rovnovážných stavů $\boldsymbol{x}_e$ byly pro $n = 2$ podrobně analyzovány v podkapitole 2.1.2.

Uvažujme autonomní nelineární dynamický systém (2.120) a linearizujme ho v rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e$, dostaneme

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{x_e}\Delta\boldsymbol{x}(t), \qquad \Delta\boldsymbol{x}(t_0) = \Delta\boldsymbol{x}_0, \tag{2.125a}$$

$$\boldsymbol{A}_{x_e} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e} \tag{2.125b}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e, \tag{2.125c}$$

kde $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}$ je ***Jacobiova matice*** prvních parciálních derivací vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ podle vektoru $\boldsymbol{x}$ v rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e$, $\Delta\boldsymbol{x}(t)$ – přírůstek vektoru stavu.

Protože se při linearizaci používá Taylorův rozvoj, tato linearizace se často nazývá ***Taylorova*** nebo podle matice (2.125b) ***Jacobiova***.

Je třeba si uvědomit, že ***při běžné linearizaci se Jacobiova matice počítá v pracovním bodě, naproti tomu při ověřování stability se Jacobiova matice počítá v rovnovážném stavu*** $\boldsymbol{x}_e$ (viz také podkapitoly 2.1.2 a 2.3.1).

Pro každý rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ se určí charakteristický mnohočlen

$$N_{\boldsymbol{x}_e}(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}) \tag{2.126}$$

a libovolnou metodou se určí poloha všech jeho kořenů, tj. vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}$, $s_1, s_2, \dots, s_n$. Pokud platí:

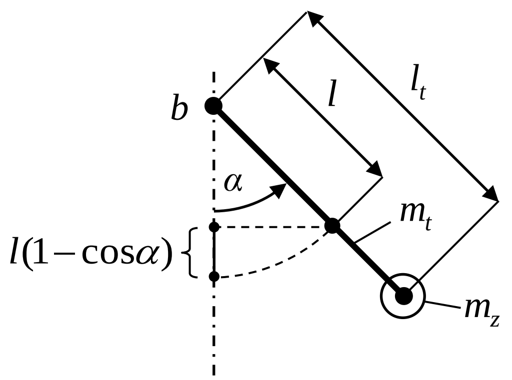
a) $\operatorname{Re} s_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pak daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je lokálně asymptoticky stabilní.

b) Alespoň pro jedno i platí $\operatorname{Re} s_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pak daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ je lokálně nestabilní.

c) Alespoň pro jedno i je $\operatorname{Re} s_i = 0$ a pro zbývající i $\operatorname{Re} s_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pak nelze rozhodnout, zda systém v daném rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e$ je (asymptoticky) stabilní či nestabilní a je třeba o stabilitě rovnovážného stavu rozhodnout na základě jiné metody.

Příklad 2.16

Na obr. 2.60 je fyzické kyvadlo, kde m_z je hmotnost závaží [kg], m_t – hmotnost tyče [kg], l_t – délka tyče [m], b – koeficient viskózního tření [$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1} \cdot s^{-1}}$], α – úhel vychýlení kyvadla od svislé osy [rad]. Je třeba sestavit matematický model kyvadla a ověřit stabilitu.



Obr. 2.60 Zjednodušené schéma fyzického kyvadla – příklad 2.16

Řešení:

Vyjdeme z Newtonova zákonu pro rotační pohyb, tj. z rovnováhy momentů k ose otáčení:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\alpha(t) - b\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{2.127a}$$

$$J = J_z + J_t, \quad J_z = m_z l_t^2, \quad J_t = \frac{1}{3}m_t l_t^2, \tag{2.127b}$$

$$m = m_z + m_t, \tag{2.127c}$$

$$l = \frac{m_z l_t + m_t \dfrac{l_t}{2}}{m_z + m_t}, \tag{2.127d}$$

kde J je celkový moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, J_z – moment setrvačnosti závaží vzhledem k ose otáčení, J_t – moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení, m – celková hmotnost kyvadla, l – vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení.

Matematický model kyvadla (2.127a) vyjádříme stavově (fázově)

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}, \tag{2.128}$$

tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{J}\sin x_1 - \frac{b}{J}x_2. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Rovnovážné stavy určíme pro $t \to \infty$, tj.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{mgl}{J}\sin x_1 - \frac{b}{J}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_1 = \pm k\pi, \ k = 0,1,2,\ldots \\ &x_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_e = [\pm k\pi, 0]^T \quad \text{pro} \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.130}$$

Nelineární matematický model (2.129) linearizujeme

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{x_e}\Delta\boldsymbol{x}, \qquad \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e, \tag{2.131a}$$

$$\boldsymbol{A}_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{mgl}{J}\cos x_1 & -\dfrac{b}{J} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_e}. \tag{2.131b}$$

Po uvažování rovnovážných stavů (2.130) dostaneme

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{mgl}{J}(-1)^k & -\dfrac{b}{J} \end{bmatrix}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.132}$$

Sestavíme charakteristický mnohočlen

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{x}_e}(s) &= \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \dfrac{mgl}{J}(-1)^k & s + \dfrac{b}{J} \end{vmatrix} = \\ &= s\left(s + \frac{b}{J}\right) + \frac{mgl}{J}(-1)^k, \end{aligned} \tag{2.133}$$

ze kterého vyplývá, že jeho dva kořeny (charakteristická čísla matice $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}$) pro sudá k budou komplexně sdružená se zápornou reálnou složkou a pro lichá k budou reálná, ale vzájemně opačného znaménka.

Rovnovážné stavy

$$\boldsymbol{x}_e = [\pm 2k\pi,\ 0]^T \quad \text{pro} \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.134a}$$

jsou lokálně asymptoticky stabilní ohniska a rovnovážné stavy

$$\boldsymbol{x}_e = [\pm(2k+1)\pi,\ 0]^T \quad \text{pro} \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.134b}$$

jsou lokálně nestabilní sedla.

Pokud uvažujeme $b = 0$, tj. charakteristický mnohočlen (2.133) bude mít tvar

$$N_{\boldsymbol{x}_e}(s) = s^2 + \frac{mgl}{J}(-1)^k, \tag{2.135}$$

pak pro sudá k budou kořeny ryze imaginární a první Ljapunovovou metodou nelze rozhodnout o stabilitě rovnovážných stavů. Na základě stavového portrétu na obr. 2.62 můžeme konstatovat, že rovnovážné stavy (2.134a) budou lokálně stabilní středy. Pro lichá k budou kořeny charakteristického mnohočlenu (2.135) reálné s opačnými znaménky, tj. rovnovážné stavy (2.134b) budou lokálně nestabilní sedla.

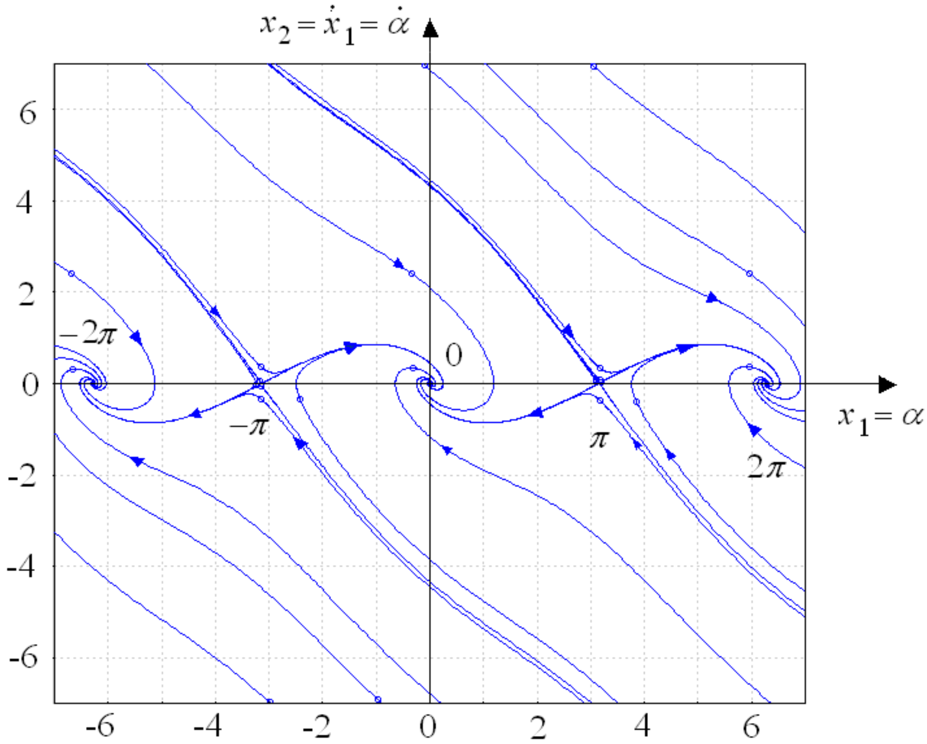
Názorně je to vidět na obr. 2.61 a 2.62, kde jsou zobrazeny stavové (fázové) portréty kyvadla pro $mgl/J = 1$ s^{-1}, $b = 1$ kg·m^2·rad^{-1}·s^{-1} (obr. 2.61) a $b = 0$ (obr. 2.62).

Většinou nás zajímá činnost kyvadla v rozmezí $-\pi < \alpha < \pi$.

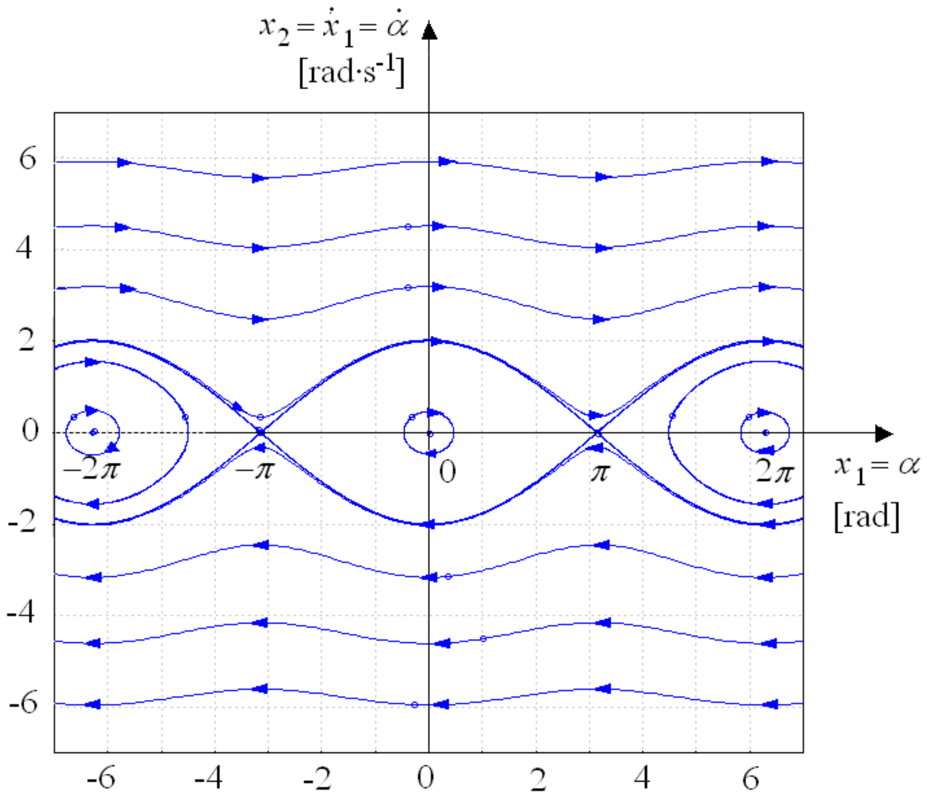
Pro malé výchylky platí

$$\sin\alpha \approx \alpha \iff \sin x_1 \approx x_1, \tag{2.136}$$

a proto nelineární model fyzického kyvadla (2.129) lze v okolí $x_1 = \alpha = 0$ zastoupit jeho lineární aproximací



Obr. 2.61 Stavový (fázový) portrét fyzického kyvadla pro $b > 0$ – příklad 2.16



Obr. 2.62 Stavový (fázový) portrét fyzického kyvadla pro $b = 0$ – příklad 2.16

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{mgl}{J}x_1 - \frac{b}{J}x_2, \tag{2.137}$$

viz také (2.131) a (2.132) pro $\boldsymbol{x}_e = [0,\ 0]^T$.

2.3.3 Přímá Ljapunovova metoda

Přímá (druhá) ***Ljapunovova metoda*** je velmi obecná, ale současně i náročná. Vyžaduje určitou zkušenost spočívající ve volbě vhodné, tzv. ***Ljapunovovy funkce*** $V[\boldsymbol{x}(t)] = V(\boldsymbol{x})$, která může být interpretována jako energie daného systému (příklad 2.17). Značně vhodnější je její interpretace jako zobecněná vzdálenost (norma) od vyšetřovaného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$.

Většinou se předpokládá, že rovnovážný stav je v počátku souřadnic, tj. $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$, viz (2.9) – (2.11).

Uvažujme funkci $V(\boldsymbol{x})$, která vyhovuje v oblasti D stavového prostoru X těmto požadavkům (předpokládá se, že oblast D obsahuje počátek $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$):

a) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in D$ mimo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

b) $V(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

pak funkce $V(\boldsymbol{x})$ je ***kladně definitní*** v oblasti D.

Pokud:

a) $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in D$,

b) $V(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

pak funkce $V(\boldsymbol{x})$ je ***kladně semidefinitní*** v oblasti D. V tomto případě funkce $V(\boldsymbol{x})$ může být nulová i pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Dále platí – je-li funkce $V(\boldsymbol{x})$ kladně (semi)definitní, pak funkce $[-V(\boldsymbol{x})]$ je ***záporně (semi)definitní***.

Velmi často se jako Ljapunovovy funkce používají ***kvadratické formy***

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_i x_j, \tag{2.138}$$

kde čtvercová matice $\boldsymbol{Q}$ je reálná a symetrická, tj.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T.$$

Pro reálnou symetrickou matici $\boldsymbol{Q}$ její vlastní čísla $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jsou reálná a jsou dána kořeny mnohočlenu

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}).$$

Pak pro kvadratickou formu (2.138) platí (i = 1, 2,…, n):

a) $V(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní $\Leftrightarrow\ s_i > 0$,

b) $V(\boldsymbol{x})$ je kladně semidefinitní $\Leftrightarrow\ s_i \geq 0$,

c) $V(\boldsymbol{x})$ je záporně definitní $\Leftrightarrow\ s_i < 0$,

d) $V(\boldsymbol{x})$ je záporně semidefinitní $\Leftrightarrow\ s_i \leq 0$.

Matici $\boldsymbol{Q}$ nazýváme stejně jako odpovídající kvadratickou formu, tj. kladně definitní, kladně semidefinitní atd.

Pokud kvadratická forma $V(\boldsymbol{x})$ nevyhovuje výše uvedeným podmínkám, pak je spolu s příslušnou maticí ***Q indefinitní***.

Pokud funkce $V(\boldsymbol{x})$ vyhovuje podmínce

$$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty \ \Rightarrow\ V(\boldsymbol{x}) \to \infty, \tag{2.139}$$

pak je ***radiálně neomezená*** (neohraničená), kde $\|\boldsymbol{x}\|$ je norma (zobecněná velikost) vektoru $\boldsymbol{x}$.

Je zřejmé, že kvadratická forma (2.138) je radiálně neomezená.

Uvažujme nyní totální derivaci funkce $V(\boldsymbol{x})$ podle času t [viz (2.120)]

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Vidíme, že $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ závisí na pravé straně rovnice (2.120) popisující daný autonomní nelineární dynamický systém, tzn., že totální derivace funkce $V(\boldsymbol{x})$ podle času t, tj. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ bude různá pro různé dynamické systémy.

Totální derivace funkce $V(\boldsymbol{x})$ podle času t, tj. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ představuje tedy časovou derivaci funkce $V(\boldsymbol{x})$ podél trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$.

Pokud funkce $V(\boldsymbol{x})$ bude kladně definitní a spojitě diferencovatelná v oblasti D (D obsahuje $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$) stavového prostoru X, pak může být kandidátem na Ljapunovovu funkci.

Předpokládejme, že pro Ljapunovovu funkci $V(\boldsymbol{x})$ v oblasti D platí:

a) $V(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní a $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je záporně semidefinitní, pak daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je ***lokálně stabilní*** (ve smyslu Ljapunova);

b) $V(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní a $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je záporně definitní, pak daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je ***lokálně asymptoticky stabilní*** (ve smyslu Ljapunova);

c) $V(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní a $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní, pak daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je ***lokálně nestabilní***.

Pokud Ljapunovova funkce $V(\boldsymbol{x})$ ***je radiálně neomezená*** a oblast D je celý stavový prostor X, pak výše ***uvedené vlastnosti jsou globální*** a můžeme je vztáhnout na celý dynamický systém, tj. nejenom na rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$. Je zřejmé, že v tomto případě dynamický systém může mít pouze jediný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$.

Zajímavá je geometrická interpretace totální derivace Ljapunovovy funkce $V(\boldsymbol{x})$ podle času t [viz (2.140)]

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \dot{\boldsymbol{x}},$$

kde

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}) \tag{2.141}$$

je gradient Ljapunovovy funkce $V(\boldsymbol{x})$, který je kolmý na její hladinu (viz obr. 2.63)

$$V(\boldsymbol{x}) = c_i \text{ (konst).} \tag{2.142}$$

Protože $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je skalárním součinem $\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x})$ a $\dot{\boldsymbol{x}}$, tj. lze psát

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = |\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x})| \cdot |\dot{\boldsymbol{x}}| \cdot \cos\alpha, \tag{2.143}$$

kde α je úhel mezi vektory $\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x})$ a $\dot{\boldsymbol{x}}$.

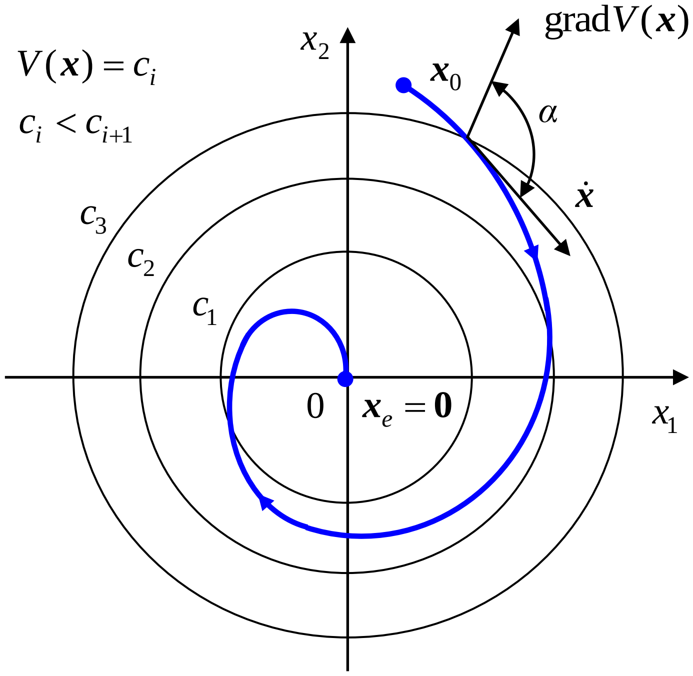
Ze vztahu (2.143) vyplývá

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0 \;\Rightarrow\; \cos\alpha < 0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \tag{2.144}$$

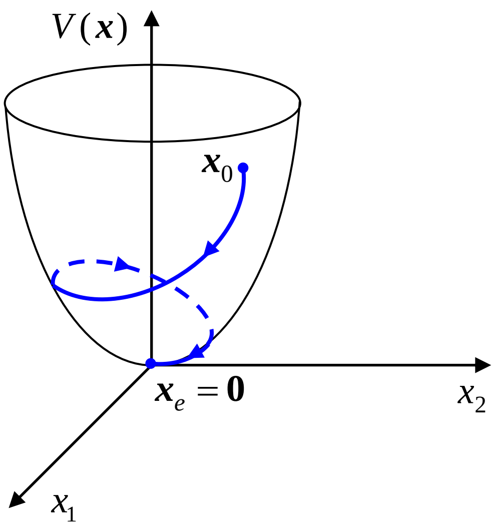
tzn., že vektor $\dot{\boldsymbol{x}}$ protíná hladiny (2.142) Ljapunovovy funkce $V(\boldsymbol{x})$ směrem dovnitř k menším hodnotám c_i, viz obr. 2.63.

Velmi názorná je interpretace záporné definitnosti totální derivace $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ Ljapunovovy funkce podle času t v případě, že Ljapunovova funkce vyjadřuje zobecněnou vzdálenost.

Podmínka $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$ znamená, že pro rostoucí čas t se vzdálenost od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ zmenšuje, až dosáhne rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$, pro který platí $V(\boldsymbol{0})=0$ a $\dot{V}(\boldsymbol{0})=0$, viz obr. 2.64.



Obr. 2.63 Geometrická interpretace podmínky $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$, viz vztahy (2.143) a (2.144)



Obr. 2.64 Geometrická interpretace podmínky $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$

Při přímé Ljapunovově metodě ověřování stability rovnovážných stavů je třeba si uvědomit, že ne každá kladně definitní funkce musí být Ljapunovovou funkcí $V(\boldsymbol{x})$ pro daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$.

Pokud zvolená funkce nevyhovuje podmínkám lokální (asymptotické) stability v daném rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e$, neznamená to, že daný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e$ není lokálně (asymptoticky) stabilní. V tomto případě je nutno za kandidáta na Ljapunovovu funkci $V(\boldsymbol{x})$ zvolit jinou kladně definitní funkci nebo pro ověření stability použít jinou metodu.

Z tohoto důvodu přímá Ljapunovova metoda je velmi náročná na zkušenosti a znalosti z oblasti nelineárních dynamických systémů. Naproti tomu, i když přímá Ljapunovova metoda dává pouze postačující podmínky stability, je velmi obecná se širokým spektrem využití. Zde, v této podkapitole, jsou uvedeny pouze její základní ideje a nejdůležitější poznatky.

Příklad 2.17

Je dáno fyzické kyvadlo na obr. 2.60 z příkladu 2.16 pro $x_1 = \alpha$ a $x_2 = \dot{\alpha}$ [viz (2.129)]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{J}\sin x_1 - \frac{b}{J}x_2. \end{aligned} \tag{2.145}$$

za předpokladu, že $|x_1| < \pi$ a $0 < |x_2| < a$, kde a je konstanta omezující rychlost kyvadla.

Je třeba ověřit stabilitu rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$, viz obr. 2.61 a 2.62.

Řešení:

Za Ljapunovovu funkci zvolíme celkovou energii kyvadla

$$\begin{aligned} &E = E_k + E_p, \\ &E_k = \frac{1}{2}Jx_2^2,\;\; E_p = mgl(1-\cos x_1), \end{aligned} \tag{2.146}$$

kde E_k je kinetická energie kyvadla, E_p – potenciální energie kyvadla.

Je zřejmé, že pro $|x_1| < \pi$ celková energie kyvadla E je kladně definitní funkce, a proto může být kandidátem na Ljapunovovu funkci

$$V(\boldsymbol{x}) = E = \frac{1}{2}Jx_2^2 + mgl(1-\cos x_1). \tag{2.147}$$

Budeme uvažovat kyvadlo bez tlumení a s tlumením.

a) Fyzické kyvadlo bez tlumení ($b = 0$)

Matematický model kyvadla bez tlumení má tvar

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{J}\sin x_1.\end{aligned} \tag{2.148}$$

Na základě vztahu (2.140) určíme totální derivaci Ljapunovovy funkce podle času t

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} mgl\sin x_1 & Jx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{mgl}{J}\sin x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= mglx_2 \sin x_1 - mglx_2 \sin x_1 = 0. \tag{2.149}$$

Protože $V(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní a $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$, tj. stavová trajektorie daná počátečním stavem $\boldsymbol{x}_0$ se ani nepřibližuje, ani nevzdaluje od rovnovážného stavu, tzn. rovnovážný stav kyvadla $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je lokálně stabilní ve smyslu Ljapunova. Je to stabilní střed (obr. 2.62).

b) Fyzické kyvadlo s tlumením ($b > 0$)

Matematický model kyvadla s viskózním třením je dán vztahem (2.145).

Na základě vztahu (2.140) pro stejnou Ljapunovou funkci (2.147) a matematický model (2.145) dostaneme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} mgl\sin x_1 & Jx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{mgl}{J}\sin x_1 - \dfrac{b}{J}x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= mglx_2 \sin x_1 - mglx_2 \sin x_1 - bx_2^2 = -bx_2^2. \tag{2.150}$$

Vidíme, že i v tomto případě $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je záporně semidefinitní, protože pro $x_2 = 0$ je $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$, ale x_1 může být libovolné v rozmezí $|x_1| < \pi$. Proto i v tomto případě můžeme pouze konstatovat, že rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je lokálně stabilní ve smyslu Ljapunova, i když víme z příkladu 2.16, že rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je lokálně asymptoticky stabilní ohnisko.

Je to určité zklamání, ale je třeba si uvědomit, že Ljapunovova teorie dává pouze postačující podmínky pro stabilitu, resp. asymptotickou stabilitu zvoleného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e$.

Protože v případě kyvadla s tlumením Ljapunovova funkce (2.147) nedává plnou odpověď na stabilitu rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$, zkusme ji zobecnit na tvar

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + mgl(1-\cos x_1), \tag{2.151}$$

kde $\boldsymbol{Q}$ je kladně definitní symetrická matice.

Můžeme psát ($q_{12} = q_{21}$)

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + mgl(1-\cos x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2) + mgl(1-\cos x_1)\,. \tag{2.152}$$

Aby matice $\boldsymbol{Q}$ byla kladně definitní, musí platit

$$q_{11} > 0, \quad q_{22} > 0, \quad q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0\,. \tag{2.153}$$

Na základě (2.140) dostaneme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} mgl\sin x_1 + q_{11}x_1 + q_{12}x_2, & q_{22}x_2 + q_{12}x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{J}\sin x_1 - \frac{b}{J}x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{q_{22}}{J}\right)}_{=0} mglx_2\sin x_1 + \underbrace{\left(q_{11} - q_{12}\frac{b}{J}\right)}_{=0} x_1x_2 + \underbrace{\left(q_{12} - q_{22}\frac{b}{J}\right)}_{<0} x_2^2 - q_{12}\frac{mgl}{J}x_1\sin x_1 \tag{2.154}$$

Nyní musíme zvolit q_{11}, q_{12} a q_{22} tak, aby $V(\boldsymbol{x})$ byla kladně definitní, tj. musí platit (2.153) a $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ byla záporně definitní, tj.

$$q_{22} = J, \quad q_{11} = q_{12}\frac{b}{J}, \quad 0 < q_{12} < b\,. \tag{2.155}$$

Zvolíme-li např. $q_{12} = \frac{1}{2}b$ [podmínky kladné definitnosti (2.153) jsou splněny], pak dostaneme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\frac{bmgl}{J}x_1\sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2\,. \tag{2.156}$$

Protože pro $|x_1| < \pi$ Ljapunovova funkce $V(\boldsymbol{x})$ je kladně definitní a její totální derivace podle času t $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je záporně definitní, rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je lokálně asymptoticky stabilní.

Z příkladu je zřejmé, že přímá Ljapunovova metoda i pro velmi jednoduché nelineární dynamické systémy může být náročná a také pracná.

Příklad 2.18

Je třeba analyzovat autonomní nelineární dynamický systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 \end{aligned} \tag{2.157}$$

z hlediska stability.

Řešení:

Nejdříve určíme rovnovážné stavy

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_2, \\ 0 &= -x_1^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \boldsymbol{x}_e = [0,\ 0]^T . \tag{2.158}$$

Nelineární dynamický systém (2.157) má jediný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$.

Nejdříve použijeme nepřímou Ljapunovovu metodu [viz (2.125)]

$$\begin{aligned} &\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}\Delta\boldsymbol{x}(t), \qquad \Delta\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e, \\ &\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.159}$$

Sestavíme charakteristický mnohočlen

$$N_{\boldsymbol{x}_e}(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 \ \Rightarrow \ s_{1,2} = 0 . \tag{2.160}$$

Protože oba kořeny (póly linearizovaného systému) jsou nulové, o stabilitě či nestabilitě rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ na základě nepřímé Ljapunovovy metody nemůžeme rozhodnout.

Nyní použijeme přímou Ljapunovovu metodu.

Za Ljapunovovu funkci zkusíme

$$V(\boldsymbol{x}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2; \qquad a_1, a_2 > 0 \tag{2.161}$$

a dostaneme [viz (2.140)]

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2a_1x_1 & 2a_2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} = 2a_1x_1x_2 - 2a_2x_1^3x_2 = \\ = 2(a_1 - a_2x_1^2)x_1x_2. \qquad (2.162)$$

I když funkce (2.161) je kladně definitní, její totální derivace podle času t (2.162) je indefinitní, a proto je pro daný nelineární dynamický systém nevhodná.

Nyní zkusíme funkci

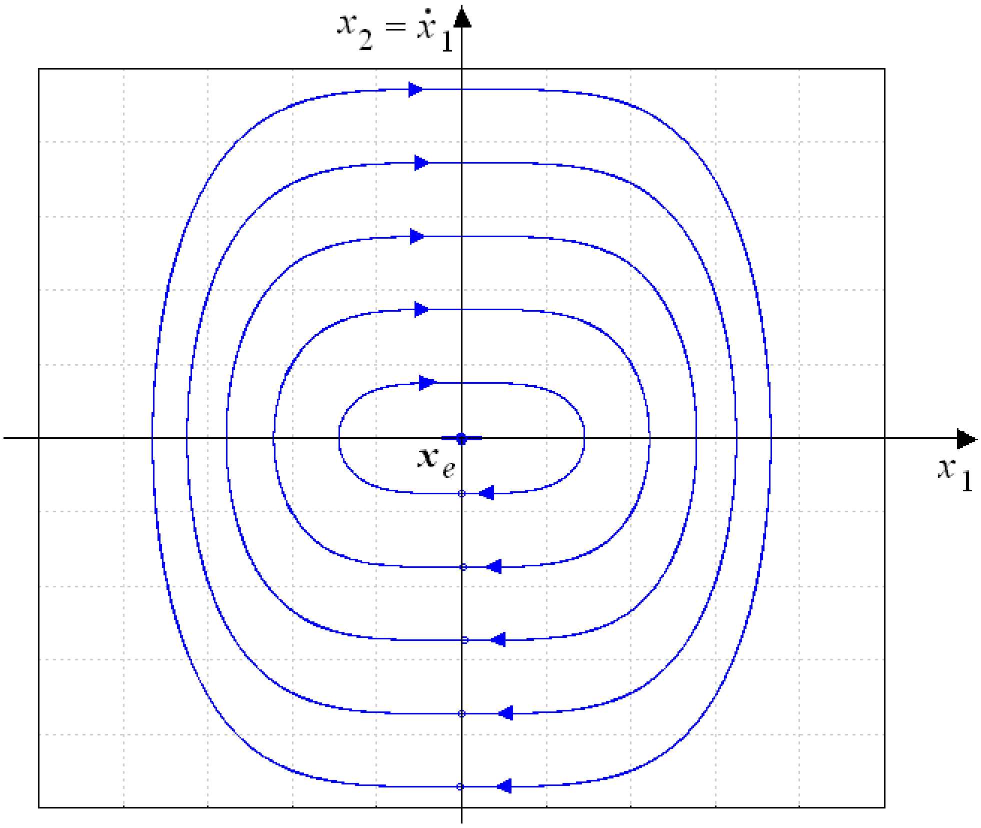
$$V(\boldsymbol{x}) = a_1x_1^4 + a_2x_2^2; \qquad a_1, a_2 > 0 \qquad (2.163)$$

a dostaneme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 4a_1x_1^3 & 2a_2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} = 4a_1x_1^3x_2 - 2a_2x_1^3x_2.$$

Pro $a_1 = a_2/2$ obdržíme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2a_2x_1^3x_2 - 2a_2x_1^3x_2 = 0. \qquad (2.164)$$



Obr. 2.65 Fázový portrét nelineárního dynamického systému (2.157) – příklad 2.18

Protože funkce (2.163) je kladně definitní a radiálně neomezená [viz (2.139)] a její totální derivace podle času t (2.164) je nulová, což znamená, že zobecněná vzdálenost (2.163) zastupujícího bodu se od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ nemění, je rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ stabilní střed. Vzhledem k tomu, že rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je jediný, jeho vlastnost můžeme vztáhnout na celý systém, tj. nelineární dynamický systém (2.157) je globálně stabilní ve smyslu Ljapunova. Stavový, v našem případě fázový, portrét je na obr. 2.65.

Stavové (fázové) trajektorie můžeme určit snadno analyticky.

Ze vztahu (2.157) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\, x_2}{\mathrm{d}\, x_1} = -\frac{x_1^3}{x_2} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{x_2(0)}^{x_2(t)} x_2 \,\mathrm{d}\, x_2 = -\int\limits_{x_1(0)}^{x_1(t)} x_1^3 \,\mathrm{d}\, x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[x_2^2(t) - x_2^2(0)\right] = -\frac{1}{4}\left[x_1^4(t) - x_1^4(0)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} x_1^4 + x_2^2 = \frac{1}{2} x_{10}^4 + x_{20}^2. \tag{2.165}$$

Vidíme, že pro různé počáteční stavy $\boldsymbol{x}_0 = [x_1(0), x_2(0)]^T$ dostaneme odpovídající uzavřené křivky v souladu s obr. 2.65. Je zřejmé, že rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je globálně stabilní (ve smyslu Ljapunova) střed.

Příklad 2.19

Je třeba ověřit stabilitu nelineárního dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3. \end{aligned} \tag{2.166}$$

Řešení:

Podobně jako v předchozím příkladě 2.18 nejdříve určíme rovnovážné stavy

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -x_1^3 - x_2 \\ 0 &= x_1 - x_2^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 0, & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{2.167}$$

Nelineární dynamický systém (2.166) má jediný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

Pomocí nepřímé Ljapunovovy metody pro linearizovaný model dostaneme

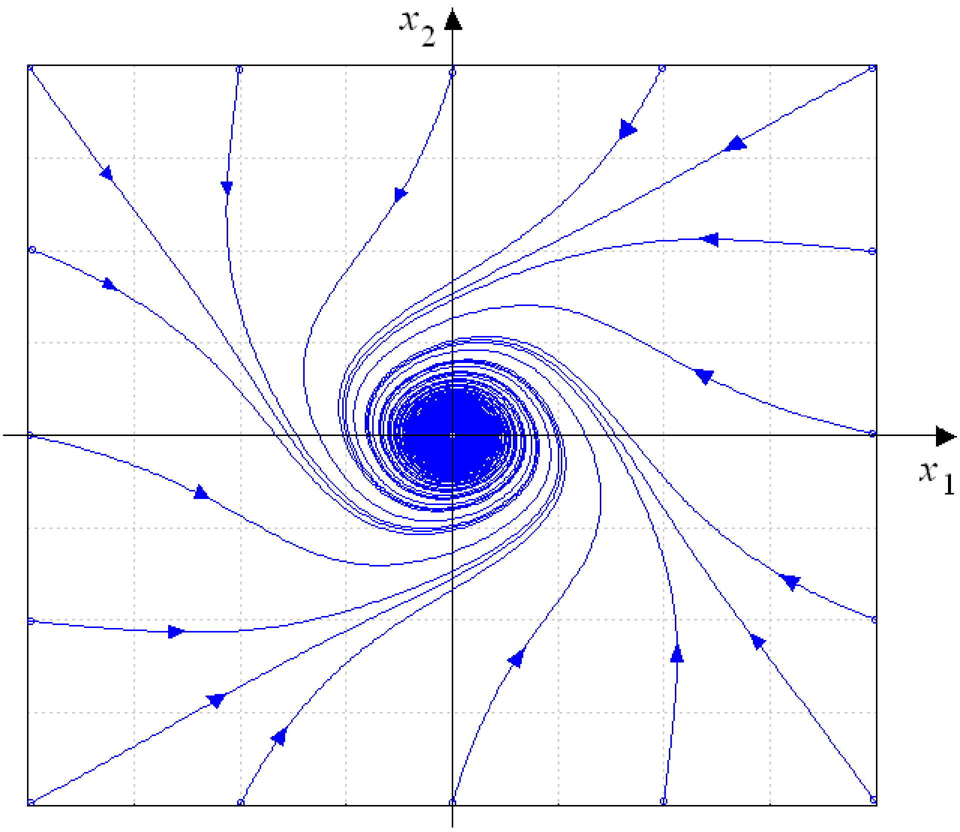
$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}\Delta\boldsymbol{x}(t), \qquad \Delta\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e,$$

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Určíme charakteristický mnohočlen

$$N_{\boldsymbol{x}_e}(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1 \Rightarrow s_{1,2} = \pm\,\mathrm{j}\,. \tag{2.168}$$

O stabilitě či nestabilitě jediného rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ nelze rozhodnout, protože kořeny (póly linearizovaného) systému jsou ryze imaginární, tj. leží na imaginární ose.



Obr. 2.66 Stavový portrét nelineárního dynamického systému (2.166) – příklad 2.19

Použijeme tedy přímou Ljapunovovu metodu. Zvolíme Ljapunovovu funkci ve tvaru

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{2.169}$$

a dostaneme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2 \\ \\ x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} = -x_1^4 - x_1x_2 + x_1x_2 - x_2^4 = -(x_1^4 + x_2^4)\,. \qquad (2.170)$$

Ljapunovova funkce (2.169) je kladně definitní a radiálně neomezená [viz (2.139)] a její totální derivace podle času t je záporně definitní, proto rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je globálně asymptotický stabilní. Protože rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ je jediný, lze konstatovat, že nelineární dynamický systém (2.166) je globálně asymptoticky stabilní.

Stavový portrét nelineárního dynamického systému je na obr. 2.66.

Příklad 2.20

Je třeba provést analýzu vlastností nelineárního dynamického systému z příkladu 2.2 popsaného stavovým matematickým modelem [viz (2.26)]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] - x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] + x_1. \end{aligned} \qquad (2.171)$$

Řešení:

Určíme rovnovážné stavy

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -x_1[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] - x_2 \\ 0 &= -x_2[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] + x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}_e = [0, \quad 0]^T \qquad (2.172)$$

Nelineární dynamický systém (2.171) má jediný rovnovážný stav v počátku stavových proměnných $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

V rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ daný nelineární systém zlinearizujeme a použijeme nepřímou Ljapunovovu metodu

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}\Delta\boldsymbol{x}(t), \qquad \Delta\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e,$$

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_e},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] - x_1[2(x_1^2 + x_2^2)2x_1 - 6x_1],$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -x_1[2(x_1^2 + x_2^2)2x_2 - 6x_2] - 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -x_2[2(x_1^2 + x_2^2)2x_1 - 6x_1] + 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2] - x_2[2(x_1^2 + x_2^2)2x_2 - 6x_2].$$

Po dosazení a úpravě v rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ obdržíme matici linearizovaného systému

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{2.173}$$

Z charakteristického mnohočlenu

$$N_{\boldsymbol{x}_e}(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_e}) = \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = \tag{2.174}$$
$$= s^2 + 4s + 5 \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 2\,\mathrm{j}$$

vidíme, že póly jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, proto v jediném rovnovážném stavu $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ vystupuje lokálně asymptoticky stabilní ohnisko.

Nyní použijeme přímou Ljapunovovu metodu. Za Ljapunovovu funkci zvolíme

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{2.175}$$

a dostaneme

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2]. \tag{2.176a}$$

Druhou část (druhý činitel) výrazu (2.176a) můžeme upravit. Označme $z = x_1^2 + x_2^2$ a dostaneme

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2),$$

tj.

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 2 = (x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

Totální derivace Ljapunovovy funkce podle času t tedy bude

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2). \tag{2.176b}$$

Nyní již lze výraz (2.176b) snadno analyzovat. Protože kladně definitní Ljapunovovu funkci (2.175) můžeme považovat za zobecněnou vzdálenost od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ (v našem případě je to polovina čtverce euklidovské vzdálenosti $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$), ze vztahů

$$\text{a) } \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ pro } \boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0 \text{ pro } 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1 \tag{2.177a}$$

$$\text{b) } \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ pro } x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{2.177b}$$

$$\text{c) } \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ pro } x_1^2 + x_2^2 = 2 \tag{2.177c}$$

vyplývá:

a) Protože $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je lokálně záporně definitní, rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ je lokálně asymptoticky stabilní ohnisko (druh je určen na základě nepřímé Ljapunovovy metody).

b) a c) Protože zobecněná vzdálenost se od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ nemění, stavová trajektorie vytvoří uzavřené křivky, tj. mezní cykly

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \tag{2.178a}$$

a

$$x_1^2 + x_2^2 = 2\,. \tag{2.178b}$$

Protože pro

$$0 < x_1^2 + x_2^2 < 1 \;\Rightarrow\; \dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$$

a

$$1 < x_1^2 + x_2^2 < 2 \;\Rightarrow\; \dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0$$

stavová trajektorie se od mezního cyklu (2.178a) z obou stran vzdaluje, a proto mezní cyklus (2.178a) je nestabilní.

Naproti tomu pro

$$1 < x_1^2 + x_2^2 < 2 \;\Rightarrow\; \dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0$$

a

$$2 < x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow\; \dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0\,,$$

stavová trajektorie se z obou stran k meznímu cyklu (2.178b) přibližuje, a proto mezní cyklus (2.178b) je stabilní.

Stavový portrét nelineárního dynamického systému (2.171) je na obr. 2.11.

Příklad 2.21

Uvažujme autonomní lineární dynamický systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 , \tag{2.179}$$

kde $\boldsymbol{x}$ je vektor stavu dimenze n, $\boldsymbol{A}$ – čtvercová matice systému (dynamiky) typu (n, n).

Pomocí přímé Ljapunovovy metody je třeba vyjádřit podmínku globální asymptotické stability daného lineárního dynamického systému.

Řešení:

Použijeme Ljapunovovu funkci $V(\boldsymbol{x})$ ve tvaru kvadratické formy

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} , \tag{2.180}$$

kde $\boldsymbol{P}$ je reálná symetrická kladně definitní matice typu (n, n), tj.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T .$$

Pak můžeme psát

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} =$$

$$= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \ \Rightarrow$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} , \tag{2.181}$$

kde

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} . \tag{2.182}$$

Bude-li matice $\boldsymbol{Q}$ kladně definitní, pak $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ bude záporně definitní, a proto jediný rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ i celý autonomní lineární dynamický systém (2.179) bude globálně asymptoticky stabilní.

Matice $\boldsymbol{Q}$ je symetrická, protože platí

$$\boldsymbol{Q}^T = -(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^T = -(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{Q} . \tag{2.183}$$

Rovnice (2.182) se nazývá ***Ljapunovova algebraická rovnice***.

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ budou mít záporné reálné části (tj. rovnovážný stav $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ bude globálně asymptoticky stabilní) tehdy a jen tehdy, když pro danou symetrickou kladně definitní matici $\boldsymbol{Q}$ existuje jednoznačná symetrická kladně definitní matice $\boldsymbol{P}$ vyhovující Ljapunovově algebraické rovnici (2.182).

Je zřejmé, že pro běžné ověření stability lineárních dynamických systémů přímá Ljapunovova metoda není vhodná z důvodu veliké pracnosti.

2.3.4 Kruhové kritérium stability

Můžeme-li v regulačním obvodě oddělit nelinearitu od lineární dynamické části, pak můžeme pro ověření stability jediného rovnovážného stavu použít kmitočtová kritéria, která vycházejí z Nyquistova kritéria stability pro lineární regulační obvody. Jejich nevýhodou je, že dávají pouze postačující podmínky, ale jsou relativně jednoduchá a v technické praxi oblíbená. Kritéria budou uvedena pouze v základní podobě.

Nejdříve zavedeme pojem ***sektorová nelinearita*** $[\alpha, \beta]$, viz obr. 2.67.

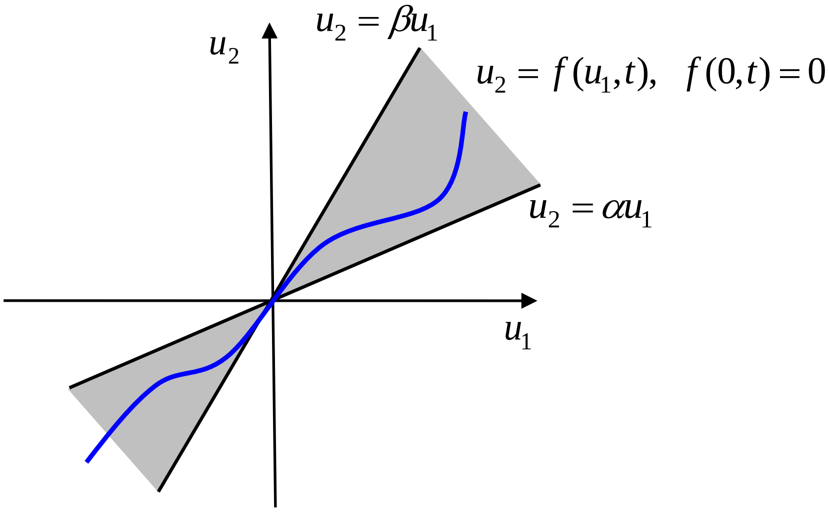
Sektorová nelinearita $[\alpha, \beta]$

$$u_2 = f(u_1,t), \quad f(0,t) = 0 \tag{2.184}$$

je v rovině (u_1, u_2) vymezena dvojicí přímek se směrnicemi α a β, tj.

$$\alpha u_1 \le f(u_1,t) \le \beta u_1, \quad f(0,t) = 0 \tag{2.185a}$$

pro všechna t.



Obr. 2.67 Sektorová nelinearita $[\alpha, \beta]$

Celou nerovnost vynásobíme u_1 a dostaneme

$$\alpha u_1^2 \le u_1 f(u_1,t) \le \beta u_1^2, \quad f(0,t) = 0. \tag{2.185b}$$

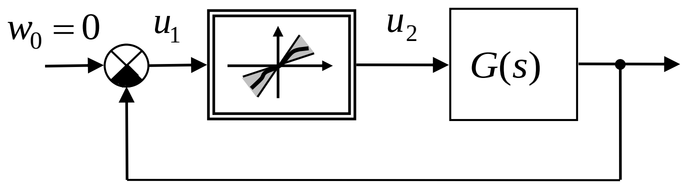
Z této nerovnosti pro $0 \le \alpha < \beta$ vyplývá, že sektorová nelinearita prochází počátkem a vyskytuje se v prvním a třetím kvadrantu.

Nerovnost (2.185a) se často zapisuje ve tvaru

$$\alpha \le \frac{f(u_1,t)}{u_1} \le \beta, \quad u_1 \ne 0, \quad f(0,t) = 0. \tag{2.185c}$$

Velmi důležité je, že sektorová nelinearita vždy prochází počátkem souřadnic. Je to z důvodu existence pouze jediného rovnovážného stavu, a proto lze případnou stabilitu rozšířit na celý zpětnovazební obvod.

Předpokládá se, že sektorovou nelinearitu můžeme v regulačním obvodě oddělit od lineární dynamické části popsané přenosem $G(s)$, jehož stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, v souladu s obr. 2.68. V některých případech budeme vstupní veličinu u_1 do nelinearity považovat a také označovat jako regulační odchylku e.

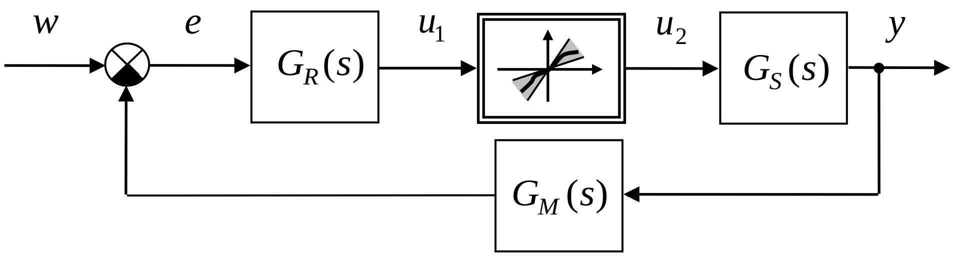


Obr. 2.68 Zpětnovazební obvod se sektorovou nelinearitou

Např. regulační obvod se sektorovou nelinearitou (nelineární akční člen) pro $w(t) = 0$ na obr. 2.69 může být snadno transformován na obvod na obr. 2.68 pro

$$G(s) = G_R(s) G_S(s) G_M(s), \tag{2.186}$$

kde $G_R(s)$ je přenos regulátoru, $G_S(s)$ – přenos soustavy, $G_M(s)$ – přenos měřicího členu. Na pořadí lineárních členů nezáleží.



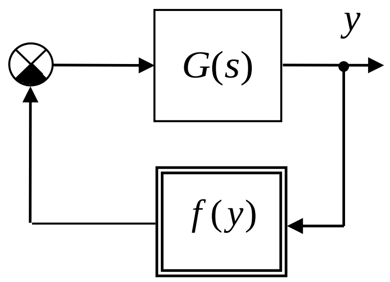
Obr. 2.69 Regulační obvod se sektorovou nelinearitou

Zpětnovazební nelineární obvod na obr. 2.68 se často nazývá Lurjeho typu a bývá popsán stavově

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} f(y), \\ y &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2.187}$$

kde $f(y)$ je sektorová nelinearita umístěná ve zpětné vazbě (obr. 2.70) a kde přenos lineární dynamické části je dán vztahem (stavový model musí být řiditelný a pozorovatelný)

$$G(s) = \boldsymbol{c}^T (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{b} . \tag{2.188}$$

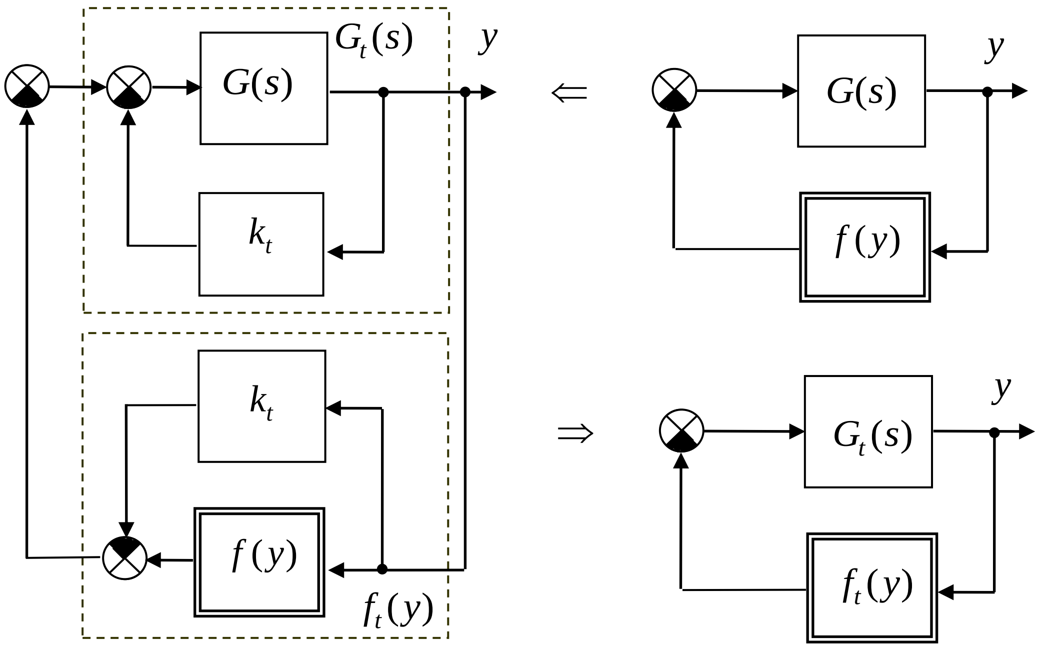


Obr. 2.70 Zpětnovazební nelineární obvod Lurjeho typu

Z hlediska kmitočtových metod ověřování stability zpětnovazební obvody na obr. 2.68 – 2.70 při nulových vstupech až na označení veličin mohou být považovány za ekvivalentní. Ale pokud např. v regulačním obvodě na obr. 2.69 žádaná veličina $w(t)$ nebude nulová, tj. $w(t) = w_0 \eta(t)$ ($w_0 \neq 0$), pak vznikají závažné problémy. Může dojít k posunutí rovnovážného stavu z počátku souřadnic (při neexistenci integračního členu v přenosu lineární části). V případě integračního členu je důležité jeho umístění, tj. zda je před nelinearitou, nebo za ní (viz příklad 1.3 a 2.23) atd.

Nepříjemné je, že reálné regulační obvody téměř vždy obsahují integrační člen a nelinearitu typu nasycení, viz příklad 2.24.

Některé problémy lze obejít transformací blokového schématu na obr. 2.70 v souladu s obr. 2.71.



Obr. 2.71 Transformace zpětnovazebního obvodu

Je zřejmé, že pro konstantní zesílení k_t lineárních členů výsledné vlastnosti zpětnovazebního obvodu zůstanou stejné.

V souladu s obr. 2.71 lze psát

$$G_t(s) = \frac{G(s)}{1 + k_t G(s)}, \tag{2.189}$$

$$f_t(y) = f(y) - k_t y. \tag{2.190}$$

Transformovaná lineární část $G_t(s)$ má již jiné póly než původní část $G(s)$. Dochází k přesouvání pólů, většinou vlevo, tj. do stabilní oblasti.

Ze vztahu (2.190) vyplývá, že rovněž dochází k transformaci sektoru, ve kterém leží transformovaná nelinearita $f_t(y)$, tj.

$$\alpha_t = \alpha - k_t, \ \beta_t = \beta - k_t. \tag{2.191}$$

Pro ověřování stability zpětnovazebních nelineárních obvodů se sektorovými nelinearitami (obr. 2.68 a 2.70) byly formulovány hypotézy, z nichž dvě mohou být při návrhu nelineárních regulačních obvodů užitečné.

Ajzermanova hypotéza

Nahradí-li se sektorová nelinearita $[\alpha, \beta]$ lineárním zesílením k_A v daném, sektoru, tj.

$$\alpha \le k_A \le \beta \tag{2.192}$$

a zpětnovazební obvod pro toto zesílení k_A je asymptoticky stabilní, pak se lze domnívat, že i původní zpětnovazební nelineární obvod bude asymptoticky stabilní.

Kalmanova hypotéza

Vyhovuje-li jednoznačná nelinearita nerovnosti

$$\alpha' \le \frac{\mathrm{d}\, f(u_1)}{\mathrm{d} u_1} \le \beta' \tag{2.193}$$

a nahradí-li se lineárním zesílením k_K v tomto sektoru, tj.

$$\alpha' \le k_K \le \beta' \tag{2.194}$$

a zpětnovazební obvod bude pro toto zesílení k_K asymptoticky stabilní, pak se lze domnívat, že i původní zpětnovazební nelineární obvod bude asymptoticky stabilní.

Protože platí

$$\alpha' \le \alpha < \beta \le \beta', \tag{2.195}$$

je zřejmé, že z platnosti Kalmanovy hypotézy vyplývá i platnost Ajzermanovy hypotézy, tj. Kalmanova hypotéza je přísnější. Bohužel i za předpokladu asymptotické stability lineární dynamické části tyto hypotézy obecně neplatí.

Mezní hodnoty α a β v nerovnosti

$$\alpha < k_H < \beta \tag{2.196}$$

pro zesílení k_H nahrazující nelinearitu, pro které daný zpětnovazební lineární obvod je globálně asymptoticky stabilní, vymezují tzv. ***Hurwitzův sektor*** pro danou lineární dynamickou část $G(s)$.

Nyní již můžeme formulovat ***kruhové kritérium stability***.

Uvažujme zpětnovazební nelineární obvod na obr. 2.68 s časově proměnnou sektorovou nelinearitou (2.185a), pak platí: Zpětnovazební nelineární obvod na obr. 2.68 je globálně asymptoticky stabilní, když pro:

a) $0 < \alpha < \beta$ amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného zpětnovazebního obvodu $G(\mathrm{j}\omega)$ s p nestabilními póly pro $0 \le \omega \le \infty$ leží vně tzv. ***kritické kružnice*** se středem

$$-\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} \tag{2.197}$$

ležícím na záporné reálné poloose, procházející body $(-1/\alpha, \mathrm{j}0)$ a $(-1/\beta, \mathrm{j}0)$ a obklopí ji $p/2$ krát (tj. $p\pi$ krát) v kladném smyslu, tj. proti pohybu hodinových ručiček.

b) $0 = \alpha < \beta$ amplitudofázová kmitočtová charakteristika asymptoticky stabilního otevřeného zpětnovazebního obvodu $G(\mathrm{j}\omega)$ (tj. bez pólů na imaginární ose) pro $0 \le \omega \le \infty$ leží napravo od vertikální přímky procházející bodem $-1/\beta$ na záporné reálné poloose.

c) $\alpha < 0 < \beta$ amplitudofázová charakteristika asymptoticky stabilního zpětnovazebního obvodu $G(\mathrm{j}\omega)$ (tj. bez pólů na imaginární ose) je vevnitř kritické kružnice se středem na reálné ose a procházející body $(-1/\alpha, 0\,\mathrm{j})$ a $(-1/\beta, 0\,\mathrm{j})$. Tento případ pro $\alpha < 0$ může vzniknout např. transformací (2.191).

Je zřejmé, že pro $0 < \alpha = \beta$ a $G_o(s) = \alpha G(s)$ kruhové kritérium stability přejde na klasické Nyquistovo kritérium pro lineární regulační obvody.

Amplitudofázová kmitočtová charakteristika otevřeného zpětnovazebního (regulačního) obvodu se často nazývá ***Nyquistova charakteristika***, a proto dále tento název budeme používat.

Kruhové kritérium stability je pouze postačující podmínkou globální asymptotické stability a je poměrně konzervativní.

Příklad 2.22

V regulačním obvodě na obr. 2.69 s nestabilní soustavou

$$G_S(s) = \frac{2}{(s-1)(0{,}2s+1)} \tag{2.198}$$

a konvenčním regulátorem PI

$$G_R(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \tag{2.199}$$

se stavitelnými parametry $K_P^* = 5$, $T_I^* = 1$ s a s přenosem měřicího členu $G_M(s) = 1$ je uvažována náhrada sektorové nelinearity akčního členu [1/2, 1] lineárním členem se zesílením (koeficientem přenosu) $k_a = 0{,}75$.

Je třeba ověřit stabilitu daného regulačního obvodu. Sektorová nelinearita může být časově proměnná.

Řešení:

Nejdříve ověříme stabilitu regulačního obvodu pro nominální hodnotu $k_a = 0{,}75$.

V souladu s obr. 2.68 a 2.69 platí ($G_M = 1$)

$$k_a G(s) = k_a G_R(s) G_S(s) = \frac{2k_a K_P (T_I s + 1)}{T_I s(s-1)(0{,}2s+1)} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \Rightarrow$$

Charakteristický mnohočlen

$$N(s) = 0{,}2T_I s^3 + 0{,}8T_I s^2 + (2k_a K_P - 1)T_I s + 2k_a K_P .$$

Sestavíme Hurwitzovu matici

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0{,}8T_I & 2k_a K_P & 0 \\ 0{,}2T_I & (2k_a K_P - 1)T_I & 0 \\ 0 & 0{,}8T_I & 2k_a K_P \end{bmatrix}$$

a dostaneme

a) $\quad 2k_a K_P - 1 > 0 \Rightarrow K_P > \dfrac{1}{2k_a} = \dfrac{2}{3}$, b)

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0{,}8T_I & 2k_a K_P \\ 0{,}2T_I & (2k_a K_P - 1)T_I \end{vmatrix} = 0{,}8T_I^2(2k_a K_P - 1) - 0{,}4T_I k_a K_P > 0 \;\Rightarrow$$

$$T_I > \frac{k_a K_P}{2(2k_a K_P - 1)} \;\Rightarrow \qquad (2.200)$$

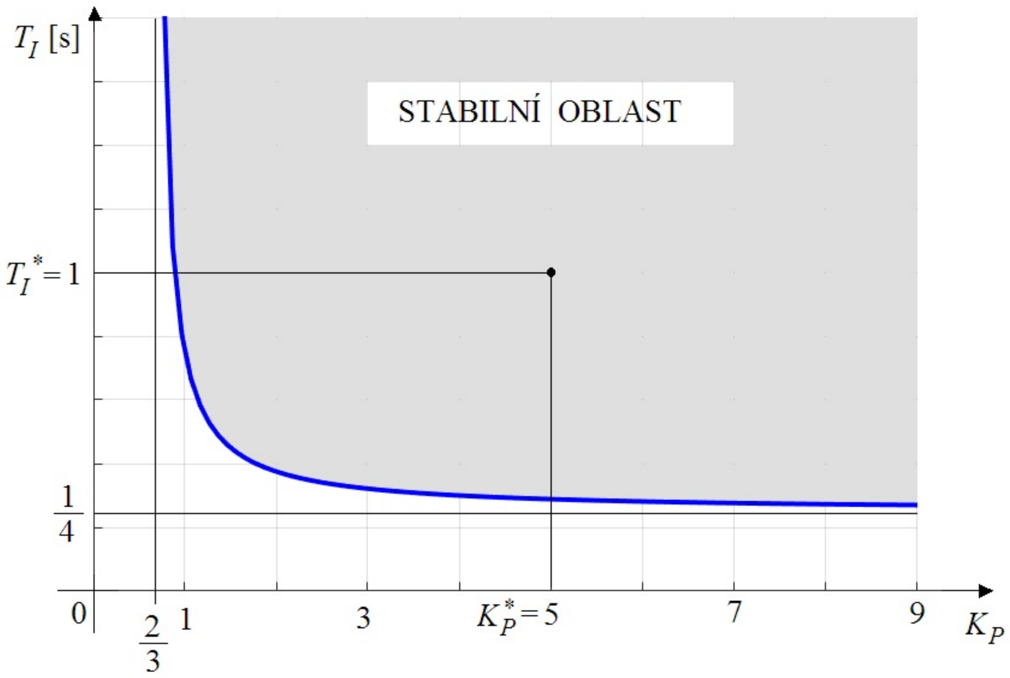
$$T_I > \frac{3K_P}{4(3K_P - 2)}.$$

Stabilní oblast pro stavitelné parametry PI regulátoru K_P a T_I je na obr. 2.72. V našem případě $K_P^* = 5$ a $T_I^* = 1$ s, tj. nastavené hodnoty stavitelných parametrů regulátoru PI leží ve stabilní oblasti, viz obr. 2.72.

Pro nastavené hodnoty stavitelných parametrů $K_P^* = 5$ a $T_I^* = 1$ s lze na základě nerovnosti (2.200) určit Hurwitzův sektor. Po dosazení K_P^* a T_I^* do (2.200) a $k_H = k_a$ dostaneme

$$k_H > \frac{2}{15}, \qquad (2.201)$$

tj. Hurwitzův sektor je $(2/15, \infty)$.



Obr. 2.72 Stabilní oblast pro stavitelné parametry PI regulátoru K_P a T_I – příklad 2.22

Pro ověření stability regulačního obvodu s časově proměnnou sektorovou nelinearitou [1/2, 1] použijeme kruhové kritérium. Střed kritické kružnice leží na záporné reálné poloose a je dán vztahem (2.197).

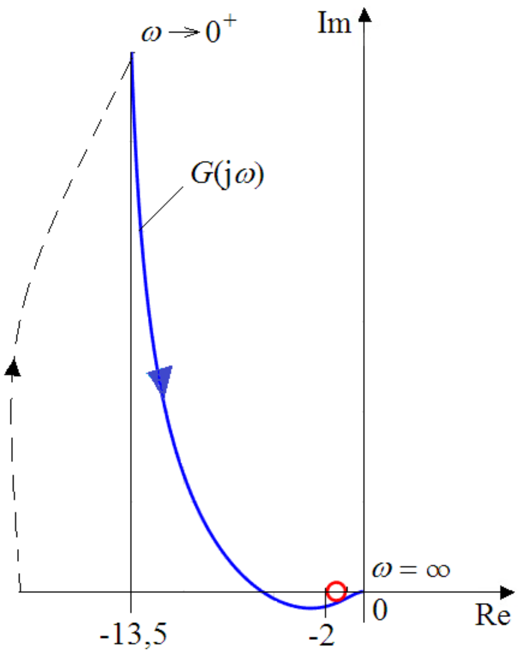
Průběh Nyquistovy charakteristiky $G(\mathrm{j}\omega)$ je na obr. 2.73 a detail jeho důležitější části okolo kritického bodu (–1, j0) a kritické kružnice je na obr. 2.74. Protože přenos $G(s)$ obsahuje jeden nestabilní pól $s = 1$ ($p = 1$), proto Nyquistova charakteristika $G(\mathrm{j}\omega)$ musí obklopit kritický bod (–1, j0) (klasické Nyquistovo kritérium) a kritickou kružnici půlkrát. Je třeba vzít v úvahu, že Nyquistovu charakteristiku $G(\mathrm{j}\omega)$ pro $\omega \to 0$ je nutno spojit se zápornou reálnou poloosou (zaznačeno čárkovaně).

Regulační obvod s nestabilní soustavou (2.198) a regulátorem PI pro $K_P^* = 5$ a $T_I^* = 1$ s a sektorovou nelinearitou [1/2, 1] je globálně asymptoticky stabilní.

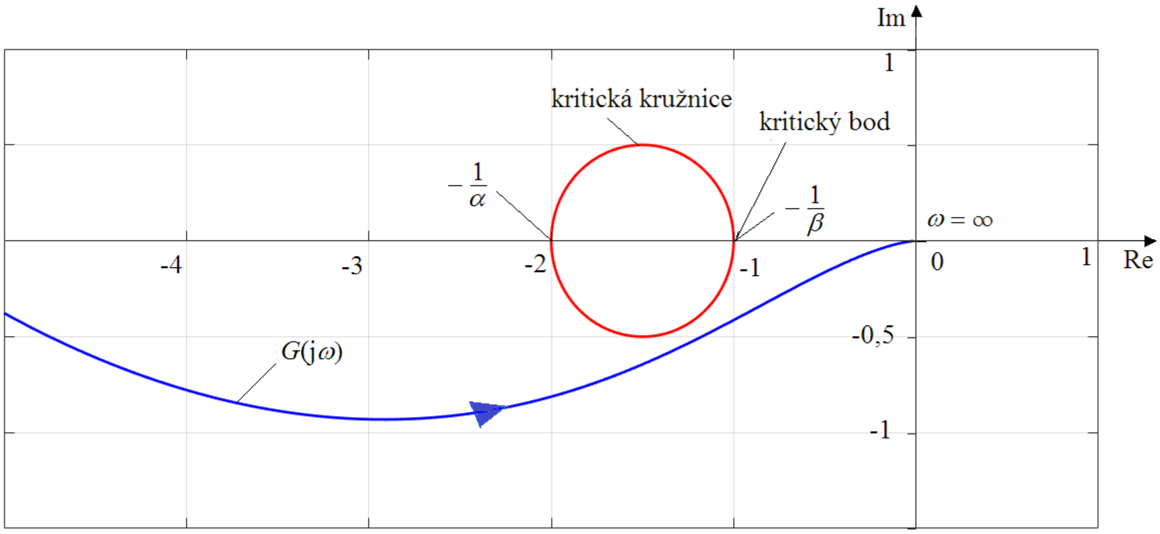
Protože platí [viz (2.192) a (2.201)]

$$k_A \in [1/2, 1]; \; k_H \in (2/15, \infty) \Rightarrow$$
$$[1/2, 1] \subset (2/15, \infty)$$

a regulační obvod je globálně asymptoticky stabilní, je rovněž splněna Ajzermanova hypotéza. Kalmanovu hypotézu nelze ověřit z důvodu neznámého průběhu sektorové nelinearity [1/2, 1].

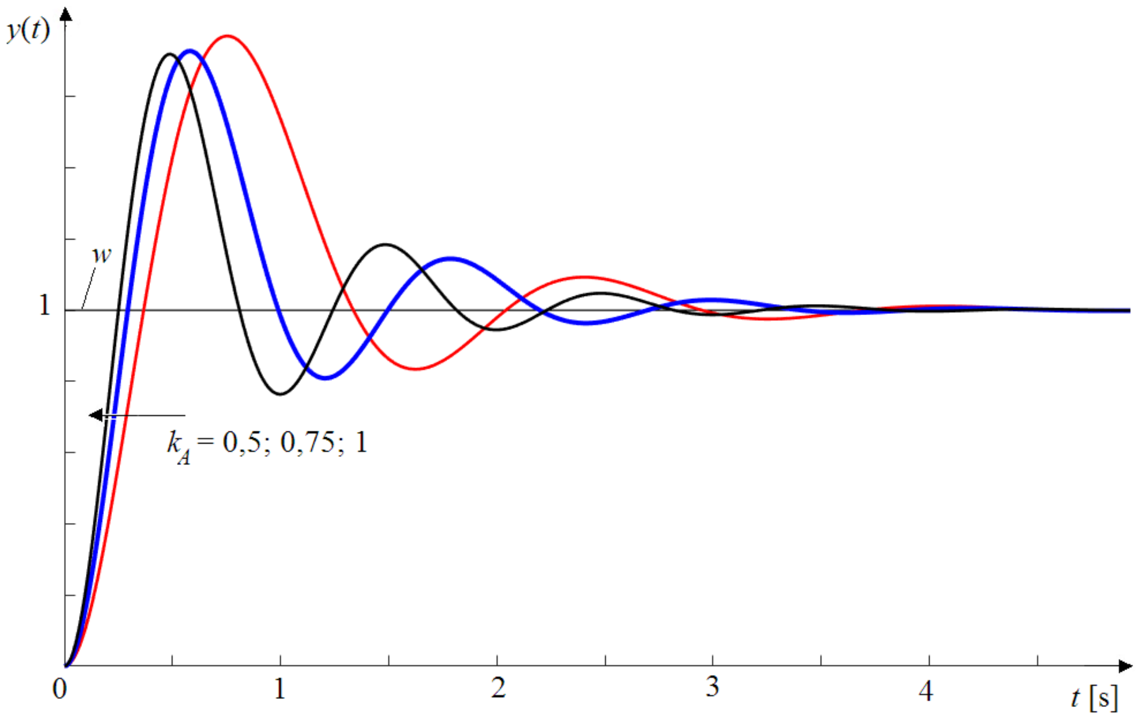


Obr. 2. 73 Nyquistova charakteristika $G(\mathrm{j}\omega)$ – příklad 2.22



Obr. 2.74 Detail Nyquistovy charakteristiky $G(j\omega)$ – příklad 2.22

Přechodové charakteristiky regulačního obvodu s nestabilní soustavou seřízeného pro nominální hodnotu $k_a = 0{,}75$ jsou na obr. 2.75. I když přechodové charakteristiky vykazují značné překmity, dochází k jejich poměrně rychlému ustálení.



Obr. 2.75 Přechodové charakteristiky regulačního obvodu pro různé hodnoty k_A – příklad 2.22

Příklad 2.23

Pomocí kruhového kritéria je třeba ověřit stabilitu nelineárního zpětnovazebního obvodu Lurjeho typu na obr. 2.70 pro

$$G(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \tag{2.202}$$

a časově proměnnou sektorovou nelinearitu $[\alpha, \beta]$ pro parametry: $k_1 = 1$, $T_1 = 0{,}5$ s, $\alpha = 0$, $\beta = 4{,}5$.

Řešení:

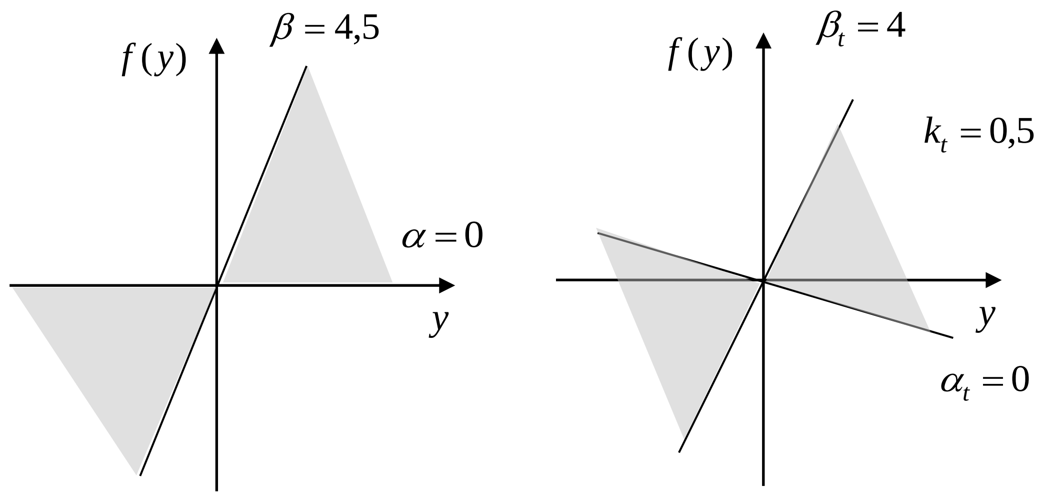
Protože $\alpha = 0$ a lineární část (2.202) obsahuje jeden nulový pól, použijeme transformaci zpětnovazebního obvodu v souladu s obr. 2.71 pro $k_t = 0{,}5$.

Na základě vztahů (2.189) a (2.191) dostaneme

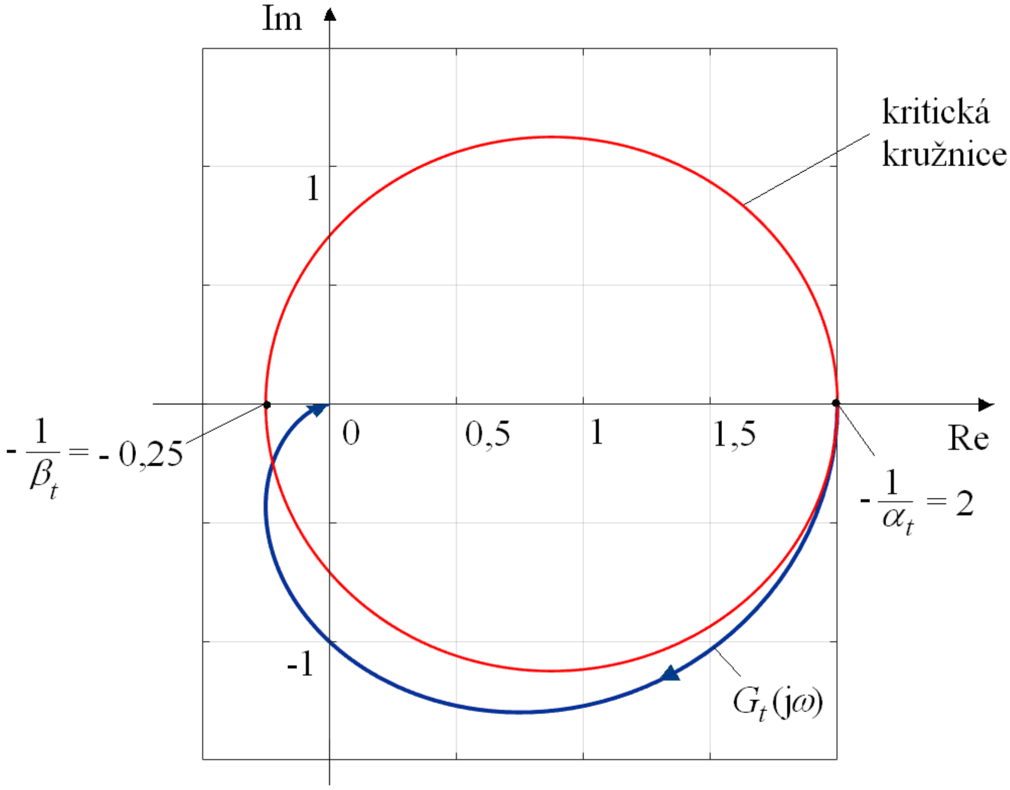
$$G_t(s) = \frac{G(s)}{1 + k_t G(s)} = \frac{\dfrac{k_1}{s(T_1 s + 1)}}{1 + \dfrac{k_1 k_t}{s(T_1 s + 1)}} = \frac{k_1}{T_1 s^2 + s + k_1 k_t} = \frac{2}{s^2 + 2s + 1},$$

$\alpha_t = \alpha - k_t = -0{,}5;$

$\beta_t = \beta - k_t = 4.$



Obr. 2.76 Transformace sektoru nelinearity – příklad 2.23



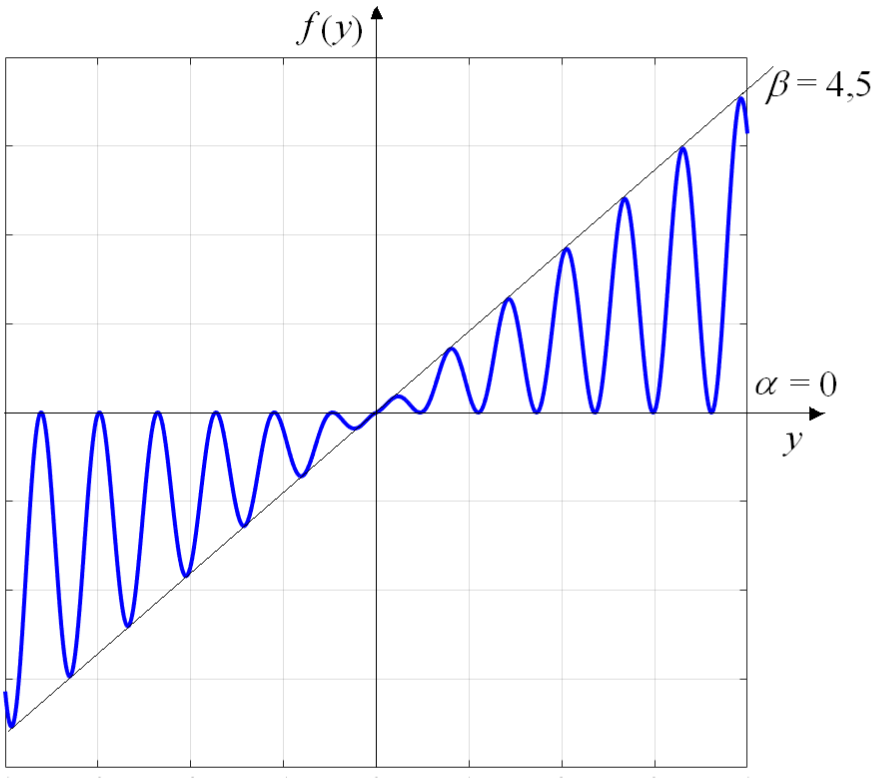
Obr. 2.77 Nyquistova charakteristika $G_t(s)$ – příklad 2.23

Vzájemná poloha Nyquistovy charakteristiky a kritické kružnice je na obr. 2.77. Protože Nyquistova charakteristika vystupuje z kritické kružnice, není splněna postačující podmínka globální asymptotické stability, a proto nelze o stabilitě či nestabilitě nelineárního zpětnovazebního obvodu na obr. 2.68 rozhodnout.

Je zřejmé, že pokud zastoupíme zpětnovazební nelinearitu zesílením k_a v rozsahu $\alpha = 0 < k_a \leq \beta = 4{,}5$, zpětnovazební obvod bude globálně asymptoticky stabilní.

Byl proveden test na stabilitu se segmentovou nelinearitou (obr. 2.78)

$$f(y) = \frac{\alpha + \beta}{2} |y| \sin(ay) + \frac{\alpha + \beta}{2} . \qquad (2.203)$$



Obr. 2.78 Testovací segmentová nelinearita – příklad 2.23

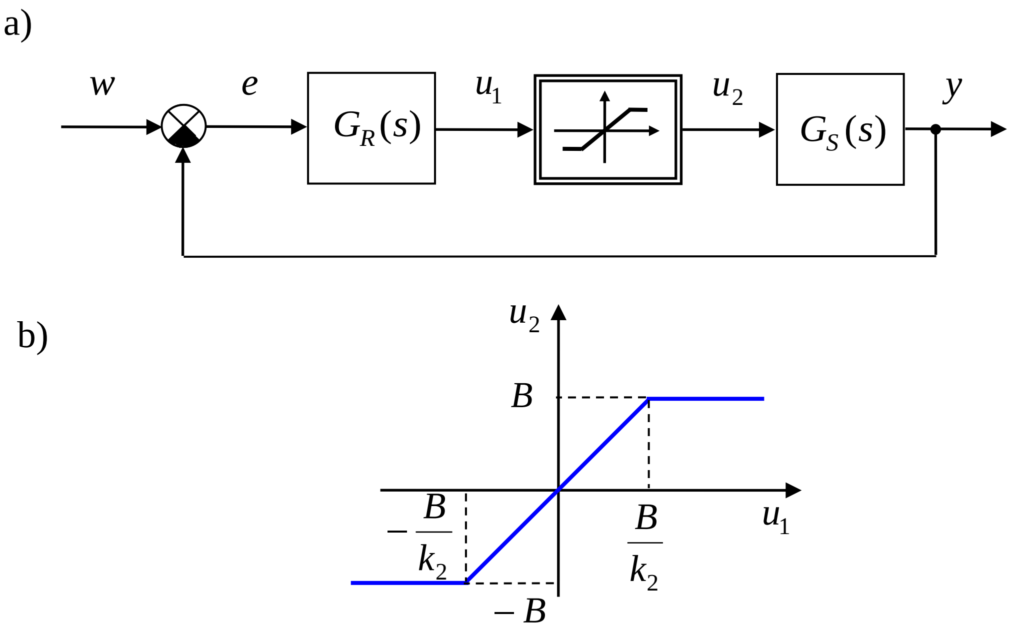
Nelineární zpětnovazební obvod při nulovém vstupu do součtového uzlu pro libovolnou počáteční podmínku integračního členu a nelinearitu (2.203) je asymptoticky stabilní. Naproti tomu při konstantní hodnotě w_0 vstupu do součtového uzlu nelineární zpětnovazební obvod je pro některé hodnoty a ve vztahu (2.203) stabilní a pro jiné nestabilní. Stabilní je např. pro hodnoty $w_0 = 2$, $a = 5, 6, 8$ a nestabilní pro hodnoty např. $a = 7, 10$ atd.

Příklad 2.24

Je dán regulační obvod s nelinearitou typu nasycení na obr. 2.79. Regulovaná soustava je proporcionální se setrvačností 2. řádu

$$G(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)^2} \tag{2.204}$$

a regulátor je proporcionální P, případně integrační I. Je třeba provést analýzu regulačního obvodu z hlediska stability pro $K_P^* = 50$, případně $T_I^* = 4$ s, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ a $T_1 = 2$ s.



Obr. 2.79 Regulační obvod: a) schéma, b) nelinearita typu nasycení – příklad 2.24

Řešení:

a) Proporcionální regulátor – P

Přenos proporcionálního regulátoru P je

$$G_R(s) = K_P, \tag{2.205}$$

kde K_P je zesílení regulátoru.

Přenos lineární části [viz obr. 2.79 a vztah (2.204)] je dán vztahem

$$G(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_P k_1}{(T_1 s + 1)^2}. \tag{2.206}$$

Nasycení na obr. 2.79b lze považovat za sektorovou nelinearitu pro $\alpha > 0$ a $\beta = k_2$, tj. (0, k_2]. Je zajímavé, že tato sektorová nelinearita nezávisí na hodnotě B.

Kmitočtový přenos lineární části získáme z (2.206)

$$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{K_P k_1}{1 - T_1^2\omega^2 + \mathrm{j}2T_1\omega} = \mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega), \tag{2.207a}$$

kde

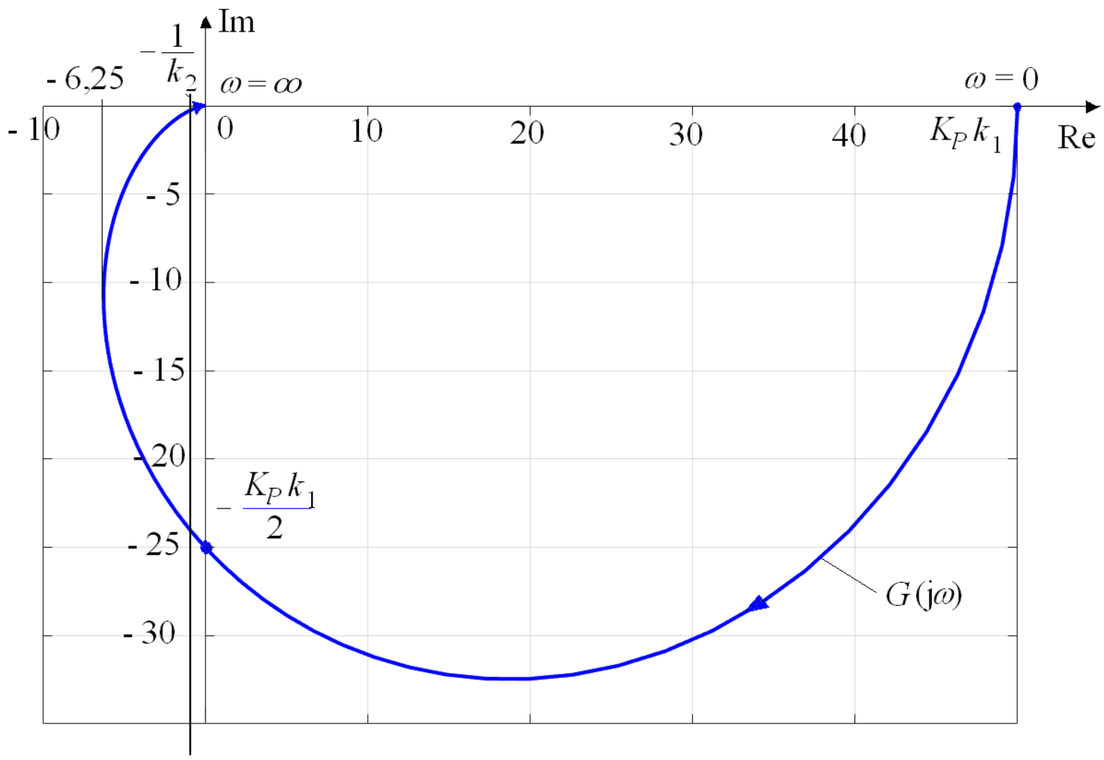
$$\mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_P k_1 (1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + 4T_1^2\omega^2}, \tag{2.207b}$$

$$\mathrm{Im}G(\mathrm{j}\omega) = -\frac{2K_P k_1 T_1 \omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + 4T_1^2\omega^2}\,. \tag{2.207c}$$

Protože kmitočtový přenos lineární části $G(\mathrm{j}\omega)$ je jednoduchý, můžeme Nyquistovu charakteristiku načrtnout přibližně podle tab. 2.5 sestavené pro některé význačné úhlové kmitočty ω, viz obr. 2.80.

Tab. 2.5 Nyquistova charakteristika pro regulátor P – příklad 2.24

ω	0	$\frac{1}{T_1}$	∞
$\mathrm{Re}G(\mathrm{j}\omega)$	$K_P k_1$	0	0
$\mathrm{Im}G(\mathrm{j}\omega)$	0	$-\frac{K_P k_1}{2}$	0



Obr. 2.80 Nyquistova charakteristika pro regulátor P – příklad 2.24

Z obr. 2.80 je zřejmé, že na základě kruhového kritéria pro $\alpha = 0$ a $\beta = k_2 = 1$ nelze o stabilitě či nestabilitě regulačního obvodu rozhodnout. Ve skutečnosti je regulační obvod globálně asymptoticky stabilní pro libovolnou hodnotu $B > 0$. Plyne to ze skutečnosti, že kruhové kritérium je pouze postačující podmínkou. Bohužel hodnota B má podstatný vliv na kvalitu regulace.

Přenos řízení za předpokladu linearity, tj. dostatečně vysoké hodnoty B, je v souladu s obr. 2.79a dán vztahem

$$G_{wy}(s) = \frac{K_P k_1 k_2}{(T_1 s + 1)^2 + K_P k_1 k_2} = \frac{1}{\frac{T_1^2}{1+k_o} s^2 + \frac{2T_1}{1+k_o} s + 1} \cdot \frac{k_o}{1+k_o}, \qquad (2.208a)$$

kde

$$k_o = K_P k_1 k_2 \qquad (2.208b)$$

je zesílení otevřeného regulačního obvodu.

Z důvodu trvalé regulační odchylky

$$e_w(\infty) = \frac{w_0}{1+k_o} \qquad (2.209)$$

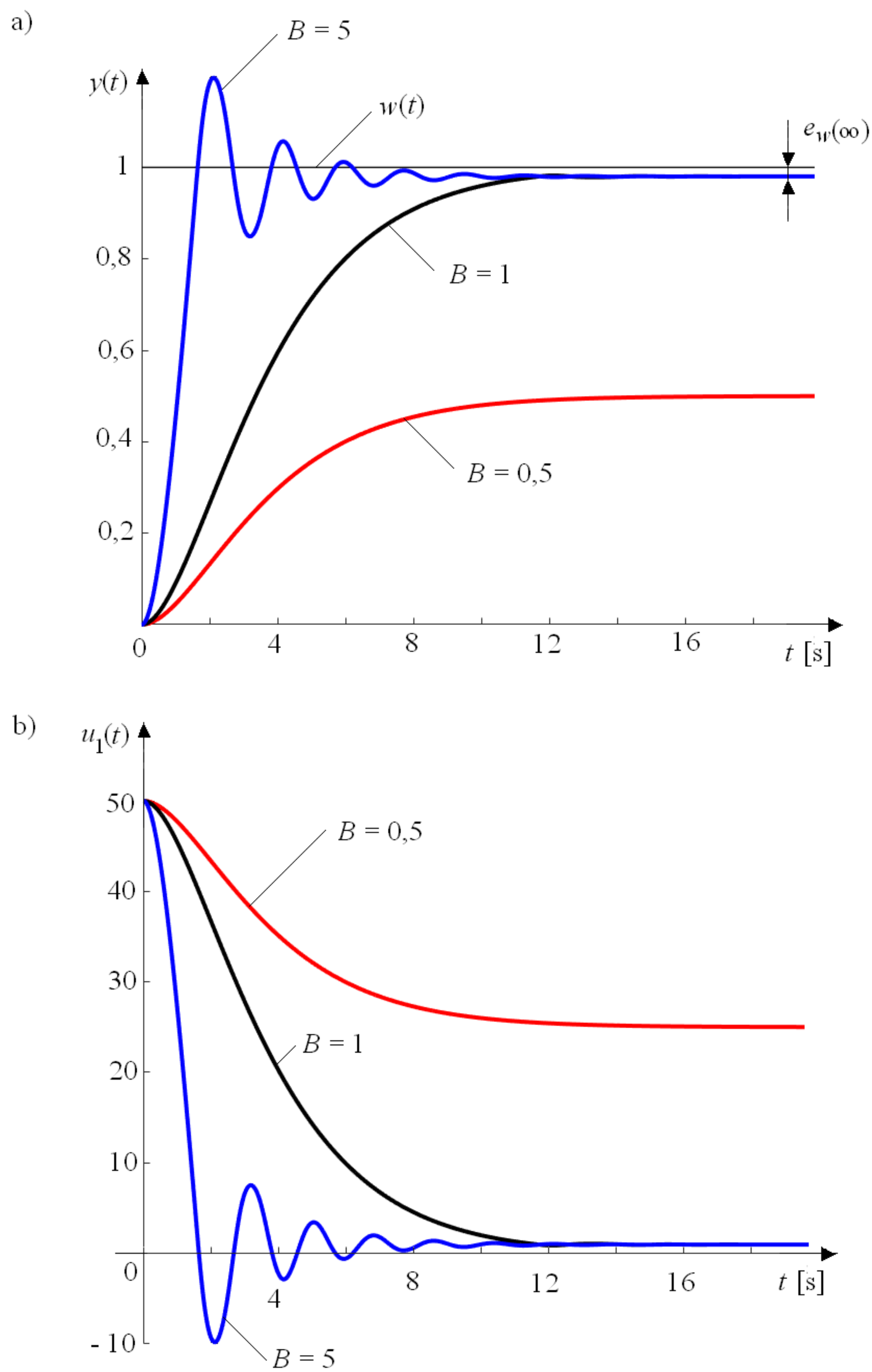
byly zvoleny hodnoty $K_P = 50$, $k_1 = 1$ a $k_2 = 1$. V tomto případě trvalá regulační odchylka $e_w(\infty)$ je menší než 2 % skokové změny žádané veličiny w_0. Bohužel současně se projeví vysoká kmitavost, protože koeficient poměrného tlumení [viz vztah (2.208a) je nízký

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+k_o}} \doteq 0{,}14. \qquad (2.210)$$

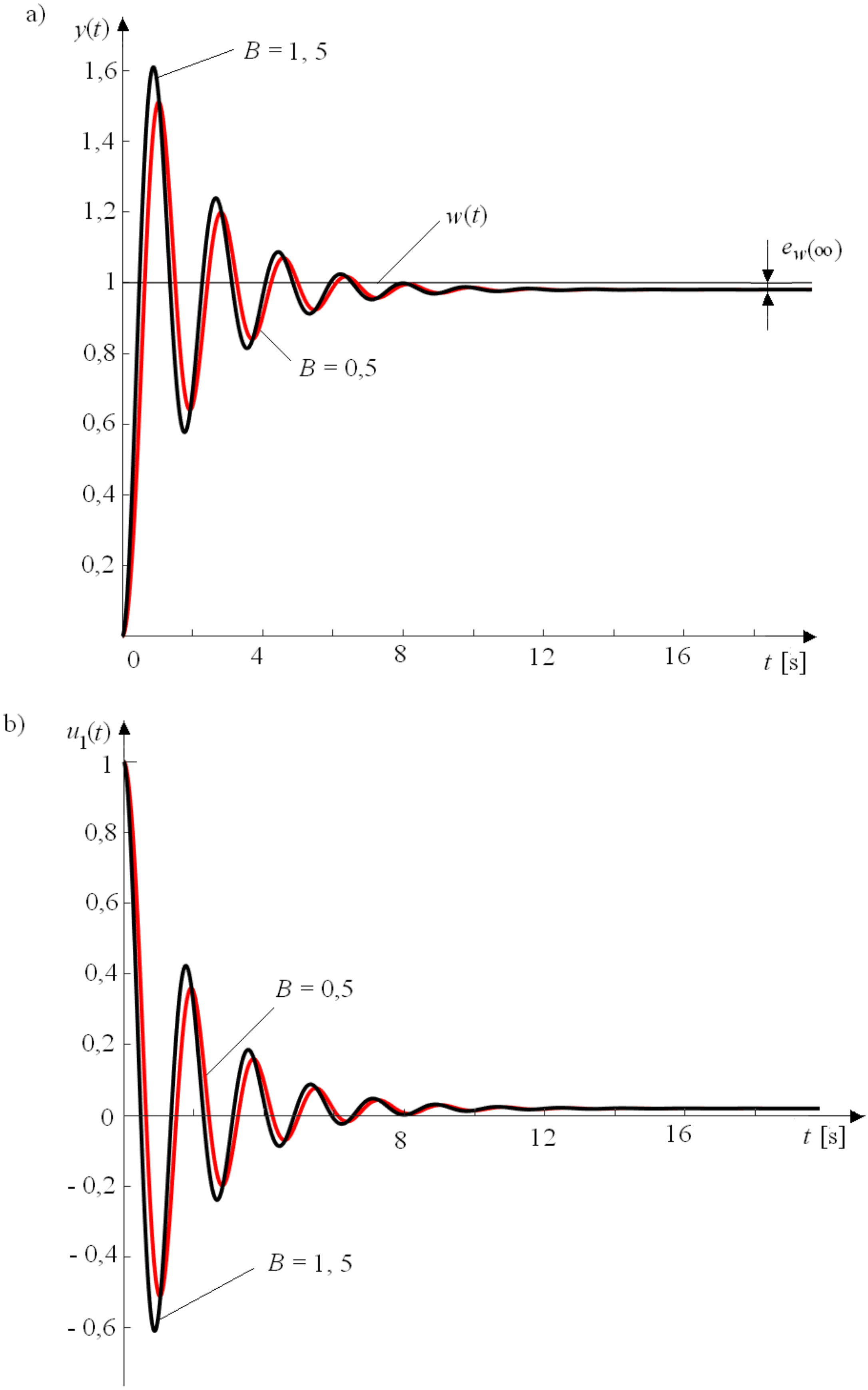
Na obr. 2.81a jsou pro hodnoty $B = 0{,}5$; 1 a 5 zobrazeny odezvy regulačního obvodu $y(t)$ s regulátorem P na jednotkovou ($w_0 = 1$) skokovou změnu žádané veličiny $w(t) = w_0 \eta(t)$ a na obr. 2.81b odpovídající průběhy veličiny $u_1(t)$ před nasycením.

Vidíme, že pokud B je malé ve srovnání s w_0, dochází k nedoregulování, tj. k neúměrně veliké trvalé regulační odchylce $e_w(\infty)$. Při vyšší hodnotě B se vliv nasycení na regulační pochod snižuje. Z obr. 2.81 vyplývá, že nasycení při proporcionální soustavě i regulátoru proces stabilizuje, ale zároveň zpomaluje.

Z hlediska regulace při existenci nasycení je vhodné, aby vysoké zesílení vystupovalo za nasycením (např. $K_P = 1$, $k_1 = 50$ a $k_2 = 1$), jak to ukazuje obr. 2.82, kde jsou zobrazeny odezvy regulačního obvodu $y(t)$ a $u_1(t)$ s regulátorem P na jednotkovou skokovou změnu ($w_0 = 1$) žádané veličiny $w(t) = w_0 \eta(t)$. Odezvy pro $B =$ 1 a 5 splývají. Bohužel ne vždy je to možné realizovat. Umístění vysokého zesílení před nebo za nasycením nemá žádný vliv na stabilitu regulačního obvodu.



Obr. 2.81 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem P – příklad 2.24



Obr. 2.82 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem P a zesílením za nasycením – příklad 2.24

b) Integrační regulátor – I

Přenos integračního regulátoru I je

$$G_R(s) = \frac{1}{T_I s}, \tag{2.211}$$

kde T_I je integrační časová konstanta.

Přenos lineární části [viz obr. 2.79 a vztah (2.204)] je dán vztahem

$$G(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{k_1}{T_I s(T_1 s + 1)^2}. \tag{2.212}$$

Po dosazení $s = \mathrm{j}\omega$ dostaneme kmitočtový přenos

$$G(\mathrm{j}\omega) = -\frac{k_1}{2T_I T_1 \omega^2 + \mathrm{j}T_I\omega(T_1^2\omega^2 - 1)} = \mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega), \tag{2.213a}$$

kde

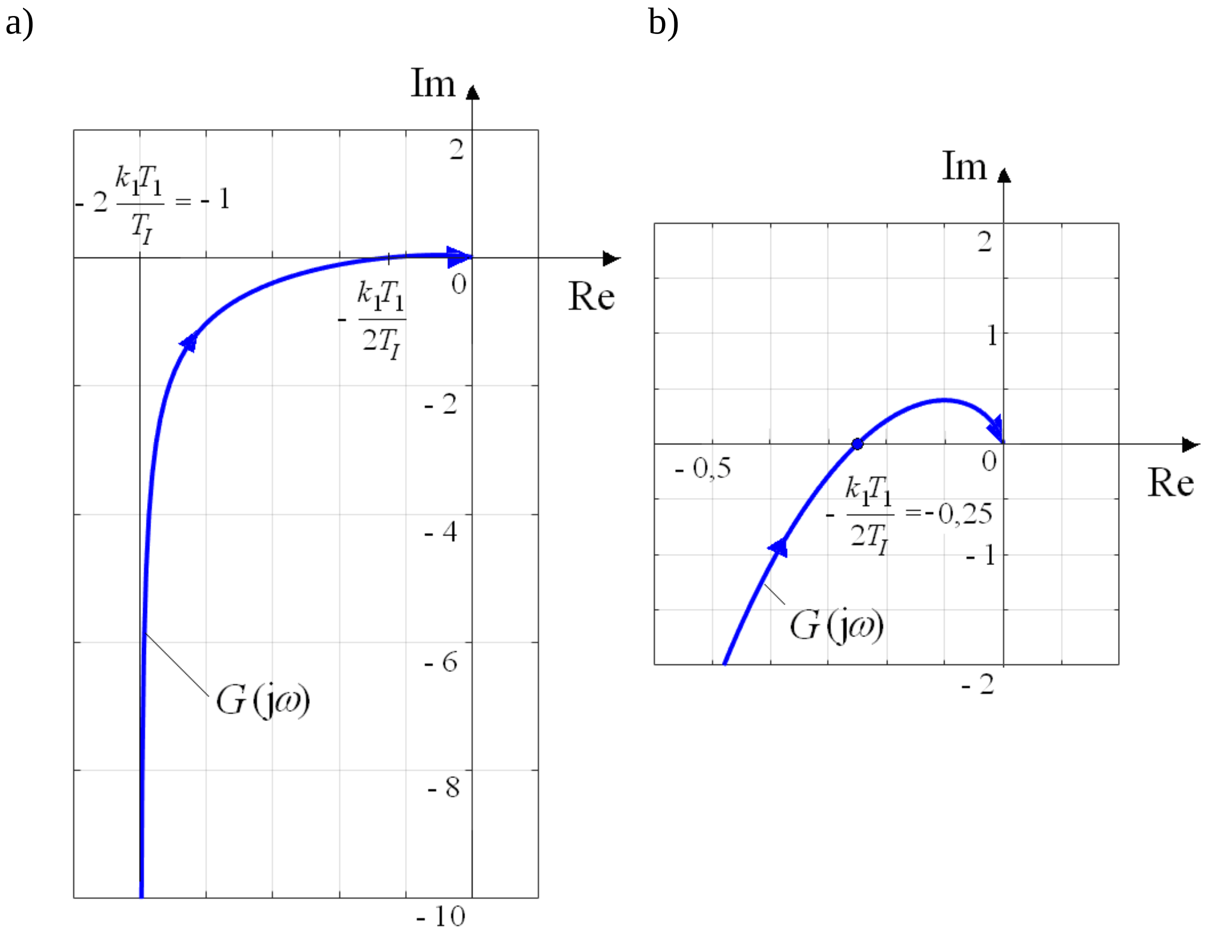
$$\mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) = -\frac{2\dfrac{k_1 T_1}{T_I}}{4T_1^2\omega^2 + (T_1^2\omega^2 - 1)^2}, \tag{2.213b}$$

$$\mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dfrac{k_1}{T_I}(T_1^2\omega^2 - 1)}{\omega[4T_1^2\omega^2 + (T_1^2\omega^2 - 1)^2]}. \tag{2.213c}$$

Podobně jako v předchozím případě pro významné úhlové kmitočty ω sestavíme tab. 2.6 a na jejím základě můžeme sestrojit přibližnou Nyquistovu charakteristikou, viz obr. 2.83.

Tab. 2.6 Nyquistova charakteristika pro regulátor I – příklad 2.24

ω	0	$\dfrac{1}{T_1}$	∞
$\mathrm{Re}G(\mathrm{j}\omega)$	$-2\dfrac{k_1T_1}{T_I}$	$-\dfrac{k_1T_1}{2T_I}$	0
$\mathrm{Im}G(\mathrm{j}\omega)$	$-\infty$	0	0

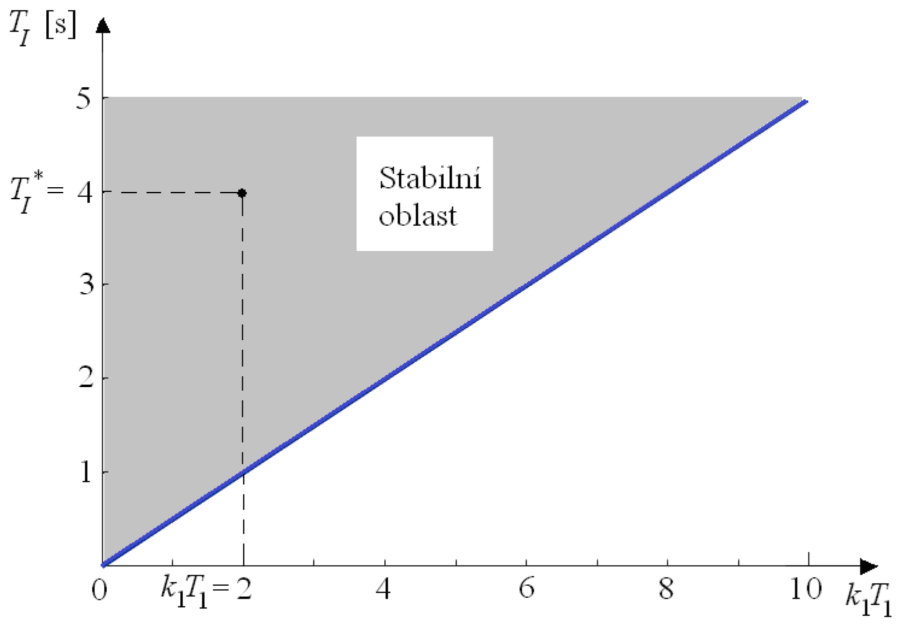


Obr. 2.83 Nyquistova charakteristika pro regulátor I: a) celkový průběh, b) detail – příklad 2.24

Z obr. 2.83 vyplývá, že za předpokladu linearity, tj. dostatečně vysoké hodnoty *B*, z Nyquistova kritéria stability dostaneme

$$-1 < -\frac{k_1T_1}{2T_I} \;\Rightarrow\; T_I > \frac{k_1T_1}{2}. \tag{2.214}$$

Stabilní oblast je ukázána na obr. 2.84. V našem případě $k_1 = 1$, $T_1 = 2$ s, $T_I^* = 4$ s. Vidíme, že hodnota $T_I^* = 4$ s leží s dostatečnou rezervou ve stabilní oblasti.

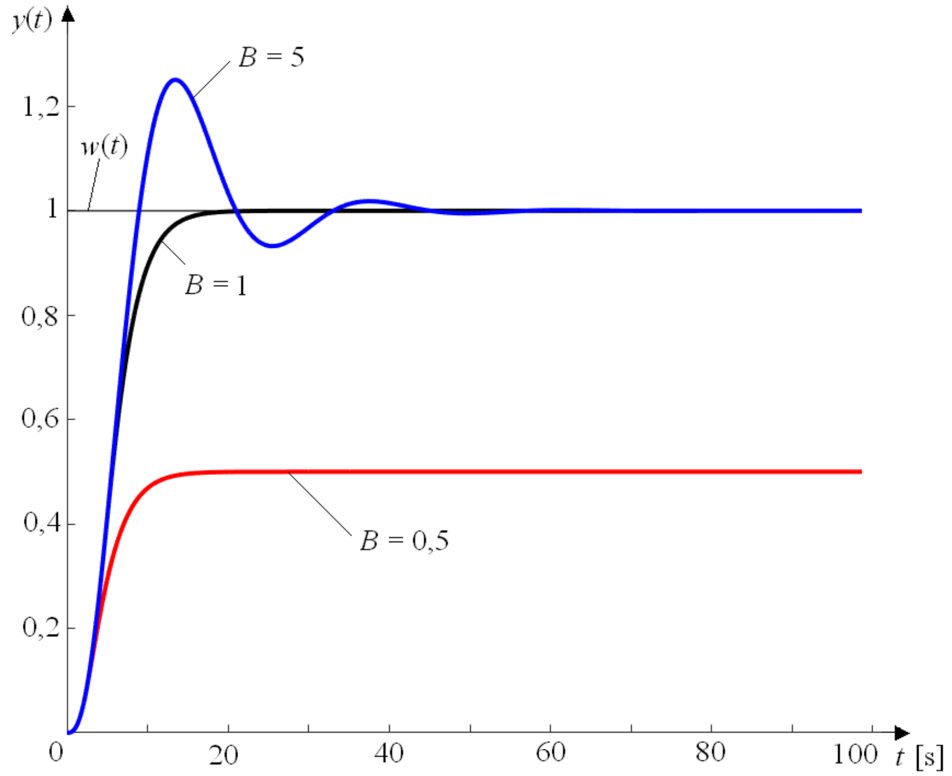


Obr. 2.84 Stabilní oblast pro stavitelný parametr T_I regulátoru – příklad 2.24

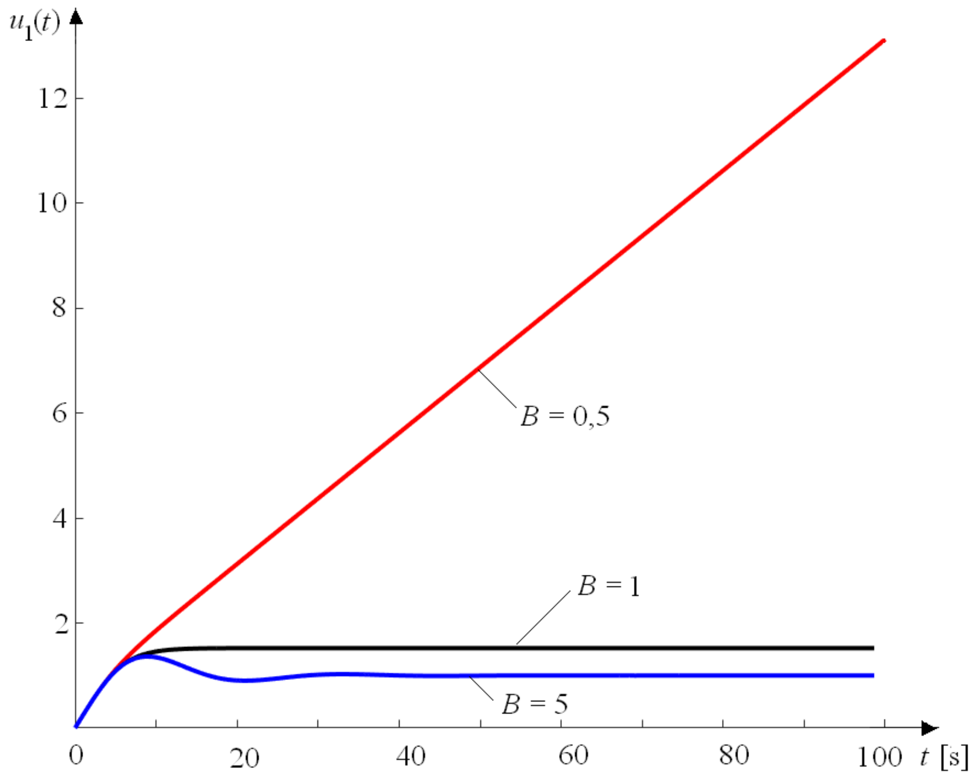
Protože $\alpha = 0$ a lineární část $G(s)$ obsahuje jeden nulový pól (regulátor I), kruhové kritérium nelze přímo použít.

Na obr. 2.85 jsou zobrazeny průběhy výstupní veličiny $y(t)$ a akční veličiny $u_1(t)$ před nasycením pro jednotkovou skokovou změnu žádané veličiny $w(t) = w_0\eta(t)$ $(w_0 = 1)$ v závislosti na hodnotě B. Z obou obrázků je zřejmý záporný vliv B na kvalitu regulačního pochodu a dokonce na stabilitu. Při nízké hodnotě B vzhledem ke skoku žádané veličiny w_0 dochází k nedoregulování, a tedy ke vzniku trvalé regulační odchylky $e_w(\infty)$, která způsobí neomezený růst akční veličiny $u_1(t)$ před nasycením, viz obr. 2.85 pro B = 0,5, a tedy nestabilitu.

a)



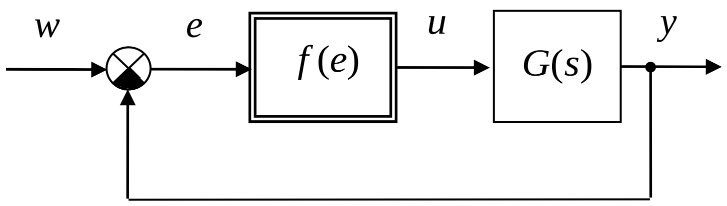
b)



Obr. 2.85 Odezvy regulačního obvodu s regulátorem I – příklad 2.24

2.3.5 Popovovo kritérium stability

Je uvažován zpětnovazební nelineární obvod na obr. 2.86 pro $w(t)=0$. U Popovova kritéria stability vstup do nelinearity je nejčastěji označován jako e (většinou jde o analýzu regulačního obvodu).



Obr. 2.86 Nelineární zpětnovazební obvod

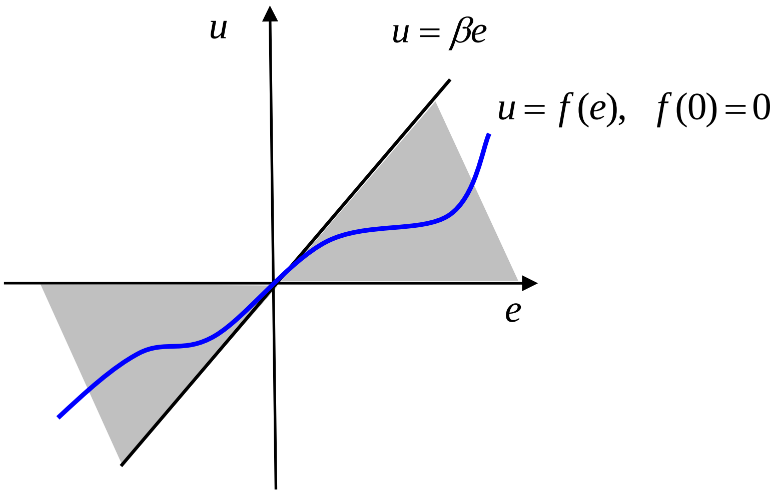
Je zřejmé, že všechny struktury nelineárních zpětnovazebních obvodů pro $w(t)=0$ jsou z hlediska stability, až na označení veličin, ekvivalentní.

Předpokládá se, že nelinearita je jednoznačná po částech spojitá t-invariantní, která leží v segmentu $[0, \beta]$ (obr. 2.87)

$$0 \le f(e) \le \beta e, \quad f(0)=0, \tag{2.215a}$$

příp.

$$0 \le \frac{f(e)}{e} \le \beta, \quad e \ne 0, \quad f(0)=0. \tag{2.215b}$$



Obr. 2.87 Sektorová nelinearita $[0, \beta]$

Nelineární zpětnovazební obvod (obr. 2.86) s asymptoticky stabilní lineární částí $G(s)$ a jednoznačnou po částech spojitou t-invariantní sektorovou nelinearitou [0, β] je globálně asymptoticky stabilní, je-li splněna ***Popovova nerovnost***

$$\mathrm{Re}[(1+\mathrm{j}q\omega)G(\mathrm{j}\omega)] > -\frac{1}{\beta} \quad \text{pro všechna} \quad \omega \geq 0, \tag{2.216}$$

kde q je reálné číslo.

Označme

$$P(\omega) = \mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega), \quad Q(\omega) = \mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega), \tag{2.217}$$

dosadíme do (2.216) a po úpravě obdržíme

$$P(\omega) - q\omega Q(\omega) > -\frac{1}{\beta}. \tag{2.218}$$

Zavedeme ***modifikovaný kmitočtový přenos***

$$G_m(\mathrm{j}\omega) = P(\omega) + \mathrm{j}\omega Q(\omega) = P_m(\omega) + \mathrm{j}Q_m(\omega), \tag{2.219a}$$

kde

$$P_m(\omega) = P(\omega) = \mathrm{Re}\,G_m(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega), \tag{2.219b}$$

$$Q_m(\omega) = \omega Q(\omega) = \mathrm{Im}\,G_m(\mathrm{j}\omega) = \omega\,\mathrm{Im}\,G(\mathrm{j}\omega), \tag{2.219c}$$

jehož grafické vyjádření se nazývá ***Popovova charakteristika***.

Popovova nerovnost (2.216) pak bude mít tvar

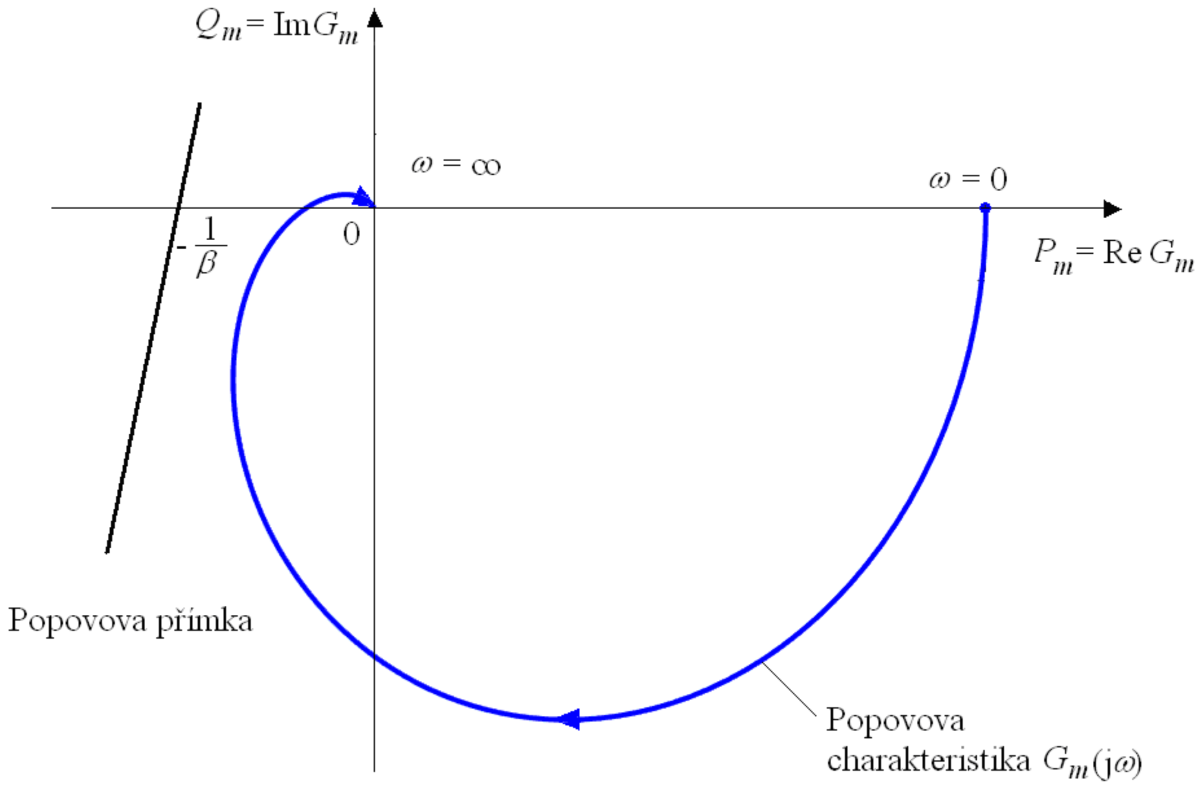
$$P_m(\omega) - qQ_m(\omega) > -\frac{1}{\beta}. \tag{2.220}$$

Zastoupíme nerovnost (2.220) rovností a po úpravě dostaneme rovnici tzv. ***Popovovy přímky***

$$Q_m = \frac{1}{q}\left(P_m + \frac{1}{\beta}\right) \tag{2.221}$$

se směrnicí $1/q$, která protíná reálnou osu v bodě $-1/\beta$.

Nyní lze Popovou nerovnost (2.220), a tedy i (2.216) geometricky interpretovat tak, že Popovova charakteristika (2.219) leží napravo od Popovovy přímky (2.221), viz obr. 2.88.



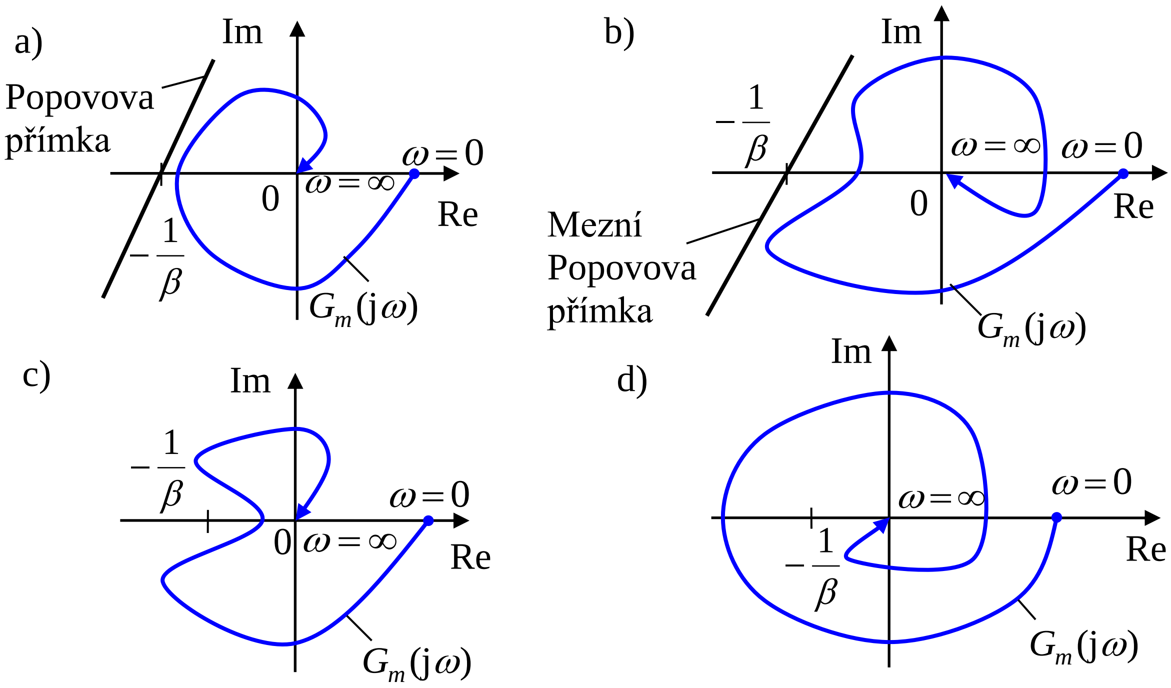
Obr. 2.88 Geometrická interpretace Popovovy nerovnosti

Nyní Popovovo kritérium stability můžeme zformulovat ve tvaru:

Nelineární zpětnovazební obvod s asymptoticky stabilní lineární částí $G(\mathrm{j}\omega)$ a jednoznačnou po částech spojitou sektorovou nelinearitou $[0, \beta]$ je globálně asymptoticky stabilní, leží-li Popovova charakteristika $G_m(\mathrm{j}\omega)$ pro všechna $\omega \geq 0$ napravo od Popovovy přímky procházející bodem $-1/\beta$ na reálné ose.

Pokud lineární část $G(s)$ má jeden nulový pól a ostatní póly leží v levé polorovině komplexní roviny s (pouze tento případ budeme uvažovat), pak se předpokládá, že nelinearita leží v segmentu $[\varepsilon, \beta]$, kde ε je malé kladné číslo. Tento předpoklad eliminuje nelinearity, které mají pro $e = 0$ nulovou derivaci (např.: $e^2 \operatorname{sign}(e)$, e^3 atd.) nebo rostou pomaleji než lineární funkce εe (např.: $\operatorname{sign}(e)$, $\operatorname{sat}(e)$, $\sqrt{|e|}\operatorname{sign}(e)$ atd.).

Základní případy vzájemné polohy Popovovy přímky a Popovovy charakteristiky jsou názorně ukázány na obr. 2.89.



Obr. 2.89 Základní případy vzájemné polohy Popovovy přímky a Popovovy charakteristiky: a) a b) Popovovo kritérium je splněno, c) a d) Popovovo kritérium splněno není

Protože platí

$$\left.\begin{aligned} P(\omega) &= P(-\omega) \\ Q(\omega) &= -Q(-\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Průběh Nyquistovy charakteristiky $G(\mathrm{j}\omega)$ pro $0 \le \omega < \infty$ je symetrický podle reálné osy s průběhem pro $0 \ge \omega > -\infty$.

Podobně platí

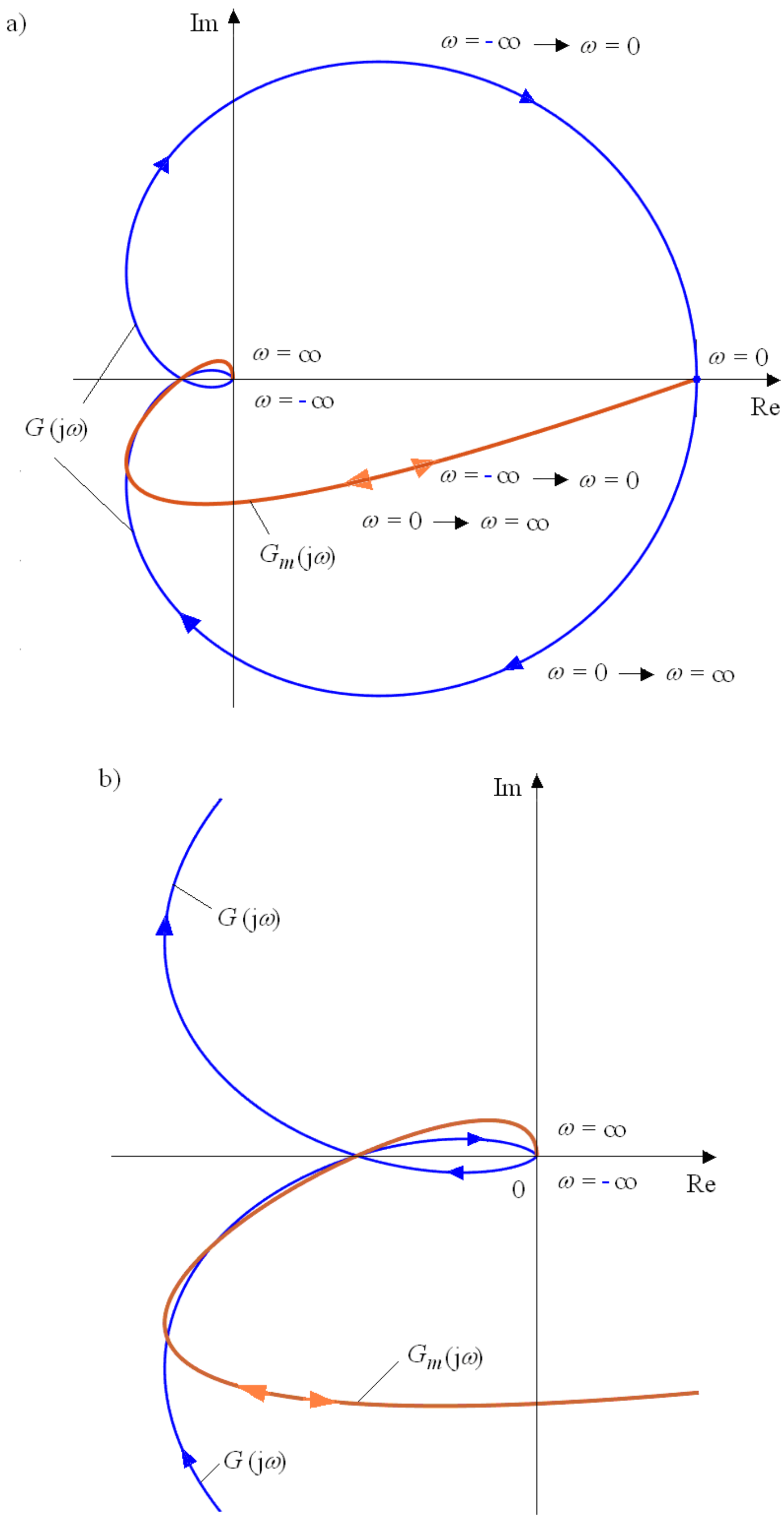
$$\left.\begin{aligned} P_m(\omega) = P(\omega) &\Rightarrow P_m(\omega) = P_m(-\omega) \\ Q_m(\omega) = \omega Q(\omega) &\Rightarrow Q_m(\omega) = Q_m(-\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Průběh Popovovy charakteristiky $G_m(\mathrm{j}\omega)$ pro $0 \le \omega < \infty$ se pokrývá s průběhem pro $0 \ge \omega > -\infty$.

Průběhy obou charakteristik pro $-\infty < \omega < \infty$ jsou na obr. 2.90.

Z výše uvedených důvodů se obě charakteristiky vykreslují pouze pro $0 \le \omega < \infty$.

Pokud Popovova $G_m(\mathrm{j}\omega)$ a Nyquistova $G(\mathrm{j}\omega)$ charakteristika protíná zápornou reálnou poloosu, tj. přecházejí ze 3. do 2. kvadrantu, pak se vždy protnou na záporné reálné poloose v bodě, který musí ležet napravo od bodu $(-1/\beta, \mathrm{j}0)$. ***Je to nutná podmínka globální asymptotické stability***.

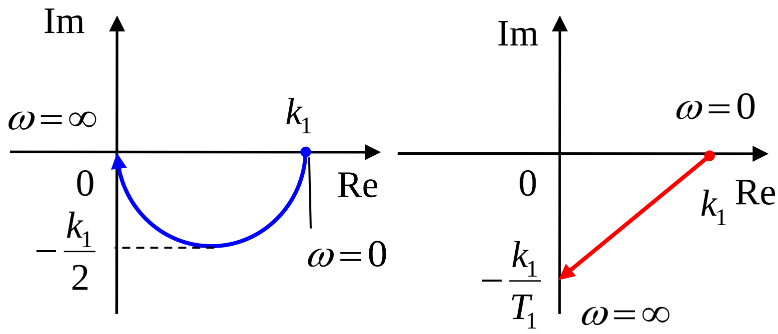


Obr. 2.90 Popovova a Nyquistova charakteristika: a) celkové průběhy, b) detail okolo počátku

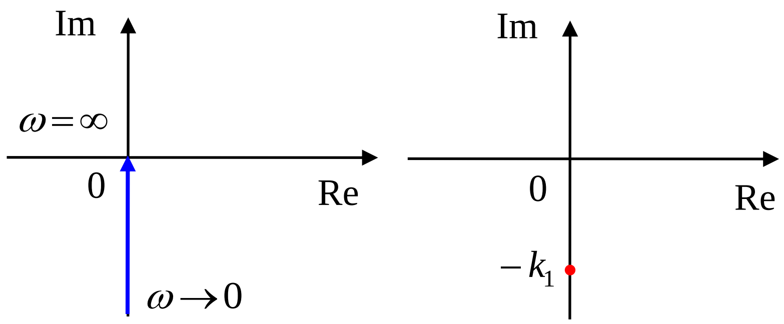
Průběhy Popovovy a Nyquistovy charakteristiky pro některé jednodušší přenosy lineární části $G(s)$ jsou na obr. 2.91.

Přenos lineární části | Nyquistova charakteristika | Popovova charakteristika

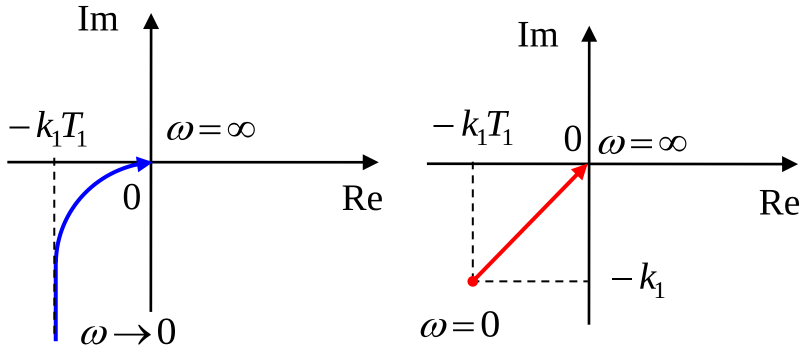
$$G(s)=\frac{k_1}{T_1 s+1}$$



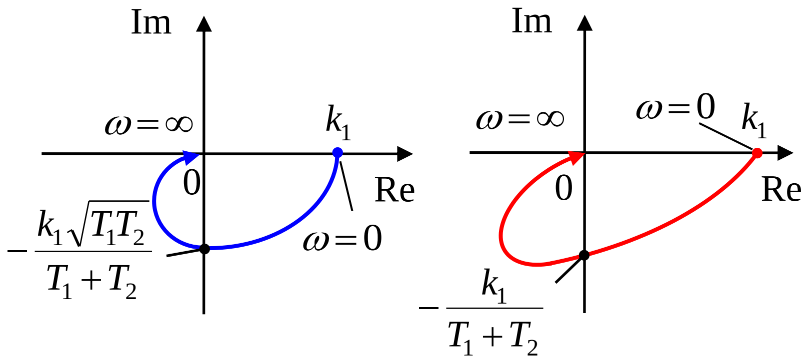
$$G(s)=\frac{k_1}{s}$$



$$G(s)=\frac{k_1}{s(T_1 s+1)}$$



$$G(s)=\frac{k_1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$



Obr. 2.91 Popovovy a Nyquistovy charakteristiky

Popovovo kritérium stability může být zobecněno i na *t*-variantní a nejednoznačné nelinearity. Průběh Popovovy charakteristiky může být poměrně složitý.

Popovovo kritérium je méně konzervativní než kruhové kritérium, tj. kruhové kritérium je přísnější. Pro obě kritéria je důležitý celý průběh charakteristik. U Nyquistova kritéria stability pro lineární obvody (systémy) je důležitý pouze průsečík Nyquistovy charakteristiky (kmitočtové charakteristiky otevřeného regulačního obvodu) se zápornou poloosou komplexní roviny, případně její průběh v okolí kritického bodu $(-1, \mathrm{j}0)$.

Popovovo i kruhové kritérium vyjadřují pouze postačující podmínky pro globální asymptotickou stabilitu zpětnovazebního obvodu (systému) pro danou segmentovou nelinearitu, tj. globální asymptotická stabilita se vždy předpokládá v daném segmentu. Pro tuto globální asymptotickou stabilitu v segmentu se často používá pojem ***absolutní stabilita***.

Příklad 2.25

Pomocí Popovova kritéria je třeba ověřit stabilitu regulačního obvodu z příkladu 2.22, tj. pro nestabilní soustavu (2.198) a regulátor PI (2.199) s $K_P^* = 5$ a $T_I^* = 1$ s. V tomto případě se předpokládá *t*-invariantní nelinearita v sektoru [0,5; 1].

Řešení:

Přenos lineární části pro $K_P^* = 5$ a $T_I^* = 1$ s je dán vztahem

$$G(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-1)(0{,}2s+1)}. \tag{2.222}$$

Protože přenos $G(s)$ má jeden nulový pól $s_1 = 0$, jeden nestabilní pól $s_2 = 1$ a jeden stabilní pól $s_3 = -5$, Popovovo kritérium nelze přímo použít. Rovněž sektorová nelinearita [0,5; 1] (tj. $\alpha = 0{,}5$ a $\beta = 1$) je pro přímé použití Popovova kritéria nevhodná. Proto použijeme transformaci podle obr. 2.71. Protože $\alpha = 0{,}5$, přímo se nabízí hodnota $k_t = 0{,}5$. Ze vztahů (2.191) dostaneme

$$\alpha_t = \alpha - k_t = 0{,}5 - 0{,}5 = 0,$$
$$\beta_t = \beta - k_t = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Transformovaná nelinearita je nyní definována v segmentu $[\alpha_t, \beta_t] = [0; 0{,}5]$.

Na základě vztahu (2.189) transformujeme lineární část $G(s)$, tj.

$$G_t(s) = \frac{G(s)}{1 + k_t G(s)} = \frac{\dfrac{10(s+1)}{s(s-1)(0{,}2s+1)}}{1 + k_t \dfrac{10(s+1)}{s(s-1)(0{,}2s+1)}} =$$

$$= \frac{10(s+1)}{0{,}2s^3 + 0{,}8s^2 + 4s + 5}. \tag{2.223}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, např. pomocí Hurwitzova kritéria stability, že póly transformované lineární části $G_t(s)$ jsou stabilní:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 5 & 0 \\ 0{,}2 & 4 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 5 \\ 0{,}2 & 4 \end{vmatrix} = 2{,}2 > 0 \;\Rightarrow \text{ všechny póly jsou stabilní}$$

Póly transformované lineární části $G_t(s)$ jsou:

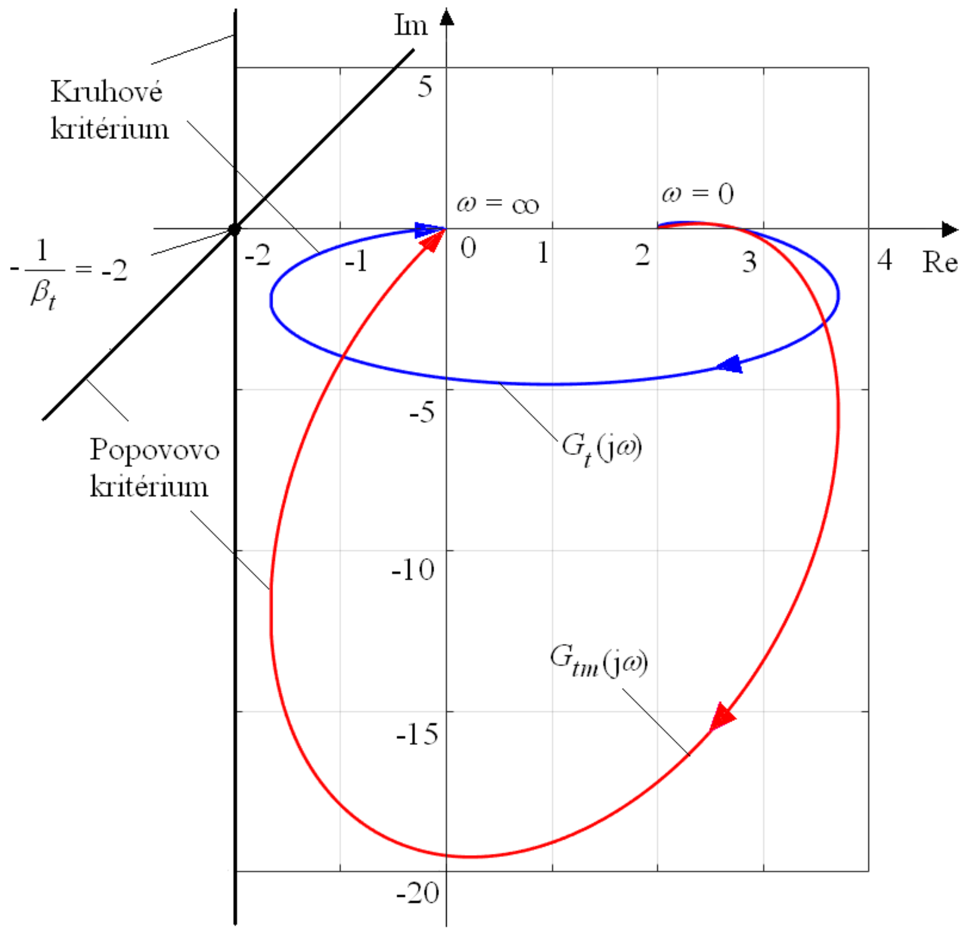
$s_1 \doteq -1{,}5423$; $s_{2,3} \doteq -1{,}2288 \pm \mathrm{j}3{,}8340$.

Nyní již Popovovo kritérium stability můžeme použít.

Popovova charakteristika transformované lineární části $G_{tm}(\mathrm{j}\omega)$ je na obr. 2.92 spolu s Popovovou přímkou, která prochází bodem $(-1/\beta_t = -2; \mathrm{j}0)$. Protože Popovova charakteristika $G_{tm}(\mathrm{j}\omega)$ leží pro $\omega \ge 0$ napravo od Popovovy přímky, daný regulační obvod je globálně asymptoticky stabilní v segmentu [0,5; 1] (tj. v původním netransformovaném segmentu), a to s velikou rezervou.

Na obr. 2.92 je také zobrazena Nyquistova charakteristika transformované lineární části $G_t(\mathrm{j}\omega)$. Protože celá leží napravo od přímky kolmé na reálnou osu ($\alpha_t = 0$) a procházející bodem $(-1/\beta_t = -2; \mathrm{j}0)$, znovu můžeme na základě kruhového kritéria konstatovat, že daný nelineární regulační obvod je globálně asymptoticky stabilní v segmentu [0,5; 1]. Z obr. 2.92 je také zřejmé, že kruhové kritérium stability je značně konzervativnější než Popovovo kritérium.

Zajímavé je rovněž srovnání postupu při použití kruhového kritéria stability bez transformace a s transformací, viz příklad 2.22.



Obr. 2.92 Ověření stability pomocí Popovova a kruhového kritéria – příklad 2.25

Příklad 2.26

Je třeba ověřit stabilitu zpětnovazebního obvodu Lurjeho typu [$w(t)=0$] pro lineární část s přenosem

$$G(s)=\frac{1}{s(s^2+s+1)} \tag{2.224}$$

a časově neměnnou spojitou segmentovou nelinearitu [ε; 0,8], kde ε je velmi malé kladné číslo.

Řešení:

Lineární část má póly: $s_1=0$, $s_{2,3}=-1/2\pm \mathrm{j}\sqrt{3}/2$, a proto můžeme použít jak Popovovo, tak i kruhové kritérium.

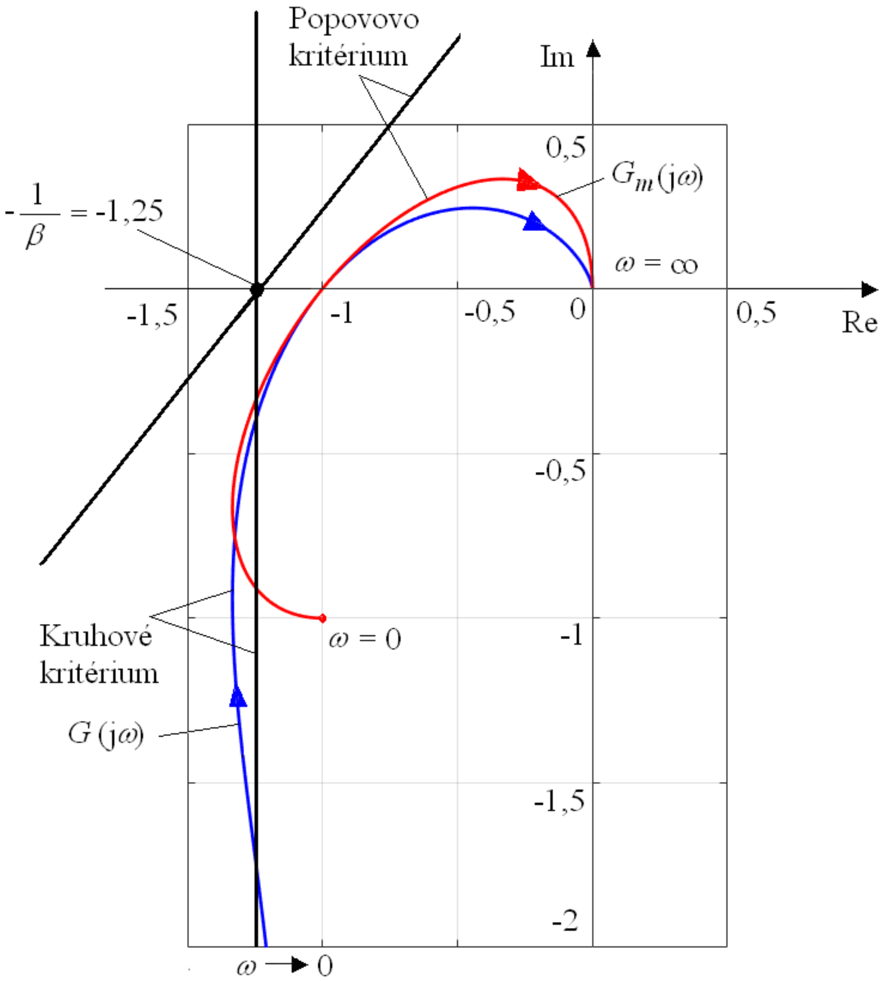
Průběhy Popovovy a Nyquistovy charakteristiky jsou na obr. 2.93.

Z obr. 2.93 vyplývá, že obě charakteristiky protínají zápornou reálnou poloosu ve stejném bodě $(-1, \mathrm{j}0)$, a proto je splněna nutná podmínka globální asymptotické stability (viz str. 137)

$$-\frac{1}{\beta} = -1{,}25 < -1. \tag{2.225}$$

Dále je zřejmé, že kruhové kritérium stability není splněno, na rozdíl od Popovova kritéria stability. Daný nelineární zpětnovazební obvod je globálně asymptoticky stabilní v sektoru [ε; 0,8], případně pro nespecifikovanou hodnotu ε v sektoru $(0;\, 0{,}8]$.

Znovu se ukázalo, že kruhové kritérium stability je značně konzervativnější než Popovovo kritérium.

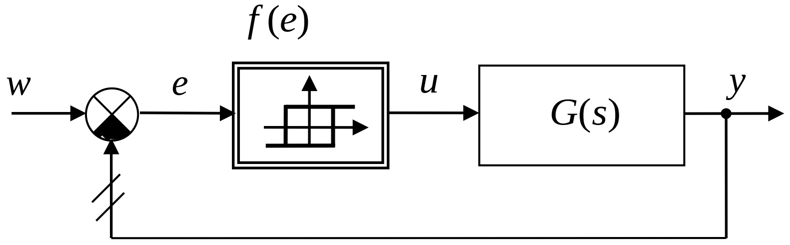


Obr. 2.93 Ověření stability pomocí Popovova a kruhového kritéria – příklad 2.26

2.3.6 Metoda ekvivalentního přenosu

Metoda ekvivalentního přenosu nebo také ***metoda harmonické linearizace*** je metoda přibližná, která v nelineárních regulačních obvodech dovoluje stanovit počet mezních cyklů a jejich vlastnosti. U metody ekvivalentního přenosu se předpokládá, že nelineární regulační obvod je t-invariantní a může být rozdělen na lineární dynamickou část s přenosem $G(s)$ a lichou symetrickou nelinearitu (obr. 2.94), tj.

$$f(e) = -f(-e). \tag{2.226}$$



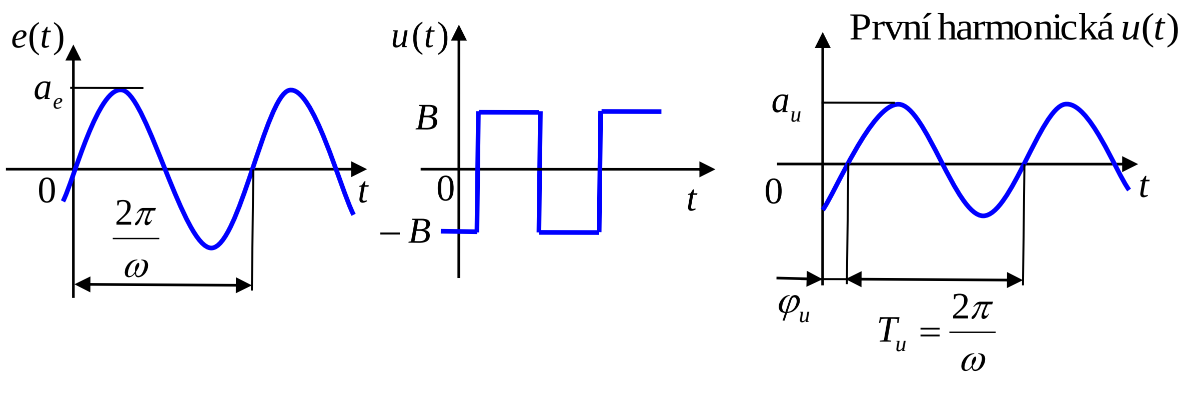
Obr. 2.94 Nelineární regulační obvod

O lineární části se předpokládá, že má vlastnosti dolnopropustného filtru.

Za těchto předpokladů při sinusovém průběhu regulační odchylky (a_e – amplituda, ω – úhlový kmitočet)

$$e(t) = a_e \sin \omega t \tag{2.227}$$

na vstupu nelinearity lze na jejím výstupu uvažovat pouze první harmonickou periodického průběhu, protože vyšší harmonické jsou potlačeny – lineární část má vlastnosti dolnopropustného filtru, který vyšší harmonické potlačí, viz obr. 2.95. Jde samozřejmě o ustálené kmity.



Obr. 2.95 Průběhy veličin z obr. 2.94

Za předpokladu, že nelinearita je popsána vztahem

$$u = f(e), \tag{2.228}$$

lze veličinu $u(t)$ vyjádřit trigonometrickou ***Fourierovou řadou***

$$u(t) = f(a_e \sin \omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(a_e)\cos(k\omega t) + b_k(a_e)\sin(k\omega t)]. \quad (2.229)$$

Pro symetrické nelinearity je $a_0 = 0$.

Budeme uvažovat pouze první harmonickou (k = 1), tj.

$$a_1(a_e)\cos\omega t + b_1(a_e)\sin\omega t = a_u(a_e)\sin[\omega t + \varphi_u(a_e)], \quad (2.230)$$

$$a_u(a_e) = \sqrt{a_1^2(a_e) + b_1^2(a_e)}, \quad (2.231a)$$

$$\varphi_u(a_e) = \operatorname{arctg}\frac{a_1(a_e)}{b_1(a_e)}, \quad (2.231b)$$

kde a_u je amplituda první harmonické, φ_u – fázové zpoždění (fáze) první harmonické.

Označme

$$\psi = \omega t \;\Rightarrow\; 2\pi = \omega T_u \quad (2.232)$$

a pak Fourierovy koeficienty jsou dány vztahy

$$a_1(a_e) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a_e \sin\psi)\cos\psi \,\mathrm{d}\psi, \quad (2.233a)$$

$$b_1(a_e) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a_e \sin\psi)\sin\psi \,\mathrm{d}\psi. \quad (2.233b)$$

Nyní již můžeme definovat ekvivalentní přenos liché nelinearity

$$G_N(a_e) = \frac{a_u(a_e)}{a_e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u(a_e)} = \frac{b_1(a_e)}{a_e} + \mathrm{j}\frac{a_1(a_e)}{a_e}. \quad (2.234)$$

Z definice ekvivalentního přenosu vyplývá jeho podobnost s kmitočtovým přenosem lineárních dynamických členů. Je tady ale základní rozdíl. Kmitočtový přenos je funkcí úhlového kmitočtu ω, naproti tomu ekvivalentní přenos je funkcí amplitudy vstupní veličiny a_e.

Pro lichou nelinearitu $f(e) = -f(-e)$ lze vztah

$$a_1(a_e) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a_e \sin\psi)\cos\psi \,\mathrm{d}\psi,$$

upravit, protože platí

$$\cos\psi \,\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}(\sin\psi).$$

Dostaneme

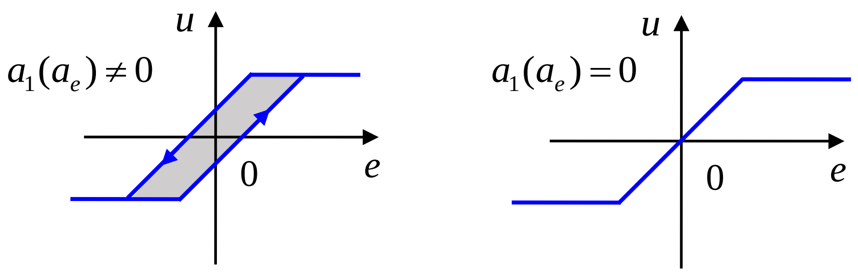
$$a_1(a_e) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{f(a_e \sin\psi)}_{u} \frac{1}{a_e} \mathrm{d}\underbrace{(a_e \sin\psi)}_{e} = \frac{1}{\pi a_e}\int_{e(0)}^{e(2\pi)} u(e)\,\mathrm{d}e, \tag{2.235}$$

tj. integrál

$$\int_{e(0)}^{e(2\pi)} u(e)\,\mathrm{d}e,$$

je roven plošnému obsahu vymezenému nejednoznačnou nelinearitou, viz obr. 2.96a. Proto pro jednoznačnou nelinearitu (obr. 2.96b) je Fourierův koeficient $a_1(a_e) = 0$. V tomto případě ekvivalentní přenos je reálné číslo dané vztahem

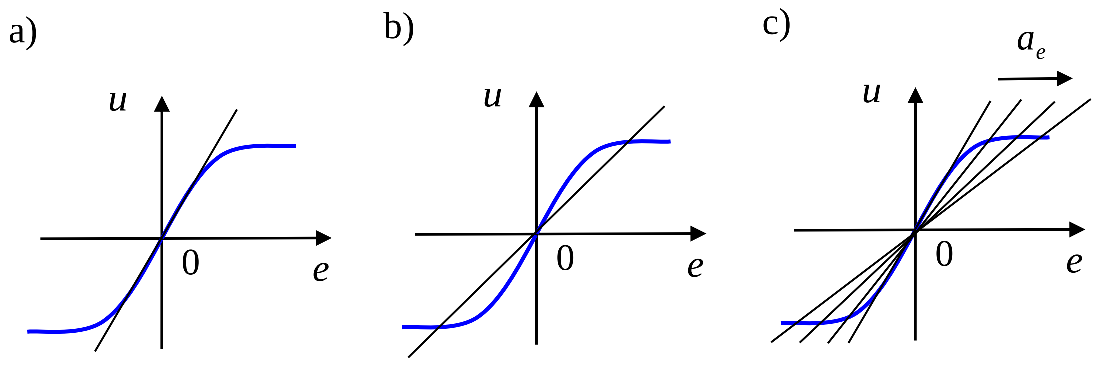
$$G_N(a_e) = \frac{b_1(a_e)}{a_e} = \frac{1}{\pi a_e}\int_0^{2\pi} f(a_e \sin\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\,. \tag{2.236}$$



Obr. 2.96 Lichá nelinearita: a) nejednoznačná, b) jednoznačná

Jak již bylo řečeno, metoda ekvivalentního přenosu se také nazývá metoda harmonické linearizace. Harmonická linearizace se podstatně liší od obyčejné linearizace, např. Jacobiovy (Taylorovy) linearizace, která uvažuje lineární členy v Taylorově rozvoji jednoznačné a hladké nelinearity ve zvoleném bodě (v pracovním bodě, v rovnovážném stavu, viz podkapitola 2.3.1). Jacobiova linearizace se používá převážně v časové oblasti a daná nelinearita je zastoupena jedinou přímkou, tj. tečnou (uvažovány jsou jednorozměrové nelinearity) procházející daným bodem (obr. 2.97a). Linearizační přímka může být také sečnou procházející daným bodem a určenou graficky nebo metodou nejmenších čtverců (obr. 2.97b) atd.

Při harmonické linearizaci jednoznačná lichá nelinearita je zastoupená celým svazkem přímek procházejících pracovním bodem (obr. 2.97c), přičemž každé hodnotě amplitudy a_e harmonického (sinusového) průběhu vstupní veličiny $e(t)$ (2.227) odpovídá jediná konkrétní přímka.



Obr. 2.97 Linearizace: a) tečnou, b) sečnou, c) harmonická

Z výše uvedeného vyplývá, že ekvivalentní přenos jednoznačné liché nelinearity (obr. 2.97c) lze interpretovat jako zesílení, které závisí na amplitudě a_e. Podobně ekvivalentní přenos nejednoznačné liché nelinearity lze považovat za komplexní zesílení závislé na amplitudě a_e vstupní veličiny $e(t)$.

Harmonická linearizace (tj. metoda ekvivalentního přenosu) může být použita i na nespojité liché nelinearity (reléové nelinearity atd.) a používá se v kmitočtové oblasti.

Uvažujme nyní nelineární regulační obvod na obr. 2.94. Aby v něm vznikly samobuzené kmity (autooscilace, tj. mezní cyklus), musí kmity $y(t)$ na výstupu otevřeného (rozpojeného) regulačního obvodu mít stejnou amplitudu $a_y = a_e$ jako kmity regulační odchylky $e(t)$ a fázové zpoždění $-\pi$ (sumační uzel obrací znaménko). Předpokládá se, že $w(t) = 0$.

Podmínku vzniku a existence samobuzených kmitů, tj. mezního cyklu, lze vyjádřit vztahem

$$G(\mathrm{j}\omega)G_N(a_e) = -1, \tag{2.237a}$$

resp.

$$G(\mathrm{j}\omega) = -\frac{1}{G_N(a_e)}. \tag{2.237b}$$

Výraz

$$-\frac{1}{G_N(a_e)} \tag{2.238}$$

se nazývá ***kritická charakteristika*** dané nelinearity.

Ze vztahů (2.237) je zřejmé, že podmínka vzniku samobuzených kmitů je podobná Nyquistově kritériu pro mez stability lineárních regulačních obvodů. Vidíme, že kritická charakteristika (2.238) plní tutéž roli jako kritický bod $(-1, \mathrm{j}0)$ v lineárních regulačních obvodech, pro které tato podmínka má tvar

$$G_o(\mathrm{j}\omega) = -1, \tag{2.239}$$

kde $G_o(\mathrm{j}\omega)$ je kmitočtový přenos otevřeného regulačního obvodu.

Rovnici (2.237a) nebo (2.237b) lze řešit analyticky nebo graficky.

Při analytickém řešení je třeba komplexní rovnici zapsat ve tvaru soustavy dvou rovnic pro reálnou a imaginární část (viz příklad 2.28). Jejich řešením určíme amplitudu $a_y = a_M$ a úhlový kmitočet $\omega = \omega_M$. Budou-li jejich hodnoty reálné a kladné, pak v nelineárním regulačním obvodě vzniknou samobuzené kmity s amplitudou $a_y = a_M$ a úhlovým kmitočtem $\omega = \omega_M$.

Při grafickém řešení v komplexní rovině vyneseme Nyquistovu charakteristiku (amplitudofázovou kmitočtovou charakteristiku) lineární dynamické části $G(\mathrm{j}\omega)$ a kritickou charakteristiku $-1/G_N(a_e)$ nelinearity.

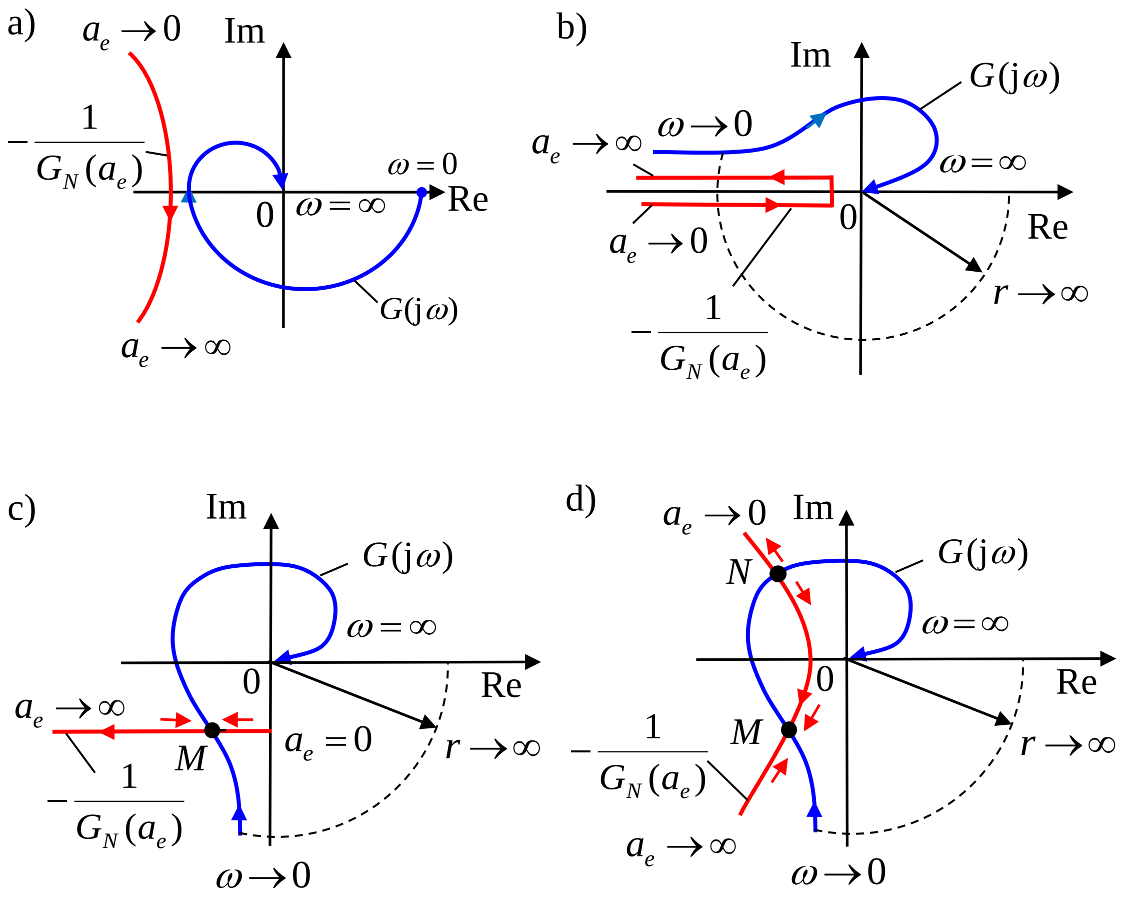
Nejdůležitější případy vzájemné polohy Nyquistovy charakteristiky $G(\mathrm{j}\omega)$ a kritické charakteristiky $-1/G_N(a_e)$ jsou na obr. 2.98.

Předpokládá se, že lineární dynamická část $G(s)$ nemá nestabilní póly v pravé polorovině komplexní roviny s.

V souladu se vztahem (2.237b) můžeme nyní zformulovat ***podmínku stability nelineárního regulačního obvodu ve tvaru***:

Nelineární regulační obvod je globálně asymptoticky stabilní, neobklopuje-li Nyquistova charakteristika (amplitudofázová kmitočtová charakteristika) lineární dynamické části $G(\mathrm{j}\omega)$ ***kritickou charakteristiku nelinearity*** $-1/G_N(a_e)$ ***a nemá-li s ní společný bod.***

Na obr. 2.98a Nyquistova charakteristika $G(\mathrm{j}\omega)$ neobklopuje kritickou charakteristiku $-1/G_N(a_e)$, a proto nelineární regulační obvod je globálně asymptoticky stabilní.



Obr. 2.98 Hlavní případy vzájemné polohy Nyquistovy charakteristiky $G(\mathrm{j}\omega)$ a kritické charakteristiky $-1/G_N(a_e)$ pro nelineární regulační obvod: a) globálně asymptoticky stabilní, b) nestabilní, c) se stabilním mezním cyklem, d) se stabilním i nestabilním mezním cyklem

Obr. 2.98b ukazuje případ nestabilního regulačního obvodu. Nyquistova charakteristika $G(\mathrm{j}\omega)$ obklopuje celou kritickou charakteristiku $-1/G_N(a_e)$.

Na obr. 2.98c je ukázán případ, kdy pro amplitudy regulační odchylky $0 \le a_e < a_M$ nelineární regulační obvod je nestabilní (červená šipka ukazuje růst amplitudy a_y) a pro amplitudy regulační odchylky $a_e > a_M$ je nelineární regulační obvod stabilní (červená šipka ukazuje pokles amplitudy a_y). Průsečík obou charakteristik bod $M(a_M, \omega_M)$ odpovídá stabilnímu meznímu cyklu s amplitudou a_M a úhlovým kmitočtem ω_M. Hodnotu amplitudy a_M odečteme z kritické charakteristiky $-1/G_N(a_e)$ a hodnotu úhlového kmitočtu ω_M odečteme z Nyquistovy charakteristiky $G(\mathrm{j}\omega)$.

Obr. 2.98d ukazuje případ, kdy pro amplitudy regulační odchylky $a_e < a_N$ a $a_e > a_M$ je nelineární regulační obvod stabilní (červené šipky ukazují pokles amplitudy a_y) a pro amplitudy regulační odchylky $a_N < a_e < a_M$ je regulační obvod nestabilní (červené šipky ukazují růst amplitudy a_y). Průsečík obou charakteristik bod $N(a_N, \omega_N)$ odpovídá nestabilnímu meznímu cyklu, protože pro amplitudu regulační odchylky $a_e < a_N$ amplituda a_y klesá (kmity jsou tlumené) a pro $a_N < a_e < a_M$ amplituda a_y roste (kmity se zvětšují) až do průsečíku $M(a_M, \omega_M)$, který odpovídá stabilnímu meznímu cyklu s periodickými kmity o úhlovém kmitočtu ω_M a amplitudě a_M.

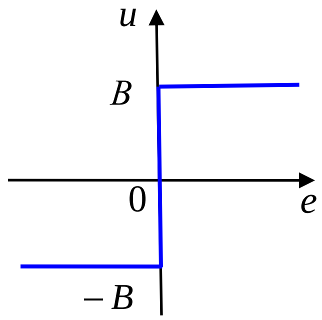
Doposud jsme předpokládali, že vstupem nelinearity je regulační odchylka $e(t)$. Tento předpoklad není podstatný. Nelinearita může být umístěna v libovolném místě regulačního obvodu (tj. v přímé i zpětnovazebné větvi). Důležité je, aby lineární dynamická část měla vlastnosti dolnopropustného filtru.

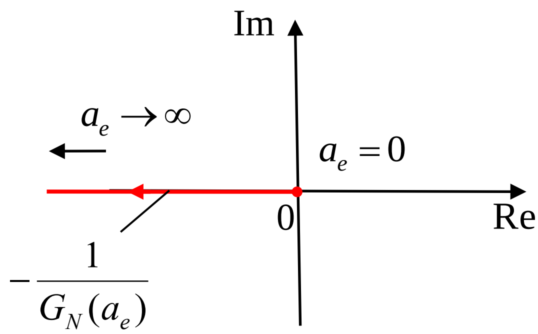
Velikou výhodou metody ekvivalentního přenosu je, že lineární dynamická část může být velmi vysokého řádu (čím vyšší řád, tím vyšší přesnost) a nelinearita může obsahovat nespojitosti, hystereze atd. Další výhodou je, že Nyquistova charakteristika lineární dynamické části i ekvivalentní přenos mohou být určeny experimentálně. Má to význam v těch případech, kdy nelinearita je netypická a popis vlastností lineární dynamické části není k dispozici v analytickém tvaru.

Metoda ekvivalentního přenosu může být rozšířena i na značně složitější nelineární regulační obvody s více nelinearitami, které mohou být nesymetrické a mohou mít i vlastní dynamiku.

Ekvivalentní přenosy některých důležitějších lichých nelinearit s odpovídajícími kritickými charakteristikami jsou uvedeny níže.

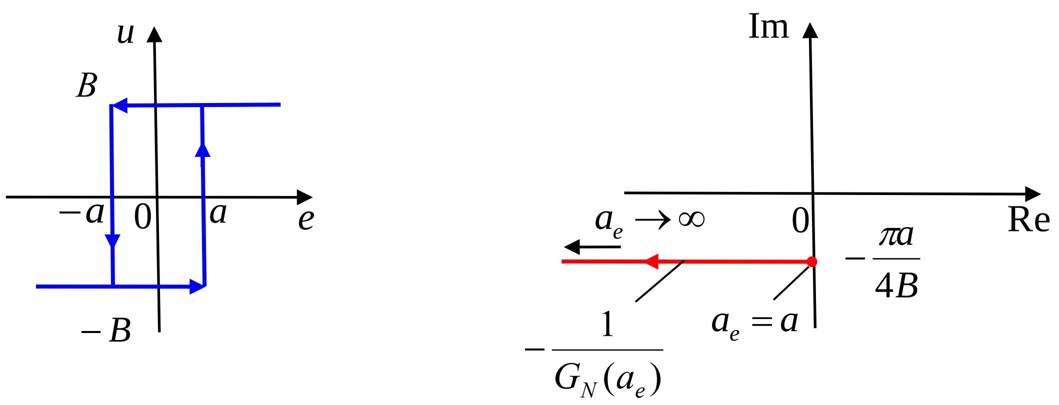
a) **Ideální dvoupolohové relé**





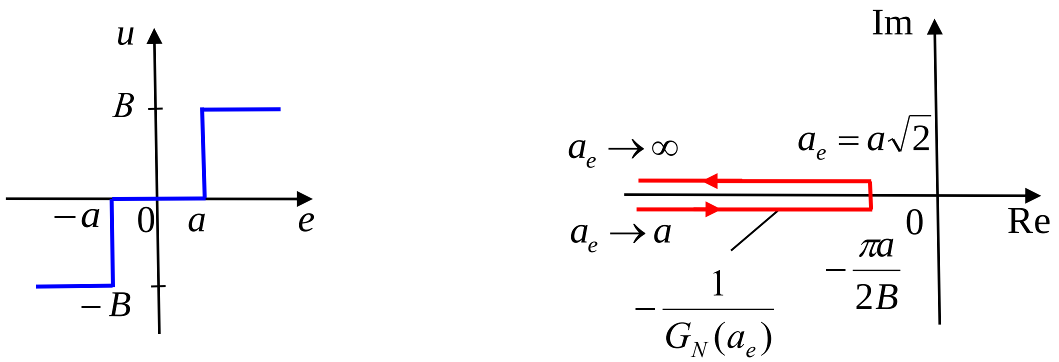
$$G_N(a_e) = \frac{4B}{\pi a_e}, \quad a_e \geq a \tag{2.240}$$

b) **Dvoupolohové relé s hysterezí**



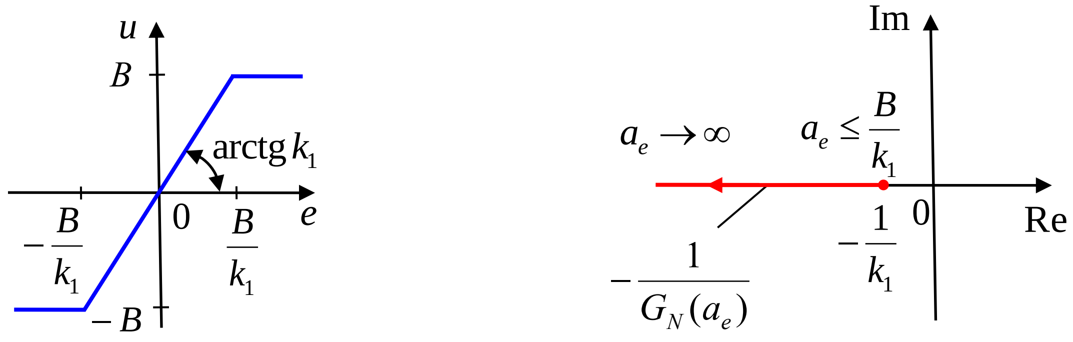
$$G_N(a_e) = \frac{4B}{\pi a_e}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2} - \mathrm{j}\frac{a}{a_e}\right], \quad a_e \geq a \tag{2.241}$$

c) **Ideální třípolohové relé**



$$G_N(a_e) = \frac{4B}{\pi a_e}\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2}, \quad a_e \geq a \tag{2.242}$$

d) **Nasycení**

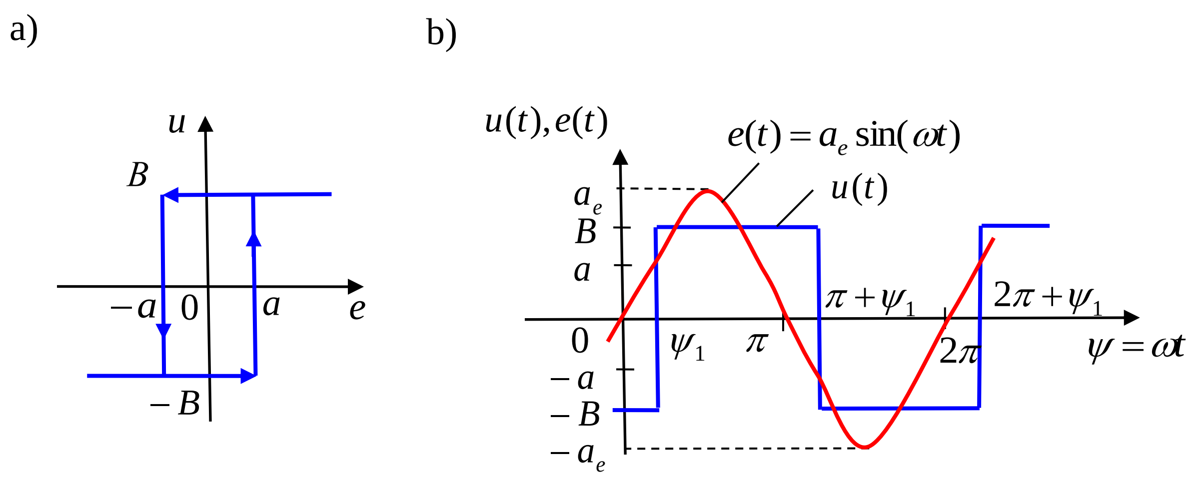


$$G_N(a_e) = \begin{cases} k_1, & 0 \le a_e \le \dfrac{B}{k_1} \\ \dfrac{2k_1}{\pi}\arcsin\dfrac{B}{a_e k_1} + \dfrac{B}{a_e k_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{B}{a_e k_1}\right)^2}, & a_e > \dfrac{B}{k_1} \end{cases} \qquad (2.243)$$

Příklad 2.27

Pro dvoupolohové relé s hysterezí (obr. 2.99a) je třeba určit ekvivalentní přenos a kritickou charakteristiku.

Řešení:



Obr. 2.99 Průchod sinusového průběhu dvoupolohovým relé s hysterezí:
a) charakteristika dvoupolohového relé s hysterezí, b) průběhy vstupní $e(t)$ a výstupní $u(t)$ veličiny

V souladu se vztahy (2.233) a obr. 2.99a můžeme psát

$$
\begin{aligned}
a_1(a_e) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a_e \sin\psi)\cos\psi \,\mathrm{d}\psi = \\
&= \frac{B}{\pi}\left[-\int_0^{\psi_1}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi + \int_{\psi_1}^{\pi+\psi_1}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi - \int_{\pi+\psi_1}^{2\pi}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\right] = \\
&= -\frac{4Ba}{\pi a_e}
\end{aligned}
\tag{2.244a}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1(a_e) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a_e \sin\psi)\sin\psi \,\mathrm{d}\psi = \\
&= \frac{B}{\pi}\left[-\int_0^{\psi_1}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi + \int_{\psi_1}^{\pi+\psi_1}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi - \int_{\pi+\psi_1}^{2\pi}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\right] = \\
&= \frac{4B}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{2.244b}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\psi_1 = \omega t, \qquad a = a_e \sin\psi_1 \;\Rightarrow\; \psi_1 &= \arcsin\frac{a}{a_e} \\
\psi_1 &= \arccos\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{2.245}
$$

Nyní již můžeme vyjádřit na základě vztahů (2.234) a (2.244) ekvivalentní přenos pro dvoupolohové relé s hysterezí [viz (2.241)]

$$
G_N(a_e) = \frac{b_1(a_e)}{a_e} + \mathrm{j}\frac{a_1(a_e)}{a_e} = \frac{4B}{\pi a_e}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2} - \mathrm{j}\frac{a}{a_e}\right], \quad a_e \geq a \tag{2.246}
$$

a kritickou charakteristiku

$$
-\frac{1}{G_N(a_e)} = -\frac{\pi a_e}{4B}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2} + \mathrm{j}\frac{a}{a_e}\right], \quad a_e \geq a\,. \tag{2.247}
$$

Pro ideální dvoupolohové relé ze vztahů (2.246) a (2.247) pro $a \to 0$ dostaneme

$$
G_N(a_e) = \frac{4B}{\pi a_e} \tag{2.248}
$$

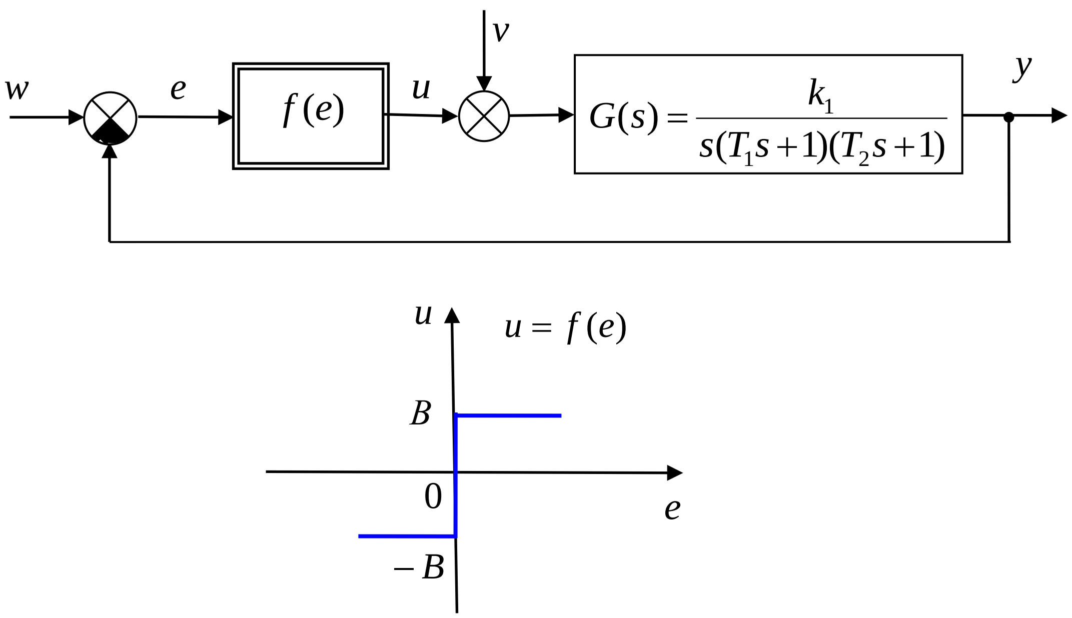
a kritickou charakteristiku

$$-\frac{1}{G_N(a_e)} = -\frac{\pi a_e}{4B}. \tag{2.249}$$

Podle očekávání jsme obdrželi pro ekvivalentní přenosy vztahy shodné s (2.241) a (2.240).

Příklad 2.28

U nelineárního regulačního obvodu na obr. 2.100 je třeba ověřit, zda vznikne stabilní mezní cyklus. Pokud ano, je třeba určit jeho amplitudu a_M a úhlový kmitočet ω_M.



Obr. 2.100 Nelineární regulační obvod s ideálním dvoupolohovým relé – příklad 2.28

Řešení:

Pro vznik stabilního mezního cyklu komplexní rovnice (2.237a)

$$G(\mathrm{j}\omega)G_N(a_e) = -1, \tag{2.250}$$

musí mít kladná reálná řešení $a_e = a_M$ a $\omega = \omega_M$.

Ekvivalentní přenos ideálního dvoupolohového relé je dán vztahem (2.240) [(2.248)]. Po dosazení do (2.250) a úpravě dostaneme

$$\frac{k_1}{\mathrm{j}\omega(T_1\mathrm{j}\omega+1)(T_2\mathrm{j}\omega+1)}\frac{4B}{\pi a_e} = -1 \Rightarrow$$

$$-\frac{4k_1B}{\pi a_e} = -(T_1+T_2)\omega^2 + \mathrm{j}\omega(1-T_1T_2\omega^2).$$

Tato komplexní rovnice je ekvivalentní dvěma reálným rovnicím

$$-\frac{4k_1B}{\pi a_e} = -(T_1+T_2)\omega^2,$$

$$0 = \omega(1-T_1T_2\omega^2).$$

Jejich řešením obdržíme

$$\omega = \omega_M = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}, \tag{2.251a}$$

$$a_e = a_M = \frac{4k_1BT_1T_2}{\pi(T_1+T_2)}. \tag{2.251b}$$

Řešení druhé rovnice $\omega = 0$ a $\omega = -1\big/\sqrt{T_1T_2}$ nemohou odpovídat stabilnímu meznímu cyklu, proto obdržené řešení (2.251) popisuje stabilní mezní cyklus s úhlovým kmitočtem ω_M a amplitudou a_M .

Vzájemnou polohu Nyquistovy charakteristiky lineární části $G(\mathrm{j}\omega)$ a kritické charakteristiky $-1\big/G_N(a_e)$ lze snadno přibližně nakreslit. Kmitočtový přenos lineární části $G(\mathrm{j}\omega)$ rozdělíme na reálnou $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]$ a imaginární $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$ část a pro vhodně zvolené úhlové kmitočty ω sestavíme tab. 2.7, tj.

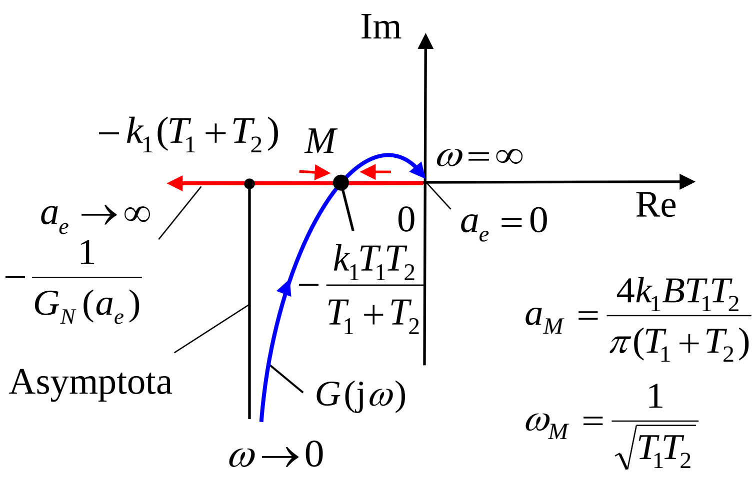
$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{k_1}{\mathrm{j}\omega(T_1\mathrm{j}\omega+1)(T_2\mathrm{j}\omega+1)} = \mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)] + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)],$$

$$\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)] = -\frac{k_1(T_1+T_2)}{(T_1+T_2)^2\omega^2 + (1-T_1T_2\omega^2)}, \tag{2.252a}$$

$$\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)] = -\frac{k_1(1-T_1T_2\omega^2)}{(T_1+T_2)^2\omega^3 + \omega(1-T_1T_2\omega^2)}. \tag{2.252b}$$

Tab. 2.7 Tabulka pro sestavení Nyquistovy charakteristiky lineární části $G(\mathrm{j}\omega)$ – příklad 2.28

ω	0	$\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$	∞
$\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]$	$-k_1(T_1+T_2)$	$-\frac{k_1T_1T_2}{T_1+T_2}$	0_-
$\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$	$-\infty$	0	0_+



Obr. 2.101 Vzájemná poloha Nyquistovy a kritické charakteristiky – příklad 2.28

Na základě tab. 2.7 již snadno můžeme přibližně nakreslit Nyquistovu charakteristiku lineární části $G(\mathrm{j}\omega)$. Kritickou charakteristiku získáme ze vztahu (2.240) [(2.248)]

$$-\frac{1}{G_N(a_e)}=-\frac{\pi a_e}{4B}. \tag{2.253}$$

Z obr. 2.101 je zřejmé, že průsečík obou charakteristik M určuje stabilní mezní cyklus. Obklopená část kritické charakteristiky odpovídá nestabilitě, tj. amplituda kmitů výstupního signálu a_y roste, neobklopená odpovídá stabilitě, tj. amplituda kmitů a_y klesá (viz červené šipky).

Protože pro jednoznačnou symetrickou nelinearitu ekvivalentní přenos představuje zesílení k_i závislé na amplitudě a_e vstupní sinusové veličiny (obr. 2.97c), je možné hodnotu ekvivalentního přenosu odpovídající stabilnímu meznímu cyklu považovat za přibližné kritické zesílení

$$k_k \approx G_N(a_M)=\frac{4B}{\pi a_M}, \tag{2.254}$$

kde a_M je experimentálně změřena amplituda ustálených kmitů výstupní veličiny $y(t)$ a v případě potřeby se z tohoto průběhu určí i kritická perioda $T_k=T_M$ (např. při seřízení Zieglerovou-Nicholsovou metodou kritických parametrů).

Nyní určíme přesné hodnoty kritického zesílení k_k a kritické periody

$$T_k=T_M=\frac{2\pi}{\omega_M}, \tag{2.255}$$

kde $\omega_M = \omega_k$ je kritický úhlový kmitočet.

Při určení kritického zesílení k_k na základě experimentálního změření kritické periody výstupních kmitů T_k a amplitudy a_M dostaneme pouze jeho přibližnou hodnotu. Čím více se tvar výstupních kmitů bude blížit sinusovému průběhu, tím přesnější bude hodnota k_k.

Je třeba si uvědomit, že stabilní mezní cyklus nelineárního regulačního obvodu s jednoznačnou symetrickou nelinearitou u metody ekvivalentního přenosu zastupujeme lineárním regulačním obvodem na kmitavé mezi stability, a proto vztah (2.255) pro kritickou periodu je přesný na rozdíl od vztahu na kritické zesílení (2.254).

K určení kritických parametrů k_k a T_k je vhodné použít Michajlovovu funkci (charakteristiku, hodograf), která v tomto případě prochází počátkem souřadnic.

V regulačním obvodě na obr. 2.100 nelinearitu zastoupíme zesílením k_i a pak můžeme psát

$$G_o(s) = \frac{k_i k_1}{s(T_1 s+1)(T_1 s+1)}. \tag{2.256}$$

Charakteristický mnohočlen má pak tvar

$$N(s) = s(T_1 s+1)(T_1 s+1) + k_i k_1 = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k_i k_1. \tag{2.257}$$

Po dosazení $s = \mathrm{j}\omega$ dostaneme Michajlovovu funkci

$$N(\mathrm{j}\omega) = N(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = N_P(\omega) + \mathrm{j}\,N_Q(\omega),$$

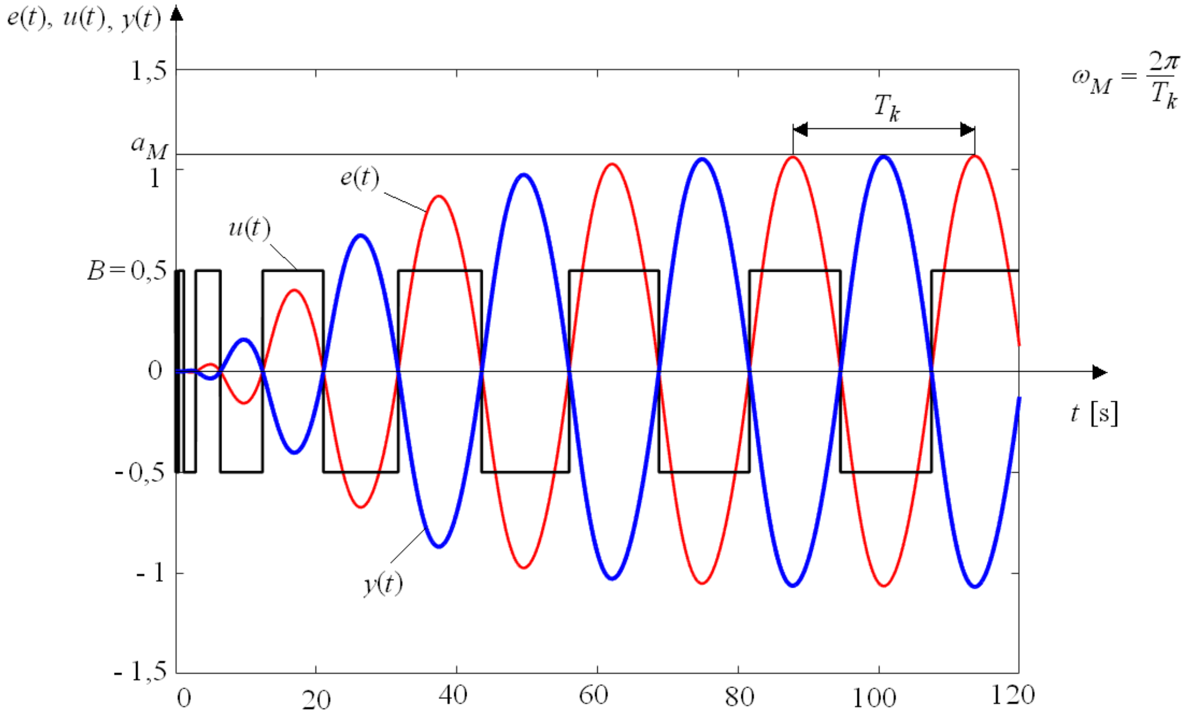
kde

$$N_P(\omega) = k_i k_1 - (T_1 + T_2)\omega^2,$$
$$N_Q(\omega) = \omega(1 - T_1 T_2 \omega^2).$$

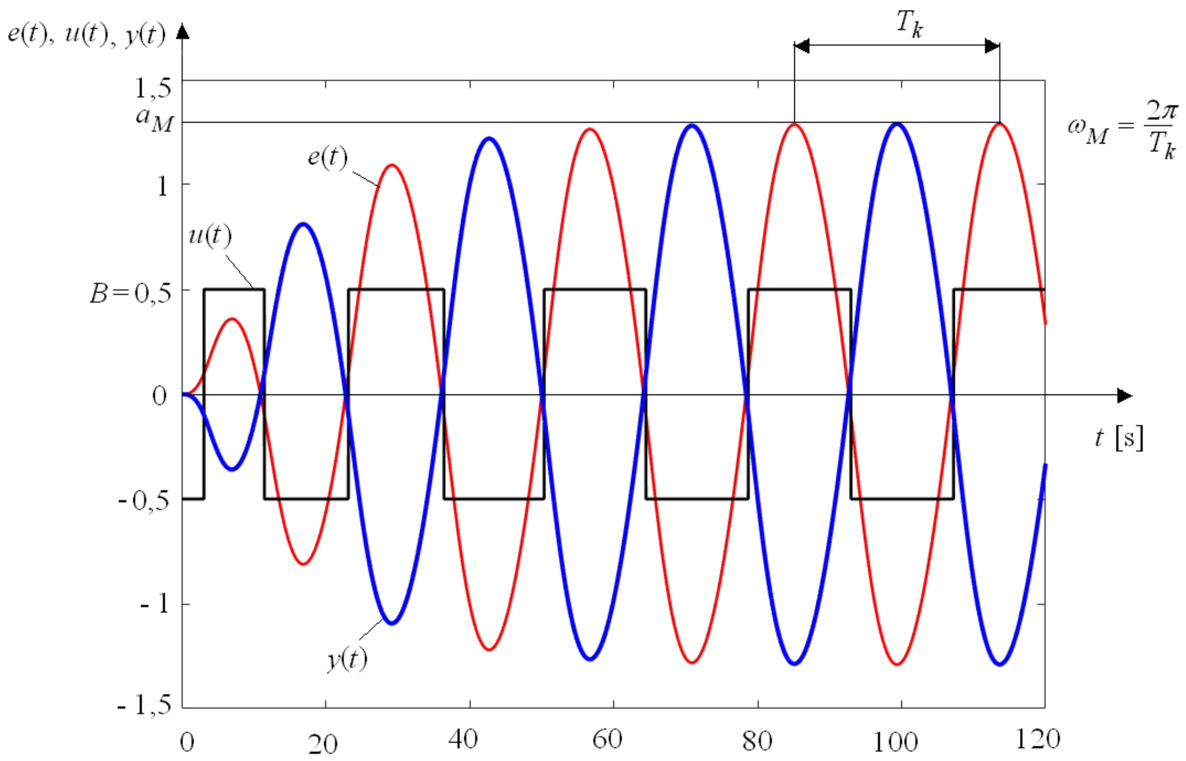
Přirovnáním reálné $N_P(\omega)$ a imaginární $N_Q(\omega)$ části Michajlovovy funkce $N(\mathrm{j}\omega)$ k nule dostaneme

$$\left.\begin{aligned} k_i k_1 - (T_1 + T_2)\omega^2 &= 0 \\ \omega(1 - T_1 T_2 \omega^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \omega = \omega_k = \omega_M = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} &\Rightarrow T_k = 2\pi\sqrt{T_1 T_2}, \\ k_i = k_k = \frac{T_1 + T_2}{k_1 T_1 T_2}&. \end{aligned} \tag{2.258}$$

Na obr. 2.102 jsou ukázány průběhy veličin $e(t)$, $u(t)$ a $y(t)$ pro ideální dvoupolohové relé (bez hystereze, tj. $a = 0$) s $B = 0{,}5$ a pro regulovanou soustavu (viz obr. 2.100) s parametry $k_1 = 1, T_1 = 8\text{ s}, T_2 = 2\text{ s}$). Z ustáleného průběhu výstupní veličiny $y(t)$ byly odečteny hodnoty $a_M \approx 1{,}07$ a $T_k \approx 25{,}9\text{ s}$.



Obr. 2.102 Průběhy veličin v regulačním obvodě s ideálním dvoupolohovým relé bez hystereze (a = 0, B = 0,5) – příklad 2.28



Obr. 2.103 Průběhy veličin v regulačním obvodě s dvoupolohovým relé s hysterezí (a = 0,1; B = 0,5) – příklad 2.28

Vypočtené hodnoty lze určit pomocí vztahů (2.251)

$$a_M = \frac{4k_1 B T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \doteq 1{,}02\,;$$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_M} = 2\pi\sqrt{T_1 T_2} \doteq 25{,}1 \text{ s.}$$

Z experimentálně zjištěné amplitudy a_M výstupní veličiny $y(t)$ určíme ještě na základě vztahu (2.254) kritické zesílení

$$k_k = \frac{4B}{\pi a_M} \doteq 0{,}6\,;$$

a teoreticky vypočtené kritické zesílení [vztah (2.258)]

$$k_k = \frac{T_1 + T_2}{k_1 T_1 T_2} = \frac{5}{8} \doteq 0{,}63\,.$$

Ve všech případech rozdíl mezi vypočtenou hodnotou a hodnotou získanou experimentálně nebyl větší než 5 %.

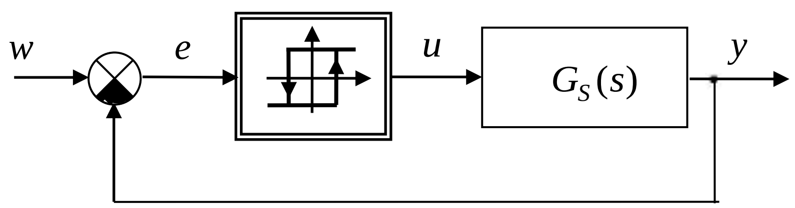
Pro dvoupolohové relé s hysterezí (a = 0,1) s B = 0,5 průběhy veličin $e(t)$, $u(t)$ a $y(t)$ jsou na obr. 2.103. V tomto případě experimentálně získané hodnoty byly $a_M = 1{,}29$; $T_k = 28{,}5$ s a $k_k \doteq 0{,}5$.

I když v tomto případě jsou rozdíly podstatně větší, je třeba si uvědomit, že a = 0,1 je 20 % z hodnoty B = 0,5.

2.3.7 Experimentální identifikace soustav metodou relé

Metoda ekvivalentního přenosu může být využita při experimentální identifikaci regulovaných soustav. Protože se nejčastěji při tom používá dvoupolohové relé, proto se často nazývá ***identifikace metodou relé***.

Uvažujme regulační obvod (obr. 2.104), ve kterém regulátor zastoupíme dvoupolohovým relé.



Obr. 2.104 Obvod s dvoupolohovým relé

Úlohou relé je způsobit stabilní kmitání obvodu, tj. způsobit vznik stabilního mezního cyklu. Pro ověření vzniku stabilního mezního cyklu je velmi vhodná metoda ekvivalentního přenosu, která je podrobně popsána v předchozí kapitole 2.3.6.

Podmínkou vzniku stabilního mezního cyklu v obvodu na obr. 2.104 je splnění jednoduché podmínky [viz (2.237b)]

$$G_S(\mathrm{j}\omega) = -\frac{1}{G_N(a_e)}, \tag{2.259}$$

kde $G_S(\mathrm{j}\omega)$ je kmitočtový přenos identifikované soustavy.

Pro symetrické dvoupolohové relé s hysterezí ($a > 0$) nebo bez hystereze ($a = 0$) má ekvivalentní přenos tvar [viz (2.240), (2.241) a příklad 2.27]

$$G_N(a_e) = \frac{4B}{\pi a_e}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_e}\right)^2} - \mathrm{j}\frac{a}{a_e}\right], \quad a_e \geq a. \tag{2.260}$$

Ze vztahu (2.260) snadno určíme kritickou charakteristiku

$$-\frac{1}{G_N(a_e)} = A_K(a_e)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_K(a_e)}, \qquad a_e \geq a, \tag{2.261a}$$

$$A_K(a_e) = \frac{\pi a_e}{4B}, \tag{2.261b}$$

$$\varphi_K(a_e) = -\pi + \mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{a_e^2 - a^2}}, \tag{2.261c}$$

kde $A_K(a_e)$ je modul kritické charakteristiky, $\varphi_K(a_e)$ – fáze kritické charakteristiky.

Podmínka (2.259) představuje komplexní rovnici, kterou pro

$$G_S(\mathrm{j}\omega) = A_S(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_S(\omega)} \tag{2.262}$$

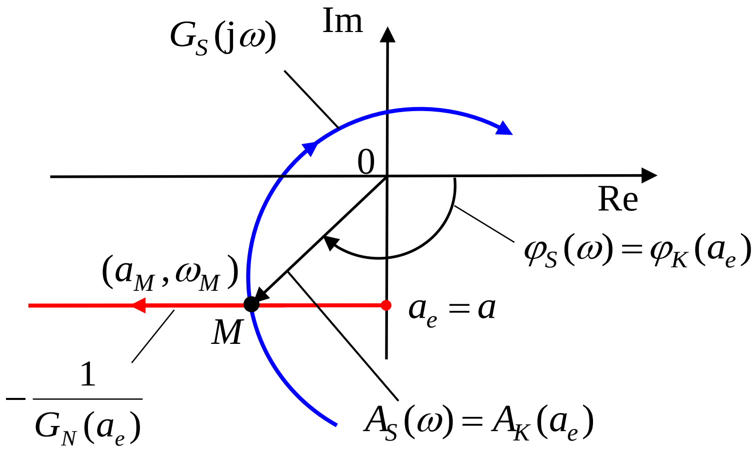
je vhodné zastoupit dvěma obecně nelineárními rovnicemi

$$\begin{aligned} A_S(\omega) &= A_K(a_e), \\ \varphi_S(\omega) &= \varphi_K(a_e), \end{aligned} \tag{2.263}$$

kde $A_S(\omega)$ je modul a $\varphi_S(\omega)$ je fáze kmitočtového přenosu soustavy (2.262).

Řešením rovnic (2.263) dostaneme amplitudu a_M a úhlový kmitočet ω_M. Pokud veličiny a_M a ω_M jsou reálné a kladné, pak v obvodě na obr. 2.104 vznikne stabilní mezní cyklus s amplitudou a_M a úhlovým kmitočtem ω_M na vstupu relé.

Geometrická interpretace řešení komplexní rovnice (2.259) nebo soustavy rovnic (2.263) je na obr. 2.105. Šipky u křivek Nyquistova charakteristiky (amplitudofázové kmitočtové charakteristiky) soustavy (2.262) a kritické charakteristiky (2.261) ukazují směr růstu úhlového kmitočtu ω a amplitudy a_e harmonických kmitů na vstupu relé.



Obr. 2.105 Geometrická interpretace metody relé

Vznikne-li v obvodě na obr. 2.104 stabilní mezní cyklus, pak ze změřených veličin a_M a ω_M (obr. 2.102 a 2.103) lze na základě soustavy rovnic (2.263) získat dva neznámé parametry přenosu soustavy $G_S(s)$.

Protože pro $w(t) = 0$ výstupní veličina soustavy $y(t)$ až na znaménko je vstupní veličinou $e(t)$ do relé, tj. pro ustálené kmity platí

$$a_M = a_e = a_y .$$

Úhlový kmitočet ω je pro všechny veličiny v obvodě na obr. 2.104 stejný, a proto platí

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} . \tag{2.264}$$

Použití dvoupolohového relé s hysterezí je vhodné pouze v případě existence šumu. Doporučuje se, aby šířka hystereze $2a$ byla větší než je dvojnásobek amplitudy šumu a amplituda relé B by měla být taková, aby amplituda výstupních kmitů soustavy a_y byla nejméně trojnásobkem amplitudy šumu. Mezi amplitudou výstupních kmitů soustavy a_y a amplitudou relé B platí přímá úměra.

Z obr. 2.105 (viz také obr. 2.101) vyplývá, že uvedená metoda relé je vhodná pro proporcionální soustavy vyššího řádu než 2 nebo s dopravním zpožděním a integrační soustavy 1. řádu se setrvačností nejméně 2. řádu (viz příklad 2.28) nebo s dopravním zpožděním. Je zřejmé, že pro ideální dvoupolohové relé (tj. bez hystereze $a = 0$) platí $\omega_M = \omega_k = \omega_{-\pi}$, kde ω_k je kritický úhlový kmitočet, $\omega_{-\pi}$ – kmitočet způsobující fázové zpoždění $-\pi$ (– 180°).

Příklad 2.29

Metodou relé pro proporcionální soustavu s dopravním zpožděním aproximovanou přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_i s + 1)^i} \mathrm{e}^{-T_{di} s} \tag{2.265}$$

je třeba určit časovou konstantu T_i a dopravní zpoždění T_{di} za předpokladu, že koeficient přenosu soustavy k_1 a její řád i jsou známé.

Řešení:

Pro soustavu (2.265) platí

$$G_S(\mathrm{j}\omega) = \frac{k_1}{(T_i\, \mathrm{j}\omega + 1)^i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}T_{di}\omega} = A_S(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_S(\omega)}, \tag{2.266a}$$

$$A_S(\omega) = \frac{k_1}{(1 + \omega^2 T_i^2)^{\frac{i}{2}}}, \tag{2.266b}$$

$$\varphi_S(\omega) = -[\omega T_{di} + i \operatorname{arctg}(\omega T_i)], \tag{2.266c}$$

Za předpokladu, že z experimentálně získaného ustáleného periodického průběhu výstupní veličiny $y(t)$ byla změřena amplituda kmitů a_M a perioda T_M, na základě vztahů (2.261b), (2.261c), (2.266b), (2.266c) a (2.263) se pro $a_e = a_M$ a $\omega = \omega_M$ ($\omega_M = 2\pi/T_M$) dostane (pro $a = 0, T_M = T_k$)

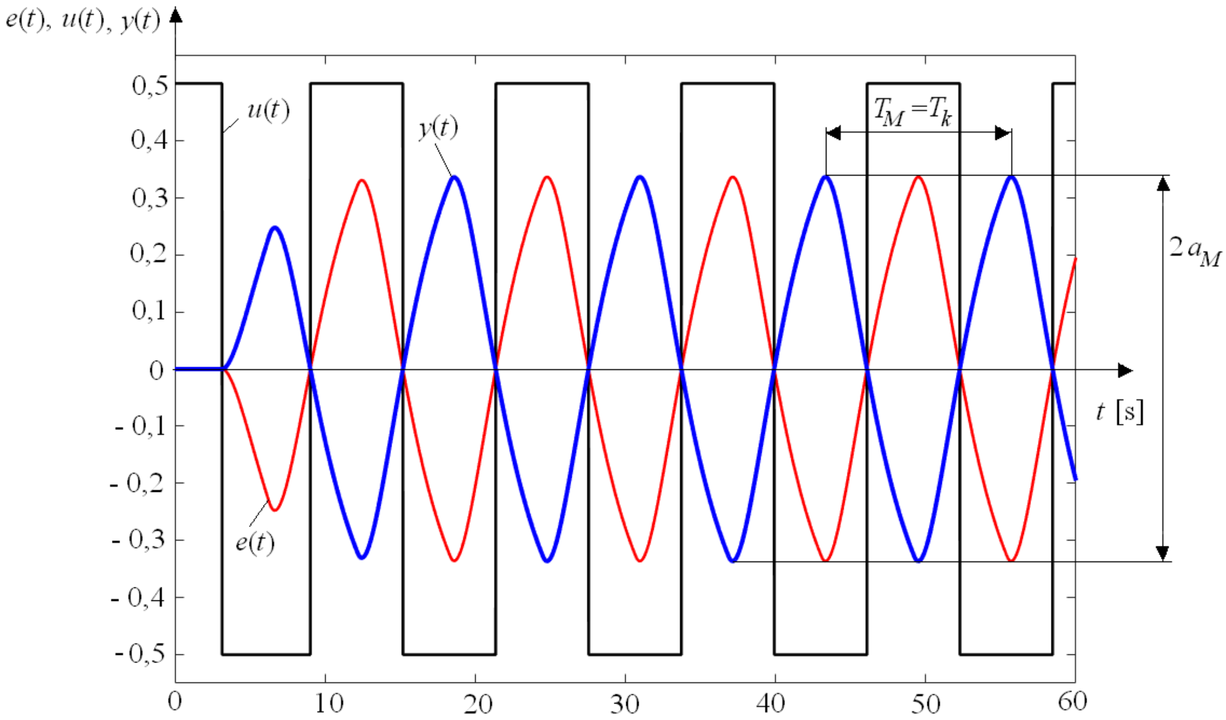
$$T_i = \frac{T_M}{2\pi} \sqrt{\sqrt[i]{\frac{16 k_1^2 B^2}{\pi^2 a_M^2}} - 1}, \tag{2.267a}$$

$$T_{di} = \frac{T_M}{2\pi} \left[\pi - i \operatorname{arctg} \frac{2\pi T_i}{T_M} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{a_M^2 - a^2}} \right]. \tag{2.267b}$$

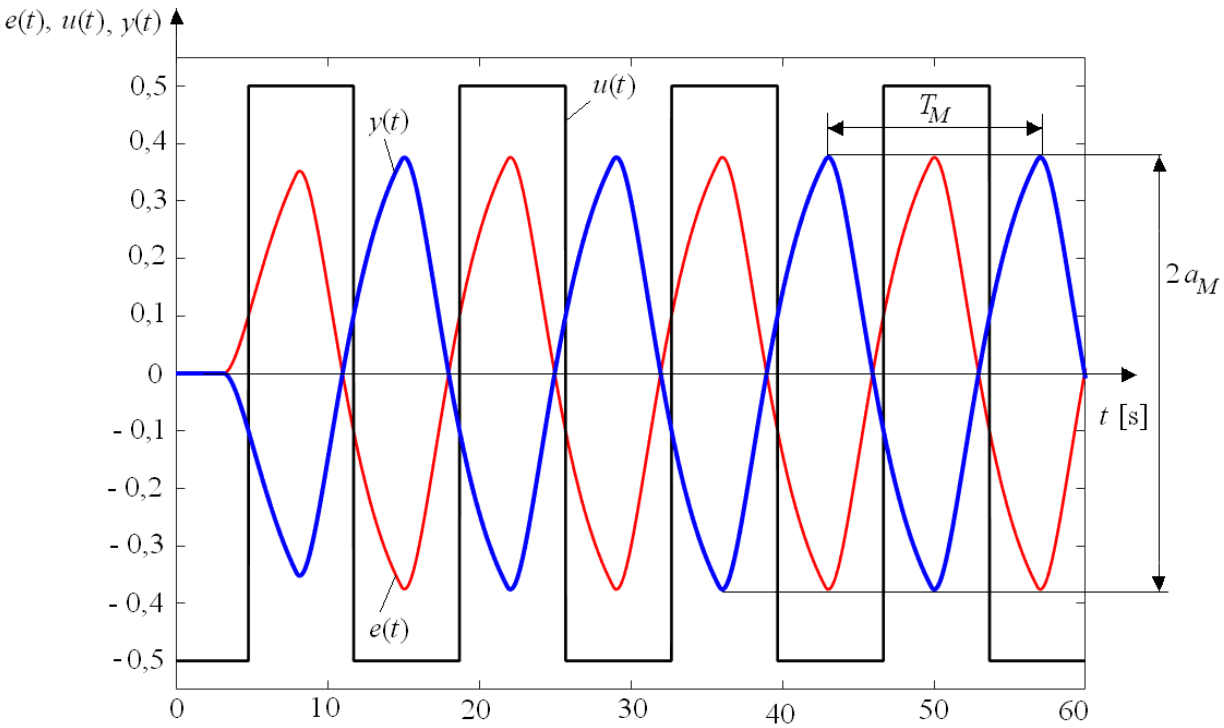
Např. pro soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{1}{(2s + 1)^2} \mathrm{e}^{-\pi s} \tag{2.268}$$

byly získány průběhy veličiny $y(t)$ pro ideální dvoupolohové relé (tj. bez hystereze, $B = 0{,}5$; $a = 0$) na obr. 2.106 a pro dvoupolohové relé s hysterezí ($B = 0{,}5$; $a = 0{,}1$) na obr. 2.107.



Obr. 2.106 Průběhy veličin v regulačním obvodě s ideálním dvoupolohovým relé (a = 0) – příklad 2.29



Obr. 2.107 Průběhy veličin v regulačním obvodě s dvoupolohovým relé s hysterezí (a = 0,1) – příklad 2.29

a) Ideální dvoupolohové relé (a = 0)

Z průběhu výstupní veličiny $y(t)$ na obr. 2.106 byly změřeny hodnoty $a_M = 0{,}34$ a $T_M = T_k = 12{,}4$ s. Ze vztahů (2.267) pro $k_1 = 1$ (předpokládá se, že je známé), $B = 0{,}5$; $a = 0$; $i = 2$ dostaneme

$$T_2 = \frac{T_M}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1B}{\pi a_M} - 1} \doteq 1{,}84 \text{ s}; \tag{2.269a}$$

$$T_{d2} = \frac{T_M}{2\pi}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{2\pi T_2}{T_M}\right) \doteq 3{,}24 \text{ s}. \tag{2.269b}$$

Časová konstanta T_2 byla určena s chybou okolo 8 % a dopravní zpoždění T_{d2} s chybou okolo 3 %.

Kritické zesílení k_k určíme na základě přibližného vztahu (2.254)

$$k_k \approx \frac{4B}{\pi a_M} \doteq 1{,}87\,. \tag{2.270a}$$

Protože dvoupolohové relé je ideální (tj. bez hystereze, a = 0), proto platí

$$T_k = T_M \doteq 12{,}4 \text{ s}. \tag{2.270b}$$

Přenos soustavy (2.268) byl zvolen speciálně pro parametry $k_1 = 1$, $T_2 = 2$ s a $T_{d2} = \pi$ s, protože umožňuje analytický výpočet kritických parametrů

$$k_k = \frac{2}{k_1} = 2\,, \tag{2.271a}$$

$$T_k = 2\sqrt{2\pi T_{d2}T_2} = 4\pi \doteq 12{,}6 \text{ s}. \tag{2.271b}$$

Chyba určení kritického zesílení k_k je menší než 7 % a chyba kritické periody T_k je menší než 2 %.

b) Dvoupolohové relé s hysterezí (a = 0,1)

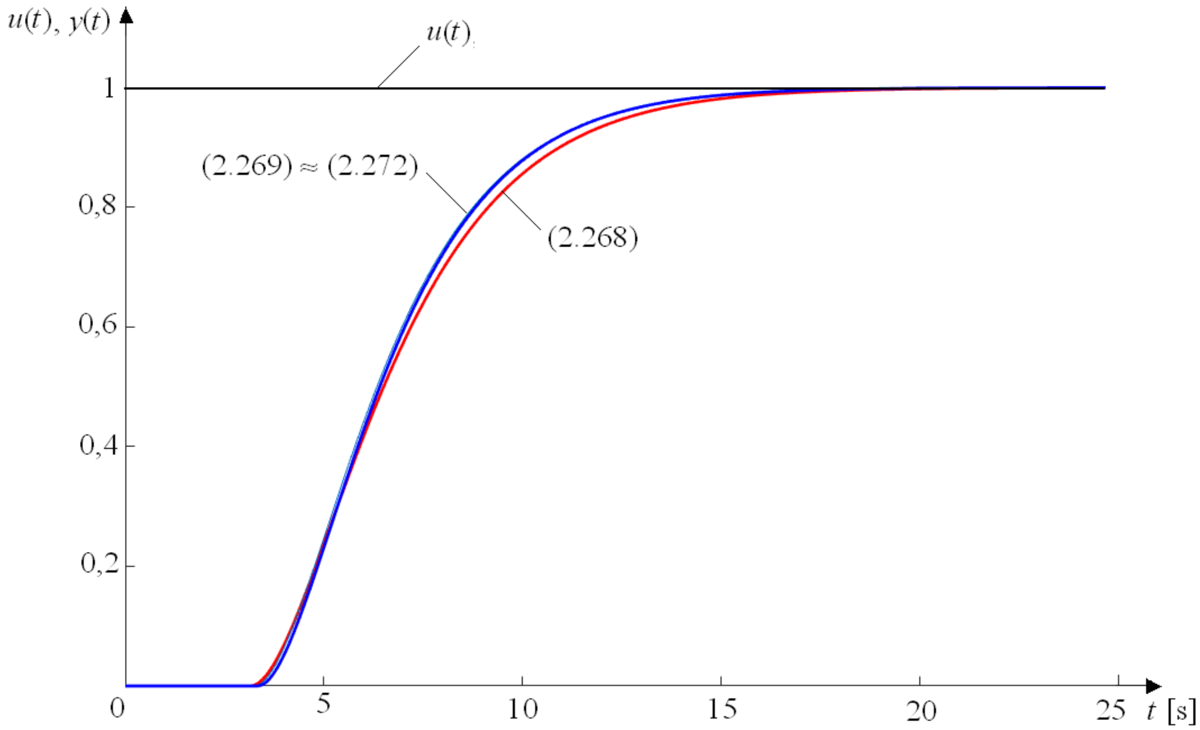
Z průběhu výstupní veličiny $y(t)$ na obr. 2.107 byly změřeny hodnoty $a_M = 0{,}38$ a $T_M = 14{,}0$ s. Ze vztahů (2.267) pro $k_1 = 1$, $B = 0{,}5$; $a = 0{,}1$ a $i = 2$ dostaneme

$$T_2 = \frac{T_M}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1B}{\pi a_M} - 1} \doteq 1{,}83 \text{ s}; \tag{2.272a}$$

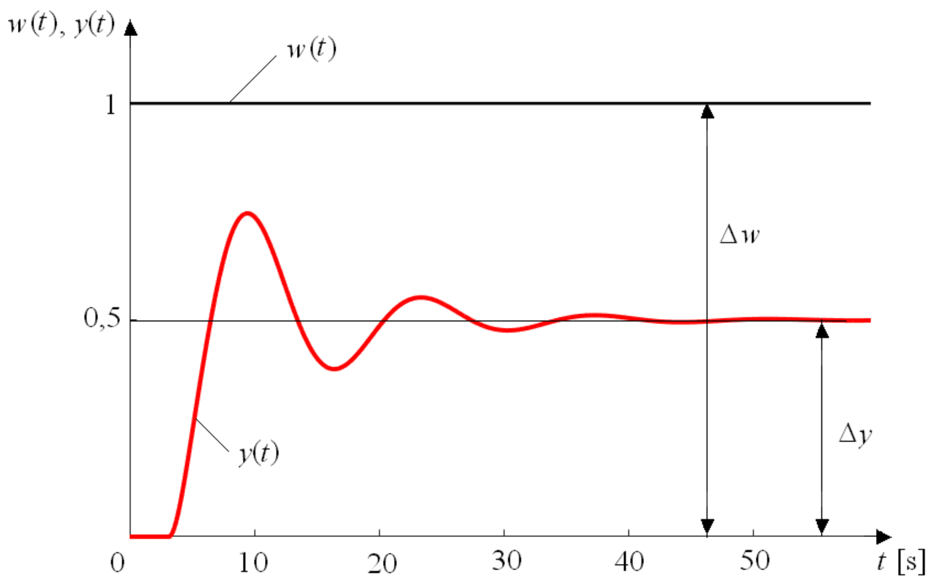
$$T_{d2} = \frac{T_M}{2\pi}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{2\pi T_2}{T_M} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{a_M^2 - a^2}}\right) \doteq 3{,}33 \text{ s}. \tag{2.272b}$$

V tomto případě chyba určení časové konstanty T_2 je okolo 8,5 % a dopravního zpoždění T_{d2} okolo 6 %.

I když se zdá, že nepřesnost určení časové konstanty T_2 a dopravního zpoždění T_{d2} je poměrně veliká, odpovídající přechodové charakteristiky se od přesné přechodové charakteristiky značně neliší, viz obr. 2.108. Obě přechodové charakteristiky určené na základě identifikovaných parametrů (2.269) a (2.272) se při daném měřítku téměř překrývají.



Obr. 2.108 Přechodové charakteristiky soustavy (2.268) a soustav s identifikovanými parametry (2.269) a (2.272) – příklad 2.29



Obr. 2.109 Určení koeficientu přenosu soustavy k_1 – příklad 2.29

Doposud jsme předpokládali, že koeficient přenosu soustavy k_1 je známý. V případě proporcionálních soustav ho lze určit v uzavřeném regulačním obvodě následujícím postupem.

Dvoupolohové relé v obvodě (obr. 2.104) se zastoupí proporcionálním regulátorem P se zesílením K_P (případně u složitějšího regulátoru vyřadíme dynamické složky, tj. nastavíme $T_I \to \infty$ a $T_D = 0$) a pak pro ustálený stav platí

$$\lim_{s\to 0}\frac{K_P G_S(s)}{1+K_P G_S(s)} = \frac{K_P k_1}{1+K_P k_1},$$

tj.

$$\frac{\Delta y}{\Delta w} = \frac{K_P k_1}{1+K_P k_1} \Rightarrow$$

$$k_1 = \frac{\Delta y}{K_P(\Delta w - \Delta y)}, \tag{2.273}$$

kde Δy je ustálená změna výstupní veličiny $y(t)$, Δw – ustálená změna žádané veličiny $w(t)$ (většinou se předpokládá skoková změna).

Ze vztahu (2.273) vyplývá, že pro známé nastavené zesílení regulátoru K_P, známé změny žádané veličiny Δw a změřené ustálené změny výstupní veličiny Δy snadno můžeme určit neznámý koeficient přenosu soustavy k_1.

Na obr. 2.109 je pro soustavu (2.268) nastaveno zesílení regulátoru $K_P = 1$ a skoková změna žádané veličiny $\Delta w = \eta(t)$. Z obr. 2.109 je zřejmé, že $\Delta y = 0{,}5$ a $\Delta w = 1$. Po dosazení do vztahu (2.273) se dostane $k_1 = 1$.

Nastavené zesílení regulátoru K_P by mělo zajistit stabilní a dostatečně rychle se ustalující průběh výstupní veličiny $y(t)$.

Příklad 2.30

Podobně jako v příkladě 2.29 je třeba určit metodou relé pro integrační soustavu aproximovanou přenosem

$$G_S(s) = \frac{k_1}{s(T_i s+1)^i}\mathrm{e}^{-T_{di}s} \tag{2.274}$$

časovou konstantu T_i a dopravní zpoždění T_{di} za předpokladu, že koeficient přenosu soustavy k_1 a její řád i jsou známé.

Řešení:

Pro soustavu (2.274) lze na základě vztahů (2.266) přímo psát

$$A_S(\omega) = \frac{k_1}{\omega(1+\omega^2 T_i^2)^{\frac{i}{2}}}, \tag{2.275a}$$

$$\varphi_S(\omega) = -\left[\frac{\pi}{2} + \omega T_{di} + i\,\mathrm{arctg}(\omega T_i)\right]. \tag{2.275b}$$

Pro experimentálně získanou amplitudu ustálených periodických kmitů soustavy a_M a jejich periodu T_M na základě vztahů (2.261b), (2.261c), (2.275a), (2.275b) a (2.263) se pro $a_e = a_M$ a $\omega = \omega_M$ ($\omega_M = 2\pi/T_M$) dostane

$$T_i = \frac{T_M}{2\pi}\sqrt[i]{\sqrt{\frac{4k_1^2 T_M^2 B^2}{\pi^4 a_M^2} - 1}}, \tag{2.276a}$$

$$T_{di} = \frac{T_M}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - i\,\mathrm{arctg}\frac{2\pi T_i}{T_M} - \mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{a_M^2 - a^2}}\right). \tag{2.276b}$$

Např. pro soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{1}{s(4s+1)}\mathrm{e}^{-\pi s} \tag{2.277}$$

byly získány průběhy výstupní veličiny $y(t)$ pro dvoupolohové relé bez hystereze ($a = 0$) a s hysterezí ($a = 0{,}1$) pro $B = 0{,}5$.

Tyto průběhy jsou podobné jako na obr. 2.106 a 2.107.

a) Ideální dvoupolohové relé (a = 0)

Z průběhu výstupní veličiny $y(t)$ pro ideální relé byly změřeny hodnoty $a_M = 1{,}94$ a $T_M = T_k = 26{,}0$ s. Ze vztahů (2.276) pro $k_1 = 1\ \mathrm{s}^{-1}$ (předpokládá se, že je známé), $B = 0{,}5$; $a = 0$; $i = 1$ dostaneme

$$T_1 = \frac{T_M}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1^2 T_M^2 B^2}{\pi^4 a_M^2} - 1} \doteq 3{,}80 \text{ s}, \tag{2.278a}$$

$$T_{d1} = \frac{T_M}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{2\pi T_1}{T_M}\right) \doteq 3{,}43 \text{ s}. \tag{2.278b}$$

Časová konstanta T_1 je určena s chybou okolo 5 % a dopravní zpoždění T_{d1} okolo 9 %.

Kritické zesílení určíme ze vztahu (2.254)

$$k_k \approx \frac{4B}{\pi a_M} \doteq 0{,}328.$$

Dvoupolohové relé je ideální, a proto platí

$$T_k = T_M \doteq 26{,}0 \text{ s}.$$

Podobně jako v předchozím příkladu 2.29 přenos (2.274) byl zvolen s takovými parametry T_1 a T_{d1}, které umožňují analytický výpočet kritických parametrů

$$k_k = \frac{\sqrt{2}}{k_1 T_1} \doteq 0{,}354,$$

$$T_k = 8T_{d1} \doteq 25{,}13 \text{ s.}$$

Chyba určení kritického zesílení je menší než 7,5 % a kritické periody menší jak 3,5 %.

b) Dvoupolohové relé s hysterezí (*a* = 0,1)

Z průběhu výstupní veličiny $y(t)$ pro dvoupolohové relé s hysterezí byly měřením získány hodnoty $a_M = 2{,}07$ a $T_M = 27{,}1$ s. Ze vztahů (2.276) se pro $k_1 = 1\ \text{s}^{-1}$, $B = 0{,}5$; $a = 0{,}1$ a $i = 1$ dostane

$$T_1 = \frac{T_M}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1^2 T_M^2 B^2}{\pi^4 a_M^2} - 1} \doteq 3{,}76 \text{ s;} \tag{2.279a}$$

$$T_{d1} = \frac{T_M}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\pi T_1}{T_M} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{a_M^2 - a^2}}\right) \doteq 3{,}47 \text{ s.} \tag{2.279b}$$

Chyba určení časové konstanty T_1 je okolo 6 % a dopravního zpoždění T_{d1} okolo 10,5 %.

Přibližná hodnota kritického zesílení je dána vztahem (2.254)

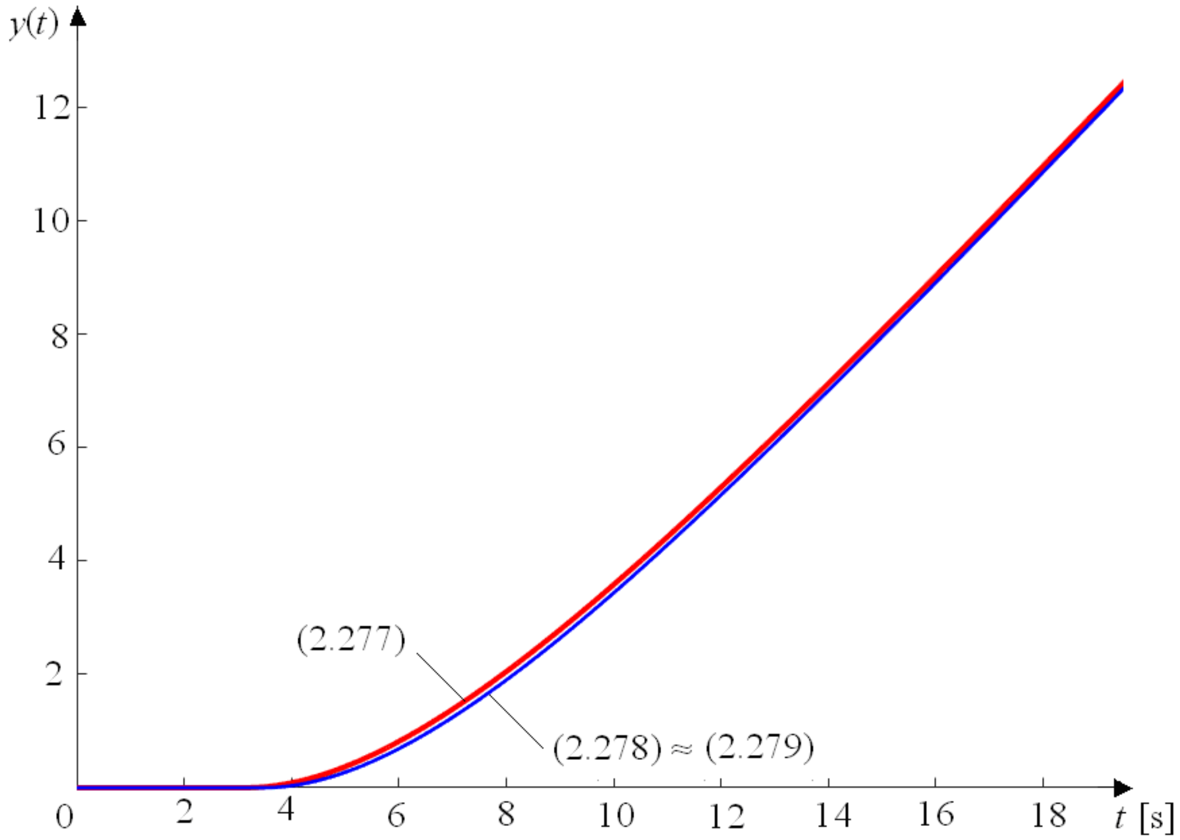
$$k_k \approx \frac{4B}{\pi a_M} \doteq 0{,}308,$$

pro kritickou periodu přibližně platí

$$T_k \approx T_M \doteq 27{,}1 \text{ s.}$$

Chyba určení kritického zesílení je okolo 13 % a kritické periody okolo 8 %.

Přechodové charakteristiky získané z přenosu (2.277) a z identifikovaných parametrů (2.278) a (2.279) jsou na obr. 2.110. Podobně jako v předchozím příkladě 2.29 přechodové charakteristiky získané z identifikovaných parametrů při daném měřítku se téměř pokrývají.



Obr. 2.110 Přechodové charakteristiky soustavy (2.277) a soustav s identifikovanými parametry (2.278) a (2.279) – příklad 2.30

Literatura

1. ADAMY, J. *Nichtlineare Regelungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2009, 387 str., ISBN 978-3-642-00794-1
2. CSÁKI, F. *Modern Control Theories. Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems*. Akadémiai Kiado, Budapest, 1972
3. ČELIKOVSKÝ, S. *Nelineární systémy*. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006, 212 str. ISBN 80-01-03435-6
4. GIBSON, J. E. *Nonlinear Automatic Control*. McGraw-Hill Book Company, 1963
5. HUBA, M. *Nelineární systémy*. Vydavatelství STU, Bratislava, 2003, 412 str. ISBN 80-227-1908-0
6. KACZOREK, T. *Podstawy automatyki*. Część druga. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1968, 249 str.
7. KACZOREK, T. *Teoria sterowania*. Tom. 2. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981, 542 str. ISBN 83-01-00099-6
8. KALAŠ, V. a kol. *Nelineárne a číslicové systémy*. ALFA-SNTL, Bratislava – Praha, 1985, 448 str.
9. KHAHIL, H. *Nonlinear Systems*. Third Edition. Prentice-Hall, New Jersey, 2002, 750 str., ISBN 0-13-067389-7
10. KOTEK, Z., KUBÍK, M., RAZÍM, M. *Nelineární dynamické systémy*. Vydání druhé, přepracované a doplněné. SNTL, Praha, 1973, 356 str.
11. KOLESNIKOV, A. A. *Posledovatělnaja optimizacija nělinějnych aggregirovanych sistěm upravlenija*. Enĕrgoatomizdat, Moskva, 1987, 160 str.
12. KUBÍK, S., KOTEK, Z., ŠALAMON, M. *Teorie regulace II. Nelineární regulace*. SNTL/ALFA, Praha, 1969, 260 str.
13. KUBÍK, S., KOTEK, Z., STREJC, J. ŠTECHA, J. *Teorie automatického řízení I.* SNTL/ALFA, Praha, 1982, 528 str.
14. NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů*. Montanex a.s., Ostrava, 1999, 276 str.
15. NOWACKI, P., SZKLARSKI, L., GÓRECKI, H. *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*. Tom II. Wydanie drugie zmienione. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1974, 367 str.
16. RAZÍM, M. *Stabilita nelineárních systémů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1976, 133 str.

17. RAZÍM, M., ŠTECHA, J. *Nelineární systémy*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997, 204 str.

18. SASTRY, S. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, New York, 1999, 667 str., ISBN 0-387-98513-1

19. SLOTINE, J. E., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliff, New Jersey, 1991, 461 str. ISBN 0-13-040890-9

20. STEFAŃSKI, T. *Teoria sterowania*. Tom II. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2001, 386 str.

21. ŠVARC, I., ŠEDA, M., VÍTEČKOVÁ, M. *Automatické řízení*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007, 324 str.

22. TAKAHASHI, Y., RABINS, M. J., AUSLANDER, D. M. *Control and Dynamic Systems*. Second printing. Addison-Wesley Publishing Company, 1972

23. THALER, G. J., PASTEL, M. P. *Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems*. McGraw-Hill Book Company, 1962, 479 str.

24. VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Second Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2002, 498 str.

25. VÍTEČEK, A., SMUTNÝ, L., KUSYN, J. *Teorie řízení III*. Skripta FSE VŠB, Ostrava, 1983, 56 str.

26. VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. Experimentální identifikace metodou relé. In: *Zborník abstraktov medzinárodnej konferencie katedier automatizácie a kybernetiky technických vysokých škôl a univerzit Slovenskej a Českej republiky "Automatizácia a informatizácia strojov a procesov"*. Bratislava, 6. – 8. 9. 2004, str. 31 (plný text na CD str. 020-1 – 020-13), Slovensko, ISBN 80-227-2106-9

27. WĘGRZYN, S. *Podstawy automatyki*. Wydanie czwarte uzupełnione i poprawione. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1978, 508 str.

28. ZÍTEK, P. *Simulace dynamických systémů*. SNTL, Praha, 1990, 420 str., ISBN 80-03-00330-X

29. ZÍTEK, P., PETROVÁ, R. *Matematické a simulační modely I*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996, 128 str.

30. ZÍTEK, P., PETROVÁ, R. *Matematické a simulační modely II*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004, 146 str., ISBN 80-01-02885-2

31. ZÍTEK, P., VÍTEČEK, A. *Návrh řízení podsystémů se zpožděními a nelinearitami*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999, 165 str.

Autoři:	Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc. Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.
Katedra:	Automatizační techniky a řízení
Název:	Nelineární systémy. Analýza
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2019, 1. vydání
Počet stran:	171
Vydavatel:	VŠB – Technická univerzita Ostrava 17. listopadu 15/2172 708 33 Ostrava - Poruba

ISBN 978-80-248-4302-5

On-line